МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА

Институт радиоэлектроники и информационных технологий

Кафедра вычислительные системы и технологии

Определение собственных чисел и собственных векторов матрицы методом Крылова

Отчет

по лабораторной работе №7

по дисциплине

Вычислительная математика

РУКОВОДИТЕЛЬ:

________________ Суркова А. С.

СТУДЕНТ:

________________ Соляник Д. Р.

19-ИВТ-2

Работа защищена «___» _____________

С оценкой ___________________________

Нижний Новгород 2021

1. Тема лабораторной работы:

Определение собственных чисел и собственных векторов матрицы методом Крылова

Цель лабораторной работы

Закрепление знаний и умений определения собственных чисел и собственных векторов матрицы методом Крылова

2. Вариант задания на лабораторную работу

Вариант № 18

Используя метод Крылова, найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные числа определить с четырьмя верными цифрами, а собственные векторы – с тремя десятичными знаками.

18. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 & 2 & 0 \\ -0.5 & 2 & 1 & -1.5 \\ 1 & 0 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Теоретические сведения и описание лабораторной работы

Пусть

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n$$

- характеристический полином (с точность до знака) матрицы A. Согласно тождеству Гамильтона-Кели, матрица A обращает в нуль свой характеристический полином; поэтому

$$A^n + p_1A^{n-1} + \cdots + p_nE = 0.$$

Возьмем теперь произвольный ненулевой вектор

$$y^0 = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Умножая обе части равенства справа на $y_n^{(0)}$, получим:

$$A^n + p_1A^{n-1}y^{(0)} + \cdots + p_nE = 0$$

Положим:

$$A^k y^{(0)} = y^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Тогда равенство приобретает вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y^{(0)} = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & . & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & . & y_2^{(0)} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & . & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

где

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Следовательно, векторное равенство эквивалентно системе уравнений:

$$p_1 y_i^{(n-1)} + p_2 y_i^{(n-2)} + \cdots + p_n y_i^{(0)} = -p_1 y_i^{(n-1)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

из которой, вообще говоря, можно определить неизвестный коэффициенты $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Так как на основании формулы

$$y^{(k)} = A y^{(k-1)} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

то координаты $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}$ вектора $y^{(k)}$ последовательно вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} y_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^{(0)} \\ \cdots \\ y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^{(n-1)} \end{cases}$$

таким образом, определение коэффициентов p_j характеристического полинома методом А.Н Крылова сводится к решению линейной системы уравнений, коэффициенты которой вычисляются по формулам, причем координаты начального вектора

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

произвольны. Если система имеет единственное решение, то ее корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ являются коэффициентами характеристического полинома. Это решение может быть найдено, например методом Гаусса. Если система не имеет единственного решения, то задача усложняется. В этом случае рекомендуется изменить начальный вектор.

Определение собственных векторов:

$$c_i \varphi_i(\lambda_i) x^{(i)} = y^{(n-1)} + q_{1,i} y^{(n-2)} + \dots + q_{n-1,i} y^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Таким образом, если $c_i \neq 0$, то полученная линейная комбинация векторов $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(0)}$ дает собственный вектор $x^{(i)}$ с точностью до числового множителя. Коэффициенты $q_{j,\ i}$ $(j = 1,2, \dots, n-1)$ могут быть легко определены по схеме *Горнера*

$$\begin{cases} q_{0i} = 1 \\ q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} + p_j \end{cases}$$


Начало
Записываем начальный вектор y0 и считаем остальные
y1 = y0 * A
y2 = y1 * A
...
y4 = y3 * A
Составляем систему уравнений и находим из нее значения p
$P(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0$
Используя схему Горнера находим значения q
Находим собственный вектор
$X^{(i)} = q_{0i}Y^{(n-1)} + q_{1i}Y^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1i}Y^{(0)}$
Конец

4. Листинг разработанной программы

```
import numpy as np


# Исходная матрица
A = np.array([
        [1.0, 0.5, -0.5, 1],
        [0.5, -1.0, 2.0, 0],
        [-0.5, 2, 1,  -1.5],
        [1.0, 0, -1.5, 2.0]])
print("Начальная матрица:\n", A)
# Начальный вектор y0
y0 = np.array([1, 0, 0, 0])
print("Начальная вектор:\n", y0)
# Перемножаем матрицы
# y1 = y0 * A
# y2 = y1 * A
# ...
# y4 = y3 * A
y1 = A.dot(y0)
y2 = A.dot(y1)
y3 = A.dot(y2)
y4 = A.dot(y3)



M = np.array([y3, y2, y1, y0])
# Транспонируем матрицу
M = M.transpose()


# Решаем матрицу
v = -y4
p = np.linalg.solve(M, v)
print("Находим корни системы уравнений:", p)
```

```
# Получаем корни
p = np.append(0, p)
p[0] = 1.0
lambd = np.roots(p)
print("Корни характеристического уравнения:", lambd)

# Вычисляем собственные вектора по схеме Горнера
for i in range(len(lambd)):
    q = [1, 0, 0, 0]
    for j in range(1,3):
        q[j] = lambd[i] * q[j - 1] + p[j]
    vect = y3 * q[0] + y2 * q[1] + y1 * q[2] + y0 * q[3]
    print("Собственный вектор при lambda =","%.4f" % lambd[i], ":", vect)
```

5. Результаты работы программы

```
Начальная матрица:
 [[ 1.   0.5 -0.5  1. ]
 [ 0.5 -1.   2.   0. ]
 [-0.5  2.   1.  -1.5]
 [ 1.   0.  -1.5  2. ]]
Начальная вектор:
 [1 0 0 0]
Находим корни системы уравнений: [-3.     -6.75   15.5    -2.6875]
Корни характеристического уравнения: [ 3.74865003 -2.46583999  1.52675868  0.19043128]
Собственный вектор при lambda = 3.7487 : [ 4.42805201 -3.47043656 -9.52618851 11.11386454]
Собственный вектор при lambda = -2.4658 : [-0.43671317  8.07978339 -5.54018342 -1.51901315]
Собственный вектор при lambda = 1.5268 : [-6.18238728 -3.77640067 -3.66549603 -2.27393893]
Собственный вектор при lambda = 0.1904 : [-7.80895157 -1.58294617 -2.51813204 -5.57091247]
```

6. Вывод

В ходе данной лабораторной работы были закреплены знания и умения определения собственных чисел и собственных векторов матрицы методом Крылова