



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## Отчет по лабораторной работе №3

на тему:

*" Численное решение краевых задач для  
одномерного волнового уравнения "*

Студент \_\_\_\_\_ ФН2-61Б \_\_\_\_\_ М. А. Каган  
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Студент \_\_\_\_\_ ФН2-61Б \_\_\_\_\_ И. А. Яковлев  
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Проверил \_\_\_\_\_ А. О. Гусев  
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2025 г.

## Оглавление

Контрольные вопросы . . . . .	3
Дополнительные вопросы . . . . .	3

## Контрольные вопросы

1. Предложите разностные схемы, отличные от схемы «крест», для численного решения волнового уравнения с граничными условиями.

**Ответ:**

- (а) Неявная схема:

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \frac{\hat{y}_{+1} - 2\hat{y} + \hat{y}_{-1}}{h^2}$$

- (б) Экстраполяционная схема:

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \frac{\check{y}_{+1} - 2\check{y} + \check{y}_{-1}}{h^2}$$

2. Предложите способ контроля точности полученного решения.

**Ответ:**

Зная порядок аппроксимации схемы, по правилу Рунге каждые два шага можно оценивать погрешность решения и при, необходимости, уменьшать шаг интегрирования по времени.

## Дополнительные вопросы

1. Представление волнового уравнения, через гиперболическую систему. Характеристики.

**Ответ:**

Волновое уравнение:

$$u_{xx} = a^2 u_{tt}$$

Введем новые переменные:  $v = u_x$ ,  $h = c v_t$ . Тогда получаем уравнение:

$$v_x = c h_t$$

Поскольку две неизвестных, а уравнение одно, дополним условием регулярности:

$$u_{tx} = u_{xt}$$

$$\frac{h_x}{c} = v_t$$

$$h_x = c v_t$$

Пусть  $U = (v, h)^T$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ , тогда систему можно представить в следующем виде:

$$U_x - A U_t = 0$$

Собственные значения матрицы  $\lambda_{1,2} = \pm c$ . Поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ , полученная система действительно является гиперболической.

Характеристиками в гиперболической системе называют семейство кривых удовлетворяющие уравнению  $\frac{dx}{dt} = \lambda_k$ . В данном случае характеристиками являются кривые вида:

$$x \pm at = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**2. Как находить промежуточные точки для оценки погрешности в переменном шаге по пространству**

**Ответ:** Пусть  $y_{i+1/2}$  значение в узле, которое необходимо аппроксимировать.

Тогда возможны следующие способы:

- (a) Среднее ближайших узлов:  $y_{i+1/2} \approx \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ ;
- (b) Использование кубического сплайна;
- (c) Аппроксимация полиномом Эрмита;