МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА

Институт радиоэлектроники и информационных технологий

Кафедра вычислительные системы и технологии

Численное интегрирование функций

Отчет

по лабораторной работе №4

по дисциплине

Вычислительная математика

РУКОВОДИТЕЛЬ:

________________ Суркова А. С.

СТУДЕНТ:

________________ Соляник Д. Р.

19-ИВТ-2

Работа защищена «___» _____________

С оценкой ___________________________

Нижний Новгород 2021

1. Тема лабораторной работы:

Численное интегрирование функций

Цель лабораторной работы

Закрепление знаний и умений по численному интегрированию функций.

2. Вариант задания на лабораторную работу

Вариант № 18

Вычислить интеграл по формулам центральных (средних) прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона, при n=8 и n=20; оценить погрешность результата.

$$18.\ \int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x}\,dx$$

3. Теоретические сведения и описание лабораторной работы

- *Метод прямоугольников*

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывность на отрезке $[a;b]$ и необходимо вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Необходимо воспользоваться понятием неопределенного интеграла. Тогда следует разбить отрезок $[a;b]$ на количество n частей $[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, ..., n$, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. В промежутке отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, ..., n$ выберем точку со значением ζ_i. Из определения имеем, что существует определенный тип интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины элементарного отрезка, который уже разбили. Это выражается формулой

$$\lambda = \max_{i=1,2,...,n}\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0,$$

, тогда получаем, что любая из таких интегральных сумм – приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$.

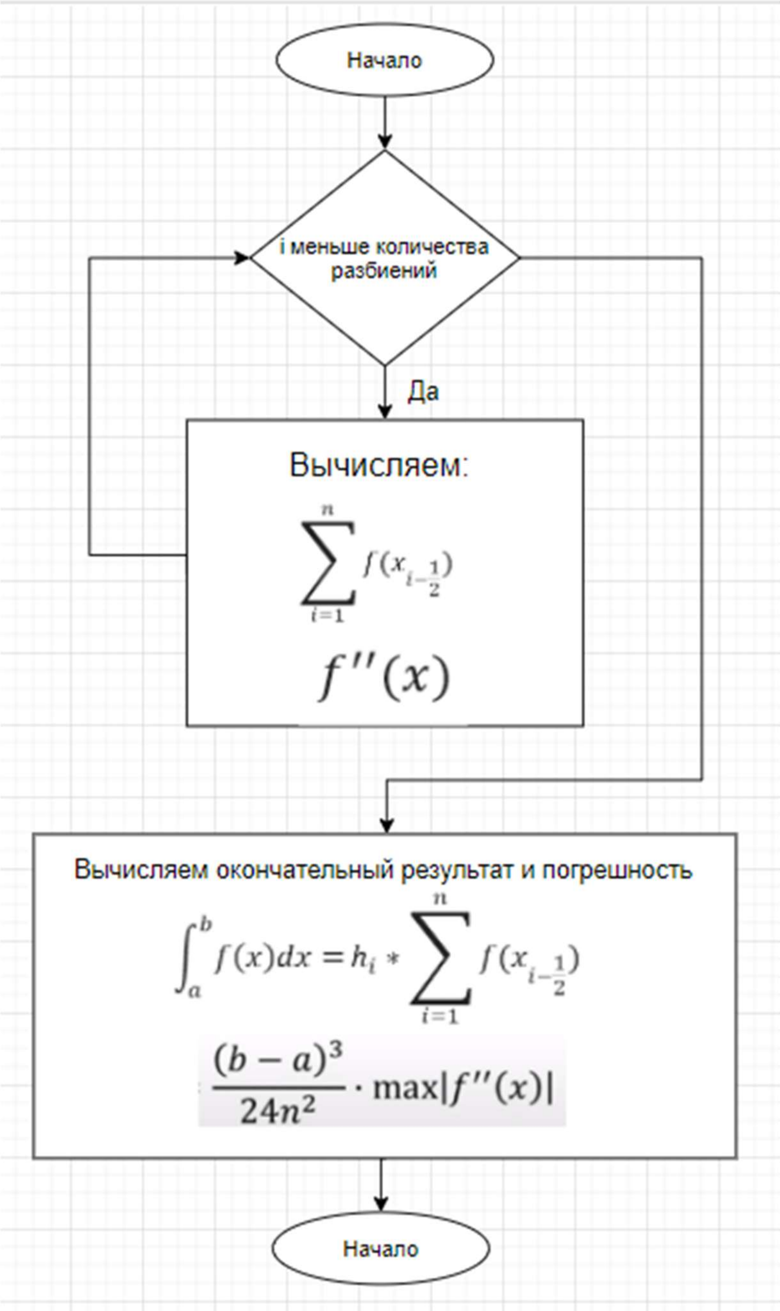
Суть метода прямоугольников выражается в том, что приближенное значение считается интегральной суммой.

Формула метода:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

Погрешность формул численного интегрирования по методу прямоугольников

$$|R_n| \le \frac{(b-a)}{24} h^2 \cdot \max|f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max|f''(x)|$$



- *Метод трапеций*

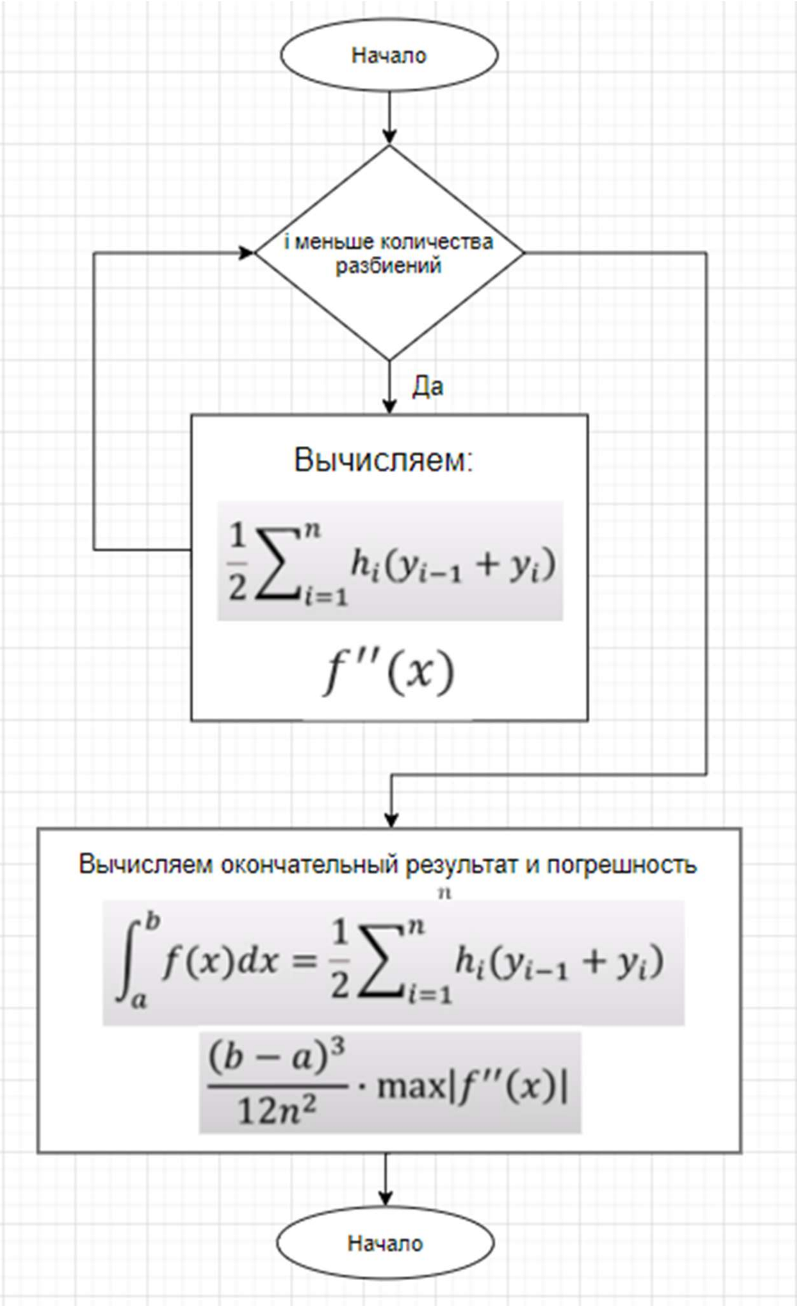
Метод трапеций — это метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1} + y_i)$$

Погрешность формул численного интегрирования по методу трапеций

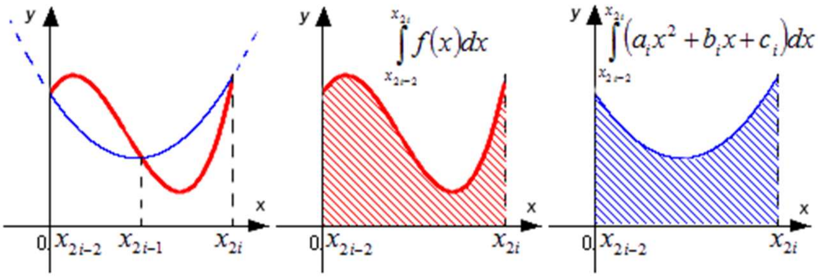
$$|R_n| \le \frac{(b-a)}{12}h^2 \cdot \max|f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max|f''(x)|$$



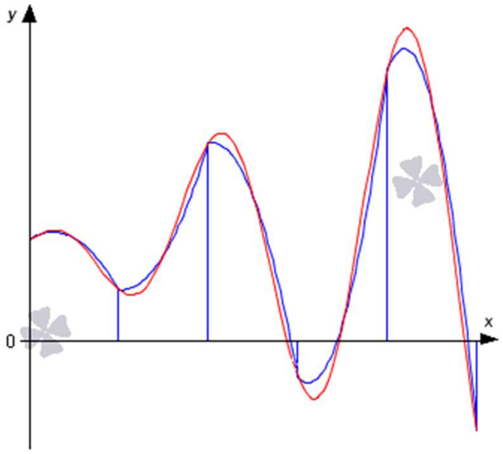
- *Метод Симпсона*

Каждый интервал $[x_{2i-2}; x_{2i}]$, $i=1, 2,..., n$ подынтегральной функции приближен при помощи параболы, заданной $y=a_ix^2+b_ix+c_i$, проходящей через точки с координатами $(x_{2i-2}; f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1}; (x_{2i-1}))$, $(x_{2i}; f(x_{2i}))$. Поэтому метод и имеет такое название.

Данные действия выполняются для того, чтобы интеграл $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right) dx$ взять в качестве приближенного значения $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f\left(x\right) dx.$. Можем вычислить при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Это и есть суть метода парабол. Рассмотрим рисунок, приведенный ниже.



При помощи красной линии изображается график функции y=f(x) y=f(x), синей – приближение графика y=f(x)y=f(x) при помощи квадратичных парабол.

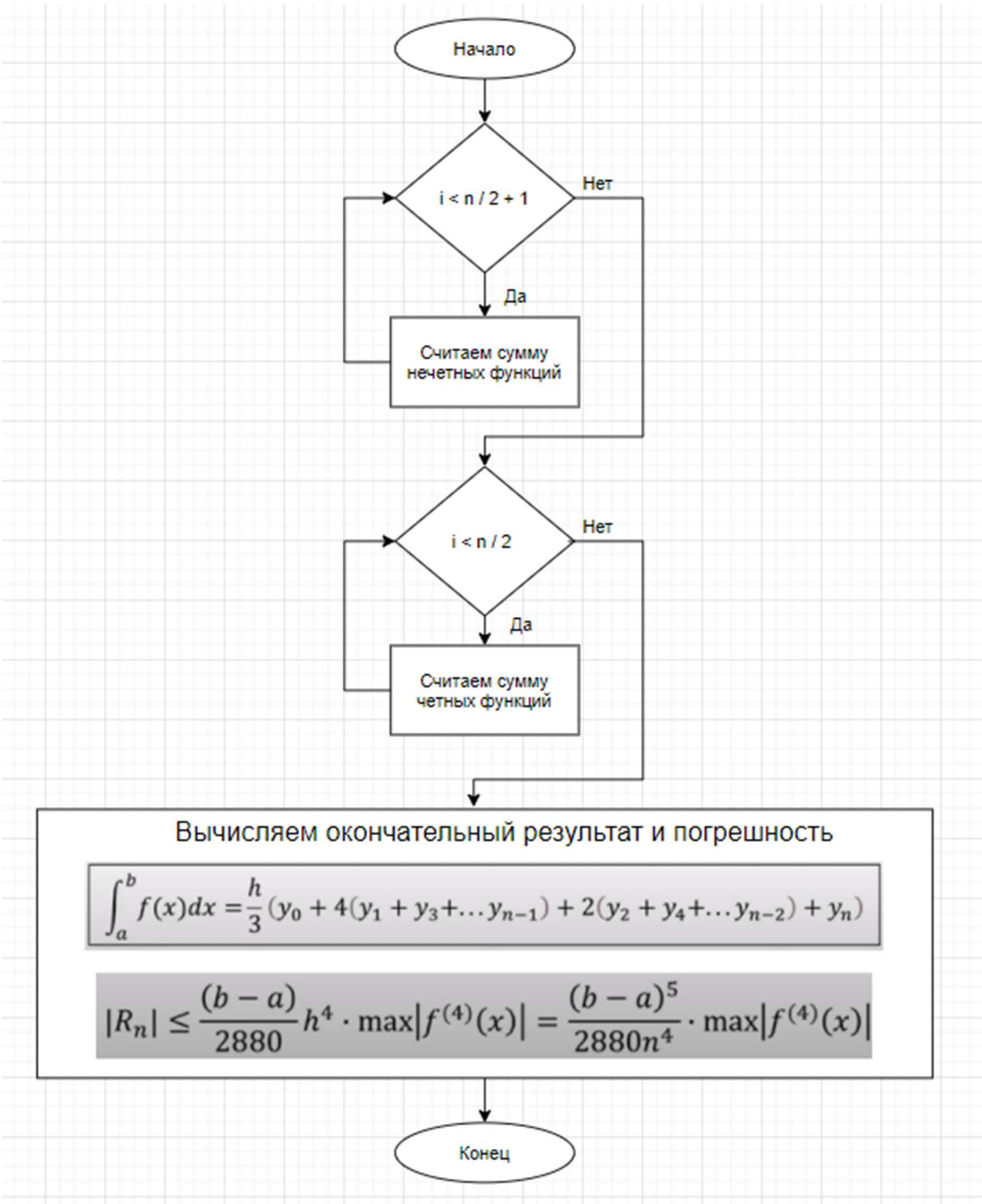


Формула метода:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots y_{n-2}\right) + y_n\right)$$

Погрешность формул численного интегрирования по методу Симпсона

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)}{2880} h^4 \cdot \max\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \cdot \max\left|f^{(4)}(x)\right|$$



4. Листинг разработанной программы

- *Метод прямоугольников*

```
import math
from sympy import *
```

```
x = Symbol("x")


def func(x):
    "Задаем данную функцию"
    return log(x ** 2 + 3) / (2 * x)


a = 1.2 # Определаем заданные границы интергралла a и b
b = 2
n1 = 8 # Количество разбиейний
n2 = 20


print("Интегрируемая функция: f(x) = log(x^2 + 3) / (2x)")
print("Метод средних прямоугольников")
def prymoygolnik(a, b, n):
    "Функция вычисляет интергал методом прямоугольников"
    x_proiz2 = [] # Массив для хранения данных погрешности
    h = (b - a) / n # Вычисляем шаг
    sum = (func(a) + func(b)) / 2
    for i in range(1, n):
        sum += func(a + h * (i - 0.5)) # Считаем сумму f(X i - 1/2)
        x_proiz2.append(diff(diff(func(x))).subs(x, a + h * i))
    result = h * sum # Считаем значение интегралла hi * sum(f(X i - 1/2))
    epsilon = ((b - a) ** 3 / (24 * n ** 2))  * abs(max(x_proiz2)) # Считаем погрешность 
вычислений
    print("Результат:", "%.8f" % result)
    print("Погрешность:", epsilon)


print("При n =", n1)
prymoygolnik(a, b, n1) # Функция для n = 8
print("При n =", n2)
prymoygolnik(a, b, n2) # Функция для n = 20
```

- *Метод трапеций*

```
import math
```

```
from sympy import *

x = Symbol("x")

def func(x):
    "Задаем данную функцию"
    return log(x ** 2 + 3) / (2 * x)

a = 1.2 # Определаем заданные границы интергралла a и b
b = 2
n1 = 8 # Количество разбиейний
n2 = 20

print("Интегрируемая функция: f(x) = log(x^2 + 3) / (2x)")
print("Метод трапеции")
def trapeciya( a, b, n):
    "Функция вычисляет интергал методом трапеции"
    x_proiz2 = [] # Массив для хранения данных погрешности
    result = 0
    h = (b - a) / n # Вычисляем шаг
    for i in range(n):
        # Считаем 1/2 * (hi * (yi-1 + y))
        result += (h * (func(a + i * h) + func(a + (i + 1) * h))) / 2
        x_proiz2.append(diff(diff(func(x))).subs(x, a + h * i))

    epsilon = ((b - a) ** 3 / (12 * n ** 2)) * abs(max(x_proiz2)) # Считаем погрешность
вычислений
    print("Результат:", "%.8f" % result)
    print("Погрешность:", epsilon)

print("При n =", n1)
trapeciya(a, b, n1) # Функция для n = 8
print("При n =", n2)
trapeciya(a, b, n2) # Функция для n = 20
```

- *Метод Симпсона*

```
import math
from sympy import *
import pylab

xi = Symbol("x")

def func(x):
    return log(x ** 2 + 3) / (2 * x)

a = 1.2 # Наши границы интегрирования
b = 2
n1 = 8 # Наши границы разбиения
n2 = 20

print("Интегрируемая функция: f(x) = log(x^2 + 3) / (2x)")
print("Метод Симпсона")
def simpsona(a, b, n):
    x_proiz4 = [] # Массив для хранения данных погрешности
    h = (b - a) / n # Вычисляем шаг
    sum = 0

    x = a + h
    for i in range(1, round(n / 2 + 1)):
        sum += 4 * func(x) # Выичсляем сумму нечетных функций 4(y1 + y3 + ... yn-1)
        x += 2 * h

    x = a + 2 * h
    for i in range(1, round(n / 2)):
        sum += 2 * func(x) # Выичсляем сумму четных функций 2(y2 + y4 + ... yn-2)
        x += 2 * h
```

```
    # Считаем значение интегралла h/3( y0 + 4(y1 + y3 + ... yn-1) + 2(y2 + y4 + ... yn-2) + yn)
    result = (h / 3) * (func(a) + func(b) + sum)


    for i in range(n):
        x_proiz4.append(diff(diff(diff(diff(func(xi))))).subs(xi, a + h * i))
    epsilon = ((b - a) ** 5 / (2880 * n ** 4))  * abs(max(x_proiz4)) # Считаем погрешность вычислений


    print("Результат:", "%.8f" % result)
    print("Погрешность:",  epsilon)


print("При n =", n1)
simpsona(a, b, n1) # Функция для n = 8
print("При n =", n2)
simpsona(a, b, n2) # Функция для n = 20
```

5. Результаты работы программы

- *Метод прямоугольников*

```
Интегрируемая функция: f(x) = log(x^2 + 3) / (2x)
Метод средних прямоугольников
При n = 8
Результат: 0.43959166
Погрешность: 0.000140403571583673
При n = 20
Результат: 0.43605233
Погрешность: 2.64031592128513e-5
[Finished in 0.7s]
```

- *Метод трапеций*

```
Интегрируемая функция: f(x) = log(x^2 + 3) / (2x)
Метод трапеции
При n = 8
Результат: 0.43361338
Погрешность: 0.000368810770610706
При n = 20
Результат: 0.43347918
Погрешность: 5.90097232977130e-5
[Finished in 0.7s]
```

- *Метод Симпсона*

```
Интегрируемая функция: f(x) = log(x^2 + 3) / (2x)
Метод Симпсона
При n = 8
Результат: 0.43345435
Погрешность: 1.49359978960207e-7
При n = 20
Результат: 0.43345361
Погрешность: 3.82361546138129e-9
[Finished in 1.2s]
```

6. Вывод

В ходе данной лабораторной работы были закреплены знания и умения по численному интегрированию функций.