



CY CERGY PARIS UNIVERSITÉ

LABORATOIRE PHYSIQUE THÉORIQUE ET MODÉLISATION
STAGE DE 3ÈME ANNÉE - LICENCE PHYSIQUE

L'Ansatz de Bethe dans la chaîne XXZ

Étudiant :

KATCHERA MIZAAN-ABBAS

Tuteur :

BELLETETE JONATHAN

08 Mai - 04 Juin - Soutenance : 06 Juin

Table des matières

Introduction	1
I La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ)	2
I.1 Description du modèle	2
I.2 Hamiltonien du système	2
II Méthode de l'Ansatz de Bethe pour la chaîne de Heisenberg (XXZ)	5
II.1 Présentation	5
II.2 Mise en oeuvre	6
II.2.1 Énergie de l'état fondamental	6
II.2.2 Secteur d'une particule - 1 spin orienté vers le bas	6
II.2.3 Secteur de deux particules - 2 spins orientés vers le bas	9
II.2.4 Étude du cas particulier : $\Delta = 1/2$	11
Conclusion	13
Références	14
Annexes	14

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon maître de stage, Monsieur Jonathan BELLETE, pour sa supervision attentive, son soutien constant et ses précieux conseils tout au long de ce stage. Je suis reconnaissant d'avoir eu l'opportunité de travailler sous sa direction et d'avoir bénéficié de son expérience.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers le Laboratoire Physique Théorique et Modélisation de CY Cergy Paris Université pour m'avoir accordé l'opportunité d'effectuer ce stage au sein de leur institution.

Mes remerciements vont également à l'ensemble du corps enseignant du département de physique et de mathématiques de CY Cergy Paris Université. Leurs enseignements rigoureux et leur engagement envers l'excellence académique m'ont permis d'acquérir les connaissances et les compétences nécessaires pour mener à bien l'ensemble de ma licence et d'intégrer une école d'ingénieur.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma famille dont le soutien inconditionnel et les encouragements ont été une source de motivation et de détermination tout au long de ma licence.

Introduction

Ce stage a été réalisé dans le laboratoire de physique théorique et modélisation dans le cadre du stage de 3ème année de licence basé principalement sur des recherches en autonomie ainsi que des rendez-vous fixés une fois par semaine avec le maître de stage M.BELLETETE

L'objectif de ce stage était d'explorer l'application de l'Ansatz de Bethe à la chaîne de spin d'Heisenberg, également connue sous le nom de chaîne XXZ. La chaîne XXZ est un modèle théorique d'intérêt majeur dans la physique quantique, et l'Ansatz de Bethe s'avère être une méthode puissante pour résoudre ce type de système.

Depuis sa formulation dans les années 1930 par Hans Bethe, physicien germano-américain pionnier dans le domaine de la physique quantique, l'Ansatz de Bethe a joué un rôle crucial dans la compréhension des interactions entre particules élémentaires. Il a trouvé de nombreuses applications, dont celle de résoudre les chaînes de spins. Cette méthode repose sur l'idée de proposer une forme spécifique pour les états propres du système, appelés états de Bethe, qui sont construits en superposant des spins localisés.

Notre étude s'est basée sur l'application de l'Ansatz de Bethe à la chaîne XXZ, un modèle théorique dont l'hamiltonien décrit les interactions entre spins dans une chaîne unidimensionnelle. L'objectif est de déterminer les valeurs propres et les états propres associés à cet hamiltonien en utilisant l'Ansatz de Bethe. Cette méthode, par sa puissance et son élégance, offre une approche prometteuse pour résoudre des systèmes complexes tels que la chaîne XXZ.

En résumé, ce stage a pour but d'offrir un aperçu des méthodes théoriques utilisées pour étudier la chaîne XXZ, en mettant l'accent sur l'Ansatz de Bethe. Il vise à fournir une compréhension approfondie de ce modèle physique complexe en détaillant les étapes de mise en œuvre de l'Ansatz de Bethe et en examinant les états propres et les valeurs propres associées à l'hamiltonien de la chaîne XXZ.

I La chaîne de spin d'Heisenberg (XXZ)

I.1 Description du modèle

On considère la chaîne XXZ de Heisenberg. Il s'agit d'une chaîne cyclique comportant L spins se trouvant sur un réseau unidimensionnel également espacé avec un espace que l'on suppose égale à 1. On rappelle qu'un spin est une des propriétés internes des particules, au même titre que la masse ou la charge électrique. Comme d'autres observables quantiques, sa mesure donne des valeurs discrètes et est soumise au principe d'incertitude. Elle peut être orienté vers le haut, le bas ou conserver sa position initiale.

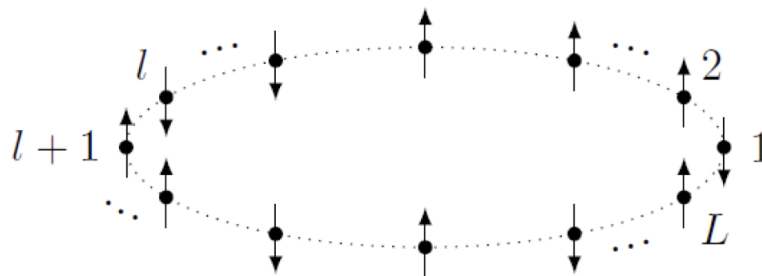


FIGURE 1 – Schéma de la chaîne de spin de Heisenberg (XXZ) - The Coordinate Bethe Ansatz for the Heisenberg Spin Chain - Tobias Kästli

Tous ces spins vivent dans un espace d'Hilbert bidimensionnel \mathbb{C}^2 . L'état de la chaîne entière est donc un élément des produits tensoriels de tous ces espaces de spins. Il s'agit donc d'un espace vectoriel complexe de dimension $2L$.

$$H = \bigotimes_{\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{2L}, \quad (1)$$

où $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ est le groupe cyclique de longueur L .

I.2 Hamiltonien du système

On appelle l'opérateur de spin de ces espaces $S = (S_x, S_y, S_z)$ qui contiennent les matrices de Pauli. On généralise ces dernières pour une utilisation sur H , on a :

$$S_l = \underbrace{\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_2}_{l-1 \text{ fois}} \otimes S \otimes \underbrace{\mathbb{I}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_2}_{L-l-1 \text{ fois}}. \quad (2)$$

On définit l'opérateur de spin $S_l^\pm = S_l^x \pm iS_l^y$ qui correspondent à des opérateurs d'échelle pour la base propre S^z de \mathbb{C}^2 . On peut les écrire sous forme de matrices dans cette base :

$$S_l^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_l^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_l^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

De plus, les opérateurs de spins vérifient :

$$[S_k^z, S_l^\pm] = \pm \delta_{k,l} S_l^\pm, \quad [S_k^+, S_l^-] = 2\delta_{k,l} S_l^z, \quad [S_k^\pm, S_l^\pm] = 0.$$

Ces relations de commutation expriment les commutateurs des opérateurs de spin S_k^z , S_l^\pm et S_k^\pm pour la chaîne XXZ. La notation $\delta_{k,l}$ représente le symbole de Kronecker, qui vaut 1 lorsque $k = l$ et 0 sinon.

Avec ces notations, on peut formuler l'hamiltonien de la chaîne XXZ de Heisenberg et le réécrire d'une manière pratique :

$$H_{XXZ} = -J \sum_{l \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_L} S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y + \Delta S_l^z S_{l+1}^z. \quad (3)$$

On définit les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les états de bases sont :

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les opérateurs d'échelle, les relations suivantes sont établies :

$$\begin{aligned} S^+ |\uparrow\rangle &= 0, \quad S^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\ S^- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, \quad S^- |\downarrow\rangle = 0 \\ S^z |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \quad S^z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant les relations :

$$S^+ = S^x + iS^y, \quad S^- = S^x - iS^y.$$

On a :

$$S^x = \frac{1}{2}(S^+ + S^-), \quad S^y = \frac{1}{2i}(S^+ - S^-).$$

On sait que :

$$S^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en combinant ces relations, on obtient :

$$S_l^x S_{l+1}^x = \frac{1}{4}(S_l^+ S_{l+1}^+ + S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ + S_l^- S_{l+1}^-),$$

$$S_l^y S_{l+1}^y = -\frac{1}{4}(S_l^+ S_{l+1}^+ + S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ - S_l^- S_{l+1}^-).$$

On peut donc conclure que :

$$S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y = \frac{1}{2}(S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+)$$

L'Hamiltonien de la chaîne XXZ peut alors être exprimé de la manière suivante :

$$H_{XXZ} = -\frac{J}{2} \sum_l (S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+) + 2\Delta S_l^z S_{l+1}^z. \quad (4)$$

Ici, Δ est un facteur dit d'anisotropie. S'il est égale à 1, on obtient ce que l'on appelle la chaîne XXX. Le facteur global J est un paramètre de couplage appelé moment angulaire total, il est parfois appelé "intégrale d'échange". Le cas où $J > 0$ est appelé ferromagnétique, si $J < 0$ antiferromagnétique.

On se limitera au cas ferromagnétique périodique durant toute notre étude.

II Méthode de l'Ansatz de Bethe pour la chaîne de Heisenberg (XXZ)

II.1 Présentation

L'Ansatz de Bethe ou encore "Approche de Bethe" est une méthode puissante que l'on utilise afin de résoudre la chaîne de spin XXZ, qui est un modèle de physique théorique largement étudié. Cette méthode nous permet de trouver les valeurs propres ainsi que les états propres associée à l'hamiltonien de la chaîne XXZ.

L'idée principale de l'Ansatz de Bethe est de proposer une forme particulière pour les états propres de la chaîne XXZ, appelés états de Bethe. Ces états sont construits à l'aide d'une superposition de spins localisés, où chaque spin est caractérisé par une quantité appelée nombre d'onde. Les nombres d'onde sont choisis de manière à satisfaire certaines conditions, connues sous le nom d'équations de Bethe.

Dans notre cas i.e la chaîne XXZ avec des spins $1/2$, l'Ansatz de Bethe permettra de retrouver les valeurs propres ainsi que les états propres associés.

L'Ansatz de Bethe repose sur les étapes ci-dessous :

- Hypothèse de l'état de Bethe : On suppose que l'état propre de l'hamiltonien de la chaîne XXZ peut être écrit comme une superposition des états de Bethe.
- Construction des états de Bethe : Les états de Bethe sont construits à partir d'une distribution discrète de nombres d'onde appelés nombres d'onde de Bethe.
- Équations de Bethe : Les équations de Bethe sont des conditions imposées aux nombres d'onde de Bethe. Ces équations sont obtenues en égalant les phases des différents termes de l'état de Bethe et dépendent des paramètres du modèle XXZ.
- Résolution des équations de Bethe : Les équations de Bethe sont résolues pour trouver les valeurs des nombres d'onde de Bethe. Cela peut être fait analytiquement dans certains cas simples ou numériquement dans des situations plus complexes.
- Calcul des valeurs propres : Une fois que les nombres d'onde de Bethe sont déterminés, les valeurs propres de l'hamiltonien de la chaîne XXZ peuvent être calculées à l'aide de formules spécifiques dérivées de l'Ansatz de Bethe.

On étudie ici le cas de la méthode dite en cordonnées et non algébrique de la chaîne XXZ cela permet de décrire les propriétés dites spectrales et les états propres de la chaîne. On l'utilise afin de comprendre les comportements des spins et les phénomènes tels que la magnétisation, les excitations et les états liés dans la chaîne XXZ. Cette méthode reste archaïque mais semble la plus accessible à notre niveau.

II.2 Mise en oeuvre

Dans un premier temps, on définit :

$$|\Omega\rangle := |\uparrow \cdots \uparrow\rangle \quad . \quad (5)$$

Le vecteur $|\Omega\rangle$ est appelé le pseudo vide et est composé uniquement de spins \uparrow . L'objectif est d'étudier les différentes énergies selon ce que l'on appelle le secteur de particules. Nous verrons le cas d'un secteur à une particule, puis le secteur à deux particules et le cas généralisé.

Remarque : On appelle cas secteur une particule le fait qu'il y a un spin orienté vers le bas dans la chaîne.

II.2.1 Énergie de l'état fondamental

Il existe une unique solution de l'énergie de l'état fondamental car $\binom{L}{0} = 1$. On considère $J = \hbar = 1$. Par définition, on a l'Hamiltonien appliquée à $|\Omega\rangle$ qui s'écrit ainsi :

$$H_{XXZ}|\Omega\rangle = -\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} (S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ + 2\Delta S_l^z S_{l+1}^z) |\Omega\rangle, \quad (6)$$

Or, l'action des opérateurs S_l^+ et S_l^z sur $|\Omega\rangle$ sont :

$$S_l^+ |\Omega\rangle = 0 \quad S_l^z |\Omega\rangle = \frac{\hbar}{2} |\Omega\rangle \quad , \text{ pour tout } l \in \mathbb{Z}_L, \quad (7)$$

Donc on obtient :

$$H_{XXZ}|\Omega\rangle = - \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} \Delta S_l^z S_{l+1}^z |\Omega\rangle = - \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} \Delta \frac{1}{4} |\Omega\rangle. \quad (8)$$

Les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondent à l'énergie du système, ainsi on en déduit que :

$$\boxed{H_{XXZ}|\Omega\rangle = \frac{\Delta L}{4} |\Omega\rangle = E_0 |\Omega\rangle}. \quad (9)$$

Ainsi, l'énergie associée à l'état fondamental correspond à $\boxed{E_0 = \frac{\Delta L}{4}} = E_{0s}$.

De la même manière, on étudiera le cas secteur d'une particule.

II.2.2 Secteur d'une particule - 1 spin orienté vers le bas

Le secteur à une particule a ses états propres qui peuvent être construits à partir d'éléments de base avec un seul spin descendant. Il existe L solutions associées car $\binom{L}{1} = \frac{L!}{1!(L-1)!} = L$.

On définit l'état de base par $|l\rangle = |\uparrow_1 \uparrow_2 \cdots \uparrow_{l-1} \downarrow_l \uparrow_{l+1} \cdots \uparrow_L\rangle$ qui correspond à un seul spin descendant dans la chaîne de spins orientés vers le haut avec $l \in \mathbb{Z}_L$.

On utilise l'opérateur de translation unitaire U qui va décaler notre chaîne d'un pas vers la droite, donc $|l\rangle \rightarrow |l+1\rangle$ par U .

De plus, le générateur ou momentum de U est une transformation de symétrie, les états propres de l'hamiltonien, $|\Psi_1; p\rangle$ doivent également être des états propres de U pour un moment $-p$ avec p réel. On suppose U est unitaire, pour que ses valeurs propres soient sur le cercle unité.

$$U|\Psi_1; p\rangle = e^{-ip}|\Psi_1; p\rangle, \quad (10)$$

Désormais, on peut écrire l'état propre de notre hamiltonien $|\Psi_1, p_i\rangle$ en terme d'éléments de base de coordonnées $|l_i\rangle$ afin de trouver la fonction d'onde $\psi_p(l)$.

$$|\Psi_1; p\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} \psi_p(l) |l\rangle, \quad (11)$$

En appliquant l'équation (10), on a que le $(l+1)$ -ième coefficient de $\psi_p(l+1)$ est simplement donné par la projection de $|\Psi_1; p\rangle$ sur $|l+1\rangle$.

On peut alors exprimer $|l+1\rangle$ comme U agissant sur $|l\rangle$. En utilisant le fait que les états propres de H_{XXZ} sont aussi des états propres de U , on obtient une relation de récursion pour ψ_p .

$$\psi_p(l+1) = \langle l+1 | \Psi_1; p \rangle = \langle l | U^\dagger | \Psi_1; p \rangle = e^{ip(l)} \langle l | \Psi_1; p \rangle = e^{ip} \psi_p(l), \quad (12)$$

Ainsi, on obtient la solution de la relation récursive : $|\Psi_1; p\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ip l} |l\rangle$.

avec $p = \frac{2\pi n}{L}$ car aux conditions aux limites l'état propre se déplace de L solutions autour de la chaîne et doit à nouveau être le même état car la chaîne étant périodique.

Donc $U^L = e^{-ipL} = id$ (15) $\Rightarrow p = \frac{2\pi}{L}$ pour $n \in \mathbb{Z}_L$.

Procédons à la recherche des valeurs propres de l'énergie comme dans le cas de 0 spin.

Par définition de la périodicité du modèle, on a :

$$H_{XXZ}|l'\rangle = -\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+ + 2\Delta S_l^z S_{l+1}^z |l'\rangle. \quad (13)$$

En utilisant l'équation (11), on obtient :

$$H_{XXZ}|l'\rangle = -\frac{1}{2}(|l'+1\rangle + |l'-1\rangle) + \frac{\Delta}{2}((L-2)-2)|l'\rangle, \quad (14)$$

$$H_{XXZ}|l'\rangle = -\frac{1}{2}(|l'+1\rangle + |l'-1\rangle) + \frac{\Delta}{2}(L-4)|l'\rangle. \quad (15)$$

En substituant avec la solution de la relation récursive :

$$H_{XXZ}|\Psi_1; p\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ip l} H_{XXZ}|l\rangle, \quad (16)$$

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ip l} \left(\frac{1}{2}|l+1\rangle + |l-1\rangle + \frac{\Delta}{2(L-4)}|l\rangle \right), \quad (17)$$

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2\sqrt{L}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ipl} |l+1\rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ipl} |l-1\rangle + \frac{\Delta}{2(L-4)} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ipl} |l\rangle \right), \quad (18)$$

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2\sqrt{L}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ipl} |l+1\rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ipl} |l-1\rangle + \frac{\Delta}{2(L-4)} \sum_{l \in \mathbb{Z}_L} e^{ipl} |l\rangle \right), \quad (19)$$

$$\boxed{H_{XXZ} |\Psi_1; p\rangle = -\cos(p) - \frac{\Delta(L-4)}{4} |\Psi_1; p\rangle}. \quad (20)$$

Ainsi, en soustrayant l'équation (9), on en conclut que :

$$\boxed{E_{1s} = E_1 - E_0 = -\cos(p) - \frac{\Delta(L-4)}{4} + \frac{\Delta L}{4} = \Delta - \cos(p)}. \quad (21)$$

Ce qui correspond à l'énergie associée à un spin orienté vers le bas. Dans la même démarche, à l'aide de l'Ansatz on étudie le cas secteur de deux particules.

II.2.3 Secteur de deux particules - 2 spins orientés vers le bas

Pour le secteur à deux particules, on dispose de $\binom{L}{2} = \frac{L!}{2!(L-2)!} = \frac{L(L-1)}{2}$ solutions.

On conserve le fait que $J = \hbar = 1$ de la même manière que dans le cas secteur une particule.

On généralise le cas secteur à une particule, afin d'étudier notre cas. On pose :

$$|\Psi_{M;p_1 \dots p_M}\rangle = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_M \leq L} \psi_{p_1 \dots p_M}(l_1 \dots l_M) |l_1 \dots l_M\rangle, \quad (22)$$

Les quantités p_i sont liées à notre ansatz, et leur somme représente la quantité de mouvement de la solution. Les fonctions $\psi_p(l)$ sont déterminées par la projection de l'équation de Schrödinger sur l'état de base $|l_i\rangle$.

$$\langle l | H_{XXZ} | \Psi_{M;p_1 \dots p_M} \rangle = E_M(p) \psi_p(l), \quad (23)$$

Dans cette équation, $E_M(p)$ représente l'énergie de l'état.

Dans le cas de deux spins down, l'Ansatz que l'on considère est la composition de 2 ondes planes superposables :

$$\psi_{p_1, p_2}(l_1, l_2) = A(p_1, p_2) e^{i(p_1 l_1 + p_2 l_2)} + A'(p_1, p_2) e^{i(p_1 l_2 + p_2 l_1)}. \quad (24)$$

On rappelle l'expression de l'Hamiltonien :

$$H_{XXZ} = -J \sum_{l \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_L} S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y + \Delta S_l^z S_{l+1}^z. \quad (25)$$

On différencie deux cas, le cas où les spins sont considérés comme adjacents et le cas où ces derniers sont non adjacents. En effet, cela change l'expression de notre hamiltonien selon la configuration des spins.

Cas des spins non adjacents i.e $|l_1 - l_2| > 1$:

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L S_l^+ S_{l+1}^- |l_1, l_2\rangle &= |l_1 + 1, l_2\rangle + |l_1, l_2 + 1\rangle = \sum_{l=1}^L S_l^- S_{l+1}^+ |l_1, l_2\rangle = |l_1 - 1, l_2\rangle + |l_1, l_2 - 1\rangle \\ \sum_{l=1}^L S_l^z S_{l+1}^z |l_1, l_2\rangle &= \frac{L-8}{4} |l_1, l_2\rangle \end{aligned} \quad (26)$$

Ainsi, on obtient en injectant dans (24) avec $\epsilon_2 = E_2 - E_0$:

$$2\epsilon_2(p) \psi_p(l_1, l_2) = 4\Delta \psi_p(l_1, l_2) - \psi_p(l_1 - 1, l_2) - \psi_p(l_1 + 1, l_2) - \psi_p(l_1, l_2 - 1) - \psi_p(l_1, l_2 + 1), \quad (27)$$

Dans l'ansatz de Bethe, la transition de l'équation (27) à l'équation (28) correspond à l'évaluation de l'énergie associée à l'Hamiltonien pour le cas des spins non adjacents. En remplaçant les valeurs de $\Psi_p(l_1, l_2)$ dans l'équation (27).

Il convient de noter que cette équation (28) ne représente pas spécifiquement l'énergie associée aux spins non adjacents, mais plutôt l'énergie totale de l'état considéré dans le cas des spins non adjacents ci-dessous :

$$E_{2sna} = E_2 - E_0 = 2\Delta - \cos(p_1) - \cos(p_2). \quad (28)$$

Cas des spins adjacents i.e $l_2 = l_1 + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_k S_k^+ S_{k+1}^- |l_1, l_1 + 1\rangle &= |l_1, l_1 + 2\rangle, \\ \sum_k S_k^- S_{k+1}^+ |l_1, l_1 + 1\rangle &= |l_1 - 1, l_1 + 1\rangle, \\ \sum_k S_k^z S_{k+1}^z |l_1, l_1 + 1\rangle &= \frac{L-4}{4} |l_1, l_1 + 1\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

De la même manière en injectant dans (22) :

$$2\epsilon_2(p)\psi_p(l_1, l_1 + 1) = 2\Delta\psi_p(l_1, l_1 + 1) - \psi_p(l_1 - 1, l_1 + 1) - \psi_p(l_1, l_1 + 2), \quad (30)$$

Des équations précédentes (30) et (27) on en déduit :

$$2\epsilon_2(p)\psi_p(l_1, l_1 + 1) = \psi_p(l_1, l_1) + \psi_p(l_1 + 1, l_1 + 1), \quad (31)$$

Ainsi, en utilisant l'Ansatz de Bethe initiale i.e (24) on obtient la solution S suivante :

$$S(p_1, p_2) = \frac{A'}{A} = -\frac{1-2\Delta e^{ip_2} + e^{i(p_1+p_2)}}{1-2\Delta e^{ip_1} + e^{i(p_1+p_2)}}. \quad (32)$$

Or notre chaîne est cyclique, on a :

$$\psi_p(l_1, l_2) = \psi_p(l_2, l_1 + L), \quad (33)$$

D'où :

$$A(p_1; p_2)e^{i(p_1 l_1 + p_2 l_2)} + B(p_1; p_2)e^{i(p_1 l_2 + p_2 l_1)} = A(p_1; p_2)e^{i(p_1 l_2 + p_2 (l_1 + L))} + B(p_1; p_2)e^{i(p_1 (l_1 + L) + p_2 l_2)}, \quad (34)$$

Donc

$$e^{ip_1 L} = \frac{A'(p_1; p_2)}{A(p_1; p_2)}, \quad e^{ip_2 L} = \frac{A(p_1; p_2)}{A'(p_1; p_2)}, \quad (35)$$

Ainsi on obtient l'équation de Bethe générale pour le cas secteur deux particules :

$$e^{ip_1 L} = -\frac{1 + e^{\frac{i2n\pi}{L}} - 2\Delta e^{\frac{2n\pi}{L}} e^{-ip_1}}{1 + e^{\frac{i2n\pi}{L}} - 2\Delta e^{ip_1}}. \quad (36)$$

Remarque :

Par définition, on a :

$$e^{ip_1 L} e^{ip_2 L} = 1 \quad \text{donc} \quad , p_2 = \frac{2n\pi}{L} - p_1 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (37)$$

II.2.4 Étude du cas particulier : $\Delta = 1/2$

Dans ce cas particulier, on conserve le fait que $J = \hbar = 1$ et on impose que $n = 4$ et $n = 1$, $\Delta = 1/2$

On s'attend donc à obtenir à $\binom{L}{M} = \binom{4}{2} = 6$ solutions. On a :

$$e^{ip_1 L} = -\frac{1+i-ie^{-ip_1}}{1+i-ie^{ip_1}}, \quad \text{donc} \quad 1+i+e^{ip_1 L} - ie^{ip_1(L+1)} + ie^{ip_1 L} - ie^{-ip_1 L} = 0. \quad (38)$$

Soient les deux équations suivantes en utilisant la forme trigonométrique de l'exponentielle :

$$1 + \cos(4p_1) - \sin(p_1) - \cos(5p_1) - \sin(4p_1) = 0 \quad (39)$$

$$1 + \cos(4p_1) - \cos(p_1) + \sin(4p_1) - \sin(5p_1) = 0 \quad (40)$$

On utilise le programme python disponible en annexe afin d'obtenir le tracé de ces deux équations l'une est partie réelle et l'autre est partie imaginaire. Aux points d'intersections de ces dernières sont associées les valeurs de p_1 , on en déduit par la suite les valeurs de p_2 ainsi que les différentes valeurs d'énergie à l'aide de l'équation ci-dessous :

$$E_{2sna} = E_2 - E_0 = 2\Delta - \cos(p_1) - \cos(p_2). \quad (41)$$

On obtient le tracé suivant :

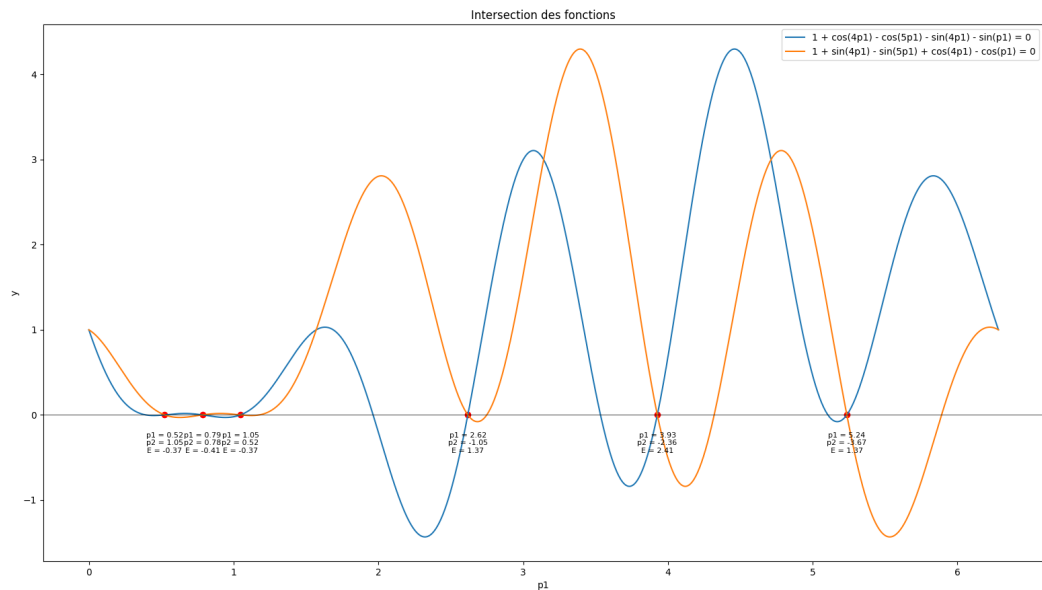


FIGURE 2 – Tracé des deux courbes en python - Spyder

Ainsi que les différentes valeurs de p_1 et p_2 aux intersections et les énergies qui leurs sont associées qui correspondent à nos solutions : (cf console ci-dessous)

```
Points d'intersection (p1) : [0.5235843212555905, 0.7861843477451934, 1.0471389845619563, 2.6179871205986958, 3.926972377238078,
5.235917762451822]
Valeurs de p2 : [ 1.04721201  0.78461198  0.52365734 -1.04719079 -2.35617605 -3.66512144]
Énergies associées : [-0.3660201129851123, -0.41421312532043697, -0.3660468383177512, 1.3660161730058558, 2.4142135621326615,
1.366121015829438]
```

FIGURE 3 – Résultats - Console Python

Remarque : Notre étude est restreinte dans le cas où $J = \hbar = 1$ et on impose que $L = 4$ et $n = 1$, $\Delta = 1/2$, on aurait pu modifier L ou Δ pour une étude plus approfondie.

Conclusion

En conclusion, ce stage a permis d'approfondir la compréhension de la chaîne XXZ et d'acquérir des connaissances sur les méthodes théoriques utilisées pour étudier ce modèle. L'application de l'Ansatz de Bethe a offert une approche prometteuse pour résoudre des systèmes complexes tels que la chaîne XXZ.

En somme, ce stage a permis d'obtenir un aperçu des méthodes théoriques utilisées pour étudier la chaîne XXZ, en mettant l'accent sur l'Ansatz de Bethe. Il a fourni une compréhension approfondie de ce modèle physique complexe en détaillant les étapes de mise en œuvre de l'Ansatz de Bethe et en examinant les états propres et les valeurs propres associées à l'hamiltonien de la chaîne XXZ. Ce travail de recherche autonome a contribué à l'acquisition de compétences en physique théorique et à l'exploration des méthodes de résolution de systèmes quantiques notamment à travers l'utilisation de Python.

Enfin, cela m'a permis de plonger dans le monde de la recherche en physique théorique. L'interaction avec des chercheurs passionnés m'a inspiré et m'a montré l'immense potentiel de la recherche scientifique pour repousser les limites de notre compréhension. J'ai été impressionné par la rigueur, la créativité et la collaboration qui caractérisent la communauté scientifique, et cela m'a donné une vision positive de la recherche en physique quantique. Ce stage de recherche m'a non seulement offert une expérience enrichissante, mais m'a également doté d'outils précieux pour mon parcours à l'avenir.

Références

- [Yunfeng Jiang] *Lecture 1. Heisenberg spin chain and Bethe ansatz, 2023*
- [Tobias Kästli] *The Coordinate Bethe Ansatz for the Heisenberg Spin Chain, May 16, 2018*
- [Jules Lamers] *A pedagogical introduction to quantum integrability with a view towards theoretical high-energy physics, June 2015*
- [Fedor Levkovich-Maslyuk] *Lectures on the Bethe Ansatz, University College London, June 2016*
- [N.A. Slavnov] *Algebraic Bethe ansatz, Jan 2019*
- [Fabio Franchini] *Notes on Bethe Ansatz Techniques, 2011*
- [Michael Karabach, Gerhard Müller, Harvey Gould] *Introduction to the Bethe Ansatz I, American Institute of Physics, 2010*

Annexes

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f1(p1):
    return 1 + np.cos(4*p1) - np.cos(5*p1) - np.sin(4*p1) - np.sin(p1)

def f2(p1):
    return 1 + np.sin(4*p1) - np.sin(5*p1) + np.cos(4*p1) - np.cos(p1)

def find_intersections():
    p1_values = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
    intersections = []

    for i in range(len(p1_values)-1):
        p1_start = p1_values[i]
        p1_end = p1_values[i+1]

        if f1(p1_start) * f1(p1_end) < 0 and f2(p1_start) * f2(p1_end) < 0:
            intersection = np.interp(0, [f1(p1_start), f1(p1_end)], [p1_start, p1_end])
            intersections.append(intersection)

    return intersections

# Tracer les fonctions
p1_values = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
f1_values = f1(p1_values)
f2_values = f2(p1_values)

plt.plot(p1_values, f1_values, label='1 + cos(4p1) - cos(5p1) - sin(4p1) - sin(p1) = 0')
plt.plot(p1_values, f2_values, label='1 + sin(4p1) - sin(5p1) + cos(4p1) - cos(p1) = 0')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5) # Ajouter une ligne horizontale à y = 0
plt.xlabel('p1')
plt.ylabel('y')
plt.title('Intersection des fonctions')
plt.legend()

# Trouver et afficher les points d'intersection
intersections = find_intersections()
for intersection in intersections:
    plt.scatter(intersection, 0, color='red')

# Afficher les valeurs de p1, p2 et les énergies à côté du graphe
delta = 1/2
p2_values = np.subtract(np.pi/2, intersections)
energies = []

for p1, p2 in zip(intersections, p2_values):
    energy = 2*delta - np.cos(p1) - np.cos(p2)
    energies.append(energy)
    text = f'p1 = {p1:.2f}\np2 = {p2:.2f}\nE = {energy:.2f}'
    plt.text(p1, -0.2, text, ha='center', va='top', fontsize=8)

plt.show()

# Afficher les valeurs de p1, p2 et les énergies dans la console
print('Points d\'intersection (p1) :', intersections)
print('Valeurs de p2 :', p2_values)
print('Énergies associées :', energies)
```

FIGURE 4 – Programme Python : Tracé des deux courbes du cas particulier - Spyder