



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №1

на тему:

*"Методы численного решения обыкновенных
дифференциальных уравнений"*

Студент _____ ФН2-61Б _____ М. А. Каган
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Студент _____ ФН2-61Б _____ И. А. Яковлев
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Проверил _____ А. О. Колганова
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

Контрольные вопросы	3
-------------------------------	---

Контрольные вопросы

1. Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость

Ответ:

Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно, и непрерывно зависит от входных данных.

Пусть дана задача

$$Au = f \text{ в } G, Ru = \mu \text{ на } \partial G,$$

разностная схема

$$A_h u = \varphi \text{ в } G_h, R_h u = \nu \text{ на } \partial G_h,$$

тогда разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если для

$$\psi_h = \varphi - f_h + ((Au)_h - A_h u_h),$$

$$\chi_h = \nu - \mu_h + ((Ru)_h - R_h u_h)$$

выполняется

$$\|\psi_h\|_\psi \rightarrow 0, \text{ при } h \rightarrow 0, \quad \|\chi_h\|_\chi \rightarrow 0, \text{ при } h \rightarrow 0.$$

p -й порядок аппроксимации:

$$\|\psi_h\|_\psi = O(h^p), \quad \|\chi_h\|_\chi = O(h^p).$$

Разностная схема называется **однородной**, если её уравнение записано одинаковым образом и на одном шаблоне во всех узлах сетки без явного выделения особенностей.

Разностная схема называется **консервативной**, если для её решения выполняются законы сохранения, присущие исходной задаче.

Разностная схема называется **монотонной**, если в одномерном случае её решение сохраняет монотонность по пространственной переменной, при условии, что соответствующее свойство справедливо для исходной задачи, а в многомерном — удовлетворяет принципу максимума исходной задачи.

Разностная схема называется **устойчивой**, если её решение непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по h . Пусть y^I, y^{II} —

решения для A_h и R_h , тогда разностная схема устойчива, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\varphi \leq f, \|\nu^I - \nu^{II}\|_\nu \leq f \implies \|y^I - y^{II}\|_Y < \varepsilon.$$

Если разностная схема не зависит от соотношения между шагами по различным независимым переменным, то такую устойчивость называют **безусловной**. В противном случае — **условной**.

Разностное решение сходится к точному, если $\|y - A_h u\|_Y$ стремится к нулю при шаге h стремящимся к нулю. С p -м порядком, если $\|y - A_h u\|_Y = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?

Ответ:

- (а) Пусть y^I, y^{II} решение разностных задач с одинаковым оператором, соответствующим правым частям φ^I, φ^{II} и граничным условиям ν^I и ν^{II} . Разностную схему называют абсолютно устойчивой, если существуют M_1 и M_2 большие нуля, не зависящие от шага сетки, что справедливо неравенство

$$\|y^I - y^{II}\| \leq M_1 \|\varphi^I - \varphi^{II}\| + M_2 \|\nu^I - \nu^{II}\|$$

вне зависимости от выбора соотношения шагов. Если при $M_1 = 0$ выполняется неравенство, то говорят об устойчивости по начальным условиям, а если M_2 , то об устойчивости по правой части.

Из рассмотренных схем, только смешанная разностная схема удовлетворяет данному условию.

- (б) Для схем с безусловной аппроксимацией порядка $O(\tau^2 + h)$ можно вести расчет с большим шагом по времени в сравнении с шагом h .
3. Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй порядок аппроксимации при $\alpha_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}$?

Ответ:

Из выбора обозначений:

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1}.$$

Введем $I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)}$. Тогда

$$I = h \frac{K(x_i) + K(x_{i-1})}{2K(x_i)K(x_{i-1})} = h \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})} \right),$$

или

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} = h \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})} \right),$$

что является формулой трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}).$$

Метод трапеций имеет второй порядок, следовательно исследуемая схема также имеет второй порядок аппроксимации.

4. Вопрос 4

Ответ:

5. При каких h, τ и σ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.

Ответ:

Явная двухслойная линейная однородная схема

$$\hat{y}_n = \sum_i d_i y_{n+i}$$

монотонна, если все $d_i \geq 0$.

Приведем уравнение теплопроводности к такому виду:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[\sigma (\alpha_{i+1}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - \alpha_i(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})) + \right. \\ \left. + (1 - \sigma) (\alpha_{i+1}(y_{i+1}^j - y_i^j) - \alpha_i(y_i^j - y_{i-1}^j)) \right],$$

сгруппировав и перенеся необходимые слагаемые, получим

$$\left(\frac{\sigma(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau} \right) y_i^{j+1} = \left(\frac{\sigma\alpha_{i+1}}{h^2} \right) y_{i+1}^{j+1} + \left(\frac{\sigma\alpha_i}{h^2} \right) y_{i-1}^{j+1} + \\ + \left(\frac{(1-\sigma)\alpha_{i+1}}{h^2} \right) y_{i+1}^j + \left(\frac{(1-\sigma)\alpha_i}{h^2} \right) y_{i-1}^j + \left(\frac{c\rho}{\tau} - \frac{(1-\sigma)(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{h^2} \right) y_i^j.$$

Так как $0 \leq \sigma \leq 1$ и $\alpha_i > 0$ множитель в левой части, и все множители в правой части кроме одного положительны. Из-за него получаем условие:

$$\frac{c\rho}{\tau} > \frac{(1-\sigma)(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{h^2}.$$

6. Вопрос 6

Ответ:

- (а) Смешанная разностная сетка определяемая параметром σ устойчива, если

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{cph^2}{4\tau\tilde{K}}, \quad \tilde{K} = \max_{0 \leq x \leq L} K(x)$$

Для абсолютно устойчивых схем, в частности неявная, явная и симметричная, устойчивы при любых соотношениях шагов τ и h /

- (б) Для $\sigma < 1/2$ устойчива при достаточно малом соотношении τ/h^2 , то такие схемы условно устойчивы.