L'Ansatz de Bethe dans la chaîne XXZ

Stage - L3 Physique

Tuteur: BELLETETE Jonathan
Étudiant : KATCHERA Mizaan-abbas
Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation (LPTM)

Soutenance : 06 Juin 2023

Introduction

Organisation du stage

- Un rendez-vous fixé une fois par semaine avec le tuteur
- Suivi de l'avancement de nos recherches
- Utilisation de ressources spécifiques ainsi que de logiciels de programmation
- Rédaction du rapport à mesure de l'avancement du stage

Introduction

Présentation du sujet

- Objectif du stage : Explorer l'application de l'Ansatz de Bethe à la chaîne XXZ en physique quantique.
- Importance de l'Ansatz de Bethe : Méthode puissante pour résoudre les systèmes complexes de spins et d'interactions quantiques.
- Contexte historique : Formulé par Hans Bethe dans les années 1930, physicien pionnier de la physique quantique.
- Méthodologie : Utilisation de l'Ansatz de Bethe pour déterminer les états propres et les valeurs propres de la chaîne XXZ.
- Offrir un aperçu des méthodes théoriques pour étudier la chaîne XXZ en mettant l'accent sur l'Ansatz de Bethe.
- Résultats attendus : Compréhension approfondie du modèle physique et examen des états propres associés à la chaîne XXZ.

La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ)

Description du modèle

- Modèle étudié : Chaîne XXZ de Heisenberg, une chaîne cyclique avec L spins sur un réseau unidimensionnel.
- Spins : Propriétés internes des particules, mesurables de manière discrète et soumises au principe d'incertitude.
- Espace de Hilbert : Les spins vivent dans un espace d'Hilbert bidimensionnel C2, formant un espace vectoriel complexe de dimension 2L.
- Représentation mathématique : L'état de la chaîne est un élément des produits tensoriels des espaces de spins, noté C2L.
- Groupe cyclique : La chaîne est décrite par l'équation $H = OZ/LZC$, où Z/LZ est le groupe cyclique de longueur L.

La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ) - Description du modèle

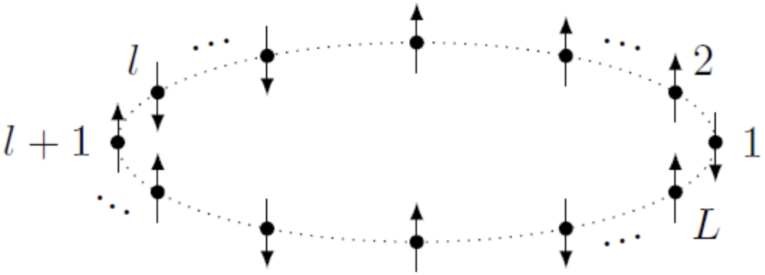

Figure – Schéma de la chaîne de spin de Heisenberg (XXZ) - The Coordinate Bethe Ansatz for the Heisenberg Spin Chain - Tobias Kästli

La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ) - Hamiltonien du système

$$S_l = \underbrace{\mathbb{I}_2 \bigotimes \mathbb{I}_2 \bigotimes \ldots \bigotimes \mathbb{I}_2}_{l-1 fois} \bigotimes S \bigotimes \underbrace{\mathbb{I}_2 \bigotimes \ldots \bigotimes \mathbb{I}_2}_{L-l-1 fois}.$$

$$S_l^{\pm} = S_l^x \pm i S_l^y$$

$$S_l^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_l^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_l^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

.

$$[S_k^z, S_l^{\pm}] = \pm\delta_{k,l} S_l^{\pm}, \qquad ,[S_k^+, S_l^-] = 2\delta_{k,l} S_l^z, \qquad ,[S_k^{\pm}, S_l^{\pm}] = 0.$$

$$\boxed{\mathrm{H}_{XXZ} = -J \sum_{l \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_L} S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y + \Delta S_l^z S_{l+1}^z.} \tag{1}$$

La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ) - Hamiltonien du système

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$S^+|\uparrow\rangle = 0 \quad , S^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$S^-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad , S^-|\downarrow\rangle = 0$$

$$S^z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad , S^z|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle.$$

$$S^+ = S^x + iS^y \quad , S^- = S^x - iS^y.$$

$$S^x = \frac{1}{2}(S^+ + S^-) \quad , S^y = \frac{1}{2i}(S^+ - S^-).$$

La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ) - Hamiltonien du système

$$S^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma^-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma^-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$S_l^x S_{l+1}^x = \frac{1}{4}(S_l^+ S_{l+1}^+ + S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ + S_l^- S_{l+1}^-),$$

$$S_l^y S_{l+1}^y = -\frac{1}{4}(S_l^+ S_{l+1}^+ + S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ - S_l^- S_{l+1}^-).$$

$$S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y = \frac{1}{2}(S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+)$$

L'Hamiltonien de la chaîne XXZ peut alors être exprimé de la manière suivante :

$$\boxed{H_{XXZ} = -\tfrac{J}{2}\textstyle\sum_l (S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+) + 2\Delta S_l^z S_{l+1}^z.} \tag{2}$$

Mise en oeuvre - Energie de l'état fondamental

Unique solution de l'énergie de l'état fondamental car $\binom{L}{0} = 1$. On considèrera $J = \hbar = 1$ durant toute l'étude.

$$|\Omega\rangle := |\uparrow \cdots \uparrow\rangle \quad . \tag{3}$$

$$H_{XXZ}|\Omega\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}_L}(S_l^+S_{l+1}^- + S_l^-S_{l+1}^+ + 2\Delta S_l^z S_{l+1}^z)|\Omega\rangle, \tag{4}$$

$$S_l^+|\Omega\rangle = 0 \quad S_l^z|\Omega\rangle = \frac{\hbar}{2}|\Omega\rangle \quad , \text{pour tout } l \in \mathbb{Z}_L, \tag{5}$$

$$H_{XXZ}|\Omega\rangle = -\sum_{l\in\mathbb{Z}_L}\Delta S_l^z S_{l+1}^z|\Omega\rangle \quad = -\sum_{l\in\mathbb{Z}_L}\Delta\frac{1}{4}|\Omega\rangle. \tag{6}$$

$$\boxed{\mathrm{H}_{XXZ}|\Omega\rangle = \tfrac{\Delta L}{4}|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle}. \tag{7}$$

Secteur une particule - 1 spin orienté vers le bas

$$\binom{L}{1} = \frac{L!}{1!\,(L-1)!} = L. \tag{8}$$

$$|l\rangle = |\uparrow_1\uparrow_2 \cdots \uparrow_{l-1}\downarrow_l \tag{9}$$

$$|l\rangle \to |l+1\rangle \text{par } U \tag{10}$$

$$U|\Psi_1; p\rangle = e^{-ip}|\Psi_1; p\rangle, \tag{11}$$

$$|\Psi_1; p\rangle = \sum_{l\in\mathbb{Z}_L} \psi_p(l)|l\rangle, \tag{12}$$

$$\psi_p(l+1) = \langle l+1|\Psi_1; p\rangle = \langle l|U^\dagger|\Psi_1; p\rangle = e^{ip\langle l|}\Psi_1; p\rangle = e^{ip}\psi_p(l), \tag{13}$$

$$\boxed{|\Psi_1; p\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{L}} \textstyle\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l\rangle}, \tag{14}$$

$$U^L = e^{-ipL} = id(15) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{L} pour \quad n \quad \in \mathbb{Z}_L. \tag{15}$$

Secteur d'une particule - 1 spin orienté vers le bas

$$H_{XXZ}|l'\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ + 2\Delta S_l^z S_{l+1}^z)|l'\rangle. \tag{16}$$

$$H_{XXZ}|l'\rangle = -\frac{1}{2}(|l'+1\rangle + |l'-1\rangle + \frac{\Delta}{2}((L-2)-2)|l'\rangle, \tag{17}$$

$$H_{XXZ}|l'\rangle = -\frac{1}{2}(|l'+1\rangle + |l'-1\rangle + \frac{\Delta}{2}(L-4)|l'\rangle. \tag{18}$$

$$H_{XXZ}|\Psi_1;p\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl} H_{XXZ}|l\rangle, \tag{19}$$

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}\left(\frac{1}{2}|l+1\rangle + |l-1\rangle + \frac{\Delta}{2(L-4)}|l\rangle\right), \tag{20}$$

Secteur d'une particule - 1 spin orienté vers le bas

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2\sqrt{L}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l+1\rangle + \sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l-1\rangle + \frac{\Delta}{2(L-4)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l\rangle\right), \tag{21}$$

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2\sqrt{L}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l+1\rangle + \sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l-1\rangle + \frac{\Delta}{2(L-4)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_L} e^{ipl}|l\rangle\right), \tag{22}$$

$$\boxed{\mathrm{H}_{XXZ}|\Psi_1;p\rangle = -\cos(p) - \tfrac{\Delta(L-4)}{4}|\Psi_1;p\rangle} \tag{23}$$

$$\boxed{\mathrm{E}_{1s} = E_1 - E_0 = -\cos(p) - \tfrac{\Delta(L-4)}{4} + \tfrac{\Delta L}{4} = \Delta - \cos(p)}. \tag{24}$$

Secteur deux particules - 2 spins orientés vers le bas

Pour le secteur à deux particules, on dispose de $\binom{L}{2} = \frac{L!}{2!(L-2)!} = \frac{L(L-1)}{2}$ solutions.

On conserve le fait que $J = \hbar = 1$ de la même manière que dans le cas secteur une particule.

$$|\Psi_{M;p_1\cdots p_M}\rangle = \sum_{1\leq l_1<\cdots<l_M\leq L} \psi_{p_1\cdots p_M}(l_1\cdots l_M)|l_1\cdots l_M\rangle \quad , \tag{25}$$

$$\langle l|HXXZ|\Psi_{M;p_1\cdots p_M}\rangle = E_M(p)\psi_p(l), \tag{26}$$

$$\psi_{p_1,p_2}(l_1,l_2) = A(p_1,p_2)e^{i(p_1l_1+p_2l_2)} + A'(p_1,p_2)e^{i(p_1l_2+p_2l_1)}. \tag{27}$$

$$H_{XXZ} = -J\sum_{l\in\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_L} S_l^xS_{l+1}^x + S_l^yS_{l+1}^y + \Delta S_l^zS_{l+1}^z. \tag{28}$$

Secteur deux particules - Cas des spins non adjacents i.e $|l_1 - l_2| > 1$

$$\sum_{l=1}^{L} S_l^+ S_{l+1}^- |l_1, l_2\rangle = |l_1{+}1, l_2\rangle + |l_1, l_2{+}1\rangle = \sum_{l=1}^{L} S_l^- S_{l+1}^+ |l_1, l_2\rangle = |l_1{-}1, l_2\rangle + |l_1,$$

$$\sum_{l=1}^{L} S_l^z S_{l+1}^z |l_1, l_2\rangle = \frac{L-8}{4} |l_1, l_2\rangle \tag{29}$$

$$2\epsilon_2(p)\psi_p(l_1, l_2) = 4\Delta\psi_p(l_1, l_2) - \psi_p(l_1{-}1, l_2) - \psi_p(l_1{+}1, l_2) - \psi_p(l_1, l_2{-}1) - \psi_p(\tag{30}$$

L'énergie totale de l'état considéré dans le cas des spins non adjacents ci-dessous :

$$\boxed{E_{2sna} = E_2 - E_0 = 2\Delta - cos(p_1) - cos(p_2)}. \tag{31}$$

Secteur deux particules - Cas des spins adjacents : $l_2 = l_1 + 1$

$$\sum_k S_k^+ S_{k+1}^- |l_1, l_1+1\rangle = |l_1, l_1+2\rangle,$$

$$\sum_k S_k^- S_{k+1}^+ |l_1, l_1+1\rangle = |l_1-1, l_1+1\rangle,$$

$$\sum_k S_k^z S_{k+1}^z |l_1, l_1+1\rangle = \frac{L-4}{4}|l_1, l_1+1\rangle. \tag{32}$$

$$2\epsilon_2(p)\psi_p(l_1, l_1+1) = 2\Delta\psi_p(l_1, l_1+1) - \psi_p(l_1-1, l_1+1) - \psi_p(l_1, l_1+2), \tag{33}$$

$$2\epsilon_2(p)\psi_p(l_1, l_1+1) = \psi_p(l_1, l_1) + \psi_p(l_1+1, l_1+1), \tag{34}$$

$$\boxed{S(p_1, p_2) = \frac{A'}{A} = -\frac{1-2\Delta e^{ip_2}+e^{i(p_1+p_2)}}{1-2\Delta e^{ip_1}+e^{i(p_1+p_2)}}}. \tag{35}$$

Secteur deux particules - Cas des spins adjacents : $l_2 = l_1 + 1$

$$\psi_p(l_1, l_2) = \psi_p(l_2, l_1 + L), \tag{36}$$

$$A(p_1; p_2)e^{i(p_1 l_1 + p_2 l_2)} + B(p_1; p_2)e^{i(p_1 l_2 + p_2 l_1)} = A(p_1; p_2)e^{i(p_1 l_2 + p_2(l_1 + L))} + B(p_1; \tag{37}$$

$$e^{ip_1 L} = \frac{A'(p_1; p_2)}{A(p_1; p_2)}, \quad e^{ip_2 L} = \frac{A(p_1; p_2)}{A'(p_1; p_2)}, \tag{38}$$

$$\boxed{e^{ip_1 L} = -\frac{1 + e^{\frac{i2n\pi}{L}} - 2\Delta e^{\frac{2n\pi}{L}} e^{-ip_1}}{1 + e^{\frac{i2n\pi}{L}} - 2\Delta e^{ip_1}}}. \tag{39}$$

$$e^{ip_1 L} e^{ip_2 L} = 1 \quad \text{donc} \quad , p_2 = \frac{2n\pi}{L} - p_1 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

Étude du cas particulier : $\Delta = 1/2$

Dans ce cas particulier, on conserve le fait que $J = \hbar = 1$ et on impose que Ł $= 4$ et $n = 1$, $\Delta = 1/2$ et on a $\binom{L}{M} = \binom{4}{2} = 6$ solutions.

$$e^{ip_1 L} = -\frac{1+i-ie^{-ip_1}}{1+i-ie^{ip_1}}, \quad \text{donc} \quad 1+i+e^{ip_1 L}-ie^{ip_1(L+1)}+ie^{ip_1 L}-ie^{-ip_1 L} = 0. \tag{41}$$

$$\boxed{1 + \cos(4\mathrm{p}_1) - sin(p_1) - cos(5p_1) - sin(4p_1) = 0} \tag{42}$$

$$\boxed{1 + \cos(4\mathrm{p}_1) - cos(p_1) + sin(4p_1) - sin(5p_1) = 0} \tag{43}$$

$$\boxed{E_{2sna} = E_2 - E_0 = 2\Delta - cos(p_1) - cos(p_2)}. \tag{44}$$

Étude du cas particulier : $\Delta = 1/2$ - Résultats

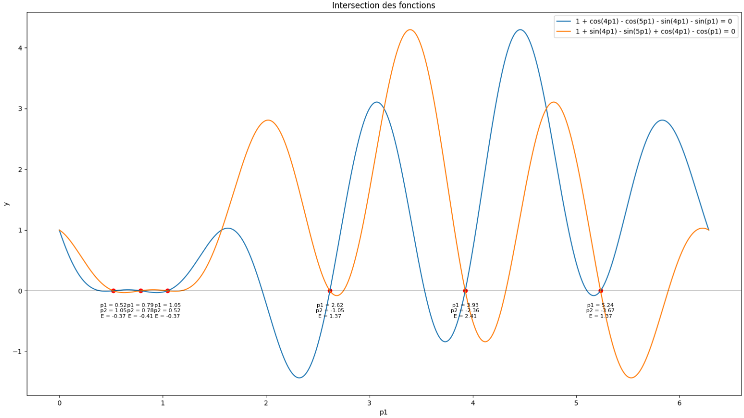

Figure – Tracé des deux courbes en python - Spyder

Étude du cas particulier : $\Delta = 1/2$ - Résultats

Ainsi que les différentes valeurs de p_1 et p_2 aux intersections et les énergies qui leurs sont associées qui correspondent à nos solutions (cf console ci-dessous) :

```
Points d'intersection (p1) : [0.5235843212555905, 0.7861843477451934, 1.0471389845619563, 2.6179871205986958, 3.926972377238078,
5.235917762451822]
Valeurs de p2 : [ 1.04721201  0.78461198  0.52365734 -1.04719079 -2.35617605 -3.66512144]
Énergies associées : [-0.3660201129851123, -0.41421312532043697, -0.3660468383177512, 1.3660161730058558, 2.4142135621326615,
1.366121015829438]
```

Figure – Résultats - Console Python

Remarque : Notre étude est restreinte dans le cas où $J = \hbar = 1$ et on impose que $L = 4$ et $n = 1$, $\Delta = 1/2$, on aurait pu modifier L ou Δ pour une étude plus approfondie.

Cas généralisée

$$\binom{L}{M} \quad \textit{solutions}$$

$$|\psi(p_1,\dots,p_M)\rangle = \sum_l \psi(p_1,\dots,p_M;l_1,\dots,l_M)|l_1,\dots,l_M\rangle,$$

$$\psi(p_1,\dots,p_M;l_1,\dots,l_M) = \sum_j A_j(p_1,\dots,p_M)e^{ip_jl},$$

$$H_{XXZ}|\psi(p_1,\dots,p_M)\rangle = -\frac{J}{2}\sum_l (S_l^+S_{l+1}^- + S_l^-S_{l+1}^+ + 2\Delta S_l^zS_{l+1}^z) \sum_{l_1<\dots<l_M} \psi(p_1,$$

$$\boxed{\mathrm{E}_g en = J\left(M\Delta\frac{\hbar}{2} - \sum_{i=1}^{M}\cos(p_i)\right).}$$

Conclusion

Conclusion

- Approfondissement de la compréhension de la chaîne XXZ et des méthodes théoriques utilisées.
- Application prometteuse de l'Ansatz de Bethe pour résoudre des systèmes complexes.
- Acquisition de compétences en physique théorique et utilisation de Python pour l'étude des systèmes quantiques.
- Interaction avec des chercheurs passionnés et immersion dans la recherche en physique théorique.
- Appréciation de la rigueur et de la collaboration dans la communauté scientifique.
- Vision positive de la recherche en physique quantique et acquisition d'outils précieux pour le parcours futur.

Bibliographie

- *Lecture 1. Heisenberg spin chain and Bethe ansatz, 2023* - Yunfeng Jiang
- *The Coordinate Bethe Ansatz for the Heisenberg Spin Chain, May 16, 2018* - Tobias Kästli
- *A pedagogical introduction to quantum integrability with a view towards theoretical high-energy physics, June 2015* - Jules Lamers
- *Lectures on the Bethe Ansatz, University College London, June 2016* - Fedor Levkovich-Maslyuk
- *Algebraic Bethe ansatz, Jan 2019* - N.A. Slavnov
- *Notes on Bethe Ansatz Techniques, 2011* - Fabio Franchini
- *Introduction to the Bethe Ansatz I, American Institute of Physics, 2010* - Michael Karabach, Gerhard Müller, Harvey Gould