Implementación de RSA con Square and Multiply y Teorema del Resto Chino

Benjamín Alonso Fernández Andrade
Departamento de Ciencias de la Computación e Informática
Universidad de La Frontera (UFRO)
b.fernandez07@ufromail.cl
https://github.com/Mizuhar4/RSA-Python-algorithm.git

***Abstract*—Este documento presenta una implementación del método RSA utilizando el algoritmo de *square and multiply* y el Teorema del Resto Chino para optimizar las operaciones modulares. Se describen las funciones clave usadas en la implementación, incluyendo la generación de claves, el cifrado y descifrado de mensajes, y el uso de técnicas matemáticas como el máximo común divisor y el algoritmo de Euclides extendido.**

I. Introducción

RSA es uno de los algoritmos de cifrado más utilizados en criptografía. Este trabajo incluye la implementación de las principales funciones necesarias para ejecutar el cifrado y descifrado usando RSA, aprovechando optimizaciones como *square and multiply* y el Teorema del Resto Chino (CRT) [1]. Se describen las funciones clave y su propósito en el contexto del algoritmo.

II. Funciones y Explicaciones

A. Función `mcd`

```python
def mcd(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```

Fig. 1: Diagrama de la función `mcd`.

Descripción: La función `mcd` (Máximo Común Divisor) se usa para encontrar el mayor número que divide a dos enteros sin dejar residuo. Es útil en RSA para verificar si dos números son coprimos, especialmente al elegir el exponente e [2].

B. Función `euclides_extendido`

Descripción: La función `euclides_extendido` implementa el algoritmo de Euclides extendido para encontrar el inverso multiplicativo de un número, que es crucial para calcular la clave privada d en RSA [3].

```python
def euclides_extendido(a, b):
    if b == 0:
        return a, 1, 0
    gcd, x1, y1 = euclides_extendido(b, a % b)
    x = y1
    y = x1 - (a // b) * y1
    return gcd, x, y
```

Fig. 2: Diagrama de la función `euclides_extendido`.

C. Función `es_primo`

Descripción: La función `es_primo` determina si un número es primo, lo cual es esencial en RSA para la elección de los números p y q.

```python
def es_primo(n, k=40):
    if n <= 1:
        return False
    if n == 2:
        return True
    if n % 2 == 0:
        return False

    r, s = 0, n - 1
    while s % 2 == 0:
        r += 1
        s //= 2

    for _ in range(k):
        a = random.randint(2, n - 1)
        x = pow(a, s, n)
        if x == 1 or x == n - 1:
            continue
        for _ in range(r - 1):
            x = pow(x, 2, n)
            if x == n - 1:
                break
        else:
            return False
    return True
```

Fig. 3: Diagrama de la función `es_primo`.

D. Función `generar_primo`

Descripción: La función `generar_primo` genera un número primo aleatorio de una cantidad específica de bits. Es usada para encontrar p y q en el algoritmo RSA.

```python
def generar_primo(bits):
    while True:
        num = random.getrandbits(bits)
        if es_primo(num):
            return num
```

Fig. 4: Diagrama de la función `generar_primo`.

```python
def generar_claves(bits=512):
    p = generar_primo(bits // 2)
    q = generar_primo(bits // 2)
    n = p * q
    phi_n = (p - 1) * (q - 1)

    e = 65537
    if mcd(e, phi_n) != 1:
        raise ValueError("e no es coprimo con φ(n)")

    _, d, _ = euclides_extendido(e, phi_n)
    d = d % phi_n
    if d < 0:
        d += phi_n

    return (e, n), (d, n), (p, q)
```

Fig. 5: Diagrama de la función `generar_claves`.

E. *Función* `generar_claves`

Descripción: La función `generar_claves` genera las claves públicas y privadas para RSA, usando números primos p y q, y el cálculo del inverso modular para la clave privada.

F. *Función* `exponenciacion_rapida`

```python
def exponenciacion_rapida(base, exp, mod):
    result = 1
    base = base % mod
    while exp > 0:
        if exp % 2 == 1:
            result = (result * base) % mod
        exp = exp >> 1
        base = (base * base) % mod
    return result
```

Fig. 6: Diagrama de la función `exponenciacion_rapida`.

Descripción: La función `exponenciacion_rapida` implementa el algoritmo de *square and multiply*, optimizando el cálculo de potencias modulares, esencial tanto en cifrado como descifrado.

```python
def cifrar_numero(mensaje_num, clave_publica):
    e, n = clave_publica
    return exponenciacion_rapida(mensaje_num, e, n)
```

Fig. 7: Diagrama de la función `cifrar_numero`.

G. *Función* `cifrar_numero`

Descripción: La función `cifrar_numero` cifra un número usando la clave pública RSA mediante la exponenciación rápida.

H. *Función* `descifrar_numero`

```python
def descifrar_numero(mensaje_cifrado, clave_privada):
    d, n = clave_privada
    return exponenciacion_rapida(mensaje_cifrado, d, n)
```

Fig. 8: Diagrama de la función `descifrar_numero`.

Descripción: La función `descifrar_numero` descifra un número utilizando la clave privada RSA y la exponenciación rápida.

I. *Función* `descifrar_crt`

```python
def descifrar_crt(cifrado, clave_privada, p, q):
    d, n = clave_privada
    dp = d % (p - 1)
    dq = d % (q - 1)
    q_inv = euclides_extendido(q, p)[1] % p

    m1 = exponenciacion_rapida(cifrado, dp, p)
    m2 = exponenciacion_rapida(cifrado, dq, q)

    h = (q_inv * (m1 - m2)) % p
    return (m2 + h * q) % n
```

Fig. 9: Diagrama de la función `descifrar_crt`.

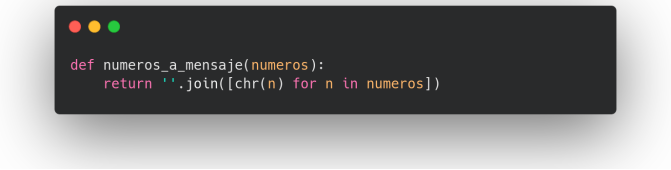
Descripción: La función `descifrar_crt` implementa el Teorema del Resto Chino (CRT) para acelerar el descifrado modular en RSA utilizando los factores primos p y q.

J. *Función* `mensaje_a_numeros`

Descripción: La función `mensaje_a_numeros` convierte un mensaje de texto en una secuencia de números, donde cada número es el código ASCII de cada carácter.

```python
def mensaje_a_numeros(mensaje):
    return [ord(c) for c in mensaje]
```

Fig. 10: Diagrama de la función `mensaje_a_numeros`.



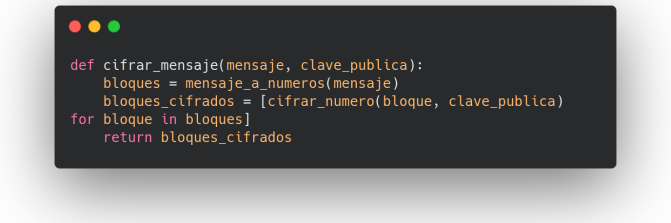
```python
def numeros_a_mensaje(numeros):
    return ''.join([chr(n) for n in numeros])
```

Fig. 11: Diagrama de la función `numeros_a_mensaje`.

K. Función `numeros_a_mensaje`

Descripción: La función `numeros_a_mensaje` convierte una secuencia de números en su representación original de caracteres, revirtiendo la conversión a ASCII.

L. Función `cifrar_mensaje`



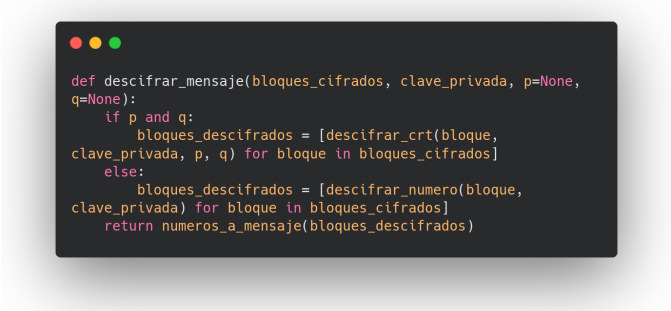
```python
def cifrar_mensaje(mensaje, clave_publica):
    bloques = mensaje_a_numeros(mensaje)
    bloques_cifrados = [cifrar_numero(bloque, clave_publica)
for bloque in bloques]
    return bloques_cifrados
```

Fig. 12: Diagrama de la función `cifrar_mensaje`.

Descripción: La función `cifrar_mensaje` cifra cada carácter de un mensaje convirtiéndolo primero a un número (ASCII), y luego cifrándolo con RSA.

M. Función `descifrar_mensaje`

Descripción: La función `descifrar_mensaje` descifra un mensaje cifrado por RSA, convirtiendo cada número descifrado de vuelta a caracteres.



```python
def descifrar_mensaje(bloques_cifrados, clave_privada, p=None,
q=None):
    if p and q:
        bloques_descifrados = [descifrar_crt(bloque,
clave_privada, p, q) for bloque in bloques_cifrados]
    else:
        bloques_descifrados = [descifrar_numero(bloque,
clave_privada) for bloque in bloques_cifrados]
    return numeros_a_mensaje(bloques_descifrados)
```

Fig. 13: Diagrama de la función `descifrar_mensaje`.

REFERENCES

[1] Neo LCC UMA, ”RSA: Presentación,” *Tutorial Criptografía*, 2003. [Online]. Available: https://neo.lcc.uma.es/evirtual/cdd/tutorial/presentacion/rsa.html. [Accessed: Sept. 21, 2024].

[2] J. D. Cook, ”RSA exponent,” *John D. Cook Consulting*, Dec. 12, 2018. [Online]. Available: https://www.johndcook.com/blog/2018/12/12/rsa-exponent/. [Accessed: Sept. 21, 2024].

[3] Universidad Autónoma de Guerrero, ”Implementación del Teorema del Resto Chino,” *Tesis Maestría*, 2015. [Online]. Available: http://ri.uagro.mx/bitstream/handle/uagro/776/OK15158773_maestria.pdf?sequence=1&isAllowed=y. [Accessed: Sept. 21, 2024.

[4] ”RSA Encryption Algorithm,” *YouTube*, Jul. 15, 2020. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=XOz0NWxIakQ&t=286s. [Accessed: Sept. 21, 2024.

[5] ”Teorema del Resto Chino y RSA,” *YouTube*, Mar. 12, 2022. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=AjaMZddJIK0. [Accessed: Sept. 21, 2024.

[6] Veritas, ”What is RSA encryption,” *Veritas Technologies LLC*, 2024. [Online]. Available: https://www.veritas.com/es/mx/information-center/rsa-encryption. [Accessed: Sept. 21, 2024.

[7] Python Diario, ”Criptografía en Python: RSA,” *Python Diario*, Jul. 2020. [Online]. Available: https://pythondiario.com/2020/07/criptografia-en-python-rsa.html. [Accessed: Sept. 21, 2024.