Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №1

на тему:

"Итерационные метды решения систем линейных алгебраических уравнений"

Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	М. А. Каган (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	И. А. Яковлев (И. О. Фамилия)
Проверил		(Подпись, дата)	(И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Исходные данные

Система линейных уравнений №1:

$$\begin{cases} 0.2910x_1 & + & 1.8100x_2 & + & 9.3110x_3 & + & 9.1100x_4 & = & 4.2280 \\ 1.4500x_1 & + & 8.5790x_2 & + & 44.1950x_3 & + & 42.9950x_4 & = & 20.4290 \\ -0.2900x_1 & - & 1.7980x_2 & - & 9.2500x_3 & - & 9.0500x_4 & = & -4.2080 \\ 0.0000x_1 & + & 0.0820x_2 & + & 0.4100x_3 & + & 0.4500x_4 & = & 0.1220 \end{cases}$$

Система линейных уравнений №2:

$$\begin{cases} -106.4000x_1 & - & 7.0000x_2 & - & 4.9900x_3 & + & 0.2600x_4 & = & 1040.8100 \\ 3.6100x_1 & + & 22.2000x_2 & - & 8.5900x_3 & - & 8.9200x_4 & = & 615.4100 \\ 2.2800x_1 & + & 7.7500x_2 & + & 52.2000x_3 & + & 9.6500x_4 & = & 427.5400 \\ -9.0000x_1 & + & 5.8100x_2 & - & 0.0900x_3 & + & 136.8000x_4 & = & -265.3500 \end{cases}$$

2. Краткие сведения

Пусть A — невырожденная матрица $n \times n$, b — ненулевой n-мерный вектор. Необходимо найти такой n-мерный вектор x, чтобы он удовлетворял уравнению

$$Ax = b. \tag{1}$$

2.1. Метод простой итерации

2.2. Метод Якоби

2.3. Метод Зейделя

2.4. Метод релаксации

Контрольные вопросы

1. **Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?**

   Ответ:

   Условие $\|C\| < 1$ связано с тем, что для нахождения единственного решения (единственной неподвижной точки) оператору C необходимо быть сжимающим, а из определения сжимающего оператора следует, что его норма должна быть строго меньше единицы.

2. оп оп

Ответ:

3. На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

Ответ:

Рассмотрим метод Якоби. В этом случае итерационный процесс организуется следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = f_1, \\ a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^k = f_2. \end{cases}$$

Каждое из уравнений задает некоторую прямую, точное решение $\hat{x}$ лежит на их пересечении. Приведем картинку с поэтапным поиском приближений:

4. оп оп

Ответ:

5. Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

Ответ:

В матричном виде метод Зейделя задается как:

$$(D + L)\left(x^{k+1} - x^k\right) + Ax^k = b.$$

Необходимо получить в левой части x^{k+1}, а в правой — свободный член и x^k умноженный на некоторый матричный коэффициент. Собрав множители при x^k и перенеся его в правую часть, получим:

$$(D + L)x^{k+1} = (D + L - A)x^k + b.$$

Домножим обе части на $(D + \omega L)^{-1}$:

$$x^{k+1} = (D + \omega L)^{-1}(D + L - A)x^k + (D + L)^{-1}b,$$

откуда $C = (D + L)^{-1}(D + L - A) = (D + L)^{-1}(-U) = -(D + L)^{-1}U$.

6. оп оп

Ответ:

7. Какие еще критерии окончания итерационного процесса можно предложить?

Ответ:

Можно воспользоваться следующими критериями останова:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon\|x^k\| + \varepsilon_0, \quad \|Ax^{k+1}\| \leq \varepsilon.$$

Однако у них есть существенный недостаток: они не могут гарантировать условия $\|x^k - \hat{x}\| \leq \varepsilon$, то есть сходимости к точному решению.