Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №1

на тему:

" Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений"

Студент ФН2-51Б (Группа) (Подпись, дата) М. А. Каган (И. О. Фамилия)

Студент ФН2-51Б (Группа) (Подпись, дата) И. А. Яковлев (И. О. Фамилия)

Проверил (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

Контрольные вопросы

1. **Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?**

   Ответ:

   Рассмотрим векторную функцию $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, где $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши:

   $$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

   (a) Пусть функция $f(t, u)$ определена и непрерывна в прямоугольнике:

   $$D = \Big\{(t, u) : |t - t_0| \leqslant a; |u_i - u_{0,i}| \leqslant b\Big\}.$$

   Выберем $M > 0$, такую что $|f_i| < M$.

   (b) Пусть функция $f(t, u)$ липшиц-непрерывна с постоянной L по переменным $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

   $$|f(t, u^{(1)}) - f(t, u^{(2)})| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |u^{(1)} - u^{(2)}|$$

   Тогда решение задачи Коши существует и единственно на участке

   $$|t - t_0| \leqslant \min a, b/M, 1/L$$

2. **Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией? Что называют интегральной кривой?**

   Ответ:

3. **Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?**

   Ответ:

   (a) Метод Эйлера:

   Порядок точности: $O(\tau)$

   Порядок Аппроксимации: $O(\tau)$

   (b) Метод Рунге – Кутты:

   Порядок точности: $O(\tau^4)$

   Порядок Аппроксимации: $O(\tau^4)$

Замечание: порядок точности метода Рунге – Кутты совпадает с его порядком аппроксимации

(c) Метод Адамса – Башфорта:

$$\text{Порядок точности: } O(\tau^4)$$
$$\text{Порядок Аппроксимации: } O(\tau^4)$$

Замечание: для обеспечения порядка аппроксимации порядка p должны выполнятся $p+1$ уравнений

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\tau} a_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{m} k^{l-1}(b_k + a_k \frac{k}{l}) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, p$$

и условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{m} b_k = 1$$

где линейный m-шаговый разностный метод:

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_m y_{n-m}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m}$$

(d) Метод «предикор – корректор»:

$$\text{Порядок точности: } O(\tau^4)$$
$$\text{Порядок Аппроксимации: } O(\tau)$$

4. **Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?**

   Ответ:

5. **Как найти $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{y}_3$, чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции (1.18)?**

   Ответ:

   (a) Воспользоваться одношаговым явным методом, например, Рунге – Кутты 4-го порядка для нахождения первых 3 значений y.

   (b) Разложить искомую функцию в ряд Тейлора в точке t_0 или экстраполировать каким либо другим способом.

6. **Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким? Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достигнуть заданную**

точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?

Ответ:

7. **Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?**

Ответ:

(a) На каждые k шагов линеаризовывать систему ДУ, оценивая сверху или численно находя собственное значение. Зная диапазон $\lambda \geqslant \max\limits_i \lambda_i$, где λ_i собственные значения линеаризованной системы, будем выбирать шаг $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$

(b) Для методов Рунге – Кутты можно построить такие таблицы коэффициентов как на рис. 1, чтобы один из двух методов обладал порядком

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & b_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s,\,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s \\
\hline
 & \widehat{b_1} & \widehat{b_2} & \ldots & \widehat{b_{s-1}} & \widehat{b_s}
\end{array}
$$

Рис. 1. Таблица

точности на 1 больше. Таким образом, из полученных значений y_n и $\tilde{y_n}$ можно получить оценку погрешности аппроксимации, основываясь на которой необходимо увеличить или уменьшить шаг.