Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №1

на тему:

" Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности"

Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	М. А. Каган (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	И. А. Яковлев (И. О. Фамилия)
Проверил		(Подпись, дата)	А. О. Гусев (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

Контрольные вопросы

1. **Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость**

   Ответ:

   Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно, и непрерывно зависит от входных данных.

   Пусть дана задача

   $$Au = f \text{ в } G,\ Ru = \mu \text{ на } \partial G,$$

   разностная схема

   $$A_h y = \varphi \text{ в } G_h,\ R_h y = \nu \text{ на } \partial G_h,$$

   тогда разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если для

   $$\psi_h = \varphi - f_h + \left((Au)_h - A_h u_h\right),$$
   $$\chi_h = \nu - \mu_h + \left((Ru)_h - R_h u_h\right)$$

   выполняется

   $$\|\psi_h\|_\psi \to 0, \text{ при } h \to 0, \quad \|\chi_h\|_\chi \to 0, \text{ при } h \to 0.$$

   p-й порядок аппроксимации:

   $$\|\psi_h\|_\psi = O\left(h^p\right), \quad \|\chi_h\|_\chi = O\left(h^p\right).$$

   Разностная схема называется **однородной**, если её уравнение записано одинаковым образом и на одном шаблоне во всех узлах сетки без явного выделения особенностей.

   Разностная схема называется **консервативной**, если для её решения выполняются законы сохранения, присущие исходной задаче.

   Разностная схема называется **монотонной**, если в одномерном случае её решение сохраняет монотонность по пространственной переменной, при условии, что соответствующее свойство справедливо для исходной задачи, а в многомерном — удовлетворяет принципу максимума исходной задачи.

   Разностная схема называется **устойчивой**, если её решение непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по h. Пусть y^I, y^{II} —

решения для A_h и R_h, тогда разностная схема устойчива, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) :\ \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\varphi \le f,\ \|\nu^I - \nu^{II}\|_\nu \le f \implies \|y^I - y^{II}\|_Y < \varepsilon.$$

Если разностная схема не зависит от соотношения между шагами по различным независимым переменным, то такую устойчивость называют **безусловной**. В противном случае — **условной**.

Разностное решение сходится к точному, если $\|y - A_h u\|_Y$ стремится к нулю при шаге h стремящимся к нулю. С p-м порядком, если $\|y - A_h u\|_Y = O(h^p)$ при $h \to 0$.

2. **Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?**

   Ответ:

   (a) Пусть y^I, y^{II} решение разностных задача с одинаковым оператором, соответствующим правым частям φ^I, φ^{II} и граничным условиям ν^I и ν^{II}. Разностную схему называют абсолютно устойчивой, если существуют M_1 и M_2 большие нуля, не зависящие от шага сетки, что справедливо неравенство

   $$\|y^I - y^{II}\| \leqslant M_1\|\varphi^I - \varphi^{II}\| + M_2\|\nu^I - \nu^{II}\|$$

   вне зависимости от выбора соотношения шагов. Если при $M_1 = 0$ выполняется неравенство, то говорят об устойчивости по начальным условиям, а если M_2, то об устойчивости по правой части.

   Из рассмотренных схем, только смешанная разностная схема удовлетворяет данному условию.

   (b) Для схем с безусловной аппроксимацией порядка $O(\tau^2 + h)$ можно вести расчет с бо́льшим шагом по времени в сравнении с шагом h.

3. **Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй поярдок аппроксимации при $\alpha_i = \dfrac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}$?**

   Ответ:

   Из выбора обозначений:

   $$\alpha_i = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)}\right)^{-1}.$$

   Введем $I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)}$. Тогда

   $$I = h\frac{K(x_i) + K(x_{i-1})}{2K(x_i)K(x_{i-1})} = h\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})}\right),$$

или

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} = h\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})}\right),$$

что является формулой трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Метод трапеций имеет второй порядок, следовательно исследуемая схема также имеет второй порядок аппроксимации.

4. **Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации приведенных граничных условий с порядком точности** $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$, $O(\tau^2 + h)$ **вы знаете?**

Ответ:

Граничные условия имеют вид:

$$-K(u,\, 0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(0,\, t)} = P(t), \quad -K(u,\, L)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(L,\, t)} = P(t)$$

Рассмотрим случай $K = K(x)$. Аппроксимируем левое ГУ с точностью $O(\tau^2 + h^2)$ с помощью интегро-интерполяционного метода. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

проинтегрируем исходное уравнение по ячейке, примыкающей к левой границе:

$$\int\limits_{x_0}^{x_{1/2}} \left(u(x,\, t_{j+1}) - u(x,\, t_j)\right) dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \big(K(x_{1/2})u_x(x_{1/2},\, t) - K(x_0)u_x(x_0,\, t)\big)\, dt =$$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \big(K(x_{1/2})u_x(x_{1/2},\, t) + P(t)\big)\, dt,$$

откуда получим разностную аппроксимацию

$$\frac{h}{2}\frac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau} = k\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} + \hat{p},$$

т.е.

$$-k\hat{y}_{x,0} + \frac{h}{2}y_{t,0} = \hat{p}.$$

Тогда вычисление погрешности аппроксимации на точном решении исходной задачи дает

$$\psi_{h,0} = -k\hat{u}_{xx}\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\hat{u}_t + O(\tau h + h^2) = O(\tau^2 + h^2),$$

так как на точном решении выполнено равенство $u_t = ku_{xx}$.

Теперь поступим иначе. Проинтегрируем граничное условие на левом начальном отрезке:

$$-\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(t) dx.$$

Используем среднее значение $K(x)$ на отрезке:

$$-k \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(t) dx,$$

где

$$k = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_1} K(x) dx.$$

Тогда

$$-k \left(u(x_1,\, t) - u(x_0,\, t) \right) = hP(t),$$

или

$$y_0 = y_1 + \frac{h}{k} P.$$

Граничное условие, полученное методом интегро-интерполяции, аппроксимировано с точностью $O(h^2)$.

Запишем следующую неявную схему:

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} = \frac{1}{h} \left[K_{+1/2} \frac{\hat{y}_{+1} - \hat{y}}{h} - K_{-1/2} \frac{\hat{y} - \hat{y}_{-1}}{h} \right].$$

Используемая разностная схема имеет порядок $O(\tau)$ по времени и $O(h^2)$ по пространству. Подставив граничное условие, получим общий порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.Рассмотрим симметричную схему ($\sigma = 0.5$):

$$c\rho \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{2h} \left(a_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right) + \frac{1}{2h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right),$$

где $a_i = (\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)})^{-1}$. Если интеграл аппроксимировать по формуле первого порядка, например, по формуле левых прямоугольников, то полученная схема, из-за возникших членов порядка $O(h)$, будет порядка аппроксимации $O(\tau^2 + h)$.

Рассмотрим симметричную схему ($\sigma = 0.5$):

$$c\rho \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{2h} \left(a_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right) + \frac{1}{2h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right),$$

где $a_i = (\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)})^{-1}$. Если интеграл аппроксимировать по формуле первого порядка, например, по формуле левых прямоугольников, то полученная схема, из-за возникших членов порядка $O(h)$, будет порядка аппроксимации $O(\tau^2 + h)$.

5. **При каких h, τ и σ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.**

Ответ:

Явная двухслойная линейная однородная схема

$$\hat{y}_n = \sum_i d_i y_{n+i}$$

монотонна, если все $d_i \geq 0$.

Приведем уравнение теплопроводности к такому виду:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\Big[\sigma\left(\alpha_{i+1}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - \alpha_i(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})\right) + \\ + (1-\sigma)\left(\alpha_{i+1}(y_{i+1}^{j} - y_i^{j}) - \alpha_i(y_i^{j} - y_{i-1}^{j})\right)\Big],$$

сгруппировав и перенеся необходимые слагаемые, получим

$$\left(\frac{\sigma(\alpha_{i+1}+\alpha_i)}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau}\right) y_i^{j+1} = \left(\frac{\sigma\alpha_{i+1}}{h^2}\right) y_{i+1}^{j+1} + \left(\frac{\sigma\alpha_i}{h^2}\right) y_{i-1}^{j+1} + \\ + \left(\frac{(1-\sigma)\alpha_{i+1}}{h^2}\right) y_{i+1}^{j} + \left(\frac{(1-\sigma)\alpha_i}{h^2}\right) y_{i-1}^{j} + \left(\frac{c\rho}{\tau} - \frac{(1-\sigma)(\alpha_{i+1}+\alpha_i)}{h^2}\right) y_i^j.$$

Так как $0 \leq \sigma \leq 1$ и $\alpha_i > 0$ множитель в левой части, и все множители в правой части кроме одного положительны. Из-за него получаем условие:

$$\frac{c\rho}{\tau} > \frac{(1-\sigma)(\alpha_{i+1}+\alpha_i)}{h^2}.$$

6. **Вопрос 6**

Ответ:

(a) Смешанная разностная сетка определяемая параметром σ устойчива, если

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{c p h^2}{4\tau\tilde{K}}, \quad \tilde{K} = \max_{0 \leqslant x \leqslant L} K(x)$$

Для абсолютно устойчивых схем, в частности неявная, явная и симметричная, устойчивы при любых соотношениях шагов τ и h.

(b) Если для $\sigma < 1/2$ устойчива при достаточно малом соотношении τ/h^2, то такие схемы условно устойчивы.

7. **В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?**

Ответ: Для точности $\varepsilon = 10^{-8}$, количество внутренних итераций равно $3-4$. Решение находится с помощью метода простых итераций.

8. **Для случая $\mathbf{K = K(u)}$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.**

Ответ:

Рассмотрим схему:

$$c\rho\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\Big[a_{i+1}(\hat{y})\frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y})\frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h}\Big],$$

где

$$a_i(v) = 0.5[K(v_{i-1}) + K(v_i)], \tag{1}$$

$$a_i(v) = K(\frac{v_i + v_{i-1}}{2}). \tag{2}$$

Таким образом задается неявная схема в случае $K(u)$. Поскольку $K(\hat{y})$ нельзя вычислить явно, возникает система из N нелинейных уравнений.

Способы решения задачи:

(a) Как приближение к $\hat{y}$ использовать значение y. Тогда система решается прогонкой.

(b) Формулу (2) можно разложить в ряд Тейлора до первого члена в точке $\frac{y_i+y_{i-1}}{2}$ и экстраполировать до $\frac{\hat{y}_i+\hat{y}_{i-1}}{2}$

(c) Решать систему методом простой итерации:

$$c\rho\frac{y_i^{(s+1)} - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\Big[a_{i+1}(y^{(s)})\frac{y_{(i+1)}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i(y^s)\frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h}\Big]$$

В качестве $y^{(0)}$ можно брать значение y. Сам итерационный процесс можно обрывать либо после нескольких итераций, либо вести до заданной точности $\max\limits_i |y^(s)_i - y_i^{(s+1)}| \leqslant \varepsilon$

Дополнительные вопросы

1. **Приведите пример неконсервативной схемы.**

Ответ:

Рассмотрим задачу:

$$(K(x)u_x)_x = 0$$

$$K = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant x < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases} \tag{3}$$

Для нее справедлива, кроме точки 0.5, следующая форма записи:

$$K(x)u_{xx} = 0$$

В этом случае схема:

$$K(y)y_{\overline{x}x} = 0$$

будет неконсервативной. Другим примером консервативной схемы будет схема 2-го порядка точности ($\sigma = 0.5$) для коэффициента

$$K = \begin{cases} 3, & 0 \leqslant x < 0.25 \\ 10, & 1/2 \leqslant 0.25 < x < 0.5 \\ 3, & 1/2 \leqslant 0.5 < x < 1 \end{cases} \tag{4}$$

При начальной температуре 100.

2. **Как получить аппроксимацию граничного условия с порядком $O(\tau^2 + h)$ в случае постоянного коэффициента K.**

Ответ: Поскольку коэффициент $K(x,t) = const$, то граничное условие можно представить как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = p(t)/K = A(t)$. Аппроксимируем на прямую:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial u}{\partial x}\,dt\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(t)\,dt\,dx$$

$$0.5\tau((y_1 - y_0) + (\hat{y}_1 - \hat{y}_0)) + O(h) + O(\tau^2) = 0.5h\tau(A(t_i) + A(t_{i+1})) + O(\tau^2)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = A(t_i) + A(t_{i+1}) + O(\tau^2 + h)$$

Полученная формула имеет первый порядок точности. При ее использовании, исходная схема, если обладала высшего порядка аппроксимации, так же становится первого порядка по h.

Доказательство:

Будем раскладывать u в точке $P = P(x_0, t_i)$:

$$y_0 = u(x_0, t_i) = u\Big|_P$$

$$y_1 = u(x_1, t_i) = u\Big|_P + hu_x\Big|_P + \frac{h^2}{2}u_{xx}\Big|_P + O(h^3)$$

$$\hat{y}_0 = u(x_0, t_{i+1}) = u\Big|_P + \tau u_t\Big|_P + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}\Big|_P + O(\tau^3)$$

$$\hat{y}_1 = u(x_1, t_{i+1}) = u\Big|_P + \tau u_t\Big|_P + hu_x\Big|_P + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}\Big|_P + \frac{h^2}{2}u_{xx}\Big|_P + h\tau u_{xt}\Big|_P + O(\tau^3 + h^3)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = 2u_x\Big|_P + hu_{xx} + \tau u_{xt} + O(h^2 + \tau^3/h) A(t_i) = u_x\Big|_P$$

$$A(t_{i+1}) = u_x\Big|_P + \tau u_{xt} + O(\tau^2)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} - A(t_i) - A(t_{i+1}) = O(\tau^2 + h) \tag{5}$$