



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## Отчет по лабораторной работе №1

на тему:

*" Численное решение краевых задач для  
одномерного уравнения теплопроводности "*

Студент \_\_\_\_\_ ФН2-61Б \_\_\_\_\_ М. А. Каган  
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Студент \_\_\_\_\_ ФН2-61Б \_\_\_\_\_ И. А. Яковлев  
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Проверил \_\_\_\_\_ А. О. Гусев  
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2025 г.

## Оглавление

Контрольные вопросы . . . . .	3
Дополнительные вопросы . . . . .	8

## Контрольные вопросы

1. Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость

*Ответ:*

Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно, и непрерывно зависит от входных данных.

Пусть дана задача

$$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \partial G,$$

разностная схема

$$A_h u = \varphi \text{ в } G_h, \quad R_h u = \nu \text{ на } \partial G_h,$$

тогда разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если для

$$\psi_h = \varphi - f_h + ((Au)_h - A_h u_h),$$

$$\chi_h = \nu - \mu_h + ((Ru)_h - R_h u_h)$$

выполняется

$$\|\psi_h\|_\psi \rightarrow 0, \text{ при } h \rightarrow 0, \quad \|\chi_h\|_\chi \rightarrow 0, \text{ при } h \rightarrow 0.$$

$p$ -й порядок аппроксимации:

$$\|\psi_h\|_\psi = O(h^p), \quad \|\chi_h\|_\chi = O(h^p).$$

Разностная схема называется **однородной**, если её уравнение записано одинаковым образом и на одном шаблоне во всех узлах сетки без явного выделения особенностей.

Разностная схема называется **консервативной**, если для её решения выполняются законы сохранения, присущие исходной задаче.

Разностная схема называется **монотонной**, если в одномерном случае её решение сохраняет монотонность по пространственной переменной, при условии, что соответствующее свойство справедливо для исходной задачи, а в многомерном — удовлетворяет принципу максимума исходной задачи.

Разностная схема называется **устойчивой**, если её решение непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по  $h$ . Пусть  $y^I, y^{II}$  —

решения для  $A_h$  и  $R_h$ , тогда разностная схема устойчива, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\varphi \leq f, \|\nu^I - \nu^{II}\|_\nu \leq f \implies \|y^I - y^{II}\|_Y < \varepsilon.$$

Если разностная схема не зависит от соотношения между шагами по различным независимым переменным, то такую устойчивость называют **безусловной**. В противном случае — **условной**.

Разностное решение сходится к точному, если  $\|y - A_h u\|_Y$  стремится к нулю при шаге  $h$  стремящимся к нулю. С  $p$ -м порядком, если  $\|y - A_h u\|_Y = O(h^p)$  при  $h \rightarrow 0$ .

2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?

*Ответ:*

- (а) Пусть  $y^I, y^{II}$  решение разностных задач с одинаковым оператором, соответствующим правым частям  $\varphi^I, \varphi^{II}$  и граничным условиям  $\nu^I$  и  $\nu^{II}$ . Разностную схему называют абсолютно устойчивой, если существуют  $M_1$  и  $M_2$  большие нуля, не зависящие от шага сетки, что справедливо неравенство

$$\|y^I - y^{II}\| \leq M_1 \|\varphi^I - \varphi^{II}\| + M_2 \|\nu^I - \nu^{II}\|$$

вне зависимости от выбора соотношения шагов. Если при  $M_1 = 0$  выполняется неравенство, то говорят об устойчивости по начальным условиям, а если  $M_2$ , то об устойчивости по правой части.

Из рассмотренных схем, только смешанная разностная схема удовлетворяет данному условию.

- (б) Для схем с безусловной аппроксимацией порядка  $O(\tau^2 + h)$  можно вести расчет с большим шагом по времени в сравнении с шагом  $h$ .
3. Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй порядок аппроксимации при  $\alpha_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}$ ?

*Ответ:*

Из выбора обозначений:

$$\alpha_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1}.$$

Введем  $I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)}$ . Тогда

$$I = h \frac{K(x_i) + K(x_{i-1})}{2K(x_i)K(x_{i-1})} = h \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})} \right),$$

или

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} = h \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})} \right),$$

что является формулой трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}).$$

Метод трапеций имеет второй порядок, следовательно исследуемая схема также имеет второй порядок аппроксимации.

4. **Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации приведенных граничных условий с порядком точности  $O(\tau + h^2)$ ,  $O(\tau^2 + h^2)$ ,  $O(\tau^2 + h)$  вы знаете?**

**Ответ:**

Граничные условия имеют вид:

$$-K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0, t)} = P(t), \quad -K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L, t)} = P(t)$$

Рассмотрим случай  $K = K(x)$ . Аппроксимируем левое ГУ с точностью  $O(\tau^2 + h^2)$  с помощью интегро-интерполяционного метода. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

проинтегрируем исходное уравнение по ячейке, примыкающей к левой границе:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{1/2}} (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)) dx &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (K(x_{1/2})u_x(x_{1/2}, t) - K(x_0)u_x(x_0, t)) dt = \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (K(x_{1/2})u_x(x_{1/2}, t) + P(t)) dt, \end{aligned}$$

откуда получим разностную аппроксимацию

$$\frac{h}{2} \frac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau} = k \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} + \hat{p},$$

т.е.

$$-k\hat{y}_{x,0} + \frac{h}{2}y_{t,0} = \hat{p}.$$

Тогда вычисление погрешности аппроксимации на точном решении исходной задачи дает

$$\psi_{h,0} = -k\hat{u}_{xx} \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\hat{u}_t + O(\tau h + h^2) = O(\tau^2 + h^2),$$

так как на точном решении выполнено равенство  $u_t = ku_{xx}$ .

Теперь поступим иначе. Проинтегрируем граничное условие на левом начальном отрезке:

$$-\int_{x_0}^{x_1} \left( K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} P(t) dx.$$

Используем среднее значение  $K(x)$  на отрезке:

$$-k \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_0}^{x_1} P(t) dx,$$

где

$$k = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_1} K(x) dx.$$

Тогда

$$-k(u(x_1, t) - u(x_0, t)) = hP(t),$$

или

$$y_0 = y_1 + \frac{h}{k} P.$$

Граничное условие, полученное методом интегро-интерполяции, аппроксимировано с точностью  $O(h^2)$ .

Запишем следующую неявную схему:

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ K_{+1/2} \frac{\hat{y}_{+1} - \hat{y}}{h} - K_{-1/2} \frac{\hat{y} - \hat{y}_{-1}}{h} \right].$$

Используемая разностная схема имеет порядок  $O(\tau)$  по времени и  $O(h^2)$  по пространству. Подставив граничное условие, получим общий порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ . Рассмотрим симметричную схему ( $\sigma = 0.5$ ):

$$c\rho \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{2h} \left( a_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right) + \frac{1}{2h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right),$$

где  $a_i = \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1}$ . Если интеграл аппроксимировать по формуле первого порядка, например, по формуле левых прямоугольников, то полученная схема, из-за возникших членов порядка  $O(h)$ , будет порядка аппроксимации  $O(\tau^2 + h)$ .

Рассмотрим симметричную схему ( $\sigma = 0.5$ ):

$$c\rho \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{2h} \left( a_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right) + \frac{1}{2h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right),$$

где  $a_i = \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1}$ . Если интеграл аппроксимировать по формуле первого порядка, например, по формуле левых прямоугольников, то полученная схема, из-за возникших членов порядка  $O(h)$ , будет порядка аппроксимации  $O(\tau^2 + h)$ .

5. При каких  $h$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.

**Ответ:**

Явная двухслойная линейная однородная схема

$$\hat{y}_n = \sum_i d_i y_{n+i}$$

монотонна, если все  $d_i \geq 0$ .

Приведем уравнение теплопроводности к такому виду:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ \sigma (\alpha_{i+1}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - \alpha_i(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})) + \right. \\ \left. + (1 - \sigma) (\alpha_{i+1}(y_{i+1}^j - y_i^j) - \alpha_i(y_i^j - y_{i-1}^j)) \right],$$

сгруппировав и перенеся необходимые слагаемые, получим

$$\left( \frac{\sigma(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau} \right) y_i^{j+1} = \left( \frac{\sigma\alpha_{i+1}}{h^2} \right) y_{i+1}^{j+1} + \left( \frac{\sigma\alpha_i}{h^2} \right) y_{i-1}^{j+1} + \\ + \left( \frac{(1-\sigma)\alpha_{i+1}}{h^2} \right) y_{i+1}^j + \left( \frac{(1-\sigma)\alpha_i}{h^2} \right) y_{i-1}^j + \left( \frac{c\rho}{\tau} - \frac{(1-\sigma)(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{h^2} \right) y_i^j.$$

Так как  $0 \leq \sigma \leq 1$  и  $\alpha_i > 0$  множитель в левой части, и все множители в правой части кроме одного положительны. Из-за него получаем условие:

$$\frac{c\rho}{\tau} > \frac{(1-\sigma)(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{h^2}.$$

## 6. Вопрос 6

**Ответ:**

- (a) Смешанная разностная сетка определяемая параметром  $\sigma$  устойчива, если

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{4\tau \tilde{K}}, \quad \tilde{K} = \max_{0 \leq x \leq L} K(x)$$

Для абсолютно устойчивых схем, в частности неявная, явная и симметричная, устойчивы при любых соотношениях шагов  $\tau$  и  $h$ .

- (b) Если для  $\sigma < 1/2$  устойчива при достаточно малом соотношении  $\tau/h^2$ , то такие схемы условно устойчивы.

7. В случае  $K = K(u)$  чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

**Ответ:** Для точности  $\varepsilon = 10^{-8}$ , количество внутренних итераций равно 3–4. Решение находится с помощью метода простых итераций.

8. Для случая  $K = K(u)$  предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

**Ответ:**

Рассмотрим схему:

$$c\rho \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(\hat{y}) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y}) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right],$$

где

$$a_i(v) = 0.5[K(v_{i-1}) + K(v_i)], \quad (1)$$

$$a_i(v) = K\left(\frac{v_i + v_{i-1}}{2}\right). \quad (2)$$

Таким образом задается неявная схема в случае  $K(u)$ . Поскольку  $K(\hat{y})$  нельзя вычислить явно, возникает система из  $N$  нелинейных уравнений.

Способы решения задачи:

- (а) Как приближение к  $\hat{y}$  использовать значение  $y$ . Тогда система решается прогонкой.
- (б) Формулу (2) можно разложить в ряд Тейлора до первого члена в точке  $\frac{y_i + y_{i-1}}{2}$  и экстраполировать до  $\frac{\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1}}{2}$
- (в) Решать систему методом простой итерации:

$$c\rho \frac{y_i^{(s+1)} - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(y^{(s)}) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i(y^{(s)}) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right]$$

В качестве  $y^{(0)}$  можно брать значение  $y$ . Сам итерационный процесс можно обрывать либо после нескольких итераций, либо вести до заданной точности  $\max_i |y^{(s)}_i - y^{(s+1)}_i| \leq \varepsilon$

## Дополнительные вопросы

1. Приведите пример неконсервативной схемы.

**Ответ:**

Рассмотрим задачу:

$$(K(x)u_x)_x = 0$$

$$K = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases} \quad (3)$$



Для нее справедлива, кроме точки 0.5, следующая форма записи:

$$K(x)u_{xx} = 0$$

В этом случае схема:

$$K(y)y_{\bar{x}x} = 0$$

будет неконсервативной. Другим примером консервативной схемы будет схема 2-го порядка точности ( $\sigma = 0.5$ ) для коэффициента

$$K = \begin{cases} 3, & 0 \leq x < 0.25 \\ 10, & 1/2 \leq 0.25 < x < 0.5 \\ 3, & 1/2 \leq 0.5 < x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

При начальной температуре 100.

2. Как получить аппроксимацию граничного условия с порядком  $O(t^2 + h)$  в случае постоянного коэффициента  $K$ .

**Ответ:** Поскольку коэффициент  $K(x, t) = const$ , то граничное условие можно представить как  $\frac{\partial u}{\partial x} = p(t)/K = A(t)$ . Аппроксимируем на прямую, по формуле правой производной:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = A(t)$$

Полученная формула имеет первый порядок точности. При ее использовании, исходная схема, если обладала высшего порядка аппроксимации, так же становится первого порядка по  $h$ .