Mürüvvet UGUN

Genel

Topolojiye Giriş

ve Problem Çözümleri

Prof. Dr. Mahmut Koçak

Nisan Kitabevi Yayınları - 2015

siz kaldığından bu bölümde net (ağ) kavramını ve bir ağın yakınsaklığını tanımlayarak ağların birinci sayılabilir olmayan uzaylarda ne kadar kullanışlı olduğunu göreceğiz.

Onuncu bölümde çarpım uzaylarını tanımlayarak bu uzayların özelliklerini inceleyeceğiz.

On birinci bölümde topolojinin en önemli konularından biri olan kompaklık ve diğer kompaktlık kavramlarını vereceğiz. Bu bölümde analiz derslerinden bildiğimiz maksimum-minimum değer teoremi gibi bazı teoremlerin ispatlarını vereceğiz.

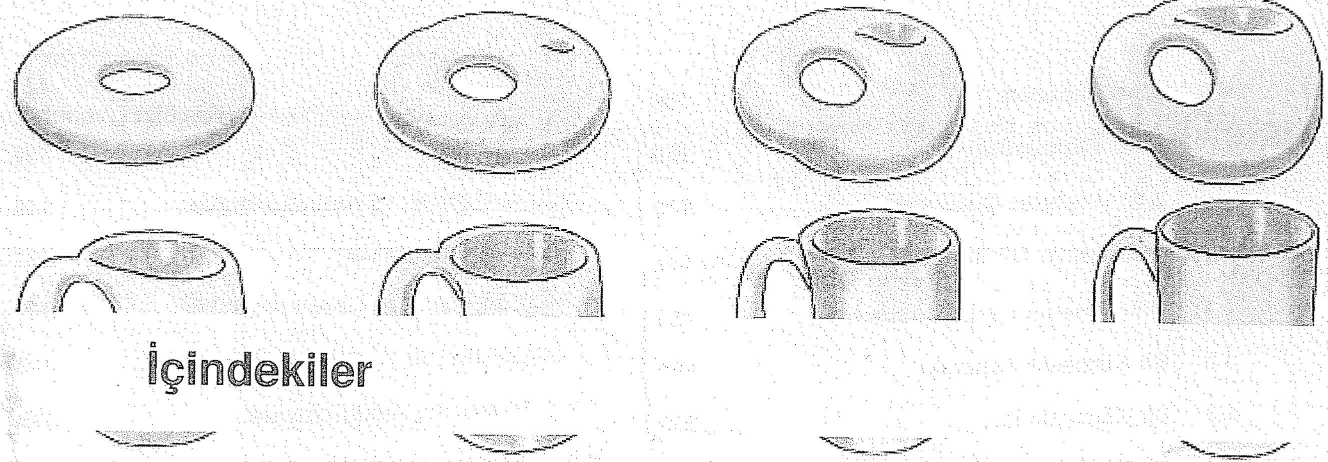
On ikinci bölümde bölüm uzayları ve örnekleri verilecektir.

On üçüncü bölümde topolojinin en önemli konularından biri olan bağlantılılık, yol bağlantılılık, yerel bağlatılılık kavramlarını vereceğiz. Bu bölümde analiz derslerinden bildiğimiz aradeğer teoremi gibi bazı teoremlerin ispatlarını vereceğiz.

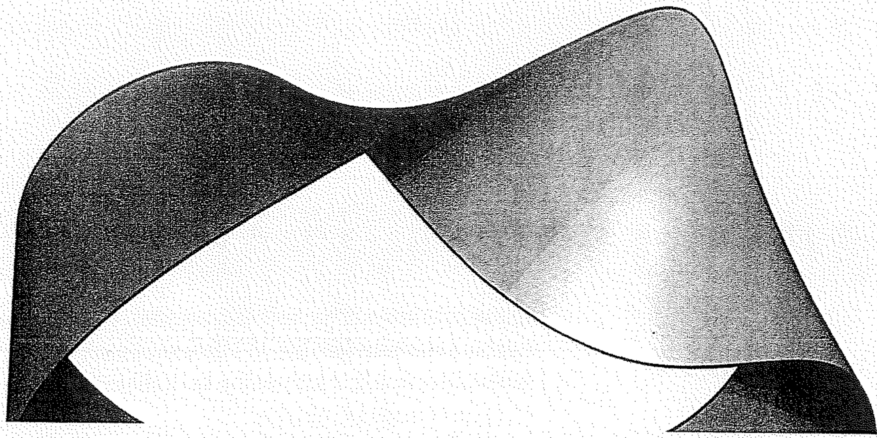
Kitap, konularının seçimi, sıralanışı ve her bakımdan okuyucu ve meslektaşlarımızın yapıcı eleştirileri ile önerilerine açık olup, daha sonraki baskılarda yapılacak değişikliklerle lisans düzeyinde faydalı bir Türkçe kaynak olarak varlığını devam ettirmesi en içten dileğimdir.

Eskişehir, 2015

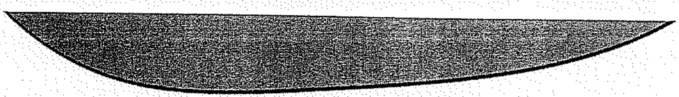
Prof. Dr. Mahmut KOÇAK
Email:mkocak@ogu.edu.tr
http : / /fef.ogu.edu.tr/mkocak



İçindekiler



1. Temel Kavramlar



Bu bölümde bazı terminoloji ve kitap içerisinde ihtiyaç duyulacak olan konular hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Okuyucunun bu konulara aşikar olduğu farzedilmiş ve bu yüzden konular kısaca anlatılarak, sonuçların bir kısmının ispatları verilmemiştir.

1.1. Kümeler

Küme matematiğin temel ve kesin tanımlaması zor olan kavramlarından bir tanesidir. Belli bir kurala göre verilmiş nesneler topluluğuna veya listesine bir küme denir. Bu nesnelere kümenin elemanları veya üyeleri denir. Kümeler genellikle A, B, X gibi büyük harflerle ve kümelerin elemanları a, b, x gibi küçük harflerle gösterilir. X, bir $P(x)$ önermesini sağlayan elemanlardan oluşuyorsa

$$X = \{x \mid x, P(x) \text{ önermesini sağlar}\}$$

şeklinde yazılır. x in X kümesinin bir elemanı olduğunu göstermek için $x \in X$ gösterimi kullanılır. x elemanının X kümesine ait olmadığını belirtmek için $x \notin X$ gösterimi kullanılır. Hiç bir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve bu küme $\emptyset$ ile gösterilir.

Bu kitap boyunca $\mathbb{R}$ ile reel sayılar kümesi, $\mathbb{N}$ ile bütün doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ ile bütün tamsayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ ile bütün rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ile bütün irrasyonel sayıların kümesi gösterilecektir.

İki kümeden birine ait olan her eleman aynı zamanda diğer kümeye de aitse bu kümelere eşit kümeler denir. A ve B iki küme olmak üzere A nın her elemanı aynı zamanda B ye de aitse A ya B nin bir alt kümesi denir ve bu durumu belirtmek için $A \subseteq B$ gösterimi kullanılır. $A \subseteq B$ fakat $A \neq B$ durumunu belirtmek için $A \subseteq B$ gösterimi kullanılır. $\emptyset \neq A \subseteq B$ ise A ya B nin bir öz alt kümesi denir. Bir X kümesinin bütün alt kümelerinin kolleksiyonuna X in kuvvet kümesi denir ve $\mathscr{P}(X)$ ile gösterilir.

Elemanları kümeler olan kümelere kümelerin bir kolleksiyonu veya ailesi denir ve genellikle kümeler kolleksiyonları $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ gibi süslü büyük harflerle gösterilir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için X_n bir küme olmak üzere

$$\{X_n | n = 1, 2, \cdots\} \text{ yani } \{X_n | n \in \mathbb{N}\} \tag{1.1}$$

kümelerin sonsuz bir kolleksiyonudur. Daha genel olarak, I herhangi bir küme ve I nın herbir i elemanı için bir X_i kümesi tanımlı olsun. Bu durumda $\{X_i | i \in I\}$ kümelerin bir kolleksiyonudur. I kümesine bu kolleksiyonun indis (indeks) kümesi denir. O halde (1.1) de $\mathbb{N}$ indis kümesidir.

$\{A_i | i \in I\}$ kümelerin bir kolleksiyonu olsun. A_i kümelerinin birleşimi $\bigcup_{i \in I} A_i$ ile gösterilir ve

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a | \text{en az bir } i \in I \text{ için } a \in A_i\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde A_i kümelerinin kesişimi $\bigcap_{i \in I} A_i$ ile gösterilir ve

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a | \text{her } i \in I \text{ için } a \in A_i\}$$

şeklinde tanımlanır. $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise $\{A_i | i \in I\}$ kolleksiyonuna ayrıktır denir.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad \text{ve} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

eşitliklerine sırasıyla kesişimin birleşim üzerine ve birleşimin kesişim üzerine dağılma kuralları denir. Daha genel olarak $\{B_i | i \in I\}$ kümelerin bir kolleksiyonu ise

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad \text{ve} \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \tag{1.2}$$

olur.

X ve Y iki küme olsun. X kümesine ait olup ta Y kümesine ait olmayan elemanların kümesine Y kümesinin X kümesine göre tümleyeni denir ve bu küme $X \setminus Y$ veya $X - Y$ ile gösterilir. Böylece

$$X \setminus Y = \{x | x \in X, x \notin Y\}$$

dir. $\{A_i | i \in I\}$ bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir kolleksiyonu ise

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \quad \text{ve} \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

olur. Bu kurallar De Morgan Kuralları olarak bilinir.

1.2. Fonksiyonlar

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. X in her x elemanını Y nin yalnız bir y elemanına karşılık getiren bir f kuralına X den Y ye bir fonksiyon denir ve $f : X \to Y$ ile gösterilir.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. x e karşılık tutulan Y nin y elemanı (y ye x in f altındaki görüntüsü denir) $f(x)$ ile gösterilir, yani $y = f(x)$ dir. Bazen, $f : X \to Y$ gösterimi yerine $x \longmapsto f(x)$ gösterimi de kullanılır. Örneğin, $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ şeklinde de gösterilebilir. Fonksiyonun bu şekildeki gösterimi Y kümesini vermez ama çoğu zaman Y nin ne olduğu açıktır.

A herhangi bir X kümesinin bir alt kümesi olsun. A nın bütün elemanlarının f altındaki görüntülerinin oluşturduğu küme $f(A)$ ile gösterilir. Yani

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} \tag{1.3}$$

dır. X kümesine f nin tanım kümesi ve $f(X)$ kümesinede f nin görüntü kümesi denir. $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ise f ye reel değerli fonksiyon denir.

Örten Fonksiyon: $f(X) = Y$ ise f fonksiyonuna örten (veya X den Y üzerine) fonksiyon denir.

Bire-bir Fonksiyon: X in farklı her x ve y elemanları için $f(x)$ ve $f(y)$, Y nin farklı iki elemanı ise f ye bire-bir (1-1) fonksiyon denir. f hem örten hem de bire-bir ise f ye bire-bir örten fonksiyon denir.

Ters Fonksiyon: f bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. "$f(x) = y$ olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(y) = x$" şeklinde tanımlı $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonuna f fonksiyonunun ters fonksiyonu denir.

Eşit Fonksiyonlar: $f, g : X \to Y$ iki fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonlarına eşittir denir ve bu durum $f = g$ şeklinde gösterilir.

Bir Fonksiyonun Kısıtlanmışı: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ özelliğini sağlayan $g : A \to Y$ fonksiyonuna f nin A ya kısıtlanmışı ve f ye de g nin X e genişlemesi denir. f nin A ya kısıtlanmışı olan g fonksiyonu genellikle $f|_A$ ile gösterilir.

Fonksiyonların Bileşkesi: $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $h(x) = g(f(x))$ şeklinde tanımlı $h : X \to Z$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bileşkesi denir ve $h = g \circ f$ ile gösterilir.

Birim Fonksiyon: X boş olmayan bir küme olmak üzere her $x \in X$ için $f(x) = x$ şeklinde tanımlı $f : X \to X$ fonksiyonuna X in birim fonksiyonu denir ve genellikle id_X ile veya kısaca id ile gösterilir.

Bir Kümenin Ters Görüntüsü: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $B \subseteq Y$ olsun. X in f altındaki görüntüsü B nin elemanı olan elemanlarının kümesine B nin f altındaki ters görüntüsü denir ve $f^{-1}(B)$ ile gösterilir. Yani

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \tag{1.4}$$

dir. $f^{-1}(B)$ yi tanımlamak için f^{-1} ters fonksiyonuna gerek yoktur. f^{-1} notasyonu iki farklı düşünceyi belirtmek için kullanılmasına rağmen bir karışıklık meydana gelmez. f nin örten olması gerekmediğinden B nin bazı elemanları X in hiçbir elemanının görüntüsü olmayabilir. Bu $f^{-1}(B)$ nin tanımının geçersiz olmasını gerektirmez. Eğer $B \cap f(X) = \emptyset$ ise $f^{-1}(B) = \emptyset$ dur.

Bir Kümenin Görüntüsü ve Bir Kümenin Ters Görüntüsü İle İlgili Bazı Sonuçlar: (1.3) ve (1.4) de tanımlanan $f(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri ile ilgili bir çok ilişki vardır. Bunlardan bazıları şunlardır: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$ ise

$$f(A_1) \subseteq f(A_2) \tag{1.5}$$

dir. $A_1, A_2 \subseteq X$ ise

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \text{ve} \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

dir. Daha genel olarak, $\{A_i | i \in I\}$, X in alt kümelerinin bir kolleksiyonu ise

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{ve} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i) \tag{1.6}$$

olur. Eğer $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ ise

$$f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \tag{1.7}$$

olur. $B_1, B_2 \subseteq Y$ ise

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{ve} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \tag{1.8}$$

dir. Daha genel olarak, $\{B_i | i \in I\}$, Y nin alt kümelerinin bir kolleksiyonu ise

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{ve} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{1.9}$$

dir. Herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \tag{1.10}$$

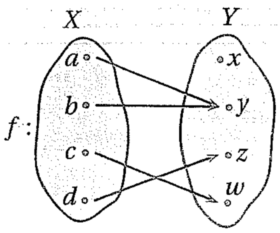
dır. Burada eşitlik f bire-bir ise sözkonusudur. Herhangi bir $B \subseteq Y$ için

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \tag{1.11}$$

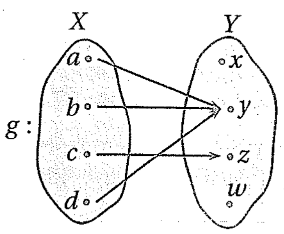
dır. Burada eşitlik sadece f örten ise sözkonusudur. Herhangi bir $B \subseteq Y$ için

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \tag{1.12}$$

dir.



Şekil 1.1



Şekil 1.2

ÖRNEK 1.1. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{x, y, z, w\}$ ve Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 de tanımlanan f ve g fonksiyonları verilsin.

a) f fonksiyonu altında X in bütün alt kümelerinin görüntülerini ve Y nin bütün alt kümelerinin ters görüntülerini bulalım.

b) g fonksiyonu altında X in bütün alt kümelerinin görüntülerini ve Y nin bütün alt kümelerinin ters görüntülerini bulalım.

c) f ve g nin bire-bir veya örten olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM:

a) X in alt kümeleri

$$\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\},$$

ve

$$\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}$$

dir. Y nin alt kümeleri ise

$$\emptyset, Y, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{x,w\}, \{y,z\},$$

ve

$$\{y,w\},\{z,w\},\{x,y,z\},\{x,y,w\},\{y,z,w\},\{x,z,w\}$$

dir. Buna göre

A	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c\}$
$f(A)$	$\emptyset$	$\{y,z,w\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{w\}$	$\{z\}$	$\{y\}$	$\{y,w\}$	$\{y,z\}$	$\{y,w\}$

A	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,c,d\}$
$f(A)$	$\{y,z\}$	$\{w,z\}$	$\{y,w\}$	$\{y,z\}$	$\{y,w,z\}$	$\{y,w,z\}$

ve

B	$\emptyset$	Y	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{w\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{x,w\}$	$\{y,z\}$
$f^{-1}(B)$	$\emptyset$	X	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{d\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{d\}$	$\{c\}$	$\{a,b,d\}$

B	$\{y,w\}$	$\{z,w\}$	$\{x,y,z\}$	$\{x,y,w\}$	$\{y,z,w\}$	$\{x,z,w\}$
$f^{-1}(B)$	$\{a,b,c\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,b,c\}$	X	$\{c,d\}$

olur.

b)

A	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c\}$
$g(A)$	$\emptyset$	$\{y,z\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y,z\}$	$\{y\}$	$\{y,z\}$

A	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,c,d\}$
$g(A)$	$\{y\}$	$\{z,y\}$	$\{y,z\}$	$\{y\}$	$\{y,z\}$	$\{y,z\}$

ve

B	$\emptyset$	Y	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{w\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{x,w\}$	$\{y,z\}$
$g^{-1}(B)$	$\emptyset$	X	$\emptyset$	$\{a,b,d\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\{a,b,d\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	X

B	$\{y,w\}$	$\{z,w\}$	$\{x,y,z\}$	$\{x,y,w\}$	$\{y,z,w\}$	$\{x,z,w\}$
$g^{-1}(B)$	$\{a,b,d\}$	$\{c\}$	X	$\{a,b,d\}$	X	$\{c\}$

olur.

i) $a \neq b$ olduğu halde $f(a) = f(b)$ olduğundan f bire-bir değildir. $x = f(t)$ olacak şekilde bir $t \in X$ olmadığından f örten değildir.

ii) $a \neq b$ olduğu halde $g(a) = g(b)$ olduğundan g bire-bir değildir. $x = g(t)$ olacak şekilde bir $t \in X$ olmadığından g örten değildir.

1.3. Kartezyen Çarpım

$\{X_i \mid i \in I\}$ kümelerin bir kolleksiyonu olsun.

$$X = \{x \mid x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \text{ bir fonksiyon ve her } i \in I \text{ için } x(i) \in X_i\}$$

kümesine X_i kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $\prod_{i \in I} X_i$ şeklinde gösterilir. Böylece $x \in \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $x(i) = x_i$ ise $x = (x_i)_{i \in I}$ veya kısaca $x = (x_i)$ şeklinde yazılır. Örneğin, $I = \{1,2\}$ ise

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

dir. Benzer şekilde, $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ ise $X_1, X_2, \cdots, X_n$ kümelerinin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ kartezyen çarpımı

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \cdots, x_n \in X_n\}$$

dir. Burada $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ ise $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ kartezyen çarpımı X^n ile gösterilir. $I = \mathbb{N}$ ise

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \cdots = \{(x_1, x_2, \cdots) \,|\, x_i \in X_i\}$$

dir. Diğer bir deyişle, $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \cdots$ nin elemanları sonsuz diziler olarak düşünülebilir. $D = \{(x, x, \cdots x) | x \in X\}$ kümesine $X \times X \times \cdots \times X$ çarpım kümesinde köşegen denir.

Her $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ için $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ şeklinde tanımlanan

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$$

fonksiyonuna j.izdüşüm veya j.projeksiyon fonksiyonu denir. Her bir izdüşüm fonksiyonunun örten olduğu açıktır.

1.4. Bağıntılar

X ve Y boş olmayan kümeler olsun. X in herbir x elemanına Y nin bir y elemanını karşılık getiren bir kurala X den Y ye bir bağıntı denir. Bağıntı R ile gösterilmiş olsun. Eğer x ile y bağlı ise xRy şeklinde yazılır. Fonksiyon tanımını yapmamıza yarayan bağıntının diğer bir tanımını verelim. X ve Y boş olmayan kümeler olsun. $X \times Y$ nin herhangi bir alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir. Eğer $X \times Y$ nin bu alt kümesi R ile gösterilmişse, R ye X den Y ye bir bağıntı denir. Eğer $(x, y) \in R$ ise bu durum xRy şeklinde yazılır. Bağıntı yardımıyla fonksiyon tanımı şu şekilde yeniden yazılabilir. f, X den Y ye bir bağıntı olsun. Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde tek bir $y \in Y$ varsa f ye X den Y ye bir fonksiyon denir ve $(x, y) \in f$ ise bu durum $f(x) = y$ şeklinde gösterilir.

X den X e bir R bağıntısına X de bir bağıntı denir. R, X de bir bağıntı olsun. Eğer her $x \in X$ için xRx ise R ye yansıyan, xRy ve yRx ise R ye simetrik, xRy ve yRz olması xRz olmasını gerektiriyorsa R ye geçişken bağıntı denir. Eğer R, X de yansıyan, simetrik ve geçişken bir bağıntı ise R ye bir denklik bağıntısı denir. R bir denklik bağıntısı ise R yerine sık sık $\sim$ sembolü kullanılır.

X boş olmayan bir küme olsun.

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X$$

ve I nın her i, j ikilisi için $X_i = X_j$ veya $X_i \cap X_j = \emptyset$ oluyorsa, boş olmayan kümelerin $\{X_i | i \in I\}$ kolleksiyonuna X in bir ayrışımı (parçalanması) denir. Böylece X in bir x elemanı $\{X_i | i \in I\}$ kolleksiyonunun ayrık elemanlarından bir ve yalnız bir tanesine aittir. X üzerinde "$x \sim y$ olması için gerek ve yeter şart x ve y nin aynı bir X_i kümesine ait olmasıdır" şeklinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

X boş olmayan bir küme ve $\sim$ da X de bir denklik bağıntısı olsun. $x \sim y$ olacak biçimdeki X deki tüm y elemanlarının kümesine $\sim$ bağıntısına göre x in denklik sınıfı denir ve $[x]$ ile gösterilir. Böylece

$$[x] = \{y \in X | x \sim y\}$$

dir. $\sim$ ya göre bütün denklik sınıflarının kümesine X kümesinin bölüm kümesi denir ve genellikle $X/\sim$ ile gösterilir. Yani

$$X/\sim = \{[x] | x \in X\}$$

dir.

Teorem 1.2. ▷

X bir küme ve $\sim$ da X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda

a) $\sim$ ya göre tüm denklik sınıflarının oluşturduğu $\{[x] | x \in X\}$ kolleksiyonu X in bir ayrışımıdır.

b) Her $x, y \in X$ için $[x] = [y]$ olması için gerek ve yeter şart $x \sim y$ olmasıdır.

İSPAT:

a) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ olduğu açıktır. $x, y \in X$ olmak üzere $[x] \neq [y]$ olsun. $[x] \cap [y] = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Bunun için $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \in [x] \cap [y]$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Böylece $z \in [x]$ ve $z \in [y]$ dir. O halde $z \sim x$ ve $z \sim y$ dir. $\sim$ bir denklik bağıntısı olduğundan $y \sim x$ dir. $a \in [x]$ olsun. Bu durumda $a \sim x$ ve böylece $a \sim y$ dir. O halde $a \in [y]$ dir. Böylece $[x] \subseteq [y]$ dir. Benzer şekilde $[x] \supseteq [y]$ olduğu gösterilir. Böylece $[x] = [y]$ olur. Bu ise $[x] \neq [y]$ olması ile çelişir. O halde

$$[x] \cap [y] = \emptyset$$

dur. Böylece $\{[x] | x \in X\}$ kolleksiyonu X in bir ayrışımıdır.

b) $[x] = [y]$ olsun. Bu durumda $x \in [x]$ olduğundan $x \in [y]$ dir. O halde $x \sim y$ dir. Tersine $x \sim y$ olsun. $[x] = [y]$ olduğunu gösterelim. $a \in [x]$ olsun. Bu durumda $a \sim x$ ve böylece $a \sim y$ dir. O halde $a \in [y]$ ve dolayısıyla $[x] \subseteq [y]$ dir. Benzer şekilde $[x] \supseteq [y]$ olduğu gösterilir. Böylece $[x] = [y]$ olur.✔

1.5. Sayılabilir Kümeler

TANIM 1.3. ▷

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. Bire-bir ve örten bir $f : X \to Y$ fonksiyonu varsa X ve Y kümelerine eşgüçlü kümeler denir ve bu durum $X \sim Y$ şeklinde gösterilir. Açıkça $\sim$ bağıntısı bütün kümelerin kolleksiyonu üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $m, n \in \mathbb{N}$ olmal üzere $\{1, 2, \cdots, n\}$ ve $\{1, 2, \cdots, m\}$ kümelerinin eşgüçlü olması için gerek ve yeter şart $n = m$ olmasıdır. Bir X kümesi bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\{1, 2, \cdots, n\}$ kümesi ile eşgüçlü veya $X = \emptyset$ ise X kümesine sonlu küme denir. X sonlu değilse X kümesine sonsuzdur denir. X kümesi ile $\mathbb{N}$ kümesi eşgüçlü ise yani X kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa, X kümesine sayılabilir sonsuzdur denir.

Eğer bir küme sonlu veya sayılabilir sonsuz ise bu kümeye sayılabilir küme denir. Sayılabilir olmayan kümeye sayılamayan küme denir. X kümesi sayılabilir sonsuz ise X in kardinalitisi $\aleph_0$ (veya ω) dır denir ve kard $X = \aleph_0$ (veya kard $X = \omega$) şeklinde gösterilir. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için X ile $\{1, 2, \cdots, n\}$ kümesi eşgüçlü ise X in kardinalitisi n dir denir ve kard $X = n$ şeklinde gösterilir. $X = \emptyset$ ise kard $X = 0$ dır. X kümesi sayılabilir sonsuzsa bire-bir ve örten bir $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu vardır. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ olmak üzere $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ gibi bir liste şeklinde yazılabilir. X sonlu ve boş değilse açıkça $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ şeklinde yazılabilir. Diğer yandan, $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ ($X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$) gibi bir liste şeklinde yazılabilirse X kümesi sayılabilir sonsuz (sonlu) dur.

ÖRNEK 1.4. ▷
Pozitif çift tamsayıların kümesi X in sayılabilir sonsuz olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f(n) = 2n$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Böylece X sayılabilir sonsuzdur.

ÖRNEK 1.5. ▷
Bütün tamsayıların kümesi $\mathbb{Z}$ nin sayılabilir sonsuz olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \\ \dfrac{1-n}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Böylece $\mathbb{Z}$ sayılabilir sonsuzdur.

Teorem 1.6. ▷
X sayılabilir bir küme ve A da X in bir alt kümesi ise A kümeside sayılabilirdir.

İSPAT: X kümesi sonlu veya sonsuzdur. X sonlu ise A da sonlu olacağından A sayılabilirdir. X sayılabilir sonsuz olsun. A sonlu ise sayılabilirdir. A sonlu olmasın. X sayılabilir sonsuz olduğundan $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ şeklinde yazılabilir. $x_{n_0} \in A$ olacak şekilde bir x_{n_0} seçelim.

$$a_n = \begin{cases} x_n, & x_n \in A \\ x_{n_0}, & x_n \notin A \end{cases}$$

olmak üzere $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ dir. Böylece A sayılabilir sonsuzdur. ✔

Teorem 1.7. ▷

a) X ve Y kümeleri eşgüçlü ve X sayılabilir ise Y de sayılabilirdir.

b) X sayılabilir sonsuz bir küme ve A da X in bir sonsuz alt kümesi ise A kümesi sayılabilir sonsuzdur.

İSPAT:

a) X kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuzdur. X sonlu olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için bire-bir ve örten bir

$$f : \{1, 2, \cdots, n\} \to X$$

fonksiyonu vardır. Diğer yandan X ve Y eşgüçlü olduklarından bire-bir ve örten bir $g : X \to Y$ fonksiyonu vardır. Böylece

$$g \circ f : \{1, 2, \cdots, n\} \to Y$$

fonksiyonu bire-bir ve örten olacağından $\{1, 2, \cdots, n\}$ ve Y kümeleri eşgüçlüdür. Böylece Y kümesi sonludur. Şimdi X in sayılabilir sonsuz olduğunu kabul edelim. Bu durumda ispatın ilk kısmında $\{1, 2, \cdots, n\}$ kümesi yerine $\mathbb{N}$ kümesi alınırsa istenilen elde edilir.

b) Her $x \in A$ için $i(x) = x$ şeklinde tanımlı $i : A \to i(A)$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. O halde A ve $i(A)$ kümeleri eşgüçlüdür. Diğer yandan, $i(A) \subseteq X$ olduğundan Teorem 1.6 gereğince $i(A)$ sayılabilirdir. O halde (a) gereğince A sayılabilirdir. Böylece A sayılabilir sonsuzdur.✔

Örnek 1.5, Teorem 1.6 ve 1.7 gereğince $\mathbb{Z}$ nin her alt kümesi sayılabilirdir ve $\mathbb{Z}$ nin sonsuz her alt kümesi sayılabilir sonsuzdur.

Teorem 1.8.

$\{X_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ sayılabilir sonsuz kümelerin ayrık bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.

İSPAT: Her bir X_i kümesi sayılabilir sonsuz olduğundan X_i kümesi

$$\{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}, \cdots\}$$

gibi sonsuz bir liste şeklinde yazılabilir. x_{ij} elemanlarını aşağıdaki şekilde yerleştirelim.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{11} & \rightarrow & x_{12} & & x_{13} & \rightarrow & x_{14} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
x_{21} & & x_{22} & & x_{23} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
x_{31} & & x_{32} & & x_{33} & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \vdots & \swarrow &
\end{array}$$

Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ nin elemanları

$$\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, \cdots\}$$

gibi bir liste şeklinde yazılabilir. X_i kümeleri sayılabilir sonsuz olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.✔

SONUÇ 1.9. ⊳ $\{X_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ sayılabilir sonsuz kümelerin bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.

İSPAT: Yukarıdaki teoremin ispatında tekrar eden x_{ij} terimleri silinirse bu sonucun ispatı elde edilir.✔

ÖRNEK 1.10. ⊳
Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ nun sayılabilir sonsuz olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $m \in \mathbb{N}$ için

$$X_m = \left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots, \frac{n}{m}, \cdots\right\} \quad \text{ve} \quad Y_m = \left\{\frac{-1}{m}, \frac{-2}{m}, \cdots, \frac{-n}{m}, \cdots\right\}$$

olsun. Bu durumda X_m ve Y_m kümeleri sayılabilir sonsuzdur. Böylece $\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ ve $\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$ kümeleri sayılabilir sonsuz kümelerin sayılabilir birleşimi olduğundan sayılabilir sonsuzdur. O halde

$$\mathbb{Q} = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m\right) \cup \{0\}$$

kümesi sayılabilir sonsuzdur.✍

Teorem 1.6 ve Örnek 1.10 gereğince rasyonel sayıların herhangi bir alt kümesi sayılabilirdir.

SONUÇ 1.11. ⊳ Sayılabilir kümelerin herhangi bir sayılabilir birleşimi sayılabilirdir.

Teorem 1.12 ⊳
$\{X_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ sayılabilir sonsuz kümelerin bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.

İSPAT: Önce iki sayılabilir sonsuz kümenin kartezyen çarpımının sayılabilir sonsuz olduğunu gösterelim.

$$X = \{x_1, x_2, \cdots\} \text{ ve } Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$$

sayılabilir sonsuz iki küme olsun. Bu durumda

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x_i, y_1), (x_i, y_2), \cdots\}$$

dır. Böylece $X \times Y$ kümesi sayılabilir sonsuz kümelerin sayılabilir sonsuz birleşimi olduğundan sayılabilir sonsuzdur. Şimdi $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ kümelerinin sayılabilir sonsuz olduklarını kabul edelim ve $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times X_{n+1} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}$$

ve $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, X_{n+1}$ kümeleri sayılabilir sonsuz olduklarından ispatın ilk kısmı gereğince $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times X_{n+1}$ kümesi sayılabilir sonsuzdur. Dolayısıyla $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times X_{n+1}$ kümesi sayılabilir sonsuzdur. Böylece tümevarım yöntemi gereğince sonlu sayıdaki sayılabilir sonsuz kümelerin kartezyen çarpımının sayılabilir sonsuz olduğu gösterilmiş olur.✔

SONUÇ 1.13. ▶ Sonlu sayıdaki sayılabilir kümelerin kartezyen çarpımları da sayılabilirdir.

Teorem 1.14. ▶

X ve Y iki küme olmak üzere $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

a) X sayılabilir ve f örten ise Y de sayılabilirdir.
b) Y sayılabilir ve f bire-bir ise X de sayılabilirdir.

İSPAT:

a) X kümesi sonlu ise $f(X) = Y$ de sonlu olacağından Y sayılabilirdir. Şimdi, X kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu varsayalım. f fonksiyonu örten olduğundan her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır. Her $y \in Y$ için $f(x_y) = y$ olacak şekilde tek bir $x_y \in X$ seçelim ve bunların kümesine A diyelim, yani $A = \{x_y | y \in Y\}$ olsun. Bu durumda $A \subseteq X$ olduğundan Teorem 1.6 gereğince A sayılabilirdir. Her $x_y \in A$ için $f_{|A}(x_y) = f(x_y)$ şeklinde tanımlı $f_{|A} : A \to Y$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. O halde A ile Y eşgüçlüdür. A sayılabilir olduğundan Y de sayılabilirdir.

b) Y sayılabilir olduğundan Teorem 1.6 gereğince $f(X)$ sayılabilirdir. Her $x \in X$ için $g(x) = f(x)$ şeklinde tanımlı $g : X \to f(X)$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Böylece X ile $f(X)$ eşgüçlüdür. $f(X)$ sayılabilir olduğundan X de sayılabilirdir.✔

Teorem 1.15. ▶

X sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda X in bütün sonlu alt kümelerinin $\{A \subseteq X | A$ sonlu$\}$ kolleksiyonu sayılabilirdir.

İSPAT: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{P}_n$ kolleksiyonu X in n elemanlı bütün alt kümelerinin kolleksiyonu olsun. Bu durumda her $A \in \mathscr{P}_n$ kümesi $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ şeklinde yazılabilir. Her $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \in \mathscr{P}_n$ için $f(A) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ şeklinde bir $f : \mathscr{P}_n \to X^n$ fonksiyonu tanımlayalım. Açıkça f fonksiyonu bire-bir dir. Sonuç 1.13 gereğince X^n sayılabilir olduğundan Teorem 1.14 gereğince $\mathscr{P}_n$ sayılabilirdir. Sonuç 1.11 gereğince $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}_n$ kolleksiyonu sayılabilirdir. X in bütün sonlu alt kümelerinin kolleksiyonu $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}_n$ olduğundan X in bütün sonlu alt kümelerinin kolleksiyonu sayılabilirdir. ✔

Teorem 1.16. ▶ **Georg Cantor**

X bir küme olsun. Bu durumda X ile $\mathscr{P}(X)$ eşgüçlü değildir.

İSPAT: X ile $\mathcal{P}(X)$ arasında bire-bir ve örten hiç bir fonksiyonun olmadığını göstermeliyiz. Örten bir $f : X \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonunun olmadığını gösterelim. Bunun için örten bir $f : X \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonunun olduğunu kabul edelim. Her bir $x \in X$ için $f(x) \in \mathcal{P}(X)$ dir. Diğer bir deyişle $f(x) \subseteq X$ dir.

$$Y = \{x \in X | x \notin f(x)\}$$

olsun. Bu durumda $Y \subseteq X$ yani $Y \in \mathcal{P}(X)$ dir. Böylece, f örten olduğundan $Y = f(y)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Bu durumda $y \in Y$ veya $y \notin Y$ dir. $y \in Y$ olsun. Y nin tanımı gereğince $y \notin f(y)$ dir. $f(y) = Y$ olduğundan $y \notin Y$ dir. Bu ise $y \in Y$ olması ile çelişir. Şimdi, $y \notin Y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Y nin tanımı gereğince $y \in f(y)$ dir. $f(y) = Y$ olduğundan $y \in Y$ dir. Bu ise $y \notin Y$ olması ile çelişir. O halde örten hiçbir $f : X \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonu yoktur. Dolayısıyla bire-bir ve örten hiçbir $f : X \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonu yoktur. Böylece X ile $\mathcal{P}(X)$ eşgüçlü değildir. ✔

Teorem 1.17.

X bir küme olsun. Bu durumda X ile $\mathcal{P}(X)$ in bir alt kolleksiyonu eşgüçlüdür.

İSPAT: Her $x \in X$ için $f(x) = \{x\}$ şeklinde tanımlı $f : X \to \{\{x\} | x \in X\}$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Böylece X ile $\mathcal{P}(X)$ in $\{\{x\} | x \in X\}$ alt kolleksiyonu eşgüçlüdür. ✔

SONUÇ 1.18. X sonsuz bir küme ise $\mathcal{P}(X)$ sayılamaz bir kümedir.

İSPAT: X sonsuz olduğundan Teorem 1.17 gereğince $\mathcal{P}(X)$ sonsuzdur. $\mathcal{P}(X)$ in sayılabilir sonsuz olduğunu varsayalım. Teorem 1.6 gereğince X sayılabilir sonsuz olur. Bu durumda X ile $\mathcal{P}(X)$ eşgüçlü olur. Bu ise Teorem 1.16 ile çelişir. O halde $\mathcal{P}(X)$ sayılamazdır. ✔

Teorem 1.19.

$[0,1]$ aralığı sayılamazdır.

İSPAT: $a_1, a_2, \cdots$ sayıları $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ sayılarından biri olmak üzere $[0,1]$ aralığındaki herhangi bir reel sayı $0.a_1a_2a_3\cdots$ şeklinde yazılabilir. $[0,1]$ aralığının sayılabilir sonsuz olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$[0,1] = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots\}$$

şeklinde yazılabilir. $a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots$ sayılarının ondalık açılımlarını

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots a_{1n}\cdots \\
a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots a_{2n}\cdots \\
a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots a_{3n}\cdots \\
&\vdots \\
a_m &= 0.a_{m1}a_{m2}a_{m3}a_{m4}\cdots a_{mn}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \neq 1 \\ 2, & a_{nn} = 1 \end{cases}$$

olmak üzere $a = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq a_{nn}$ olduğundan $a \neq a_n$ dir. Böylece $a \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots\}$ dir. Diğer yandan $a \in [0,1]$ dir. Bu ise $[0,1] = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots\}$ olması ile çelişir. O halde $[0,1]$ aralığı sayılamazdır.✔

Teorem 1.6 ve Teorem 1.19 gereğince $\mathbb{R}$ sayılamazdır. Böylece $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ve Sonuç 1.11 gereğince $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sayılamazdır.

TANIM 1.20. ▷
Eşgüçlü kümelerin bir temsilcisine bir kardinal sayısı denir ve $\aleph$ ile gösterilir. X ile $\aleph$ sınıfına ait bir küme eşgüçlü ise X in kardinalitisi $\aleph$ dır denir ve bu durum $\text{kard}\, X = \aleph$ (veya $|X| = \aleph$) şeklinde gösterilir. Açıkça X ve Y gibi iki kümenin eşgüçlü olması için gerek ve yeter şart $\text{kard}\, X = \text{kard}\, Y$ olmasıdır. $\mathbb{R}$ nin kardinalitisi c (continuum) ile gösterilir, yani $\text{kard}\, \mathbb{R} = c$ dir. m ve n iki kardinal sayısı olsun. Bu durumda $m \leq n$ olması için gerek ve yeter şart $\text{kard}\, X = m$, $\text{kard}\, Y = n$ ve X ile Y nin bir alt kümesi eşgüçlü olacak şekilde X ve Y kümelerinin olmasıdır. $m \leq n$ ve $m \neq n$ ise $m < n$ dir. Teorem 1.17 gereğince her X kümesi için $\text{kard}\, X < \text{kard}\, \mathcal{P}(X)$ dir. $\text{kard}\, X = \aleph$ ise $\text{kard}\, \mathcal{P}(X) = 2^{\aleph}$ (veya $\text{kard}\, \mathcal{P}(X) = 2^{\text{kard}\, X}$) ile gösterilir.

Teorem 1.21. ▷
$\aleph_0 < c$ dir.

İSPAT: $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Q}$ eşgüçlü ve $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan $\text{kar}\mathbb{N} = \aleph_0 \leq \text{kard}\, \mathbb{R} = c$ dir. Diger yandan, $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ eşgüçlü olmadığından $\aleph_0 \neq c$ ve dolayısıyla $\aleph_0 < c$ dir.✔

1.6. Sıralanmış Kümeler

TANIM 1.22. ▷
X boş olmayan bir küme ve X üzerinde bir bağıntı $\leq$ olsun.
a) Her $x \in X$ için $x \leq x$ dir. ($\leq$ in yansıma özelliği)
b) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ dir. ($\leq$ in ters simetri özelliği)
c) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir. ($\leq$ in geçişme özelliği)
özellikleri sağlanıyorsa $\leq$ bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. X kümesine de $\leq$ bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme denir. $x, y \in X$ için $x \leq y$ ile $y \geq x$ aynı anlamda kullanılmaktadır. Kısmi sıralı bir X kümesinin boş olmayan her A alt kümeside aynı bağıntının $A \times A$ ya kısıtlanmışına göre kısmi sıralı bir kümedir. x, y kısmi sıralı bir X kümesinin iki elemanı olsun. $x \leq y$ veya $x \geq y$ ise x, y elemanlarına karşılaştırılabilir denir. X kümesi $\leq$ bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme olsun. X in her x ve y elemanları karşılaştırılabiliyorsa $\leq$ bağıntısına tam (lineer) sıralama bağıntısı denir. Bu durumda X kümesine tam (lineer) sıralı küme denir. X kümesi $\leq$ bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme ve $x \in X$ olsun. Her $y \in X$ için $y \geq x$ olması

$y = x$ olmasını gerektiriyorsa, diğer bir deyişle x den büyük veya x e eşit x den başka bir eleman yoksa x elemanına X kümesinin bir maksimal elemanı denir. Benzer şekilde, her $y \in X$ için $y \leq x$ olması $y = x$ olmasını gerektiriyorsa, diğer bir deyişle x den küçük veya x e eşit x den başka bir eleman yoksa x elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir. Her $x \in X$ için $x_0 \leq x$ ise x_0 a X kümesinin $\leq$ bağıntısına göre en küçük elemanı veya minimum elemanı denir ve $\min X = x_0$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde her $x \in X$ için $x \leq x_0$ ise x_0 a X kümesinin $\leq$ bağıntısına göre en büyük elemanı veya maksimum elemanı denir ve $\max X = x_0$ şeklinde gösterilir. Kısmi sıralanmış bir X kümenin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı varsa X kümesine iyi sıralı küme denir. X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi A olsun. Her $a \in A$ için $x \leq a$ özelliğini sağlayan $x \in X$ elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir. x elemanı A nın bir alt sınırı ve x, A nın diğer bütün alt sınırlarından büyük veya eşitse x e A nın en büyük alt sınırı veya infinumu denir ve $\inf A = x$ ile gösterilir. Her $a \in A$ için $x \geq a$ özelliğini sağlayan $x \in X$ elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir. x elemanı A nın bir üst sınırı ve x, A nın diğer bütün üst sınırlarından küçük veya eşitse x e A nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A = x$ ile gösterilir. Bir kümenin birden fazla alt ve üst sınırı olmasına rağmen eğer varsa tek bir en büyük alt ve tek bir en küçük üst sınırı vardır.

Şimdi, matematiğin bir çok dalında kaçınılmaz olarak kullanılan önemli bir yardımcı teoremi ispatsız olarak verelim. Bu yardımcı teoremin ispatı herhangi bir küme kavramı kitabında bulunabilir.

YARDIMCI TEOREM 1.23. ▶ ZORN YARDIMCI TEOREMİ
X boş olmayan kısmi sıralı bir küme ve X in tam sıralı her alt kümesinin bir üst sınırı olsun. Bu durumda X in bir maksimal elemanı vardır.

1.7. Reel Sayı Sistemi

Kabul ettiğimiz reel sayılar sistemi, cebirsel cisim aksiyomlarını, lineer sıralama aksiyomlarını ve son olarak da en küçük üst sınır aksiyomunu sağlayan elemanlardan oluşan bir kümedir. Bu aksiyomlar aşağıda verilmiştir. $\mathbb{R}$ nin bu aksiyomları sağladığı gösterilebilir.

Cisim Aksiyomları

I. Toplamsal Grup Aksiyomları

a) $\mathbb{R}$ deki her x, y elemanı için $\mathbb{R}$ de x ve y nin toplamı diye tanımlanan ve $x + y$ ile gösterilen bir eleman vardır.
b) $\mathbb{R}$ deki her x, y için $x + y = y + x$ dir.
c) $\mathbb{R}$ deki her x, y, z için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.
d) $\mathbb{R}$ deki her x için $x + 0 = x$ olacak şekilde bir tek 0 elemanı vardır.
e) Her $x \in \mathbb{R}$ için x e bağlı olarak $x + (-x) = 0$ olacak şekilde $-x$ ile gösterilen $\mathbb{R}$ nin bir tek elemanı vardır.

II. Çarpımsal Grup Aksiyomları

a) $\mathbb{R}$ deki her x, y için x ve y nin çarpımı olarak tanımlanan ve xy ile gösterilen $\mathbb{R}$ nin bir tek elemanı vardır.
b) $\mathbb{R}$ deki her x, y için $xy = yx$ dir.
c) $\mathbb{R}$ deki her x, y, z için $x(yz) = (xy)z$ dir.
d) Her $x \in \mathbb{R}$ için $1x = x$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ nin bir tek 1 (0 dan farklı) elemanı vardır.
e) $x \neq 0$ özelliğindeki her $x \in \mathbb{R}$ için $xx^{-1} = 1$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ nin bir tek x^{-1} elemanı vardır.

III. Çarpımın Toplam Üzerine Dağılma Özelliği

$\mathbb{R}$ deki her x, y, z için $x(y+z) = xy + xz$ dir.

Tam (lineer) Sıralama Bağıntısı

a) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x < y$, $y < x$, $x = y$ durumlarından yalnız biri gerçeklenebilecek biçimde $\mathbb{R}$ üzerinde " $<$ " ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bağıntı vardır.
b) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.
c) $x < y$ ise her $z \in \mathbb{R}$ için $x + z < y + z$ dir.
d) $x < y$ ve $0 < z$ ise $xz < yz$ dir.

$x < y$ ve $y > x$ aynı anlamdadır. $x < y$ veya $x = y$ durumu $x \leq y$ ile gösterilir. $x \leq y$ ile $y \geq x$ aynı anlamdadır.

$x > 0$ özelliğindeki reel sayılara pozitif reel sayılar denir. $x < 0$ özelliğindeki reel sayılara negatif reel sayılar denir. Genellikle, $\mathbb{R}^-$ ile pozitif olmayan reel sayıların kümesi, $\mathbb{R}^+$ ile negatif olmayan reel sayıların kümesi, $\mathbb{Z}^-$ ile pozitif olmayan tamsayıların kümesi, $\mathbb{Z}^+$ ile negatif olmayan tamsayıların kümesi gösterilir.

TANIM 1.24. ▷
$I \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $a, b \in I$ ve $a < c < b$ özelliğindeki her $c \in \mathbb{R}$ sayısı için $c \in I$ oluyorsa I ya bir aralık denir. $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \qquad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \qquad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

kümelerine sırasıyla açık aralık, kapalı aralık, soldan kapalı aralık ve sağdan kapalı aralık denir. $[a,b]$ aralığı hariç daima $a < b$ olduğu kabul edilecektir. Ara sıra $[a,b]$ tipindeki bir aralık için $b = a$ olduğunu kabul edeceğiz. Açıkça, her a için $[a,a] = \{a\}$ dır.

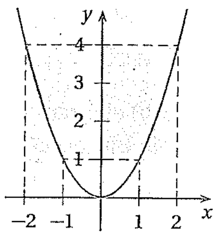
$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \qquad [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \qquad (-\infty,\infty) = \mathbb{R},$$
$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \qquad (-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

kümelerine sınırsız (sonsuz) aralıklar denir.

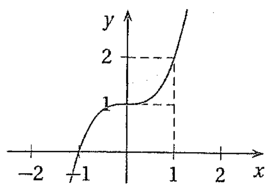
ÖRNEK 1.25. ▷
$f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $A = [-1,0]$ ve $B = [0,1]$ olsun.

a) $f^{-1}((1,4))$ kümesini bulalım. b) $f(A)$ kümesini bulalım.

c) $f(B)$ kümesini bulalım. **d)** $f(A \cap B)$ kümesini bulalım.



Şekil 1.3



Şekil 1.4

ÇÖZÜM:

a)

$$\begin{aligned} f^{-1}((1,4)) &= \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in (1,4)\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \in (1,4)\} = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x^2 < 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1\} = (-2,-1) \cup (1,2) \end{aligned}$$

olur. (Şekil 1.3 ye bakınız.)

b)

$$f(A) = \{f(x) | x \in [-1,0]\} = \{x^2 | x \in [-1,0]\} = [0,1]$$

dir.

c)

$$f(B) = \{f(x) | x \in [0,1]\} = \{x^2 | x \in [0,1]\} = [0,1]$$

dir.

d) $A \cap B = \{0\}$ olduğundan

$$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$$

dır.

Bu durumda $f(A) \cap f(B) = [0,1] \cap [0,1] = [0,1]$ ve $f(A \cap B) = \{0\}$ olduğundan

$$f(A) \cap f(B) \nsubseteq f(A \cap B)$$

dir.✍

ÖRNEK 1.26. ▷
$f(x) = x^3 + 1$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f^{-1}((1,2))$ kümesini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f^{-1}((1,2)) &= \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in (1,2)\} = \{x \in \mathbb{R} | x^3 + 1 \in (1,2)\} = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x^3 + 1 < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | 0 < x^3 < 1\} = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} = (0,1) \end{aligned}$$

olur. (Şekil 1.4 ye bakınız.)✍

En Küçük Üst Sınır ve En Büyük Alt Sınır Aksiyomları

Teorem 1.27. ▷
A, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve üstten sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $K = \sup A$ olması için gerek ve yeter şart

a) Her $x \in A$ için $x \leq K$
b) Her $\varepsilon > 0$ için $x > K - \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır.

koşullarını sağlayan bir K nın olmasıdır.

Boş olmayan alttan sınırlı bir kümenin infimumu için benzer bir önerme yazılabilir. Bu teoremlerin ispatı için Alıştırma 14 ve 15 ye bakınız.

Teorem 1.28.

Reel sayıların boş olmayan üstten sınırlı her A alt kümesinin bir en küçük üst sınırı vardır.

İSPAT: M, A nın bir üst sınırı olsun ve keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı seçelim. n sabit kalmak kaydıyla

$$M-\frac{1}{2^n},\ M-\frac{2}{2^n},\ M-\frac{3}{2^n},\cdots$$

dizisini oluşturalım. $A \neq \emptyset$ ve $\left\{M-\frac{l}{2^n}\,\middle|\, l \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi alttan sınırlı olmadığından $x \in A$ için $x > M-l/2^n$ olacak şekilde bir $M-\frac{l}{2^n} \in \left\{M-\frac{l}{2^n}\,\middle|\, l \in \mathbb{N}\right\}$ vardır. Dolayısıyla $M-\frac{l}{2^n}$ sayısı A nın bir üst sınırı olamaz. $M-\frac{k_n}{2^n}$ sayısı A nın üst sınırı olmayacak şekildeki en küçük doğal sayı k_n olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n = M-k_n/2^n$ diyelim. Böylece b_n, A nın bir üst sınırı olamaz ancak $b_n+\frac{1}{2^n}$ sayısı A nın bir üst sınırıdır. Açıkça $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots$ dür. Böylece (b_n) dizisi artan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \leq M$ olduğundan üsten sınırlıdır. O halde $b_n \to K$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi K nin A kümesinin en küçük üst sınırı olduğunu gösterelim. $x \in A$ olsun. $x > K$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon = x-K$ diyelim ve $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$x = K+\varepsilon \geq b_n+\varepsilon > b_n+\frac{1}{2^n}$$

dir. Böylece $b_n+\frac{1}{2^n}$ sayısı A nın bir üst sınırı olamaz. Bu ise bir çelişkidir. O halde her $x \in A$ için $x \leq K$ dır. Yani K sayısı A nın bir üst sınırıdır. Benzer şekilde her $\varepsilon > 0$ için $K-\varepsilon < x$ olacak şekilde bir $x \in A$ olduğu gösterilir. O halde Teorem 1.27 gereğince K sayısı A nın en küçük üst sınırıdır. ✔

Teorem 1.29.

Reel sayıların boş olmayan alttan sınırlı her B alt kümesinin bir en büyük alt sınırı vardır.

İSPAT: B alttan sınırlı olduğundan $-B = \{-x | x \in B\}$ kümesi üstten sınırlıdır. (Alıştırma 16 ya bakınız.) Böylece $-B$ kümesinin Teorem 1.28 gereğince K gibi bir en küçük üst sınırı vardır. $-K$ sayısıda B nin en büyük alt sınırıdır. (Alıştırma 16 ya bakınız.)✔

Supremum ve İnfinumla İlgili Bazı Sonuçlar:

a) A ve B boş kümeden farklı üstten sınırlı iki küme olsun. Bu durumda $A \cup B$ de üstten sınırlıdır ve

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

dir. (Alıştırma 18 e bakınız.)

b) A ve B boş kümeden farklı, alttan sınırlı iki küme olsun. Bu durumda $A \cup B$ de alttan sınırlıdır ve

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

dir. (Alıştırma 18 e bakınız.) Ancak iki kümenin kesişimi için benzer bir sonuç yazılamaz.

c) Eğer A üstten sınırlı ve $B \subseteq A$ olmak üzere $B \neq \emptyset$ ise B üstten sınırlıdır ve $\sup B \leq \sup A$ dır. Benzer şekilde A alttan sınırlı ve $B \subseteq A$ olmak üzere $B \neq \emptyset$ ise B alttan sınırlıdır ve $\inf A \leq \inf B$ dir.

d) A ve B boş olmayan iki küme ve

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

olsun. Eğer A ve B kümeleri üstten sınırlı ise $A + B$ de üstten sınırlıdır ve

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

dir. (Alıştırma 19 a bakınız.) Benzer şekilde, A ve B kümeleri alttan sınırlı ise $A + B$ de alttan sınırlıdır ve

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

dir. (Alıştırma 19 a bakınız.)

$f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\{f(x) \mid x \in X\}$ kümesi üstten sınırlı olsun. Bu durumda

$$\sup\{f(x) \mid x \in X\}$$

aynı zamanda $\sup_{x\in X} f(x)$ veya $\sup_x f(x)$ şeklinde gösterilir.

f ve g reel değerli, X üzerinde tanımlanmış iki fonksiyon olsun. Eğer

$$\{f(x) \mid x \in X\}, \ \{g(x) \mid x \in X\} \tag{1.13}$$

kümeleri üstten sınırlı ise

$$\{f(x) + g(x) \mid x \in X\} \tag{1.14}$$

kümesi de üstten sınırlıdır ve

$$\sup_{x\in X}\{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x) \tag{1.15}$$

dir. (Alıştırma 20 ye bakınız.) Eğer (1.13) daki kümeler alttan sınırlı ise (1.14) deki küme de alttan sınırlıdır ve

$$\inf_{x\in X}\{f(x) + g(x)\} \geq \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} g(x) \tag{1.16}$$

dir. (Alıştırma 21 e bakınız.) Kesin eşitsizlik (1.15) ve (1.16) de ortaya çıkabilir. Örneğin $X = [0,1]$ ve f, g fonksiyonları $f(x) = x$ ve $g(x) = -x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\sup_{x\in[0,1]}\{f(x) + g(x)\} = \sup_{x\in[0,1]}\{x + (-x)\} = 0$$

dır. Diğer yandan

$$\sup_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = \sup_{x\in[0,1]}\{x\} = 1 \quad \text{ve} \quad \sup_{x\in[0,1]}\{g(x)\} = \sup_{x\in[0,1]}\{-x\} = 0$$

dır. Böylece

$$\sup_{x\in[0,1]}\{f(x)\} + \sup_{x\in[0,1]}\{g(x)\} = 1$$

dir. O halde

$$\sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \neq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$$

dir. Benzer şekilde

$$\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \neq \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} g(x)$$

olduğu gösterilir.

1.8. Alıştırmalar

1. $\{B_i \mid i\in I\}$ kümelerin boş olmayan bir kolleksiyonu olmak üzere

$$A\cap\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i) \quad \text{ve} \quad A\cup\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$$

olduğunu gösteriniz.

2. $\{A_i \mid i\in I\}$ bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan boş olmayan bir kolleksiyon olsun. Bu durumda

$$X\setminus\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i) \quad \text{ve} \quad X\setminus\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$$

olduğunu gösteriniz.

3. X boş olmayan bir küme, $A,B,C\subseteq X$ ve $A\subseteq B$ olsun. Bu durumda

$$A\setminus C = A\cap(B\setminus C)$$

olduğunu gösteriniz.

4. $\{A_i \mid i\in I\}$ ve $\{B_i \mid i\in I\}$ bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan boş olmayan iki kolleksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\setminus\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B_i)$$

olduğunu gösteriniz.

5. X bir küme ve $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(X)$ olsun. Bu durumda

a) $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ $(U_i\in\mathscr{B})$ olduğunu gösteriniz.

b) $X = \bigcap_{i\in\emptyset} U_i$ $(U_i\in\mathscr{B})$ olduğunu gösteriniz.

6. $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) $A_1\subseteq A_2\subseteq X$ ise $f(A_1)\subseteq f(A_2)$ olduğunu gösteriniz.

b) $\{A_i \mid i\in I\}$, X in alt kümelerinin bir kolleksiyonu ise

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

olduğunu gösteriniz.

c) $\{A_i \mid i\in I\}$, X in alt kümelerinin bir kolleksiyonu ise

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

olduğunu gösteriniz.

7. $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) $B\subseteq Y$ ve $B\cap f(X)=\emptyset$ ise $f^{-1}(B)=\emptyset$ olduğunu gösteriniz.

b) $B_1\subseteq B_2\subseteq Y$ ise $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$ olduğunu gösteriniz.

c) $\{B_i \mid i\in I\}$, Y nin alt kümelerinin boş olmayan bir kolleksiyonu ise

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

olduğunu gösteriniz.

d) $\{B_i \mid i\in I\}$, Y nin alt kümelerinin boş olmayan bir kolleksiyonu ise

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

olduğunu gösteriniz.

8. $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) $A\subseteq X$ için $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ olduğunu gösteriniz.

b) f bire-bir ise herhangi bir $A\subseteq X$ için $A=f^{-1}(f(A))$ olduğunu gösteriniz.

c) $B\subseteq Y$ için $f(f^{-1}(B)) = B\cap f(X)$ olduğunu gösteriniz.

d) f örtense herhangi bir $B\subseteq Y$ için $f(f^{-1}(B))=B$ olduğunu gösteriniz.

e) Herhangi bir $B\subseteq Y$ için $f^{-1}(Y\setminus B) = X\setminus f^{-1}(B)$ olduğunu gösteriniz.

9. $f: X\to Y$ ve $g: Y\to Z$ iki fonksiyon olsun.

a) f bire-bir örtense $A\subseteq X$ için $f(X\setminus A) = Y\setminus f(A)$ olduğunu gösteriniz.

b) f ve g bire-bir örtense $g\circ f$ ninde bire-bir örten olduğunu gösteriniz.

c) f nin tersi var ve h ise $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(B) = h(B)$ olduğunu gösteriniz.

10. Sonlu sayıdaki sonlu kümelerin birleşiminin sonlu olduğunu gösteriniz.

11. $\{X_i | i \in I\}$ kümelerin boş olmayan bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şartın en az bir $i \in I$ için $X_i = \emptyset$ olması gerektiğini ispatlayınız.

12. $\{X_i | i \in I\}$ ve $\{Y_i | i \in I\}$ kümelerin boş olmayan iki kolleksiyonu olsun. Bu durumda

a) Her $i \in I$ için $X_i \subseteq Y_i$ ise $\prod_{i\in I} X_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$ olduğunu gösteriniz.

b) $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ ve $\prod_{i\in I} X_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$ ise her $i \in I$ için $X_i \subseteq Y_i$ olduğunu gösteriniz.

13. $\{X_i | i \in I\}$ ve $\{Y_i | i \in I\}$ kümelerin boş olmayan iki kolleksiyonu olsun. Bu durumda

a) $\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} Y_i\right) = \prod_{i\in I}(X_i \cap Y_i)$ olduğunu gösteriniz.

b) $\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\prod_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \prod_{i\in I}(X_i \cup Y_i)$ olduğunu gösteriniz.

14. A, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve üstten sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $K = \sup A$ olması için gerek ve yeter şart

a) Her $x \in A$ için $x \leq K$

b) Her $\varepsilon > 0$ için $x > K - \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır

koşullarını sağlayan bir K nın olmasıdır, önermesini ispatlayınız.

15. A, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve alttan sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $k = \inf A$ olması için gerek ve yeter şart

a) Her $x \in A$ için $x \geq k$

b) Her $\varepsilon > 0$ için $x < k + \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır

koşullarını sağlayan bir k nın olmasıdır, önermesini ispatlayınız.

16. A reel sayıların boş olmayan bir alt kümesi olsun.

A kümesi üstten sınırlı ve $\sup A = a$ ise $-A = \{-x | x \in A\}$ kümesinin alttan sınırlı ve $\inf(-A) = -a$ olduğunu gösteriniz.

A kümesi alttan sınırlı ve $\inf A = a$ ise $-A = \{-x | x \in A\}$ kümesinin üstten sınırlı ve $\sup(-A) = -a$ olduğunu gösteriniz.

17.

A üstten sınırlı bir küme ve $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $B \neq \emptyset$ ise B ninde üstten sınırlı olduğunu ve $\sup B \leq \sup A$ olduğunu gösteriniz.

b) A alttan sınırlı bir küme ve $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $B \neq \emptyset$ ise B ninde alttan sınırlı ve $\inf A \leq \inf B$ olduğunu gösteriniz.

18.

a) A ve B reel sayıların boş kümeden farklı üstten sınırlı iki alt kümesi olsun. Bu durumda $A \cup B$ ninde üstten sınırlı ve

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

olduğunu gösteriniz.

b) A ve B reel sayıların boş kümeden farklı alttan sınırlı iki alt kümesi olsun. Bu durumda $A \cup B$ ninde alttan sınırlı ve

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

olduğunu gösteriniz.

c) İki kümenin kesişimi için (a) ve (b) deki sonuçların doğru olmadığını gösteren birer örnek veriniz.

19. A ve B reel sayıların boş olmayan iki alt kümesi ve

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

olsun.

a) A ve B kümeleri üstten sınırlı ise $A + B$ ninde üstten sınırlı ve

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

olduğunu gösteriniz.

b) A ve B kümeleri alttan sınırlı ise $A + B$ ninde alttan sınırlı ve

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

olduğunu gösteriniz.

20. X boş olmayan bir küme ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer

$$\{f(x) | x \in X\},\ \{g(x) | x \in X\} \tag{1.17}$$

kümeleri üstten sınırlı ise

$$\{f(x) + g(x) | x \in X\} \tag{1.18}$$

kümesininde üstten sınırlı ve

$$\sup_{x\in X}\{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x) \tag{1.19}$$

olduğunu gösteriniz.

21. Alıştırma 20 de verilen (1.17) deki kümeler alttan sınırlı ise (1.18) de belirtilen kümeninde alttan sınırlı ve

$$\inf_{x\in X} \{f(x)+g(x)\} \geq \inf_{x\in X} f(x)+\inf_{x\in X} g(x) \qquad (1.20)$$

olduğunu gösteriniz.

22. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin üstten sınırlı olmadığını gösteriniz.

23. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümelerinin üstten ve alttan sınırlı olmadıklarını gösteriniz.

24. $\mathbb{R}$ nin

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}, \qquad [a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\},$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}, \qquad (a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$$

alt kümelerinin alttan ve üstten sınırlı olduklarını gösteriniz.

25. $\mathbb{R}$ nin

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}, \qquad [a,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\},$$
$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}, \qquad (-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$$

alt kümelerinin alttan veya üstten sınırlı olup olmadıklarını araştırınız.

26.

a) İki farklı reel sayı arasında bir rasyonel sayının olduğunu gösteriniz.

b) İki farklı reel sayı arasında bir irrasyonel sayının olduğunu gösteriniz.

1.9. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

a) Önce $A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)$ olduğunu gösterelim. $x\in A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)$ olsun. Bu durumda $x\in A$ ve $x\in\bigcup_{i\in I}B_i$ dir. Böylece $x\in B_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0\in I$ vardır. O halde $x\in A\bigcap B_{i_0}$ ve dolayısıyla $x\in\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)$ olur. Böylece

$$A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\subseteq\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)\qquad(1.21)$$

dir. $x\in\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)$ olsun. Bu durumda $x\in A\bigcap B_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0\in I$ vardır. O halde $x\in A$ ve $x\in B_{i_0}$ olacağından $x\in\bigcup_{i\in I}B_i$ olur. Buradan $x\in A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)$ elde edilir. Böylece

$$\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)\subseteq A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\qquad(1.22)$$

dir. (1.21) ve (1.22) gereğince $\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)=A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)$ dir.

b) Şimdi $A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\bigcup B_i)$ olduğunu gösterelim. $x\in A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)$ olsun. Bu durumda $x\in A$ veya $x\in\bigcap_{i\in I}B_i$ olacağından $x\in A$ veya her $i\in I$ için $x\in B_i$ olur. O halde her $i\in I$ için $x\in A\bigcup B_i$ dir. Böylece $x\in\bigcap_{i\in I}(A\bigcup B_i)$ olur. O halde

$$A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in I}(A\bigcup B_i)\qquad(1.23)$$

dir. $x\in\bigcap_{i\in I}(A\bigcup B_i)$ olsun. Bu durumda her $i\in I$ için $x\in A\bigcup B_i$ dir. Böylece $x\in A$ veya bazı $i\in I$ için $x\in B_i$ dir. $x\in A$ ise $x\in A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)$ olur. $x\notin A$ ise her $i\in I$ için $x\in B_i$ olur. Böylece $x\in\bigcap_{i\in I}B_i$ ve böylece $x\in A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)$ olur. O halde

$$\bigcap_{i\in I}(A\bigcup B_i)\subseteq A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)\qquad(1.24)$$

dir. (1.23) ve (1.24) gereğince

$$\bigcup_{i\in I}(A\bigcap B_i)=A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 2

a) Önce $X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)$ olduğunu gösterelim. $x\in X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i$ olsun. Bu durumda $x\in X$ ve $x\notin\bigcup_{i\in I}A_i$ dir. O halde $x\in X$ ve her $i\in I$ için $x\notin A_i$ dir. Böylece her $i\in I$ için $x\in X\setminus A_i$ olur. Buradan $x\in\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)$ elde edilir. Bu durumda

$$X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)\qquad(1.25)$$

olur. $x\in\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)$ olsun. Bu durumda her $i\in I$ için $x\in X\setminus A_i$ olur. Böylece $x\in X$ ve her $i\in I$ için $x\notin A_i$ dir. Buradan $x\in X$ ve $x\notin\bigcup_{i\in I}A_i$ elde edilir. O halde $x\in X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i$ olur. Dolayısıyla

$$\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)\subseteq X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i\qquad(1.26)$$

dir. (1.25) ve (1.26) gereğince

$$X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)$$

dir.

b) Şimdi $X\setminus\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$ olduğunu gösterelim. $x\in X\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$ olsun. Bu durumda $x\in X$ ve $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$ dir. O halde $x\in X$ ve enaz bir $i_0\in I$ için $x\notin A_{i_0}$ dir. Böylece $i_0\in I$ için $x\in X\setminus A_{i_0}$ olur. Buradan $x\in\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$ elde edilir. Bu durumda

$$X\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)\qquad(1.27)$$

olur. $x\in\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$ olsun. Bu durumda en az bir $i_0\in I$ için $x\in X\setminus A_{i_0}$ olur. Böylece $x\in X$ ve $i_0\in I$ için $x\notin A_{i_0}$ dır. Buradan $x\in X$ ve $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$ elde edilir. Böylece $x\in X\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$ olur. Dolayısıyla

$$\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)\subseteq X\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\qquad(1.28)$$

dir. (1.27) ve (1.28) gereğince

$$X\setminus\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 3

$x \in A\setminus C$ olsun. Bu durumda $x \in A$ ve $x \notin C$ dir. $A \subseteq B$ olduğundan $x \in B$ ve $x \notin C$ olur. Yani $x \in B\setminus C$ dir. O halde $x \in A$ ve $x \in B\setminus C$ olduğundan $x \in A \cap (B\setminus C)$ olur. Böylece

$$A\setminus C \subseteq A \cap (B\setminus C) \tag{1.29}$$

dır. $x \in A\cap(B\setminus C)$ olsun. $x \in A$ ve $x \in B\setminus C$ olacağından $x \in A$ ve $x \notin C$ olur. O halde $x \in A\setminus C$ dir. Bu durumda

$$A\cap(B\setminus C) \subseteq A\setminus C \tag{1.30}$$

olur. (1.29) ve (1.30) den $A\cap(B\setminus C) = A\setminus C$ elde edilir.✔

ÇÖZÜM 4

$x \in \bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B_i)$ olsun. Bu durumda $x \in A_{i_0}\setminus B_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Böylece $x \in A_{i_0}$ ve $x \notin B_{i_0}$ dır. Dolayısıyla $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ve $x \notin \bigcap_{i\in I} B_i$ dır. O halde

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

dir. Bu durumda

$$\bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B_i) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 5

a) $\bigcup_{i\in\emptyset} U_i \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $x \in \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ olduğundan $x \in U_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in \emptyset$ vardır. $i_0 \in \emptyset$ olması $\emptyset$ kümesinin tanımı ile çelişir. O halde $\bigcup_{i\in\emptyset} U_i = \emptyset$ dur.

b) $\mathscr{B}' = \{X\setminus B_i | B_i \in \mathscr{B}\}$ olsun. Bu durumda **(a)** gereğince $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset}(X\setminus B_i)$ dir. Alıştırma 2 gereğince $X = \bigcap_{i\in\emptyset} B_i$ dir.✔

ÇÖZÜM 6

a) $y \in f(A_1)$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in A_1$ vardır. $A_1 \subseteq A_2$ olduğundan $x \in A_2$ dir. Böylece $f(x) = y \in f(A_2)$ dir. O halde $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ dir.

b) $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ vardır. Böylece $x \in A_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Dolayısıyla $f(x) = y \in f(A_{i_0})$ dır. O halde $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ dir. Böylece

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i) \tag{1.31}$$

dir. $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ olsun. Bu durumda $y \in f(A_{i_0})$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Diğeryandan $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in A_{i_0}$ vardır. Bu durumda $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ olur. O halde $f(x) = y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ ve dolayısıyla

$$\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subseteq f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \tag{1.32}$$

olur. (1.31) ve (1.32) gereğince

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

dir.

c) $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ vardır. Böylece her $i \in I$ için $x \in A_i$ ve dolayısıyla $f(x) = y \in f(A_i)$ dır. O halde $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ olur. Böylece

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 7

a) $x \in f^{-1}(B)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(x) \in B$ dir. Böylece $f(x) \in B \cap f(X)$ dir. Bu ise $B \cap f(X) = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $f^{-1}(B) = \emptyset$ dur.

b) $x \in f^{-1}(B_1)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in B_1$ dir. $B_1 \subseteq B_2$ olduğundan $f(x) \in B_2$ dir. Böylece $x \in f^{-1}(B_2)$ dir. O halde $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ dir.

c) $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$ dir. Böylece $f(x) \in B_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Buradan $x \in f^{-1}(B_{i_0})$ olacağından $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ olur. O halde

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{1.33}$$

dir. $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ olsun. Bu durumda $x \in f^{-1}(B_{i_0})$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Böylece $f(x) \in B_{i_0}$ ve dolayısıyla

$f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$ olur. Böylece $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$ dir. O halde

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \tag{1.34}$$

olur. (1.33) ve (1.34) gereğince $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ dir.

d) $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$ olur. Böylece her $i \in I$ için $f(x) \in B_i$ dir. O halde her $i \in I$ için $x \in f^{-1}(B_i)$ ve dolayısıyla $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ dir. Bu durumda

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \tag{1.35}$$

olur. $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $x \in f^{-1}(B_i)$ dir. Böylece her $i \in I$ için $f(x) \in B_i$ ve dolayısıyla $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$ dir. Böylece $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$ dir. O halde

$$\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \tag{1.36}$$

olur. (1.35) ve (1.36) gereğince $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$ dir.✔

ÇÖZÜM 8

a) $x \in A$ olsun. Bu durumda $f(x) \in f(A)$ dır. Böylece $x \in f^{-1}(f(A))$ dır. O halde

$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

dır.

b) (a) gereğince $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ dır. $x \in f^{-1}(f(A))$ olsun. Bu durumda $f(x) \in f(A)$ dır. Böylece $f(a) = f(x)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. f bire-bir olduğundan $a = x$ dir. Bu durumda $x \in A$ olur. O halde $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ ve dolayısıyla

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

dır.

c) $y \in f(f^{-1}(B))$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in f^{-1}(B)$ vardır. Böylece $y = f(x) \in B$ dir. O halde

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(X) \tag{1.37}$$

olur. $y \in B \cap f(X)$ olsun. Bu durumda $y \in B$ ve $y \in f(X)$ dır. Böylece $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Bu durumda $f(x) = y \in B$ olur. O halde $x \in f^{-1}(B)$ dir. Böylece $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ dir. O halde

$$B \cap f(X) \subseteq f(f^{-1}(B)) \tag{1.38}$$

dir. (1.37) ve (1.38) gereğince $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$ dir.

d) f örten olduğundan $f(X) = Y$ dir. Böylece

$$B \cap f(X) = B \cap Y = B$$

dir. (c) gereğince $B = f(f^{-1}(B))$ olur.

e) $x \in f^{-1}(Y\backslash B)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in Y\backslash B$ dir. Böylece $f(x) \in Y$ ve $f(x) \notin B$ dir. Bu durumda $x \notin f^{-1}(B)$ dir. Böylece $x \in X\backslash f^{-1}(B)$ dir. O halde

$$f^{-1}(Y\backslash B) \subseteq X\backslash f^{-1}(B) \tag{1.39}$$

dir. $x \in X\backslash f^{-1}(B)$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $x \notin f^{-1}(B)$ dir. O halde $f(x) \notin B$ ve dolayısıyla $f(x) \in Y\backslash B$ dir. Böylece $x \in f^{-1}(Y\backslash B)$ dir. O halde

$$X\backslash f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y\backslash B) \tag{1.40}$$

dir. (1.39) ve (1.40) gereğince

$$X\backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(Y\backslash B)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 9

a) $y \in f(X\backslash A)$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X\backslash A$ vardır. $x \notin A$ ve f bire-bir olduğundan $f(x) = y \notin f(A)$ dır. Böylece $y \in Y\backslash f(A)$ dır. O halde

$$f(X\backslash A) \subseteq Y\backslash f(A) \tag{1.41}$$

dır. $y \in Y\backslash f(A)$ olsun. Bu durumda $y \notin f(A)$ dır. Diğer yandan f örten olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. f bire-bir olduğundan $x \notin A$ dır. Bu durumda $x \in X\backslash A$ dır. O halde $y = f(x) \in f(X\backslash A)$ dır. Buradan

$$Y\backslash f(A) \subseteq f(X\backslash A) \tag{1.42}$$

olur. (1.41) ve (1.42) gereğince $Y\backslash f(A) = f(X\backslash A)$ dır.

b) $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda f bire-bir olduğundan $f(x) \neq f(y)$ dir. g bire-bir olduğundan $g(f(x)) \neq g(f(y))$ olur. Bu durumda

$$(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$$

yani $g \circ f$ bire-birdir.

c) $x \in f^{-1}(B)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in B$ olur. Böylece $x = \mathrm{id}_X(x) = h(f(x)) \in h(B)$ olur. Yani

$$f^{-1}(B) \subseteq h(B) \tag{1.43}$$

dir. $x \in h(B)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in f(h(B)) = (f \circ h)(B) = \mathrm{id}_Y(B) = B$ olur. Böylece $x \in f^{-1}(B)$ olur. Yani

$$h(B) \subseteq f^{-1}(B) \tag{1.44}$$

olur. (1.43) ve (1.44) gereğince

$$f^{-1}(B) = h(B)$$

olur.✔

ÇÖZÜM 10

$A_1, A_2, \cdots, A_m$ kümeleri sonlu olsun. $A_1, A_2, \cdots, A_m$ kümeleri

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n_1}\} \\ A_2 & = & \{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n_2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & = & \{a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn_m}\} \end{array}$$

şeklinde yazılabilir. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ kümesinin en fazla

$$a_{1n_1} + a_{2n_2} + \cdots + a_{mn_m}$$

kadar elemanı vardır. Böylece $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ kümesi sonludur.✔

ÇÖZÜM 11

$\Rightarrow$). $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$ olsun. Her $i \in I$ için $X_i \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $i \in I$ için $x_i \in X_i$ olacak şekilde bir x_i vardır. Bu durumda $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ dir. Bu ise $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde en az bir $i \in I$ için $X_i = \emptyset$ dur.

$\Leftarrow$). En az bir $i \in I$ için $X_i = \emptyset$ olsun. $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ vardır. Böylece her $i \in I$ için $x_i \in X_i$ dir. O halde her $i \in I$ için $X_i \neq \emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$ olur.✔

ÇÖZÜM 12

a) $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $x_i \in X_i$ dir. Böylece her $i \in I$ için $X_i \subseteq Y_i$ olduğundan $x_i \in Y_i$ dir. O halde $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$ dir.

b) $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ olduğundan bir $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ vardır. Bir $i_0 \in I$ için $X_{i_0} \not\subseteq Y_{i_0}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \in X_{i_0} \setminus Y_{i_0}$ olacak şekilde bir z vardır.

$$y_i = \begin{cases} x_i, & i \neq i_0 \\ z, & i = i_0 \end{cases}$$

olmak üzere $y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ve $(y_i)_{i \in I} \notin \prod_{i \in I} Y_i$ dir. Bu ise $\prod_{i \in I} X_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$ olması ile çelişir. O halde her $i \in I$ için $X_i \subseteq Y_i$ dir.✔

ÇÖZÜM 13

a) $(x_i)_{i \in I} \in \left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} Y_i\right)$ olsun. Bu durumda $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ve $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$ dir. O halde her $i \in I$ için $x_i \in X_i$ ve $x_i \in Y_i$ dir. Bu durumda $i \in I$ için $x_i \in X_i \cap Y_i$ dir. Böylece $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i)$ dir. O halde

$$\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} Y_i\right) \subseteq \prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i) \tag{1.45}$$

dir. $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i)$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $x_i \in X_i \cap Y_i$ dir. O halde her $i \in I$ için $x_i \in X_i$ ve $x_i \in Y_i$ dir. Böylece $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ve $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$ dir. Bu durumda $(x_i)_{i \in I} \in \left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} Y_i\right)$ ve dolayısıyla

$$\prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i) \subseteq \left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} Y_i\right) \tag{1.46}$$

dir. Böylece (1.45) ve (1.46) gereğince $\prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i) = \left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} Y_i\right)$ dir.

b) $(x_i)_{i \in I} \in \left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cup \left(\prod_{i \in I} Y_i\right)$ olsun. Bu durumda $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ veya $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$ dir. O halde her $i \in I$ için $x_i \in X_i$ veya $x_i \in Y_i$ dir. Bu durumda $i \in I$ için $x_i \in X_i \cup Y_i$ dir. Böylece $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (X_i \cup Y_i)$ dir. O halde

$$\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cup \left(\prod_{i \in I} Y_i\right) \subseteq \prod_{i \in I} (X_i \cup Y_i)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 14

$K = \sup A$ olsun.

a) Supremum tanımı gereğince her $x \in A$ için $x \leq K$ dır.
b) $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $K = \sup A$ olduğundan $K - \varepsilon$ sayısı A nın bir üst sınırı olamaz. Böylece $x > K - \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır.

Tersine (a) ve (b) şartları sağlansın. () gereğince K sayısı A kümesinin bir üst sınırıdır. $K_1 < K$ olmak üzere K_1 sayısı A nın bir üst sınırı ve $\varepsilon = |K - K_1|/2$ olsun. Bu durumda $K_1 < K - \varepsilon < K$ dır. (b) gereğince $K_1 < K - \varepsilon < x$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. Bu ise K_1 in A kümesinin bir üst sınırı olması ile çelişir. O halde $K = \sup A$ dır.✔

ÇÖZÜM 15

$k = \inf A$ olsun.

a) İnfinum tanımı gereğince her $x \in A$ için $x \geq k$ dır.
b) $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $k = \inf A$ olduğundan $k+\varepsilon$ sayısı A nın bir alt sınırı olamaz. Böylece $x < k + \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır.

Tersine (a) ve (b) şartları sağlansın. (a) gereğince k sayısı A kümesinin bir alt sınırıdır. $k_1 > k$ olmak üzere k_1 sayısı A nın bir alt sınırı ve $\varepsilon = |k - k_1|/2$ olsun. Bu durumda $k_1 > k + \varepsilon > k$ dır. (b) gereğince $k_1 > k + \varepsilon > x$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. Bu ise k_1 in A kümesinin bir alt sınırı olması ile çelişir. O halde $k = \inf A$ dır.✔

ÇÖZÜM 16

a) Her $x \in A$ için $x \leq a$ dır. Böylece her $-x \in -A$ için $-x \geq -a$ dır. O halde $-a$ sayısı $-A$ kümesinin bir alt sınırıdır. Bu durumda $\inf(-A)$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\sup A = a$ olduğundan $a - \varepsilon < x$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. Bu durumda $-a + \varepsilon > -x$ olacak şekilde bir $-x \in -A$ vardır. Alıştırma 15 gereğince $-a$ sayısı $-A$ kümesinin infimumudur. O halde $\inf A = -a$ dır.
b) Her $x \in A$ için $x \geq a$ dır. Böylece her $-x \in -A$ için $-x \leq -a$ dır. O halde $-a$ sayısı $-A$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bu durumda $\sup(-A)$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\inf A = a$ olduğundan $a + \varepsilon > x$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. Bu durumda $-a - \varepsilon < -x$ olacak şekilde bir $-x \in -A$ vardır. Bu durumda Alıştırma 14 gereğince $-a$ sayısı $-A$ kümesinin suprenumudur. O halde $\sup(-A) = -a$ dır.✔

ÇÖZÜM 17

a) A üstten sınırlı olduğundan $\sup A$ vardır. Dolayısıyla her $x \in A$ için $x \leq \sup A$ dır. Her $x \in B$ için $x \in A$ olacağından $x \leq \sup A$ dır. O halde $\sup A$ sayısı B kümesinin bir üst sınırıdır. O halde B üstten sınırlıdır. Üstelik bir kümenin herhangi bir üst sınırı kümenin supremumdan büyük veya eşit olduğundan $\sup B \leq \sup A$ dır.
b) A alttan sınırlı olduğundan $\inf A$ vardır. Dolayısıyla her $x \in A$ için $x \geq \inf A$ dır. Her $x \in B$ için $x \in A$ olacağından $x \geq \inf A$ dır. O halde $\inf A$ sayısı B kümesinin bir alt sınırıdır. O halde B alttan sınırlıdır. Üstelik bir kümenin herhangi bir alt sınırı kümenin infimumundan küçük veya eşit olduğundan $\inf B \geq \inf A$ dır.✔

ÇÖZÜM 18

a) Her $x \in A \cup B$ için $x \in A$ veya $x \in B$ dir. $x \in A$ ise $x \leq \sup A$ ve $x \in B$ ise $x \leq \sup B$ dir. Yani her $x \in A \cup B$ için $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ dir. Bu durumda $\max\{\sup A, \sup B\}$ sayısı $A \cup B$ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\} \tag{1.47}$$

dir. Diğer taraftan, Alıştırma 17 gereğince $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ ve $\sup B \leq \sup(A \cup B)$ dir. O halde

$$\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\} \tag{1.48}$$

dir. Dolayısıyla, (1.47) ve (1.48) den $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ elde edilir.
b) Alıştırma 17 gereğince $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan $\inf(A \cup B) \leq \inf A$ ve $\inf(A \cup B) \leq \inf B$ dir. Yani

$$\inf(A \cup B) \leq \min\{\inf A, \inf B\} \tag{1.49}$$

dir. Diğer taraftan her $x \in A \cup B$ için $x \in A$ veya $x \in B$ dir. $x \in A$ ise $\inf A \leq x$ ve $x \in B$ ise $\inf B \leq x$ olduğundan, her $x \in A \cup B$ için $\min\{\inf A, \inf B\} \leq x$ dir. Bu durumda $\min\{\inf A, \inf B\}$ sayısı $A \cup B$ kümesinin bir alt sınırıdır. Buradan

$$\inf(A \cup B) \geq \min\{\inf A, \inf B\} \tag{1.50}$$

elde edilir. (1.49) ve (1.50) den $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B)$ elde edilir.
c) i) $A = (0,1)$, $B = (1/2, 2)$ olsun. Bu durumda $A \cap B = (1/2, 1)$ dir. Böylece

$$\sup(A \cap B) = 1$$

dir. $\sup A = 1$ ve $\sup B = 2$ olduğundan

$\max\{\sup A, \sup B\} = 2$ dir. Böylece

$$\sup(A \cap B) \neq \max\{\sup A, \sup B\}$$

dır.

ii) $A = (-1,1)$, $B = (1/2,2)$ olsun. Bu durumda $A \cap B = (1/2,1)$ dir. Böylece

$$\inf(A \cap B) = 1/2$$

dir. $\inf A = -1$ ve $\inf B = 1/2$ olduğundan $\min\{\sup A, \sup B\} = -1$ dir. Böylece

$$\inf(A \cap B) \neq \min\{\sup A, \sup B\}$$

dır.✔

ÇÖZÜM 19

a) A ve B kümeleri üstten sınırlı olduklarından $\sup A = K_1$ ve $\sup B = K_2$ sayıları vardır. Bu durumda her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq K_1$ ve $b \leq K_2$ dir. $a + b \in A + B$ olsun. Bu durumda $a + b \leq K_1 + K_2$ dir. Böylece $K_1 + K_2$ sayısı $A + B$ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde $A + B$ kümesi üstten sınırlıdır.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dır. Alıştırma 14 gereğince

$$K_1 - \frac{\varepsilon}{2} < a \quad \text{ve} \quad K_2 - \frac{\varepsilon}{2} < b$$

olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Bu durumda $K_1 - \frac{\varepsilon}{2} + K_2 - \frac{\varepsilon}{2} = K_1 + K_2 - \varepsilon < a + b$ ve $a + b \in A + B$ dir. Böylece Alıştırma 14 gereğince $K_1 + K_2$ sayısı $A + B$ kümesinin supremumudur. O halde $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ dir.

b) A ve B kümeleri alttan sınırlı olduklarından $\inf A = K_1$ ve $\inf B = K_2$ sayıları vardır. Bu durumda her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \geq K_1$ ve $b \geq K_2$ dir. $a + b \in A + B$ olsun. Bu durumda $a + b \geq K_1 + K_2$ dir. Böylece $K_1 + K_2$ sayısı $A + B$ kümesinin bir alt sınırıdır. O halde $A + B$ kümesi alttan sınırlıdır.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dır. Alıştırma 14 gereğince $K_1 + \frac{\varepsilon}{2} > a$ ve $K_2 + \frac{\varepsilon}{2} > b$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Bu durumda

$$K_1 + \frac{\varepsilon}{2} + K_2 + \frac{\varepsilon}{2} = K_1 + K_2 + \varepsilon > a + b$$

ve $a + b \in A + B$ dir. Böylece Alıştırma 14 gereğince $K_1 + K_2$ sayısı $A + B$ kümesinin infimumudur. O halde $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ dir.✔

ÇÖZÜM 20

$A = \{f(x) \mid x \in X\}$ ve $B = \{g(x) \mid x \in X\}$ kümeleri üstten sınırlı olduklarından $\sup A = K_1$ ve $\sup B = K_2$ sayıları vardır. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \leq K_1$ ve $g(x) \leq K_2$ dir. $f(x) + g(x) \in A + B$ olsun. Bu durumda

$$f(x) + g(x) \leq K_1 + K_2$$

dir. Böylece $K_1 + K_2$ sayısı $A + B$ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde $A + B$ kümesi üstten sınırlıdır. Bir kümenin supremumu kümenin herhangi bir üst sınırından küçük veya eşit olduğundan

$$\sup_{x \in X}\{f(x) + g(x)\} \leq K_1 + K_2 = \sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 21

$A = \{f(x) \mid x \in X\}$ ve $B = \{g(x) \mid x \in X\}$ kümeleri alttan sınırlı olduklarından $\inf A = K_1$ ve $\inf B = K_2$ sayıları vardır. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \geq K_1$ ve $g(x) \geq K_2$ dir. $f(x) + g(x) \in A + B$ olsun. Bu durumda

$$f(x) + g(x) \geq K_1 + K_2$$

dir. Böylece $K_1 + K_2$ sayısı $A + B$ kümesinin bir alt sınırıdır. O halde $A + B$ kümesi alttan sınırlıdır. Bir kümenin infimumu kümenin herhangi bir alt sınırından büyük veya eşit olduğundan

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + g(x)\} \geq K_1 + K_2 = \inf_{x \in X} f(x) + \inf_{x \in X} g(x)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 22

$\mathbb{N}$ nin üstten sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\sup \mathbb{N} = u$ olacak şekilde bir $u \in \mathbb{R}$ vardır. Diğer yandan $n \in \mathbb{N}$ ise $n + 1 \in \mathbb{N}$ dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $n + 1 \leq u$ olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq u - 1$ elde edilir. Bu ise $u - 1 \leq u$ ve $\sup \mathbb{N} = u$ olması ile çelişir. O halde $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.✔

ÇÖZÜM 23

a) $\mathbb{Z}$ nin üstten sınırlı olmadığını Alıştırma 22 ya benzer şekilde yapılır. $\mathbb{Z}$ nin alttan sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\inf \mathbb{Z} = u$ olacak şekilde bir $u \in \mathbb{R}$ vardır. Diğer yandan $n \in \mathbb{Z}$ ise $n - 1 \in \mathbb{Z}$ dir. Böylece her $n \in \mathbb{Z}$ için

$n-1 \geq u$ dur. Böylece her $n \in \mathbb{Z}$ için $n \geq u+1$ dir. Bu ise $u+1 \geq u$ ve $\inf \mathbb{Z} = u$ olması ile çelişir. O halde $\mathbb{Z}$ alttan sınırlı değildir.

b) Şimdi $\mathbb{Q}$ nun üstten sınırlı olmadığını gösterelim. $\mathbb{Q}$ nun üstten sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $q \in \mathbb{Q}$ için $q \leq u$ olacak şekilde bir $u \in \mathbb{R}$ vardır. $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olmadığından $u \leq n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$n+1 \in \mathbb{Q} \quad \text{ve} \quad q \leq u \leq n < n+1$$

dir. Bu ise her $q \in \mathbb{Q}$ için $q \leq u$ olması ile çelişir. O halde $\mathbb{Q}$ üstten sınırlı değildir. $\mathbb{Q}$ nun alttan sınırlı olmadığı benzer şekilde gösterilir.

c) Şimdi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nun üstten sınırlı olmadığını gösterelim. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nun üstten sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ için $q \leq u$ olacak şekilde bir $u \in \mathbb{R}$ vardır. $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olmadığından $u \leq n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dur. Böylece

$$q \leq u \leq n < n\sqrt{2}$$

dur. Bu ise her $q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ için $q \leq u$ olması ile çelişir. O halde $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ üstten sınırlı değildir. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nun alttan sınırlı olmadığı benzer şekilde gösterilir.✔

ÇÖZÜM 24

$b+1$ sayısı (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ ve $(a,b]$ kümelerin her birinin bir üst sınırı ve $a-1$ sayısı (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ ve $(a,b]$ kümelerinin her birinin bir alt sınırıdır. O halde yukarıdaki kümeler alttan ve üstten sınırlıdırlar.✔

ÇÖZÜM 25

a) $a-1$ sayısı (a,∞) kümesinin bir alt sınırıdır. O halde bu küme alttan sınırlıdır. (a,∞) kümesinin üstten sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in (a,\infty)$ için $x \leq u$ olacak şekilde bir $u \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $u+1 \in (a,\infty)$ ve $u < u+1$ dir. Bu ise $x \in (a,\infty)$ için $x \leq u$ olması ile çelişir. O halde (a,∞) kümesi üstten sınırlı değildir.

b) $[a,\infty)$ kümesinin alttan sınırlı fakat üstten sınırlı olmadığı benzer şekilde gösterilir.

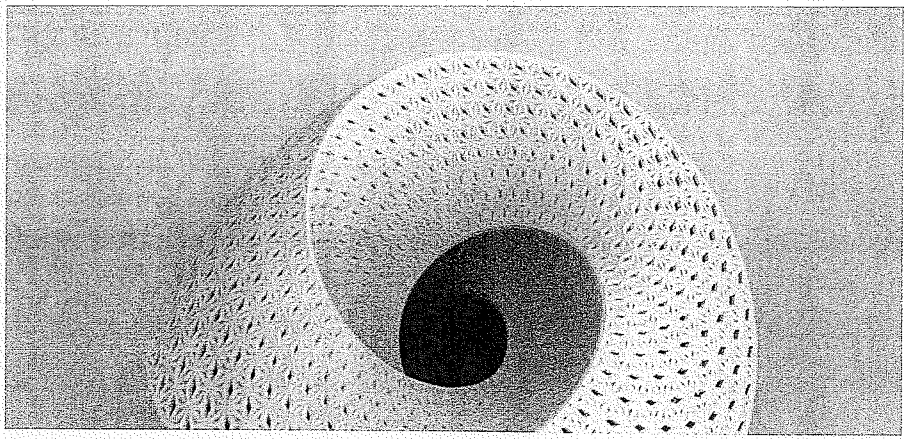
c) $a+1$ sayısı $(-\infty,a)$ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde bu küme üstten sınırlıdır. $(-\infty,a)$ kümesinin alttan sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in (-\infty,a)$ için $x \geq u$ olacak şekilde bir $u \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $u-1 \in (-\infty,a)$ ve $u-1 < u$ dur. Bu ise $x \in (-\infty,a)$ için $x \geq u$ olması ile çelişir. O halde $(-\infty,a)$ kümesi alttan sınırlı değildir.

d) $(-\infty,a]$ kümesinin üstten sınırlı fakat alttan sınırlı olmadığı benzer şekilde gösterilir.✔

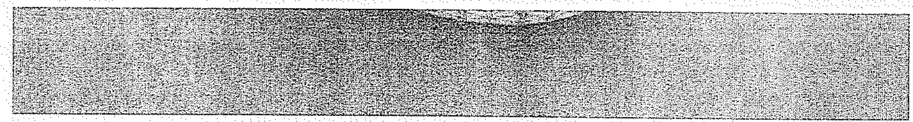
ÇÖZÜM 26

a) $x<y$ ve $x \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Alıştırma 22 gereğince $\frac{1}{y-x} < n$ ve dolayısıyla $y-x > \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $M = \left\{m \in \mathbb{N} \mid \frac{m}{n} > x\right\}$ olsun. Alıştırma 22 gereğince $M \neq \emptyset$ dur. $M = \emptyset$ olsaydı nx sayısı $\mathbb{N}$ nin bir üst sınırı olurdu. $M \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan M nin bir en küçük v elemanı vardır. Bu ise $\frac{v}{n} > x$, $\frac{v-1}{n} \leq x$ eşitsizliklerini gerektirir. Dolayısıyla $x < \frac{v}{n} < x+\frac{1}{n} < x+(y-x) = y$ ve $\frac{v}{n}$ uygun rasyonel sayıdır. Şimdi $x<0$ durumunun göz önüne alalım. Eğer $y>0$ ise 0 istenen rasyonel sayıdır. Eğer $y \leq 0$ ise bir önceki incelediğimiz durum gereğince $-y < r < -x$ olacak şekilde bir r rasyonel sayısı vardır. Böylece $x < -r < y$ olacak şekilde bir $-r$ rasyonel sayısı vardır.

b) $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısı yardımıyla ispatı yapalım. (a) gereğince $x<y$ şeklinde iki reel sayı verildiğinde $x<q<y$ şeklinde bir $q \in \mathbb{Q}$ ve benzer şekilde $q < q' < y$ olacak şekilde bir $q' \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı vardır. $q'-q>0$ olduğundan $\frac{\sqrt{2}}{q'-q} \in \mathbb{R}$ olup $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olmadığından $n > \frac{\sqrt{2}}{q'-q}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $x < q < q+\frac{\sqrt{2}}{n} < q' < y$ ve $q+\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ dur, yani $x < q+\frac{\sqrt{2}}{n} < y$ ve $q+\frac{\sqrt{2}}{n}$ bir irrasyonel sayıdır.✔



2. Metrik Uzaylar



Topolojik uzay sınıflarının en önemlilerinden bir tanesi olan metrik uzay kavramı 1906 yılında Frechet tarafından ortaya atılmıştır. Topolojik uzaylarla ilgili birçok kavramın ve topolojinin analize uygulamalarının çoğu metrik uzaylarla ilgilidir. Bu bölümde metrik uzay kavramı tanıtılarak analiz derslerinden bilinen dizilerin yakınsaklığı, sınırlı küme, süreklilik gibi kavramlar metrik uzaylarda tanımlanarak, bu kavramların topolojik uzaylarda tanımlanabilmesi için gerekli alt yapı oluşturulacaktır.

2.1. Tanım ve Örnekler

TANIM 2.1. ▷
X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
M-1). Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
M-2). Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,
M-3). Her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde metrik ve (X,d) sıralı ikilisine metrik uzay denir. Bu durumda X in elemanlarına noktalar ve $d(x,y)$ değerine x noktası ile y noktası arasındaki uzaklık denir. (M-2) şartına simetri özelliği ve (M-3) şartına da üçgen eşitsizliği denir.

Not
Metriğin her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ şartı diğer şartlardan şu şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} 0 &= d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) \\ &= d(x,y) + d(x,y) \end{aligned}$$

olduğundan $d(x,y) \geq 0$ olur. O halde metrik tanımında istenilirse her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ şartı yazılmayabilir.

$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ olmak üzere üçgen eşitsizliği ard arda kullanılırsa

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. Bu eşitsizliğe genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir.

ÖRNEK 2.2. ▷
Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun.

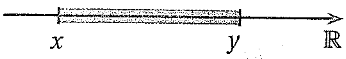
M-1). $x \in \mathbb{R}$ için

$$|\ |(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mutlak değer fonksiyonunun tanımı gereğince

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0 \quad \text{ve} \quad d(x, y) = |x - y| = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır.



Şekil 2.1 $d(x, y) = |x - y|$ uzaklığı

M-2). Mutlak değer fonksiyonunun tanımı gereğince

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$$

olur.

M-3). Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

olduğundan

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

olur. Yani

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

dir.

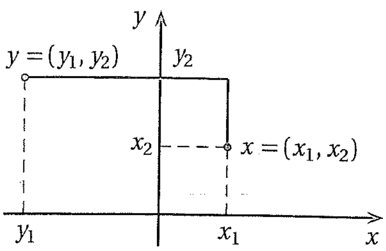
$\mathbb{R}$ üzerindeki bu d metriğine $\mathbb{R}$ nin standart (Öklid veya alışılmış) metriği denir. $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y)$ uzaklığı Şekil 2.1 da gösterilmiştir.✍

ÖRNEK 2.3. ▷ **Maksimum metriği**
$X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ için

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

şeklinde tanımlanan $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X^n üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Alıştırma 4 e bakınız. Bu metriğe $\mathbb{R}^n$ üzerindeki maksimum metriği denir.✍



Şekil 2.2 $d_1(x, y)$ uzaklığı

ÖRNEK 2.4. ▷ **Taksi metriği**
$X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ için

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

şeklinde tanımlanan $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Alıştırma 5 e bakınız. Bu metriğe taksi metriği denir. $x = (x_1, x_2), y =$

$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d_1(x,y)$ uzaklığı Şekil 2.2 de gösterilmiştir.✍

Teorem 2.5. ▷ Cauchy Eşitsizliği

$X = \mathbb{R}$ veya $X = \mathbb{C}$ olmak üzere $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in X$ olsun. Bu durumda

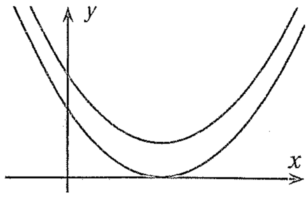
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

dir.

İSPAT: $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i|\, t + |y_i|\right)^2$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikinci derece polinomunu tanımlayalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için $f(t) \ge 0$ olduğundan

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i|\, t + |y_i|\right)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \ge 0$$

dır. $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \ge 0$ olduğundan f polinomunun iki farklı reel kökü yoktur. Şekil 2.3 ye bakınız. Böylece f nin diskriminantı pozitif olamaz. Bu durumda



Şekil 2.3 $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0$

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = 4\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \le 0$$

olur. Buradan

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)$$

yani

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

elde edilir.✔

ÖRNEK 2.6. ▷ Standart metrik

$X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ için

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

şeklinde tanımlanan $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in X$ olsun.

M-1). Her $i = 1, 2, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| \ge 0$ olduğundan

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \ge 0$$

dır.

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow i = 1,2,\cdots,n \text{ için } |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow i = 1,2,\cdots,n \text{ için } x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

olduğundan

$$d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

olur.

M-2). Her $i = 1,2,\cdots,n$ için $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ olduğundan $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ olur.

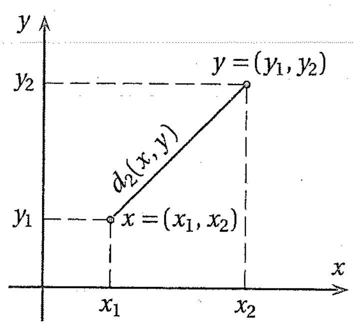
M-3). Her $i = 1,2,\cdots,n$ için

$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

olduğundan

$$|x_i - z_i|^2 \le \left(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\right)^2 = |x_i - y_i|^2 + 2|x_i - y_i|\,|y_i - z_i| + |y_i - z_i|^2$$

olur. Teorem 2.5 gereğince



Şekil 2.4 $d_2(x,y)$ uzaklığı

$$\begin{aligned} d_2(x,z)^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i - y_i|^2 + 2|x_i - y_i|\,|y_i - z_i| + |y_i - z_i|^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,|y_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2} + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2}\right)^2 \\ &= \left(d_2(x,y) + d_2(y,z)\right)^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan $d_2(x,z) \le d_2(x,y) + d_2(y,z)$ elde edilir.

NOT 2.7. $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) üzerinde tanımlanan d_2 metriğine $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) nin standart (Öklid veya alışılmış) metriği denir. Bundan böyle $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için $X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere X den bir metrik uzay olarak bahsettiğimizde metrik belirtilmiyor ise metriğin standart metrik olduğu anlaşılacaktır. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n$ için $d_2(x, y)$ uzaklığı Şekil 2.4 de gösterilmiştir. ✍

ÖRNEK 2.8. ▷ **Ayrık metrik**
X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. d fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

M-1). d nin tanımı gereğince her $x, y \in X$ için

$$d(x,y) \geq 0 \quad \text{ve} \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

dir.
M-2). $x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0, & y = x \\ 1, & y \neq x \end{cases} = d(y,x)$$

dir.
M-3). $x, y, z \in X$ olsun.
i) $x = z$ ise $d(x, z) = 0$ dır. Bu durumda d nin tanımı gereğince

$$d(x,y) + d(y,z)$$

toplamının alabileceği değer 0, 1 yada 2 olacağından

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

olur.
ii) $x \neq z$ ise $x = y$ ve $y = z$ eşitliklerinin her ikisi birden doğru olamaz. Bu durumda $x \neq y$ ve $y \neq z$ eşitsizliklerinden en az biri doğrudur. O halde

$$d(x,y) + d(y,z)$$

toplamının alabileceği değer 1 ya da 2 dir. $d(x, z) = 1$ olduğundan

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

olur.
Bu metriğe X üzerindeki ayrık metrik ve (X, d) uzayına ayrık metrik uzay denir.✍

Metrik uzayların en önemli örnekleri fonksiyon uzaylarıdır.

ÖRNEK 2.9. ▶ **İntegral metriği**
$[a,b]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesini $\mathscr{C}(a,b)$ ile gösterelim. Yani

$$\mathscr{C}(a,b) = \{f \mid f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ sürekli bir fonksiyon}\}$$

olsun. $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ için

$$d_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

şeklinde tanımlı $d_{\text{int}}:\mathscr{C}(a,b)\times\mathscr{C}(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olduğundan $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$ değeri vardır. Böylece d_{int} iyi tanımlıdır.

M-1). $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için $|f(x)-g(x)|\geq 0$ olduğundan $d_{\text{int}}(f,g)\geq 0$ dır.

$$d_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$

ise her $x\in[a,b]$ için $|f(x)-g(x)|\geq 0$ ve f, g fonksiyonları sürekli olduklarından dolayı her $x\in[a,b]$ için $|f(x)-g(x)|=0$ olur. Böylece her $x\in[a,b]$ için $f(x)=g(x)$ yani $f=g$ dir. $f=g$ ise

$$d_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$$

olur.

M-2). Her $x\in[a,b]$ için $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)|$ olduğundan $d_{\text{int}}(f,g) = d_{\text{int}}(g,f)$ olur.

M-3). $f,g,h\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için

$$|f(x)-g(x)| = |(f(x)-h(x)) + (h(x)-g(x))| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$$

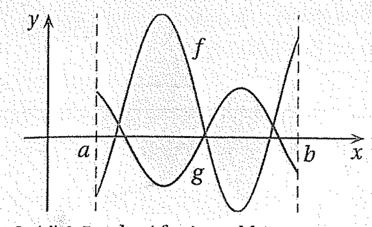
olduğundan

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)-h(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |h(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

olur. Yani

$$d_{\text{int}}(f,g) \leq d_{\text{int}}(f,h) + d_{\text{int}}(h,g)$$

dir.



Şekil 2.5 $d_{\text{int}}(f,g)$ uzaklığı

NOT 2.10. $\mathscr{C}(a,b)$ üzerindeki bu metriğe integral metriği denir. $d_{\text{int}}(f,g)$ değeri f ve g fonksiyonlarının grafikleri, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanıdır. (Şekil 2.5 e bakınız.)✍

ÖRNEK 2.11. ▷ **Supremum (düzgün) metrik**
$f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ için

$$d_\infty(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}=\max\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonunun $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Bu durumda f ve g sürekli olduklarından sınırlıdırlar. Böylece her $x\in[a,b]$ için

$$|f(x)|\le A \quad \text{ve} \quad |g(x)|\le B$$

olacak şekilde A,B reel sayıları vardır. Diğer yandan her $x\in[a,b]$ için

$$|f(x)-g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le A+B$$

olduğundan $|f(x)-g(x)|$ fonksiyonu sınırlıdır. Böylece $\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}$ kümesinin supremumu vardır. Yani d_∞ iyi tanımlıdır.

M-1). $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için $|f(x)-g(x)|\ge 0$ olduğundan $d_\infty(f,g)\ge 0$ olur.

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g)=0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}=0\\ &\Leftrightarrow \text{her } x\in[a,b] \text{ için } |f(x)-g(x)|=0\\ &\Leftrightarrow \text{her } x\in[a,b] \text{ için } f(x)=g(x)\\ &\Leftrightarrow f=g \end{aligned}$$

olur.

M-2). $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için $|f(x)-g(x)|=|g(x)-f(x)|$ olduğundan

$$\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}=\{|g(x)-f(x)| \mid x\in[a,b]\}$$

olur. Buradan $d_\infty(f,g)=d_\infty(g,f)$ elde edilir.

M-3). $f,g,h\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için

$$|f(x)-g(x)|\le|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\le d_\infty(f,h)+d_\infty(h,g)$$

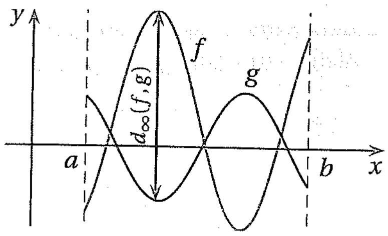
olur. Böylece $d_\infty(f,h)+d_\infty(h,g)$ değeri $\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bir kümenin herhangi bir üst sınırı kümenin supremumundan büyük veya eşit olduğundan

$$\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}\le d_\infty(f,h)+d_\infty(h,g)$$

olur. Yani

$$d_\infty(f,g)\le d_\infty(f,h)+d_\infty(h,g)$$

dir.



Şekil 2.6 $d_\infty(f,g)$ uzaklığı

NOT 2.12. $\mathscr{C}(a,b)$ üzerindeki bu metriğe subremum metriği veya düzgün metrik denir. $d_\infty(f,g)$ değeri Şekil 2.6 de görüldüğü gibi f ve g nin $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan grafikleri arasındaki dikey uzaklığın en büyüğüdür.✍

ÖRNEK 2.13. ▷
d boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir metrik olsun. Her $x,y\in X$ için

$$p(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

şeklinde tanımlanan p fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

M-1). Her $x,y\in X$ için $d(x,y)\geq 0$ olduğundan $p(x,y)\geq 0$ olur.

$$p(x,y)=0\Leftrightarrow\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0\Leftrightarrow d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$$

olur.

M-2). Her $x,y\in X$ için $d(x,y)=d(y,x)$ olduğundan

$$p(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=p(y,x)$$

olur.

M-3). $f(t)=\frac{t}{1+t}$ şeklinde tanımlı $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $t\in[0,\infty)$ için

$$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\geq 0$$

olduğundan f fonksiyonu artandır. $x,y,z\in X$ olsun. d bir metrik olduğundan

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

dir. f artan olduğundan

$$f(d(x,z))\leq f(d(x,y)+d(y,z))$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$p(x,z)\leq p(x,y)+p(y,z)$$

dir.✍

ÖRNEK 2.14. ▷ **Minimum metriği**
d boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir metrik olsun. Her $x, y \in X$ için

$$e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

şeklinde tanımlanan e fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

M-1). Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ oluğundan $e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \geq 0$ dır.

$$e(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, d(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

olur.

M-2). Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ olduğundan

$$e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = e(y,x)$$

olur.

M-3). $x, y, z \in X$ olsun.

$$e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

olduğunu gösterelim. $e(x,z) = \min\{1, d(x,z)\}$ olduğundan

$$e(x,z) \leq 1 \text{ ve } e(x,z) \leq d(x,z)$$

olur.

i) $d(x,y) \leq 1$ ve $d(y,z) \leq 1$ ise

$$e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = d(x,y) \text{ ve } e(y,z) = \min\{1, d(y,z)\} = d(y,z)$$

olacağından

$$e(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = e(x,y) + e(y,z)$$

yani

$$e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

olur.

ii) $d(x,y) > 1$ ise $e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = 1$ ve $e(y,z) \geq 0$ olduğundan

$$e(x,z) \leq 1 = e(x,y) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

yani

$$e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

olur.

iii) $d(y,z) > 1$ ise $e(y,z) = \min\{1, d(y,z)\} = 1$ ve $e(x,y) \geq 0$ olduğundan

$$e(x,z) \leq 1 = e(y,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

yani

$$e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

olur.

O halde e fonksiyonu (M-3) şartınıda sağlar.

Bu metriğe X üzerindeki minimum metriği denir.

TANIM 2.15. ▷ **Metrik uzaylarda yuvarlar**

(X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ bir reel sayı olsun.

a) Açık Yuvar:

$$B_{(X,d)}(a,\varepsilon) = \{x \in X \,|\, d(x,a) < \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli açık yuvar denir.

b) Kapalı Yuvar:

$$D_{(X,d)}(a,\varepsilon) = \{x \in X \,|\, d(x,a) \le \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli kapalı yuvar denir.

c) Yuvar Yüzeyi:

$$S_{(X,d)}(a,\varepsilon) = \{x \in X \,|\, d(x,a) = \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli yuvar yüzeyi denir.

Eğer bir karışıklık meydana gelmeyecekse $B_{(X,d)}(a,\varepsilon)$ yerine $B_d(a,\varepsilon), B_X(a,\varepsilon)$ veya kısaca $B(a,\varepsilon)$ gösterimi kullanılır. $D_{(X,d)}(a,\varepsilon)$ ve $S_{(X,d)}(a,\varepsilon)$ kümeleri içinde benzer gösterimler kullanılır.

Not

Her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a,a) = 0 < \varepsilon \text{ ve } d(a,a) = 0 \le \varepsilon$$

olduğundan $a \in B(a,\varepsilon)$ ve $a \in D(a,\varepsilon)$ olur. Yani $B(a,\varepsilon)$ ve $D(a,\varepsilon)$ kümeleri boş değildir. Diğer yandan Örnek 2.16 da görüldüğü gibi $S(a,\varepsilon)$ kümesi boş olabilir.

ÖRNEK 2.16. ▷

(X,d) ayrık metrik uzay, $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $B(a,\varepsilon)$, $D(a,\varepsilon)$ ve $S(a,\varepsilon)$ kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: Her $x,y \in X$ için $d(x,y) = 0$ veya $d(x,y) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$B(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon \le 1 \\ X, & \varepsilon > 1 \end{cases}, \quad D(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon < 1 \\ X, & \varepsilon \ge 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad S(a,\varepsilon) = \begin{cases} X \setminus \{a\}, & \varepsilon = 1 \\ \emptyset, & \varepsilon \ne 1 \end{cases}$$

olur.

ÖRNEK 2.17. ▷

$a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki standart metriğe göre

a) $B(a,\varepsilon)$ **b)** $D(a,\varepsilon)$ **c)** $S(a,\varepsilon)$

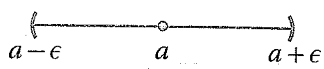
kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM:

a) a merkezli ε yarıçaplı açık yuvar

$$\begin{aligned} B(a,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, d(x,a) = |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\varepsilon < x - a < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \end{aligned}$$

açık aralığıdır. Şekil 2.7 ya bakınız.



Şekil 2.7

b) a merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar

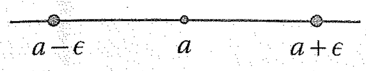
$$\begin{aligned} D(a,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} | d(x,a) = |x-a| \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} | -\varepsilon \leq x-a \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \end{aligned}$$

Şekil 2.8

kapalı aralığıdır. Şekil 2.8 ye bakınız.

c) a merkezli ε yarıçaplı yuvar yüzeyi

$$\begin{aligned} S(a,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} | d(x,a) = |x-a| = \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} | x-a = \varepsilon \text{ veya } -(x-a) = \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x = a+\varepsilon \text{ veya } x = a-\varepsilon\} = \{a-\varepsilon, a+\varepsilon\} \end{aligned}$$



Şekil 2.9

kümesidir. Şekil 2.9 ye bakınız.

ÖRNEK 2.18.
$\varepsilon > 0$ bir reel sayı ve $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerindeki d_2 standart metriğine göre

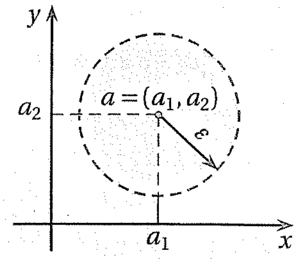
a) $B(a,\varepsilon)$ **b)** $D(a,\varepsilon)$ **c)** $S(a,\varepsilon)$

kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM:

a) a merkezli ε yarıçaplı açık yuvar a merkezli ε yarıçaplı açık disktir. Yani

$$\begin{aligned} B(a,\varepsilon) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | d_2((x,y),a) < \varepsilon\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \varepsilon\right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < \varepsilon^2\} \end{aligned}$$

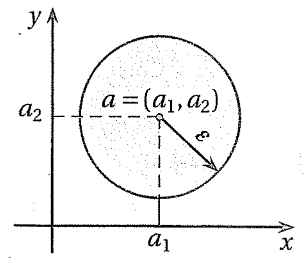


Şekil 2.10

dir. (Şekil 2.10 ya bakınız.)

b) a merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar a merkezli ε yarıçaplı kapalı disktir. Yani

$$\begin{aligned} D(a,\varepsilon) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | d_2((x,y),a) \leq \varepsilon\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} \leq \varepsilon\right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq \varepsilon^2\} \end{aligned}$$

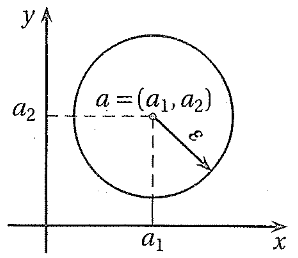


Şekil 2.11

dir. (Şekil 2.11 ye bakınız.)

c) a merkezli ε yarıçaplı yuvar yüzeyi a merkezli ε yarıçaplı çemberdir. Yani

$$\begin{aligned} S(a,\varepsilon) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | d_2((x,y),a) = \varepsilon\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \varepsilon\right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = \varepsilon^2\} \end{aligned}$$



Şekil 2.12

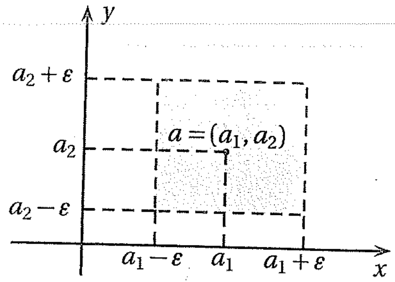
dir. (Şekil 2.12 ye bakınız.)

ÖRNEK 2.19.
$\mathbb{R}^2$ üzerindeki $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ metriğine göre

a) $B(a,\varepsilon)$ **b)** $D(a,\varepsilon)$ **c)** $S(a,\varepsilon)$

kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM:

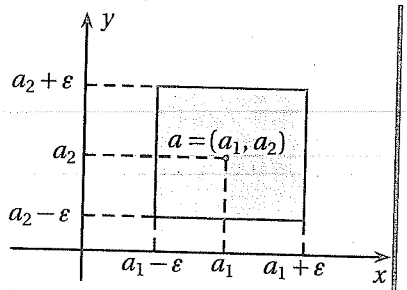


Şekil 2.13

a) $a=(a_1,a_2)$ merkezli ε yarıçaplı açık yuvar

$$\begin{aligned}
B(a,\varepsilon) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, d_\infty((x,y),a)<\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \max\{|x-a_1|,|y-a_2|\}<\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|<\varepsilon \text{ ve } |y-a_2|<\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|<\varepsilon\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |y-a_2|<\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, a_1-\varepsilon<x<a_1+\varepsilon\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, a_2-\varepsilon<y<a_2+\varepsilon\}\\
&= ((a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)\times\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}\times(a_2-\varepsilon,a_2+\varepsilon))\\
&= (a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)\times(a_2-\varepsilon,a_2+\varepsilon)
\end{aligned}$$

açık dikdörtgenidir. Şekil 2.13 ya bakınız.

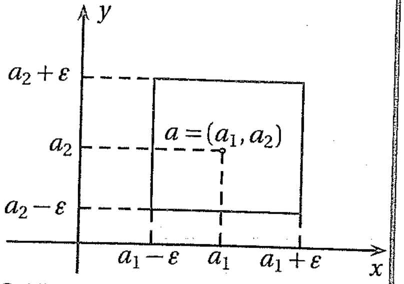


Şekil 2.14

b) $a=(a_1,a_2)$ merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar

$$\begin{aligned}
D(a,\varepsilon) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, d_\infty((x,y),a)\le\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \max\{|x-a_1|,|y-a_2|\}\le\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|\le\varepsilon \text{ ve } |y-a_2|\le\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|\le\varepsilon\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |y-a_2|\le\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, a_1-\varepsilon\le x\le a_1+\varepsilon\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, a_2-\varepsilon\le y\le a_2+\varepsilon\}\\
&= ([a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon]\times\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}\times[a_2-\varepsilon,a_2+\varepsilon])\\
&= [a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon]\times[a_2-\varepsilon,a_2+\varepsilon]
\end{aligned}$$

kapalı dikdörtgenidir. Şekil 2.14 ye bakınız.



Şekil 2.15

c) $a=(a_1,a_2)$ merkezli ε yarıçaplı yuvar yüzeyi

$$\begin{aligned}
S(a,\varepsilon) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, d_\infty((x,y),a)=\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \max\{|x-a_1|,|y-a_2|\}=\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|=\varepsilon \text{ ve } |y-a_2|<\varepsilon \text{ veya } |x-a_1|<\varepsilon \text{ ve } |y-a_2|=\varepsilon\}\\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|=\varepsilon \text{ ve } |y-a_2|<\varepsilon\}\\
&\quad \cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-a_1|<\varepsilon \text{ ve } |y-a_2|=\varepsilon\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a_1+\varepsilon \text{ veya } x=a_1-\varepsilon \text{ ve } a_2-\varepsilon<y<a_2+\varepsilon\} \\ &\quad \cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=a_2+\varepsilon \text{ veya } y=a_2-\varepsilon \text{ ve } a_1-\varepsilon<x<a_1+\varepsilon\} \\ &= \{(a_1+\varepsilon,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a_2-\varepsilon<y<a_2+\varepsilon\} \\ &\quad \cup\{(a_1-\varepsilon,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a_2-\varepsilon<y<a_2+\varepsilon\} \\ &\quad \cup\{(x,a_2+\varepsilon)\in\mathbb{R}^2 \mid a_1-\varepsilon<x<a_1+\varepsilon\} \\ &\quad \cup\{(x,a_2-\varepsilon)\in\mathbb{R}^2 \mid a_1-\varepsilon<x<a_1+\varepsilon\} \end{aligned}$$

dikdörtgenidir. Şekil 2.15 ye bakınız.✍

ÖRNEK 2.20. ▷
$\mathbb{R}^2$ üzerindeki

$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

metriğine göre

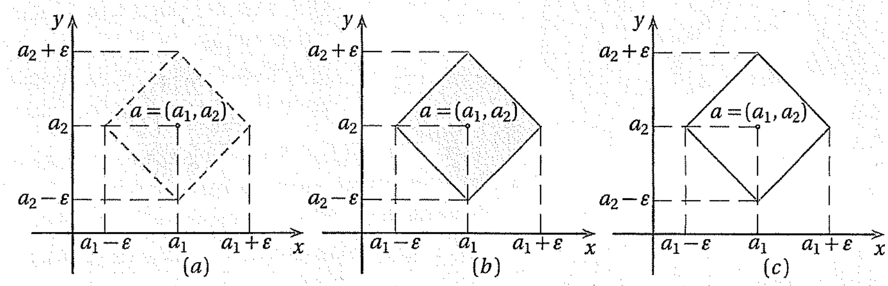
a) $B(a,\varepsilon)$ **b)** $D(a,\varepsilon)$ **c)** $S(a,\varepsilon)$

kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM:

a) $a=(a_1,a_2)$ merkezli ε yarıçaplı $B(a,\varepsilon)$ açık yuvarı Şekil **??** da görüldüğü gibidir.
b) $a=(a_1,a_2)$ merkezli ε yarıçaplı $D(a,\varepsilon)$ kapalı yuvarı Şekil **??** de görüldüğü gibidir.
c) $a=(a_1,a_2)$ merkezli ε yarıçaplı $S(a,\varepsilon)$ yuvar yüzeyi Şekil **??** de görüldüğü gibidir.✍

Şekil 2.16



ÖRNEK 2.21. ▷
$\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde tanımlı

$$d_\infty(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[a,b]\}$$

metriğine göre

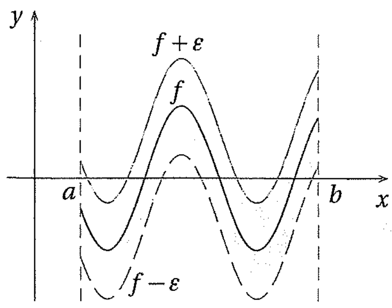
a) $B(a,\varepsilon)$ **b)** $D(a,\varepsilon)$ **c)** $S(a,\varepsilon)$

kümelerini bulalım.

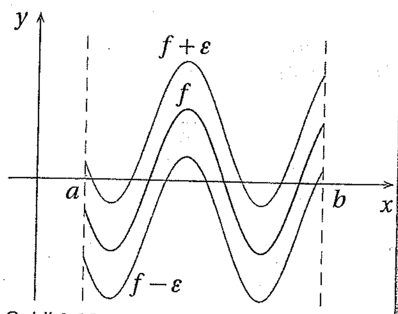
ÇÖZÜM:

a) f merkezli ε yarıçaplı açık yuvar

$$B(f,\varepsilon) = \{g\in\mathscr{C}(a,b) \mid \sup\{|g(x)-f(x)| \mid x\in[a,b]\}<\varepsilon\}$$



Şekil 2.17



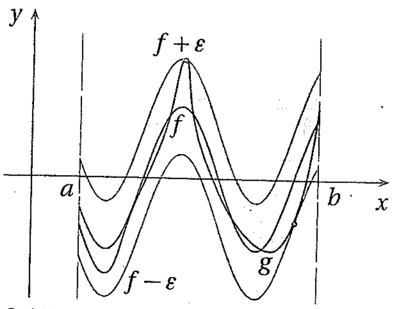
Şekil 2.18

$$= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$
$$= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } -\varepsilon < g(x) - f(x) < \varepsilon\}$$
$$= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

olur. Yani $B(f,\varepsilon)$ açık yuvarı grafiği Şekil 2.17 da görülen taralı açık şerit içerisinde kalan $g \in \mathscr{C}(a,b)$ fonksiyonlarının kümesidir.

b) f merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar

$$\begin{aligned} D(f,\varepsilon) &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \sup\{|g(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} \le \varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } |g(x) - f(x)| \le \varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } -\varepsilon \le g(x) - f(x) \le \varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } f(x) - \varepsilon \le g(x) \le f(x) + \varepsilon\} \end{aligned}$$



Şekil 2.19

olur. Yani $D(f,\varepsilon)$ kapalı yuvarı grafiği Şekil 2.18 de görülen taralı kapalı şerit içerisinde kalan $g \in \mathscr{C}(a,b)$ fonksiyonlarının kümesidir.

c) f merkezli ε yarıçaplı yuvar yüzeyi

$$\begin{aligned} S(f,\varepsilon) &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \sup\{|g(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } |g(x) - f(x)| \le \varepsilon \text{ ve} \\ &\qquad \text{ve en az bir } x_0 \in [a,b] \text{ için } |g(x_0) - f(x_0)| = \varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } |g(x) - f(x)| \le \varepsilon \text{ ve} \\ &\qquad \text{en az bir } x_0 \in [a,b] \text{ için } g(x_0) - f(x_0) = \varepsilon \text{ veya } g(x_0) - f(x_0) = -\varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathscr{C}(a,b) \mid \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } |g(x) - f(x)| \le \varepsilon \text{ ve} \\ &\qquad \text{en az bir } x_0 \in [a,b] \text{ için } g(x_0) = \varepsilon + f(x_0) \text{ veya } g(x_0) = f(x_0) - \varepsilon\} \end{aligned}$$

olur. Yani $S(f,\varepsilon)$ kümesi grafiği $\varepsilon + f(x)$ ve $f(x) - \varepsilon$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan ve en az bir noktada $\varepsilon + f(x)$ veya $f(x) - \varepsilon$ fonksiyonlarının grafiği ile kesişen $g \in \mathscr{C}(a,b)$ fonksiyonlarının kümesidir. $f(x) - \varepsilon$ ve $f(x) + \varepsilon$ fonksiyonları $S(f,\varepsilon)$ kümesine aittir. Şekil 2.19 ye bakınız.

2.2. Norm ve Normlu Uzaylar

Normlu vektör uzayları metrik uzaylara örnek teşkil ederler.

TANIM 2.22. ▷ **Norm**

$\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X, $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

N-1). Her $x \in X$ için $\|x\| \ge 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ, X nin sıfır vektörü),

N-2). Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$,

N-3). Her $\lambda \in \mathbb{F}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

özellikleri sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. $(X, \|\cdot\|)$ sıralı ikilisinede $\mathbb{F}$ nin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmasına göre normlu reel vektör uzayı veya normlu kompleks vektör uzayı denir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $x, y \in X$ için $d(x,y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlı d

fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu şekilde tanımlanan d metriğine normun ürettiği (indirgediği) metrik denir. Bu durumda her normlu uzay bir metrik uzaydır.

ÖRNEK 2.23. ▷
Her $n \in \mathbb{N}$ için $X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ için

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_2 : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir norm olduğunu göstererek normun indirgediği metriği bulalım.

ÇÖZÜM: Alıştırma 12 gereğince $\|\,.\,\|_2$ bir normdur. Şimdi normun indirgediği metriği bulalım. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ için

$$\begin{aligned} \|x - y\|_2 &= \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots, x_n - y_n)\|_2 \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} = d_2(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan bu normun X üzerinde ürettiği metrik X üzerindeki d_2 metriğidir.✍

ÖRNEK 2.24. ▷
$\mathscr{C}(a, b)$ üzerinde $f \in \mathscr{C}(a, b)$ için

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_\infty$ fonksiyonunun bir norm olduğunu göstererek normun indirgediği metriği bulalım.

ÇÖZÜM: Alıştırma 12 gereğince $\|f\|_\infty$ bir normdur. Şimdi normun indirgediği metriği bulalım. $f, g \in \mathscr{C}(a, b)$ için

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\} = d_\infty(f, g)$$

olduğundan bu normun $\mathscr{C}(a, b)$ üzerinde ürettiği metrik $\mathscr{C}(a, b)$ üzerindeki d_∞ metriğidir.✍

ÖRNEK 2.25. ▷
$\mathscr{C}(a, b)$ üzerinde $f \in \mathscr{C}(a, b)$ için

$$\|f\|_{\text{int}} = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_{\text{int}}$ bir norm olduğunu göstererek normun indirgediği metriği bulalım.

ÇÖZÜM: Alıştırma 12 gereğince $\|\,.\,\|_{\text{int}}$ bir normdur. Şimdi normun indirgediği metriği bulalım. $f, g \in \mathscr{C}(a,b)$ için

$$\|f-g\|_{\text{int}} = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = d_{\text{int}}(f,g)$$

olduğundan bu normun $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde ürettiği metrik $\mathscr{C}(a,b)$ üzerindeki integral metriği d_{int} dir.

Normlu uzaylarda yuvarlar şu şekilde tanımlanır.

TANIM 2.26. ▷ **Normlu uzayda yuvarlar**
$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, $\|.\|$ un ürettiği metrik d olmak üzere $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ bir reel sayı olsun.

a) Açık Yuvar:

$$B(a,\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid \|x-a\| < \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli açık yuvar denir.

b) Kapalı Yuvar:

$$D(a,\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x,a) \le \varepsilon\} = \{x \in X \mid \|x-a\| \le \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli kapalı yuvar denir.

c) Yuvar Yüzeyi:

$$S(a,\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x,a) = \varepsilon\} = \{x \in X \mid \|x-a\| = \varepsilon\}$$

kümesine de ε yarıçaplı a merkezli yuvar yüzeyi denir.

2.3. Metrik Uzayların Alt Uzayları

TANIM 2.27. ▷ **Metrik uzayların alt uzayları**
(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. d metriğinin $A \times A$ ya kısıtlanmışı olan

$$d_A : A \times A \to \mathbb{R}, \quad d_A(x,y) = d(x,y)$$

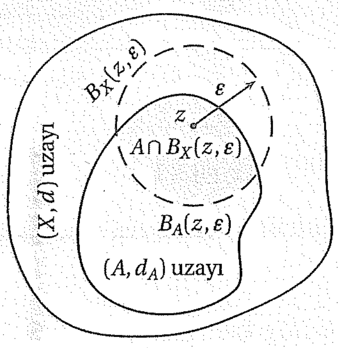
fonksiyonu A üzerinde bir metriktir. d_A metriğine d den A üzerine indirgenmiş metrik ve (A, d_A) uzayına da (X,d) uzayının alt uzayı denir. Bir karışıklık meydana gelmeyecekse d_A yerine d kullanılır.

ÖRNEK 2.28. ▷
$(\mathbb{R}, d)$ standart metrik uzayı verilsin. Bu durumda $(\mathbb{N}, d)$, $(\mathbb{Z}, d)$, $(\mathbb{Q}, d)$, $([0,1], d)$ metrik uzayları $(\mathbb{R}, d)$ standart uzayının birer alt uzayıdırlar.

Teorem 2.29. ▷
(X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $z \in A$ olsun. Bu durumda

$$B_A(z,\varepsilon) = A \cap B_X(z,\varepsilon)$$

dur.



Şekil 2.20

İSPAT: $B_A(z,\varepsilon) = \{x \in A \mid d_A(x,z) < \varepsilon\}$ olduğundan $B_A(z,\varepsilon) \subseteq A$ dır. $y \in B_A(z,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $y \in A$ ve

$$d(y,z) = d_A(y,z) < \varepsilon$$

olduğundan $y \in B_X(z,\varepsilon)$ olur. O halde $y \in A \cap B_X(z,\varepsilon)$ dur. Böylece

$$B_A(z,\varepsilon) \subseteq A \cap B_X(z,\varepsilon) \tag{2.1}$$

olur. $y \in A \cap B_X(z,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $y \in A$ ve $y \in B_X(z,\varepsilon)$ olacağından

$$d(z,y) < \varepsilon$$

olur. $y,z \in A$ olduğundan da

$$d_A(z,y) = d(z,y) < \varepsilon$$

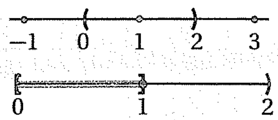
olur. Buradan $y \in B_A(z,\varepsilon)$ elde edilir. Böylece

$$A \cap B_X(z,\varepsilon) \subseteq B_A(z,\varepsilon) \tag{2.2}$$

olur. (2.1) ve (2.2) gereğince

$$A \cap B_X(z,\varepsilon) = B_A(z,\varepsilon)$$

olur. (Şekil 2.20 e bakınız.)



Şekil 2.21

ÖRNEK 2.30. ▷
$(\mathbb{R},d)$ standart metrik uzay ve $A = [0,1]$ olsun. $B_A(1,1)$ ve $B_{\mathbb{Z}}(1,1)$ kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $B_{\mathbb{R}}(1,1) = (1-1,1+1) = (0,2)$ olur. Böylece

$$B_A(1,1) = B_{\mathbb{R}}(1,1) \cap A = (0,2) \cap [0,1] = (0,1]$$

ve

$$B_{\mathbb{Z}}(1,1) = B_{\mathbb{R}}(1,1) \cap \mathbb{Z} = (0,2) \cap \mathbb{Z} = \{1\}$$

dir. (Şekil 2.21 ye bakınız.)

2.4. Sınırlı Kümeler

TANIM 2.31. ▷ **Sınırlı küme**
(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x,y \in A$ için

$$d(x,y) \le r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı varsa A kümesine sınırlıdır denir. Aksi halde A ya sınırsızdır denir. Bu şekildeki r sayılarının en büyük alt sınırına A nın çapı denir ve Çap(A) ile gösterilir. Yani

$$\text{Çap}(A) = \inf\{r \ge 0 \mid x,y \in A \text{ için } d(x,y) \le r\}$$

dir. X in kendisi sınırlı ise d metriğine sınırlı metrik denir.

Not

1. A nın sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$$

kümesinin $\mathbb{R}$ de sınırlı olmasıdır.

2. $\text{Çap}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$ olduğu gösterilebilir. Açıkça, A kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$\text{Çap}(A) \le r$$

gibi bir $r \ge 0$ reel sayısının bulunmasıdır.

3. Tanım gereğince $A \subseteq B$ ve B kümesi sınırlı ise A kümeside sınırlıdır.

ÖRNEK 2.32. (X,d) bir metrik uzay olsun. $p(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ve $e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ şeklinde tanımlı metriklerin sınırlı olduklarını gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x,y \in X$ için

$$p(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le 1 \text{ ve } e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \le 1$$

olduğundan X kümesi (X,p) ve (X,e) uzaylarında sınırlıdır. O halde p ve e metrikleri sınırlıdır.

ÖRNEK 2.33. (X,d) ayrık bir uzay olsun. d metriğinin sınırlı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x,y \in X$ için $d(x,y) = 0$ veya $d(x,y) = 1$ olduğundan her $x,y \in X$ için $d(x,y) \le 1$ dir. O halde X kümesi sınırlıdır. X kümesi sınırlı olduğundan d ayrık metriği sınırlıdır.

ÖRNEK 2.34. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin $(\mathbb{R},d)$ standart uzayında sınırlı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{Z}$ kümesinin sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $n,m \in \mathbb{Z}$ için

$$d(n,m) = |n-m| \le k$$

olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır. (Her reel sayıdan büyük bir doğal sayı olduğundan.) $m = n+2k$ olsun. Bu durumda $n, m = n+2k \in \mathbb{Z}$ ve

$$d(n,m) = d(n,n+2k) = |n-(n+2k)| = |-2k| = 2k$$

olur. Bu ise her $n,m \in \mathbb{Z}$ için $d(n,m) \le k$ olması ile çelişir. O halde $\mathbb{Z}$ sınırlı değildir.

ÖRNEK 2.35. $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin $(\mathbb{R}^2, d_2)$ standart uzayında sınırlı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: A kümesinin sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $(x,0),(y,0) \in A$ için

$$d_2((x,0),(y,0)) = \sqrt{(x-y)^2+(0-0)^2} = |x-y| \le k$$

olacak şekilde bir k sayısı vardır. $y = x+2k$ olsun. Bu durumda $(x,0),(x+2k,0) \in A$ ve

$$d_2((x,0),(x+2k,0)) = \sqrt{(x-(x+2k))^2+(0-0)^2} = |-2k| = 2k$$

olur. Bu ise her $(x,0),(y,0) \in A$ için $d_2((x,0),(y,0)) \le k$ olması ile çelişir. O halde A sınırlı değildir.

ÖRNEK 2.36. ▷
$(\mathbb{R}^2, d_2)$ standart uzayının $A = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ alt kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in A$ için

$$d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \le 5$$

olduğundan A kümesi sınırlıdır.✍

TANIM 2.37. ▷
(X,d) bir metrik uzay olmak üzere A ve B kümeleri X in iki alt kümesi olsun.

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

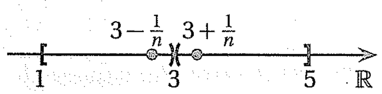
sayısına A ile B arasındaki uzaklık denir. $A = \{x\}$ ise $d(A,B)$ yerine kısaca $d(x,B)$ yazılır.☞

ÖRNEK 2.38. ▷
d metriği $\mathbb{R}$ üzerindeki standart metrik ve d_1 de $\mathbb{R}$ üzerindeki ayrık metrik olsun. $A = [1,3), B = (3,5]$ olmak üzere

a) $d(A,B)$ **b)** $\text{Çap}_d(A)$ **c)** $\text{Çap}_d(B)$
d) $d_1(A,B)$ **e)** $\text{Çap}_{d_1}(A)$ **f)** $\text{Çap}_{d_1}(B)$

kümelerini bulalım. (Şekil 2.22 e bakınız.)

ÇÖZÜM:



Şekil 2.22

a)

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{|x-y| \mid x \in [1,3), y \in (3,5]\} = \lim_{n\to\infty}\left|\left(3-\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Çap}_d(A) &= \sup\{|x-y| \mid x,y \in [1,3)\} = \lim_{n\to\infty}\left|\left(3-\frac{1}{n}\right)-1\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|2-\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{Çap}_d(B) &= \sup\{|x-y| \mid x,y \in (3,5]\} = \lim_{n\to\infty}\left|5-\left(3+\frac{1}{n}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|2-\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2, \end{aligned}$$

d) $$d_1(A,B)=\inf\{d_1(x,y)\mid x\in[1,3), y\in(3,5]\}=\inf\{1\}=1,$$

e) $$\text{Çap}_{d_1}(A)=\sup\{d_1(x,y)\mid x,y\in[1,3)\}=\sup\{0,1\}=1,$$

f) $$\text{Çap}_{d_1}(B)=\sup\{d_1(x,y)\mid x,y\in(3,5]\}=\sup\{0,1\}=1$$

olur.✍

Analiz derslerinden bilindiği gibi reel sayıların bir A alt kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $y\in A$ için $|y|\le r$ (veya $|y|<r$) olacak şekilde bir r sayısının bulunmasıdır. Bu ise şuna denktir: Reel sayıların bir A alt kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $y\in A$ için $A\subseteq[-r,r]=D(0,r)$ (veya $A\subseteq(-r,r)=B(0,r)$) olacak şekilde bir r sayısının bulunmasıdır. Bundan yararlanarak aşağıdaki önermeyi yazabiliriz.

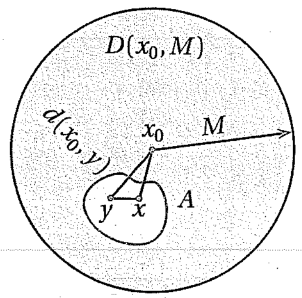
Teorem 2.39.

(X,d) bir metrik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi sınırlıdır.

b) A yı kapsayan bir kapalı (veya açık) yuvar vardır.

İSPAT:



Şekil 2.23

a)⇒b). A sınırlı olduğundan her $x,y\in A$ için $d(x,y)\le r$ olacak şekilde bir r reel sayısı vardır. $x_0\in X$ herhangi bir nokta ve $y\in A$ olsun. $M=r+d(y,x_0)$ diyelim ve $A\subseteq D(x_0,M)$ olduğunu gösterelim. Her $x\in A$ için

$$d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0)\le r+d(y,x_0)=M$$

olduğundan $x\in D(x_0,M)$ olur. Bu ise $A\subseteq D(x_0,M)$ demektir. (Şekil 2.23 e bakınız.)

b)⇒a). $A\subseteq D(x_0,M)$ olsun. Bu durumda her $x,y\in A$ için $x,y\in D(x_0,M)$ olur. Buradan

$$d(x,y)\le d(x,x_0)+d(y,x_0)\le M+M=2M$$

olur. Böylece her $x,y\in A$ için $d(x,y)\le 2M$ olur. O halde A kümesi sınırlıdır.✔

Teorem 2.40.

(X,d) bir metrik uzay ve $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\subseteq X$ kümeleri sınırlı olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ kümesi sınırlıdır.

İSPAT: $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ kümeleri sınırlı olduğundan Teorem 2.39 gereğince $i=1,2,\cdots,n$ için $A_i\subseteq D(x_i,r_i)$ olacak şekilde bir $x_i\in X$ ve bir $r_i>0$ reel sayısı vardır. $x_0\in X$ herhangi bir nokta olsun.

$$M_1=\max\{r_i\mid i=1,2,\cdots,n\},\quad M_2=\max\{d(x_i,x_0)\mid i=1,2,\cdots,n\}\quad\text{ve}\quad M=M_1+M_2$$

diyelim ve $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subseteq D(x_0,M)$ olduğunu gösterelim. $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ olsun. Bu durumda en az bir i_0 için $x\in A_{i_0}$ olur. $A_{i_0}\subseteq D(x_{i_0},r_{i_0})$ olduğundan da $x\in D(x_{i_0},r_{i_0})$ olur. Böylece

$d(x, x_{i_0}) \leq r_{i_0}$ olur.

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x_0) \leq r_{i_0} + M_2 \leq M_1 + M_2 = M$$

olduğundan $x \in D(x_0, M)$ olur. Buradan

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq D(x_0, M)$$

elde edilir. Teorem 2.39 gereğince $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesi sınırlıdır.✔

2.5. Metrik Uzaylarda Açık Kümeler

TANIM 2.41. ▷ **Metrik uzayda açık küme**
(X, d) bir metrik uzay ve $U \subseteq X$ olsun. Her $x \in U$ için $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa U kümesine d-açık küme veya kısaca açık küme denir. $X \setminus U$ kümesi açıksa U kümesine kapalı küme denir.

Not: $\emptyset$ kümesinin hiç bir elemanı olmadığı için $\emptyset$ kümesinin elemanlarını merkez kabul eden her açık yuvar $\emptyset$ olur. $\emptyset \subseteq \emptyset$ olacağından $\emptyset$ açık bir kümedir. Açık yuvar tanımı gereği, her açık yuvar X içinde kaldığından X kümesi de açıktır. Bu durumda $\emptyset$ ve X kümeleri kapalıdır. Yani $\emptyset$ ve X kümesi hem açık hem kapalıdır.

ÖRNEK 2.42. ▷
(X, d) ayrık metrik uzayının her alt kümesinin hem açık hemde kapalı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $U \subseteq X$ olsun. Örnek 2.16 gereğince her $x \in X$ için $B(x, 1) = \{x\}$ dir. Buna göre her $x \in U$ için

$$B(x, 1) = \{x\} \subseteq U$$

olduğundan U kümesi açıktır. Benzer şekilde her $x \in X \setminus U$ için

$$B(x, 1) = \{x\} \subseteq X \setminus U$$

olduğundan $X \setminus U$ kümsi de açıktır. Bu durumda U kümesi hem açık hemde kapalıdır. U keyfi olduğundan X in her alt kümesi hem açık hemde kapalıdır.

Teorem 2.43. ▷
Her (X, d) metrik uzayında her $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı açık bir kümedir.

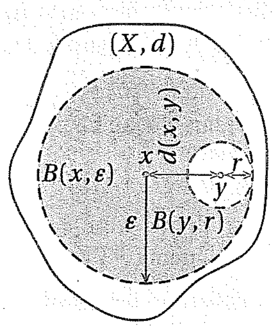
İSPAT: $y \in B(x, \varepsilon)$ alalım. $d(x, y) < \varepsilon$ olacağından $r = \varepsilon - d(x, y) > 0$ olur. $B(y, r) \subseteq B(x, \varepsilon)$ olduğunu gösterelim. (Şekil 2.24 ya bakınız.) $z \in B(y, r)$ olsun. $d(z, y) < r$ olacağından

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r = d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon$$

olur. Bu durumda $z \in B(x, \varepsilon)$ olur. Böylece

$$B(y, r) \subseteq B(x, \varepsilon)$$

dur. O halde $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı açık bir kümedir.✔



Şekil 2.24

Teorem 2.44. Her (X,d) metrik uzayında her $D(x,\varepsilon)$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.

İSPAT: $D(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \le \varepsilon\}$ kapalı yuvarının tümleyeni

$$X \backslash D(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) > \varepsilon\}$$

olur. $y \in X\backslash D(x,\varepsilon)$ olsun. $d(x,y) > \varepsilon$ olduğundan $r = d(x,y) - \varepsilon > 0$ olur. $B(y,r) \subseteq X\backslash D(x,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. (Şekil 2.25 ye bakınız.) $z \in B(y,r)$ olsun. Bu durumda $d(z,y) < r$ olur.

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + r$$

olduğundan

$$d(x,y) - r < d(x,z)$$

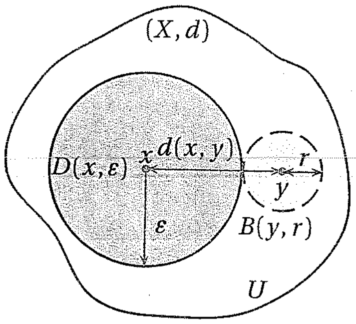
olur. Bu durumda $\varepsilon = d(x,y) - r$ olduğundan

$$\varepsilon < d(x,z)$$

olur. Buradan da $z \in X\backslash D(x,\varepsilon)$ olur. O halde

$$B(y,r) \subseteq X\backslash D(x,\varepsilon)$$

dir. Bu durumda $X\backslash D(x,\varepsilon)$ kümesi açıktır. Böylece $D(x,\varepsilon)$ kapalı yuvarı kapalıdır.✔



Şekil 2.25

2.6. Metrik Uzaylarda Yakınsaklık

TANIM 2.45. ▷

a) X bir küme olsun. Her $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna X de bir dizi veye terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi denir. $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ ise bu dizi genellikle (x_n) veya $x_1, x_2, x_3, \cdots$ şeklinde gösterilir. $n \in \mathbb{N}$ için x_n değerine dizinin n. terimi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x$ ise (x_n) dizisine x değerli sabit dizi denir ve genellikle (x) ile gösterilir.

b) Bir (x_n) dizisinin bazı elemanları atılarak, fakat geri kalanların sırası korunarak elde edilen $(x_{n_i}) = (x_i)$ dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir. Yani $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ şeklinde doğal sayılar var ve $i = 1,2,3,\ldots$ için $x_{n_i} = x_i$ oluyorsa, (x_{n_i}) dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

c) (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) \le r$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dır denir. Yani $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesi (X,d) metrik uzayında sınırlı ise (x_n) ye sınırlı dizi denir.☜

Analiz derslerinden bilinen $\mathbb{R}$ standart uzayında reel sayı dizilerinin yakınsaklığının ne anlama geldiğini tekrar hatırlayalım. Terimleri reel sayılardan oluşan bir dizi (x_n) olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı her $n \ge n_0$ için

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa (x_n) dizisine x reel sayısına yakınsıyor denir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $n \geq n_0$ için

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olması için gerek ve yeter şart $n \geq n_0$ için

$$x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = B(x,\varepsilon)$$

olması gerektiğinden bu tanım açık yuvarlar cinsinden tekrar şu şekilde yapılabilir. Her $B(x,\varepsilon)$ açık yuvarı için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı her $n \geq n_0$ için

$$x_n \in B(x,\varepsilon)$$

olacak şekilde varsa (x_n) dizisine x reel sayısına yakınsıyor denir. Bu tanımlardan faydalanılarak dizilerin yakınsaklığı kavramı herhangi bir metrik uzaya genelleştirilebilir.

TANIM 2.46. ▷ **Metrik uzayda dizilerin yakınsaklığı**
(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun.

a) Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa (x_n) dizisinine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda x noktasına (x_n) dizisinin limiti denir ve bu durum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

b) Her $\varepsilon > 0$ ve her $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{ve} \quad n \geq n_0$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $x \in X$ noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir.

c) Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

NOT 2.47. (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Bu durumda açıkça

a) $d(x_n, x) < \varepsilon$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olması gerektiğinden herhangi bir metrik uzayda $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olacak şekilde bulunabilmesidir.

b) (X,d) metrik uzayında (x_n) dizisinin bir x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$ standart uzayında $(d(x_n,x))$ dizisinin 0 a yakınsamasıdır. Yani (X,d) metrik uzayında $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$ standart uzayında $d(x_n,x) \to 0$ olmasıdır.

c) (X,d) metrik uzayında (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$ standart uzayında $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ olmasıdır.

ÖRNEK 2.48. ▶
(X,d) ayrık bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şartın (x_n) dizisinin $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x, \cdots$ formunda olması gerekdiğini gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) (x_n) dizisi x noktasına yakınsasın. Bu durumda bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B(x, 1/2)$ olacak şekilde vardır. Diğeryandan $B(x,1/2) = \{x\}$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in \{x\}$ olur. Böylece $n \geq n_0$ için $x_n = x$ olmak zorundadır.

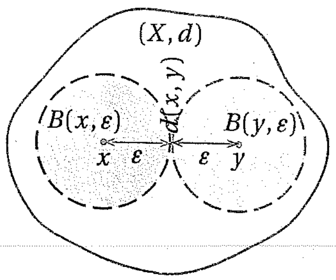
b) $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x, \cdots$ formundaki bir dizinin x noktasına yakısadığı açıktır.

(a) ve (b) gereğince (X,d) ayrık uzayında (x_n) dizinin x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin belli bir indisden sonraki terimlerinin x e eşit olmasıdır. Yani (x_n) dizisinin x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x, \cdots$$

formunda olmasıdır.

Teorem 2.49. ▶
Herhangi bir (X,d) metrik uzayında yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar.



Şekil 2.26

İSPAT: (x_n) dizisinin (X,d) uzayında $x, y \in X$ gibi farklı iki noktaya yakınsadığını varsayalım. $\varepsilon = d(x,y)/2$ diyelim. ($0 < \varepsilon < d(x,y)/2$ olarak alınabilir.)

$$B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$$

olduğunu gösterelim. $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$d(x,z) < \varepsilon \text{ ve } d(y,z) < \varepsilon$$

olur. Buradan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $2\varepsilon = d(x,y)$ olması ile çelişir. O halde $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ dur. (x_n) dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olacak şekilde vardır. Benzer şekilde (x_n) dizisi y noktasına yakınsadığından bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_1$ için $x_n \in B(y,\varepsilon)$ olacak şekilde vardır. Bu durumda her $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ için

$$x_n \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$$

olur. Bu ise $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde (x_n) dizisi tek bir noktaya yakınsar. (Şekil 2.26 ye bakınız.)✓

Teorem 2.50. ▶
(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) (x_n) dizisinin x noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır.

b) x noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi x noktasına yakınsasın. $\varepsilon > 0$ ve $N \in \mathbb{N}$ olsun. (x_{n_k}) dizisi x noktasına yakınsadığından bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k \geq N_1$ özelliğindeki her $n_k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde vardır. $n_N \geq \max\{N_1, N\}$ olsun. Bu durumda

$$d(x_{n_N}, x) < \varepsilon$$

olur. Tanım gereğince x noktası (x_n) dizisinin yığılma noktasıdır.

b)⇒a). x noktası (x_n) dizisinin yığılma noktası olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $N \in \mathbb{N}$ için bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı

$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ ve } n \geq N$$

olacak şekilde vardır. $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı

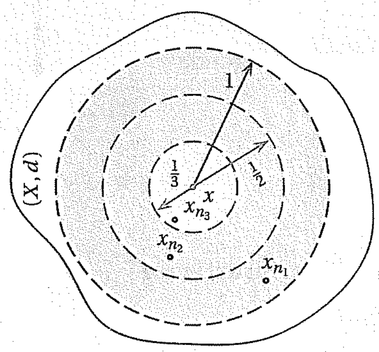
$$n_1 \geq 1 \quad \text{ve} \quad d(x_{n_1}, x) < 1$$

özelliğindeki en küçük doğal sayı olsun. $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$n_2 \geq n_1 \quad \text{ve} \quad d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$$

özelliğindeki en küçük doğal sayı olsun. $n_3 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$n_3 > n_2 \quad \text{ve} \quad d(x_{n_3}, x) < \frac{1}{3}$$



Şekil 2.27

özelliğindeki en küçük doğal sayı olsun. (Şekil 2.27 e bakınız.) Bu şekilde devam edilirse her $k \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$$

özelliğine sahip bir (x_{n_k}) alt dizisi elde edilir.

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) < \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

olduğundan $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0$ olur. Yani (x_{n_k}) alt dizisi x noktasına yakınsar.✔

ÖRNEK 2.51. ▷
Herhangi bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsasın. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dır. Böylece (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. O halde $n, m \geq n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Yani (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Teorem 2.52.

Herhangi bir metrik uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

İSPAT: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) de X de bir Cauchy dizisi olsun. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon = 1 > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < 1$$

olacak şekilde vardır. Böylece $m = n_0$ olmak üzere $n \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1$$

olur. Diğer bir deyişle $n \geq n_0$ için

$$x_n \in B(x_{n_0}, 1)$$

dir. $r > \max\{1, d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \cdots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$ olsun. Bu durumda

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1} \in B(x_{n_0}, r)$$

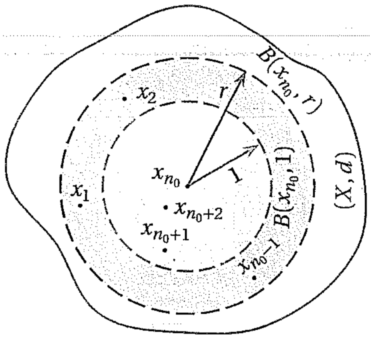
ve

$$B(x_{n_0}, 1) \subseteq B(x_{n_0}, r)$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in B(x_{n_0}, r)$$

dir. Teorem 2.39 gereğince (x_n) dizisi sınırlıdır. (Şekil 2.28 ye bakınız.)



Şekil 2.28

Teorem 2.53.

(X, d) bir metrik uzay ve (x_n) de X de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $x \in X$ noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktası ise (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

İSPAT: (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. Diğer yandan x noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olduğundan en az bir $n' \in \mathbb{N}$ sayısı

$$n' \geq n_0 \quad \text{ve} \quad d(x_{n'}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n'}) + d(x_{n'}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. O halde (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

Teorem 2.54. ▶ Bolzano-Weierstrass Teoremi

$\mathbb{R}$ standart uzayında sınırlı bir (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

İSPAT: Her $m \in \mathbb{N}$ için $S_m = \{x_n : n > m\}$ yani

$$\begin{array}{lclcl} S_1 & = & \{x_n : n > 1\} & = & \{x_2, x_3, x_4, \cdots\} \\ S_2 & = & \{x_n : n > 2\} & = & \{x_3, x_4, x_5, \cdots\} \\ S_3 & = & \{x_n : n > 3\} & = & \{x_4, x_5, x_6, \cdots\} \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_m & = & \{x_n : n > m\} & = & \{x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \cdots\} \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

olsun. Bu durumda her $m \in \mathbb{N}$ için $S_{m+1} \subseteq S_m$ dir.

a) Her $m \in \mathbb{N}$ için S_m kümesinin maksimumu olsun ve $\max S_m = y_m$ diyelim. Bu durumda (y_m) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisidir. Diğer yandan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$S_{m+1} \subseteq S_m$$

olduğundan

$$\max S_{m+1} \leq \max S_m$$

yani

$$y_{m+1} \leq y_m$$

olur. Diğer bir deyişle (y_m) dizisi monoton azalan bir dizidir. Üstelik, (x_n) dizisi sınırlı olduğundan (y_n) dizisi de sınırlıdır. Monoton azalan sınırlı bir dizi yakınsak olduğundan (y_m) dizisi yakısaktır.

b) Bazı $M \in \mathbb{N}$ için S_M kümesinin maksimumu olmasın. Bu durumda $m > M$ olmak üzere her x_m için $x_m < x_n$ olacak şekilde bir $x_n \in S_M$ vardır. (Aksi taktirde $\max\{x_{M+1}, \cdots, x_m\}$ sayısı S_M kümesinin maksimumu olurdu). $y_1 = x_{M+1}$ ve y_2 de (x_n) dizisinin y_1 teriminden sonra gelen terimleri içerisinde $x_n > y_1$ özelliğindeki ilk terimi olsun. Bu durumda $y_2 > y_1$ dir. y_3, (x_n) dizisinin y_2 teriminden sonra gelen terimleri içerisinde $x_n > y_2$ özelliğindeki ilk terimi olsun. Bu durumda $y_3 > y_2$ dir. Bu şekilde devam edilerek (x_n) dizisinin monoton artan (y_n) alt dizisi elde edilir. (x_n) dizisi sınırlı olduğundan (y_n) dizisi de sınırlıdır. Monoton artan sınırlı bir dizi yakınsak olduğundan (y_n) dizisi yakısaktır.✔

Teorem 2.52, Teorem 2.53, Teorem 2.50 ve Teorem 2.54 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 2.55. ▶ $\mathbb{R}$ standart uzayında her Cauchy dizisi yakınsaktır.

Teorem 2.54 herhangi bir metrik uzay için doğru olmayabilir.

ÖRNEK 2.56. ▶
$(\mathbb{R}, d)$ ayrık metrik uzayında $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = n$ şeklinde tanımlı (x_n) dizisinin sınırlı fakat yakınsak bir alt dizisinin olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) \leq 1$ olduğundan (x_n) dizisi sınırlıdır. Diğeryandan

(x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi ise $n_k \neq n_t$ için

$$d(x_{n_k}, x_{n_t}) = 1$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{n_k, n_t \to \infty} d(x_{n_k}, x_{n_t}) = 1 \neq 0$$

olduğundan (x_{n_k}) dizisi bir Cauchy dizisi değildir. Bu durumda yakınsak bir dizi bir Cauchy dizisi olacağından (x_{n_k}) dizisi yakınsak olamaz. Böylece (x_n) dizisinin yakınsak alt dizisi yoktur.✍

ÖRNEK 2.57. ▶
$(\mathbb{R}^m, d_2)$ standart uzayında $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}\right)$ olmak üzere $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi verilsin. $(\mathbb{R}^m, d_2)$ standart uzayında $x^{(n)} \to x$ olması için gerek ve yeter şartın $\mathbb{R}$ standart uzayında her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $x_i^{(n)} \to x_i$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ olmak üzere $(\mathbb{R}^m, d_2)$ uzayında $x^{(n)} \to x$ olsun. Bu durumda

$$d_2\left(x^{(n)}, x\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left|x_i^{(n)} - x_i\right|^2} \to 0$$

olur. Böylece her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\left|x_i^{(n)} - x_i\right| \to 0$ dır. Diğer bir deyişle $\mathbb{R}$ standart uzayında her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\left(x_i^{(n)}\right)$ dizisi x_i noktasına yakınsar.

$$\begin{array}{lcccccccc}
x^{(1)} & = \Big(x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots & , x_i^{(1)}, & \cdots & , x_m^{(1)} \Big) \\
x^{(2)} & = \Big(x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots & , x_i^{(2)}, & \cdots & , x_m^{(2)} \Big) \\
x^{(3)} & = \Big(x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & \cdots & , x_i^{(3)}, & \cdots & , x_m^{(3)} \Big) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x^{(n)} & = \Big(x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \cdots & , x_i^{(n)}, & \cdots & , x_m^{(n)} \Big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x & = (x_1, & x_2, & \cdots & , x_i, & \cdots & , x_m)
\end{array}$$

b) $\mathbb{R}$ standart uzayında her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\left(x_i^{(n)}\right)$ dizisi x_i noktasına yakınsasın. Bu durumda her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\left|x_i^{(n)} - x_i\right| \to 0$ dır. O halde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ olmak üzere

$$d_2\left(x^{(n)}, x\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left|x_i^{(n)} - x_i\right|^2} \to 0$$

olur. Yani $(\mathbb{R}^m, d_2)$ standart uzayında $x^{(n)} \to x$ dir.

(a) ve (b) gereğince $(\mathbb{R}^m, d_2)$ standart uzayında $x^{(n)} \to x$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$ standart uzayında her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $x_i^{(n)} \to x_i$ olmasıdır.✍

TANIM 2.58. ▶ Noktasal ve düzgün yakınsaklık
$d_\infty(x,y)=\sup\{|x(t)-y(t)| \mid t\in[a,b]\}$ olmak üzere $(\mathscr{C}(a,b),d_\infty)$ uzayı ve (x_n) dizisi verilsin.

a) Her $t\in[a,b]$ için $\mathbb{R}$ de $(x_n(t))$ dizisi $x(t)$ ye yakınsıyorsa (x_n) dizisine x fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir.

b) $(\mathscr{C}(a,b),d_\infty)$ uzayında (x_n) dizisi x fonksiyonuna yakınsıyorsa (x_n) dizisine x fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Teorem 2.59. ▶
$d_\infty(x,y)=\sup\{|x(t)-y(t)| \mid t\in[a,b]\}$ olmak üzere $(\mathscr{C}(a,b),d_\infty)$ uzayı ve (x_n) dizisi verilsin. (x_n) dizisi düzgün yakınsaksa noktasal yakınsaktır.

İSPAT: $t_0\in[a,b]$ ve $\varepsilon>0$ olsun. (x_n) dizisi x fonksiyonuna düzgün yakınsadığından bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı $n\geq n_0$ özelliğindeki her $n\in\mathbb{N}$ için

$$d_\infty(x_n,x)=\sup\{|x_n(t)-x(t)| \mid t\in[a,b]\}<\varepsilon$$

olacak şekilde vardır. Böylece $t_0\in[a,b]$ için bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı $n\geq n_0$ özelliğindeki her $n\in\mathbb{N}$ için

$$|x_n(t_0)-x(t_0)|\leq d_\infty(x_n,x)<\varepsilon$$

olacak şekilde vardır. O halde $\mathbb{R}$ standart uzayında $(x_n(t_0))$ dizisi $x(t_0)$ noktasına yakınsar. $t_0\in[a,b]$ keyfi olduğundan her $t\in[a,b]$ için $\mathbb{R}$ standart uzayında $(x_n(t))$ dizisi $x(t)$ noktasına yakınsar. Yani (x_n) dizisi x fonksiyonuna noktasal yakınsar.✔

Teorem 2.60. ▶
$d_\infty(x,y)=\sup\{|x(t)-y(t)| \mid t\in[a,b]\}$ olmak üzere $(\mathscr{C}(a,b),d_\infty)$ uzayında (x_n) dizisi x fonksiyonuna yakınsıyorsa $x\in\mathscr{C}(a,b)$ dir.

İSPAT: $t_0\in[a,b]$ olsun. $\varepsilon>0$ verilsin ve

$$d_\infty(x_N,x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ seçelim. x_N sürekli olduğundan $t_0\in[a,b]$ için bir $\delta>0$ sayısı

$$|t-t_0|<\delta$$

olduğunda

$$|x_N(t)-x_N(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde vardır. Böylece

$$|t-t_0|<\delta$$

özelliğindeki her $t\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}|x(t)-x(t_0)| &\leq |x(t)-x_N(t)|+|x_N(t)-x_N(t_0)|+|x_N(t_0)-x(t_0)|\\ &< d_\infty(x,x_N)+\frac{\varepsilon}{3}+d_\infty(x_N,x)<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Yani x fonksiyonu t_0 da süreklidir. t_0 keyfi olduğundan x süreklidir. Dolayısıyla

$x \in \mathscr{C}(a,b)$ dir.✔

NOT 2.61.

1. Noktasal yakınsak bir (x_n) dizisi düzgün yakınsak olmayabilir. Yani $\mathbb{R}$ standart uzayında her $t \in [a,b]$ için $(x_n(t))$ dizisi $x(t)$ noktasına yakınsamasına rağmen $(\mathscr{C}(a,b), d_\infty)$ uzayında (x_n) dizisi x fonksiyonuna yakınsamayabilir.
2. $(\mathscr{C}(a,b), d_\infty)$ uzayında (x_n) dizisinin yakınsak olup olmadığını belirlemek için her $t \in [a,b]$ noktasında $(x_n(t))$ dizisinin $\mathbb{R}$ standart uzayında yakınsak olup olmadığına bakılır.
   a) Her $t \in [a,b]$ için $(x_n(t))$ dizisi $\mathbb{R}$ standart uzayında yakınsak değilse Teorem 2.59 gereğince (x_n) dizisi $(\mathscr{C}(a,b), d_\infty)$ uzayında yakınsak olamaz.
   b) Her $t \in [a,b]$ için $(x_n(t))$ dizisi $\mathbb{R}$ standart uzayında yakınsak ise bu dizinin limitini $x(t)$ olarak gösterelim. Bu durumda $t \in [a,b]$ için

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

   şeklinde bir

$$x : [a,b] \to \mathbb{R}$$

   fonksiyonu tanımlanır.
   c) Bundan sonra x in $\mathscr{C}(a,b)$ de olup olmadığına bakılır. $x \notin \mathscr{C}(a,b)$ ise (x_n) dizisi yakınsak olamaz.
   d) $x \in \mathscr{C}(a,b)$ ise $\lim_{n\to\infty} d_\infty(x_n, x) = 0$ olup olmadığına bakılır.
   i) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(x_n, x) \neq 0$$

   ise (x_n) dizisi x fonksiyonuna yakınsamaz.
   ii) Eğer

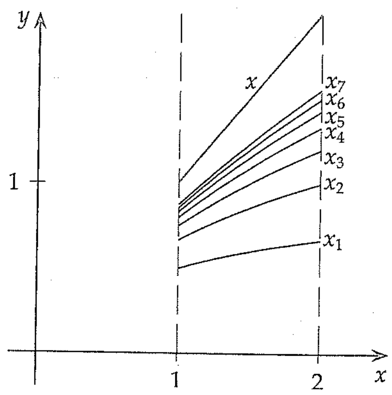
$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(x_n, x) = 0$$

   ise (x_n) dizisi x fonksiyonuna yakınsar.✎

ÖRNEK 2.62. ▷
$d_\infty(x,y) = \sup\{|x(t) - y(t)| \mid t \in [1,2]\}$ olmak üzere $(\mathscr{C}(1,2), d_\infty)$ uzayı ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n(t) = \frac{nt}{n+t}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştıralım.



Şekil 2.29

ÇÖZÜM: Açıkça $\mathbb{R}$ standart uzayında her $t \in [1,2]$ için

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{nt}{n+t} = t$$

dir. (Şekil 2.29 ye bakınız.) Bu durumda açıkça $x \in \mathscr{C}(1,2)$ dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} d_\infty(x_n, x) &= \sup\{|x_n(t) - x(t)| \mid t \in [1,2]\} = \sup\left\{\left|\frac{nt}{n+t} - t\right| \mid t \in [1,2]\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\frac{nt - t(n+t)}{n+t}\right| \mid t \in [1,2]\right\} = \sup\left\{\left|\frac{nt - tn - t^2}{n+t}\right| \mid t \in [1,2]\right\} \end{aligned}$$

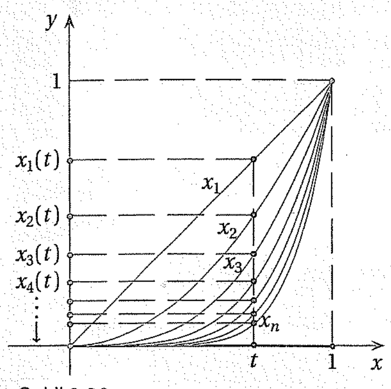
$$\begin{aligned} &= \sup\left\{\left|\frac{-t^2}{n+t}\right| | t\in[1,2]\right\} = \sup\left\{\frac{t^2}{n+t} | t\in[1,2]\right\} \\ &\le \sup\left\{\frac{t^2}{n} | t\in[1,2]\right\} \\ &\le \sup\left\{\frac{4}{n} | t\in[1,2]\right\} = \frac{4}{n} \end{aligned}$$

dır. Böylece $\mathbb{R}$ de $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$ olduğundan $d_\infty(x_n,x)\to 0$ dır. Yani $(\mathscr{C}(1,2),d_\infty)$ uzayında $x_n \to x$ dir.✍

ÖRNEK 2.63. ▶
$d_\infty(x,y)=\sup\{|x(t)-y(t)| | t\in[0,1]\}$ olmak üzere$(\mathscr{C}(0,1),d_\infty)$ uzayında $n\in\mathbb{N}$ için

$$x_n(t)=t^n$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştıralım.



Şekil 2.30

ÇÖZÜM: Açıkça $\mathbb{R}$ standart uzayında her $t\in[0,1]$ için

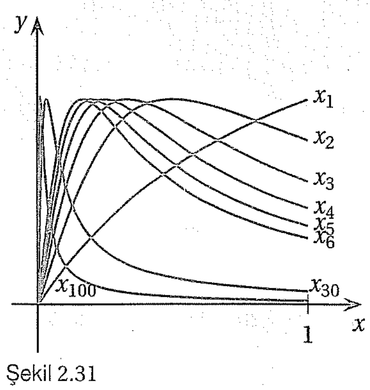
$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ 1, & t=1\end{cases}$$

dır. Diğer yandan $x\notin\mathscr{C}(0,1)$ olduğundan (x_n) dizisi $(\mathscr{C}(0,1),d_\infty)$ uzayında x noktasına yakınsamaz. (Şekil 2.30 e bakınız.)✍

ÖRNEK 2.64. ▶
$d_\infty(x,y)=\sup\{|x(t)-y(t)| | t\in[0,1]\}$ olmak üzere $(\mathscr{C}(0,1),d_\infty)$ uzayında $n\in\mathbb{N}$ için

$$x_n(t)=\frac{nt}{1+n^2t^2}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştıralım.



Şekil 2.31

ÇÖZÜM: Açıkça $\mathbb{R}$ standart uzayında her $t\in[0,1]$ için

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=0$$

dır. Bu durumda $x\in\mathscr{C}(0,1)$ dir. Şimdi $(\mathscr{C}(0,1),d_\infty)$ uzayında (x_n) dizisinin x fonksiyonuna yakınsayıp yakınsamadığını kontrol edelim.

$$d_\infty(x_n,x)=\sup\{|x_n(t)-x(t)| : t\in[0,1]\}=\sup\left\{\frac{nt}{1+n^2t^2} | t\in[0,1]\right\}$$

değerini bulalım. Bunun için

$$f(t)=\frac{nt}{1+n^2t^2}$$

fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki maksimum değerini bulalım.

$$f'(t)=\frac{n-n^3t^2}{(1+n^2t^2)^2}$$

dir. Eğer $f'(t)=0$ ise $n-n^3t^2=0$ ve böylece $t^2=\frac{1}{n^2}$ olur. Buradan $t=\pm\frac{1}{n}$ bulunur ve $\frac{-1}{n}\notin[0,1]$, $\frac{1}{n}\in[0,1]$ dir. Buna göre

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},\quad f(0)=0,\quad f(1)=\frac{n}{1+n^2}\leq\frac{1}{2}$$

olduğundan

$$d_\infty(x_n,x)=\sup\left\{\frac{nt}{1+n^2t^2}|0\leq t\leq 1\right\}=\frac{1}{2}$$

dir. Yani $\lim_{n\to\infty} d_\infty(x_n,x)\neq 0$ dır. Dolayısıyla $(\mathscr{C}(0,1),d_\infty)$ uzayında bu dizi yakınsak değildir. (Şekil 2.31 a bakınız.)✍

ÖRNEK 2.65. ▷
$d_{\text{int}}(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$ olmak üzere $(\mathscr{C}(a,b),d_{\text{int}})$ uzayında her $n\in\mathbb{N}$ için

$$x_n(t)=\begin{cases} n(t-a), & a\leq t\leq a+\frac{1}{n} \\ 1, & a+\frac{1}{n}<t\leq b\end{cases}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisinin her $t\in[a,b]$ için

$$x(t)=1$$

şeklinde tanımlı $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsadığını gösterelim

ÇÖZÜM: Açıkça $t\in[a,a+1/n]$ için $n(t-a)-1=nt-(na+1)\leq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} d_{\text{int}}(x_n,x) &= \int_a^b |x_n(t)-x(t)|\,dt=\int_a^{a+1/n}|x_n(t)-x(t)|\,dt+\int_{a+1/n}^b|x_n(t)-x(t)|\,dt \\ &= \int_a^{a+1/n}|n(t-a)-1|\,dt+\int_{a+1/n}^b|1-1|\,dt=\int_a^{a+1/n}|n(t-a)-1|\,dt \\ &= \int_a^{a+1/n}(1-n(t-a))dt=\int_a^{a+1/n}((na+1)-nt)dt \\ &= \int_a^{a+1/n}(na+1)dt-\int_a^{a+1/n}nt\,dt=(na+1)t|_a^{a+1/n}-n\frac{t^2}{2}\Big|_a^{a+1/n}=\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathbb{R}$ de $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ olduğundan $d_{\text{int}}(x_n,x)\to 0$ dır. Yani $(\mathscr{C}(a,b),d_{\text{int}})$ uzayında $x_n\to x$ dir.

Diğeryandan $x_n(a)=0$ ve $x(a)=1$ olduğundan $\mathbb{R}$ standart uzayında $(x_n(a))$ dizisi $x(a)$ noktasına yakınsamaz.✍

Teorem 2.66. ▶
(X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

b) $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$ olacak şekilde vardır.

İSPAT:

a)⇒b). $x \in U$ ve U açık bir küme olsun. Tanım 2.41 gereğince $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. (x_n) dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ olduğundan $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olur.

b)⇒a). Teorem 2.43 gereğince her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon)$ açık bir küme olduğundan (b) gereğince bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olacak şekilde vadır. Bu durumda (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.✔

2.7. Tam Metrik Uzaylar ve Büzülme Dönüşümü Teoremi

Analiz derslerinden bilindiği gibi $\mathbb{R}$ de bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart dizinin bir Cauchy dizisi olmasıdır. Diğer bir deyişle $\mathbb{R}$ de bir (x_n) dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunabilmesidir. Her metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisi olmasına rağmen her Cauchy dizisi her zaman yakınsak değildir. Örneğin, $\mathbb{Q}$ uzayında $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

dizisi bir Cauchy dizisi olmasına rağmen $\mathbb{Q}$ nun hiç bir noktasına yakınsamaz.

Benzer şekilde $x_n = \dfrac{1}{n}$ şeklinde tanımlı (x_n) dizisi $X = (0,1]$ uzayında bir Cauchy dizisi olmasına rağmen X in hiç bir noktasına yakınsamaz.

TANIM 2.67. ▶ **Tam metrik uzay ve büzülme dönüşümü**
(X,d) bir metrik uzay olsun.

a) X deki her Cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsıyorsa X uzayına tam metrik uzay denir. $A \subseteq X$ ve (A, d_A) uzayı tamsa A kümesine X in tam alt kümesi denir.

b) $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$$

olacak şekilde $0 \leq k < 1$ özelliğine sahip bir k reel sayısı varsa f fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir.☜

ÖRNEK 2.68. ▶
$\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ de tam olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{x_n}{2}$ olmak üzere (x_n) dizisi yani

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ x_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12},\ x_4 = \frac{577}{408}, \cdots$$

dizisi verilsin. Bu durumda

$$d(x_n, x_m) = |x_m - x_n| \to 0$$

olduğundan bu dizi $\mathbb{Q}$ da bir Cauchy dizisidir. (x_n) dizisinin $x \in \mathbb{Q}$ nokrasına yakınsadığını varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 1$ olduğundan $x \geq 1$ dir. Diğer yandan $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{x_n}{2}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} + \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{2}$$

olur. Buradan

$$x = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

olur. Bu durumda $x^2 = 2$ ve böylece $x_n \geq 0$ olduğundan $x = \sqrt{2}$ olur. Bu ise $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğundan bir çelişkidir. Bu durumda (x_n) dizisi $\mathbb{Q}$ nun hiç bir noktasına yakınsamaz. O halde $\mathbb{Q}$ tam değildir. ✍

ÖRNEK 2.69. ▷
Sonuç 2.55 gereğince $\mathbb{R}$ standart uzayı tamdır. ✍

ÖRNEK 2.70. ▷
$(\mathbb{R}^m, d_2)$ standart uzayının tam olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}\right)$ olmak üzere $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi $\mathbb{R}^m$ de bir Cauchy dizisi olsun.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^{(1)} & = \big(x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots & , x_i^{(1)}, & \cdots & , x_m^{(1)}\big) \\
x^{(2)} & = \big(x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots & , x_i^{(2)}, & \cdots & , x_m^{(2)}\big) \\
x^{(3)} & = \big(x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & \cdots & , x_i^{(3)}, & \cdots & , x_m^{(3)}\big) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x^{(n)} & = \big(x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \cdots & , x_i^{(n)}, & \cdots & , x_m^{(n)}\big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x & = (x_1, & x_2, & \cdots & , x_i, & \cdots & , x_m)
\end{array}$$

Bu durumda $k, n \to \infty$ için

$$\lim_{k,n\to\infty} d_2\left(x^{(n)}, x^{(k)}\right) \to 0$$

dır. Bu durumda $i = 1, 2, \cdots, m$ için

$$0 \leq \left|x_i^{(n)} - x_i^{(k)}\right| \leq \sqrt{\left(x_i^{(n)} - x_i^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i^{(n)} - x_i^{(k)}\right)^2} = d_2\left(x^{(n)}, x^{(k)}\right)$$

olur. Buradan $i = 1,2,\cdots,m$ ve $k,n \to \infty$ için $\left|x_i^{(n)} - x_i^{(k)}\right| \to 0$ elde edilir. O halde $i = 1,2,\cdots,m$ için $\left(x_i^{(n)}\right)$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $i = 1,2,\cdots,m$ için $\left(x_i^{(n)}\right)$ dizisi bir $x_i \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar. Örnek 2.57 gereğince $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ noktasına yakınsar. Böylece $\mathbb{R}^m$ tamdır.✍

ÖRNEK 2.71. ▷
Her (X,d) ayrık metrik uzayının tam olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2}$$

olur. Diğeryandan $d(x_n, x_{n_0}) = 0$ veya $d(x_n, x_{n_0}) = 1$ olacağından $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n_0}) = 0$ olur. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n_0}$ olur. Diğer bir deyişle, belirli bir terimden sonra dizi sabittir. Yani dizi

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0-1}, x_{n_0}, x_{n_0},, x_{n_0}, \cdots$$

formundadır. Bu durumda bu dizi yakınsak ve limiti x_{n_0} dır. O halde (X,d) ayrık metrik uzayı tamdır.✍

Teorem 2.72. ▷
$d_\infty(x,y) = \sup\{|x(t) - y(t)| \mid t \in [0,1]\}$ olmak üzere $(\mathscr{C}(a,b), d_\infty)$ uzayı tamdır.

İSPAT: (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $m, n \to \infty$ için

$$d_\infty(x_n, x_m) = \sup\{|x_n(t) - x_m(t)| \mid t \in [0,1]\} \to 0$$

dır. Her $t \in [a,b]$ için

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq d_\infty(x_n, x_m)$$

olduğundan

$$|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$$

olur. Yani her $t \in [a,b]$ için $(x_n(t))$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $(x_n(t))$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir $x(t)$ noktasına yakınsar. Her $t \in [a,b]$ için

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

şeklinde bir $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlayalım. Şimdi $d_\infty(x_n, x) \to 0$ ve $x \in \mathscr{C}(a,b)$ olduğunu gösterelim. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan $t \in [a,b]$ için $(x_n(t))$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla verilen $\varepsilon > 0$ için bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı $j, k \geq N_1$ olduğundan

$$|x_j(t) - x_k(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde vardır. Diğeryandan

$$x_k(t) \to x(t)$$

olduğundan bir $N_2 \in \mathbb{N}$ sayısı $k \geq N_2$ için

$$|x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde vardır. Dolayısıyla

$$j, k \geq \max\{N_1, N_2\}$$

ve her $t \in [a, b]$ için

$$|x_j(t) - x(t)| \leq |x_j(t) - x_k(t)| + |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Yani $j \geq \max\{N_1, N_2\}$ için $\varepsilon > 0$ sayısı $\{|x_j(t) - x(t)| \mid t \in [0,1]\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bu durumda $j \geq \max\{N_1, N_2\}$ için

$$d_\infty(x_j, x) = \sup\{|x_j(t) - x(t)| \mid t \in [0,1]\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olur. Yani $\lim_{j\to\infty} d_\infty(x_j, x) = 0$ dır. Böylece (x_n) dizisi x e yakınsar. Teorem 2.60 gereğince $x \in \mathscr{C}(a, b)$ dir.✔

TANIM 2.73. ▷ Bir fonksiyonun sabit noktası
X bir küme ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $f(x_0) = x_0$ özelliğini sağlayan $x_0 \in X$ noktasına f fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Teorem 2.74. ▷ Büzülme dönüşümü teoremi

(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda (X, d) uzayı tamsa f nin tek bir sabit noktası vardır. Üstelik, x_1 noktası X in herhangi bir noktası olmak üzere

$$x_1,\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İSPAT: x_1, X in herhangi bir noktası olmak üzere

$$x_1,\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$$

şeklinde bir (x_n) dizisi tanımlayalım. (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu ve (x_n) dizisinin limit noktasının f fonksiyonunun tek bir sabit noktası olduğunu gösterelim. f fonksiyonu bir büzülme dönüşümü olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

olacak şekilde $0 \leq k < 1$ özelliğine sahip bir k reel sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &= kd(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= k^{n-2} d(f(x_1), f(x_2)) \leq k^{n-1} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n-1} d(x_1, x_2) \tag{2.3}$$

olur. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olduğunu kabul edelim. ($n > m$ olması hali benzer şekilde yapılır.) Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m) \\ &\vdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \end{aligned}$$

olur. (2.3) gereğince

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^{n-1} d(x_1, x_2) + k^n d(x_1, x_2) + \cdots + k^{m-2} d(x_1, x_2) \\ &\leq (k^{n-1} + k^n + \cdots + k^{m-2}) d(x_1, x_2) \\ &\leq k^{n-1}(1 + k + k^2 + \cdots + k^{(m-n)-1}) d(x_1, x_2) \\ &= k^{n-1}\left(\frac{1-k^{m-n}}{1-k}\right) d(x_1, x_2) \\ &< \frac{k^{n-1}}{1-k} d(x_1, x_2) \quad (0 < 1 - k^{m-1} \leq 1 \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

dır. Böylece $m, n \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ dır. O halde (x_n) dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d) uzayı tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Böylece

$$d(f(x_n), f(x)) \leq kd(x_n, x)$$

olduğundan $d(f(x_n), f(x)) \to 0$ dır. Yani $f(x_n) \to f(x)$ dir. $x_n = f(x_{n-1})$ olduğundan $x_n \to f(x)$ dir. Teorem 9.8 gereğince herhangi bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tek olduğundan $x = f(x)$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisinin limiti olan x noktası f nin sabit bir noktasıdır.

Şimdi f nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. y, f nin x den farklı sabit bir noktası olsun. Yani $y = f(y)$ olsun. Bu durumda

$$0 \leq d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

olur. $0 \leq k < 1$ olduğundan $d(x, y) = 0$ olmalıdır. Bu durumda $x = y$ dir. Bu ise $x \neq y$ olması ile çelişir. O halde f nin tek bir sabit noktası vardır.✔

ÖRNEK 2.75. ▷
$f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{25}{26}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

a) f fonksiyonunun bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim.

b) Cebirsel olarak $x = f(x)$ denklemini çözelim.

ÇÖZÜM:

a) $x > y$ olmak üzere $x, y \in [1,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \leq \left|\frac{25}{26}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{25}{26}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right| \\ &\leq \frac{25}{26}\left(\left|(x-y) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right|\right) \leq \frac{25}{26}|x-y| \end{aligned}$$

dir. $[1,\infty)$ tam olduğundan f nin tek bir sabit noktası vardır.

b) Şimdi $f(x) = x$ denkleminin $[1,\infty)$ de kökünü bulalım.

$$f(x) = \frac{25}{26}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{25}{26}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = x \Leftrightarrow \frac{25}{26}(x^2+1) = x^2 \Leftrightarrow 25x^2 + 25 = 26x^2 \Leftrightarrow x^2 = 25$$

olur. Buradan $x^2 = \pm 5$ elde edilir. $-5 \notin [1,\infty)$ olduğundan $x = 5$ dir. Yani $5 = f(5)$ dir. O halde $x = f(x)$ denkleminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm 5 dir.✔

ÖRNEK 2.76. ▷
$x, y \in \mathscr{C}(0,1/2)$ için

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1/2]\}$$

olmak üzere $(\mathscr{C}(0,1/2), d_\infty)$ uzayını verilsin. Verilen $x \in \mathscr{C}(0,\frac{1}{2})$ için

$$f : \mathscr{C}(0,1/2) \to \mathscr{C}(0,1/2)$$

fonksiyonu

$$(f(x))(t) = t(x(t) + 1)$$

şeklinde tanımlansın.

a) f nin $\mathscr{C}(0,1/2)$ nin bir büzülme fonksiyonu olduğunu gösterelim.

b) $x_1(t) = t$ ve $n \geq 2$ için $x_n = f(x_{n-1})$ dizisini oluşturarak f nin sabit noktasını bulalım.

ÇÖZÜM:

a) $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in \mathscr{C}(0,1/2)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_\infty(f(x), f(y)) &= \sup\{|t(x(t)+1) - t(y(t)+1)| : t \in [0,1/2]\} \\ &= \sup\{|t||x(t) - y(t)| : t \in [0,1/2]\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{1}{2}|x(t) - y(t)| : t \in [0,1/2]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sup\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1/2]\} \\ &\leq \frac{1}{2} d_\infty(x, y) \end{aligned}$$

$(k = 1/2)$ olduğundan f bir büzülmedir. $\mathscr{C}(0,1/2)$ tam olduğundan f nin tek bir sabit noktası vardır.

b) $x_1(t) = t$ olsun.

$$\begin{array}{lllllllll} x_2(t) &=& (f(x_1))(t) &=& t(x_1(t)+1) &=& t(t+1) &=& t^2 + t \\ x_3(t) &=& (f(x_2))(t) &=& t(x_2(t)+1) &=& t(t^2+t+1) &=& t^3+t^2+t \\ x_4(t) &=& (f(x_3))(t) &=& t(x_3(t)+1) &=& t(t^3+t^2+t+1) &=& t^4+t^3+t^2+t \end{array}$$

olur. Daha genel olarak

$$\begin{aligned} x_n(t) = (f(x_{n-1}))(t) = t(x_{n-1}(t)+1) &= t(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots t + 1) \\ &= t^n + t^{n-1} + \cdots + t^2 + t \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{t}{1-t}$$

olur. (x_n) dizisinin x fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilir. Gerçekten

$$f(x)(t)) = f\left(\frac{t}{1-t}\right)(t) = t\left(\frac{t}{1-t} + 1\right) = \frac{t}{1-t} = x(t)$$

dir. O halde

$$x(t) = \frac{t}{1-t}$$

fonksiyonu f nin tek sabit noktasıdır.✓

Teorem 2.77. ▷

$f : [a,b] \to [a,b]$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f bir büzülme dönüşümüdür.

b) Her $x \in [a,b]$ için

$$|f'(x)| \leq k$$

olacak şekilde $0 \leq k < 1$ özelliğine sahip bir k sayısı vardır.

İSPAT:

a)⇒b). f bir büzülme dönüşümü olduğundan her $x, y \in [a,b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

olacak şekilde $0 \leq k < 1$ özelliğine sahip bir k sayısı vardır. Bu durumda özel olarak x ve $x+\triangle x \in [a,b]$ noktaları için

$$\left|f(x+\triangle x)-f(x)\right| \leq k|(x+\triangle x)-x| = k|\triangle x|$$

olur. Böylece $\triangle x \neq 0$ için

$$\left|\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\right| \leq k$$

dır. O halde

$$\left|f'(x)\right| = \lim_{\triangle x \to 0}\left|\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\right| \leq k$$

dır. Böylece, her $x \in [a,b]$ için $\left|f'(x)\right| \leq k$ dır.

b)⇒a). (b) gereğince her $x \in [a,b]$ için $\left|f'(x)\right| \leq k$ olacak şekilde $0 \leq k < 1$ özelliğine sahip bir k sayısı vardır. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in [a,b]$ noktaları için Ortalama değer teoremi gereğince

$$\frac{\left|f(x)-f(y)\right|}{\left|x-y\right|} = \left|f'(c)\right|$$

olacak şekilde $x < c < y$ özelliğine sahip bir c noktası vardır.

$$\left|f'(c)\right| \leq k$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|f'(c)\right| \leq k$$

olur. Böylece

$$\left|f(x)-f(y)\right| \leq k\left|x-y\right|$$

elde edilir. Bu durumda f bir büzülme dönüşümüdür.✔

ÖRNEK 2.78. ▶

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{7}(x^3+x^2+1)$$

şeklinde tanımlansın.

a) Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \in [0,1]$ olduğunu ve böylece $f:[0,1] \to [0,1]$ olduğunu gösteriniz.

b) Her $x, y \in [0,1]$ için

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{5}{7}|x-y|$$

olduğunu gösteriniz.

c) $[0,1]$ aralığında $x^3+x^2-7x+1=0$ denkleminin tek bir bir çözümü olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

a) Her $x \in [0,1]$ için f nin türevi vardır ve $f'(x) = \frac{1}{7}(3x^2+2x)$ dir. Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \geq 0$ olduğundan f kesin artandır. Diğeryandan, $f(1) = \frac{3}{7} \leq 1$ ve $f(0) = \frac{1}{7} \geq 0$ olduğundan her $x \in [0,1]$ için $f(x) \in [0,1]$ dir. Böylece $f:[0,1] \to [0,1]$ dir.

b) $x, y \in [0,1]$ olmak üzere $x \neq y$ olsun.

$$|x^3 - y^3| = |x-y||x^2+xy+y^2|$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq \left|\frac{1}{7}(x^3+x^2+1)-\frac{1}{7}(y^3+y^2+1)\right| = \frac{1}{7}|(x^3-y^3)+(x^2-y^2)| \\
&\leq \frac{1}{7}\left(|x^3-y^3|+|x^2-y^2|\right) \\
&= \frac{1}{7}\left(|x-y||x^2+xy+y^2|+|x-y||x+y|\right) \\
&= \frac{|x-y|}{7}\left(|x^2+xy+y^2|+|x+y|\right) \leq \frac{|x-y|}{7}(|1+1.1+1|+|1+1|) \\
&\leq \frac{|x-y|}{7}\times 5 = \frac{5}{7}|x-y|
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda f bir büzülme dönüşümüdür.

c) $[0,1]$ tam olduğundan f nin $[0,1]$ üzerinde tek bir sabit noktası vardır. Yani $x = \frac{1}{7}(x^3+x^2+1)$ denkleminin $[0,1]$ aralığında tek bir çözümü vardır. Diğer bir deyişle $x^3+x^2+1 = 7x$ denkleminin $[0,1]$ aralığında tek bir çözümü vardır

ÖRNEK 2.79. ▷
α reel sayısı 5 den büyük olsun.

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x^3+x^2+1\right)$$

şeklinde tanımlı $f : [-1,1] \to [-1,1]$ fonksiyonu verilsin.
a) f nin bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim.
b) $x^3+x^2-\alpha x+1=0$ denkleminin $[-1,1]$ aralığında tek bir kökü olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Her $x \in [-1,1]$ için f nin türevi vardır ve

$$|f'(x)| = \frac{1}{\alpha}|3x^2+2x| \leq \frac{1}{\alpha}|3.1+2.1| = \frac{5}{\alpha}$$

dir. $k = \frac{5}{\alpha}$ diyelim. Bu durumda $\alpha > 5$ olduğundan $k < 1$ olur. Üstelik, $|f'(x)| \leq k$ olduğundan f bir büzülme dönüşümüdür.

b) $[-1,1]$ tam olduğundan f nin tek bir sabit noktası vardır. Yani

$$\frac{1}{\alpha}\left(x^3+x^2+1\right) = x$$

olacak şekilde tek bir $x \in [-1,1]$ vardır. Böylece

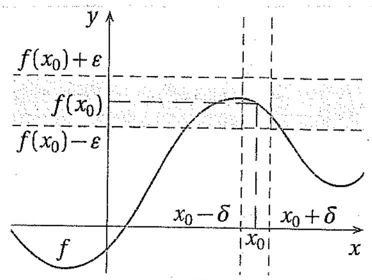
$$x^3+x^2+1 = \alpha x$$

olacak şekilde tek bir $x \in [-1,1]$ vardır. Yani

$$x^3 + x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

olacak şekilde tek bir $x \in [-1,1]$ vardır.

2.8. Metrik Uzaylarda Süreklilik



Şekil 2.32

Analiz derslerinden bilinen $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyonun bir x_0 noktadasında sürekli olmasının ne anlama geldiğini tekrar hatırlayalım. Her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için bir $\delta > 0$ reel sayısı $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir denir. (Şekil 2.32 ve 2.33 ye bakınız.) f fonksiyonu $\mathbb{R}$ nin her noktasında sürekliyse f ye $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir denir. Bu tanımın üzerinde "çıkarma" ve "mutlak değer" tanımlı olmayan metrik uzaylara nasıl genelleştirilebileceği pek açık değildir. Bu yüzden sürekliliğin herhangi bir metrik uzaya genelleştirilebilecek diğer bir (denk) tanımını yapmamız gerekir. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ olmak üzere her bir

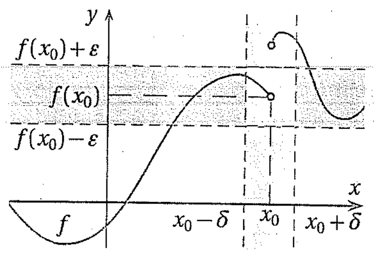
$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

açık aralığı için bir $\delta > 0$ reel sayının

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

özelliğindeki her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$



Şekil 2.33

olacak şekilde bulunabilmesi olduğu kolayca gösterilebilir. Bu son tanımda "mutlak değer" olmadığı için önceki tanımdan bizim için daha elverişlidir. Diğer yandan bu tanımda hala "çıkarma" işlemi mevcuttur. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir f fonksiyonunun sürekliliğinin bu son tanımı ise $\mathbb{R}$ üzerindeki standart (mutlak değer) metrik cinsinden şuna denktir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $B(f(x_0), \varepsilon)$ için

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Bu tanımda "çıkarma" ve "mutlak değer" den kurtulunmuştur. Böylece bu son tanımdan faydalanılarak süreklik kavramı herhangi iki metrik uzay arasındaki fonksiyonların süreklilik kavramına genelleştirilebilir.

Noktasal Süreklilik

Tanım 2.80. ▷ **Metrik uzaylarda noktasal süreklilik**
(X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $B(f(x_0), \varepsilon)$ için

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

SONUÇ 2.81. ▶ (X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun x_0 da sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ reel sayısının

$$d_1(x,x_0) < \delta$$

özelliğini sağlayan her $x \in X$ için

$$d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunmasıdır.

Teorem 2.82. ▶

(X,d_1) ve (Y,d_2) birer metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

b) (X,d_1) uzayında $x_n \to x_0$ özelliğine sahip her (x_n) dizisi için (Y,d_2) uzayında $f(x_n) \to f(x_0)$ dir.

İSPAT:

a)⇒b). (X,d_1) uzayında $x_n \to x_0$ olsun. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan her $B(f(x_0),\varepsilon)$ açık yuvarı için

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon) \tag{2.4}$$

olacak biçimde bir $B(x_0,\delta)$ açık yuvarı vardır. Diğeryandan (X,d_1) uzayında $x_n \to x_0$ olduğundan $B(x_0,\delta)$ açık yuvarı için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_0 \leqslant n$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x_0,\delta)$ olacak şekilde vardır. Böylece (2.4) gereğince $n_0 \leqslant n$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) \in B(f(x_0),\varepsilon)$ olur. Bu ise (Y,d_2) uzayında $f(x_n) \to f(x_0)$ demektir.

b)⇒a). f fonksiyonun x_0 noktasında sürekli olmadığını varsayalım. Bu durumda süreklilik tanımı gereğince her $B(x_0,\delta)$ açık yuvarı için

$$f(B(x_0,\delta)) \nsubseteq B(f(x_0),\varepsilon_0)$$

olacak biçimde bir $B(f(x_0),\varepsilon_0)$ açık yuvarı vardır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x_n) \notin B(f(x_0),\varepsilon_0)$$

olacak şekilde bir $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ seçerek bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) \notin B(f(x_0),\varepsilon_0)$ olduğundan (Y,d_2) uzayında $f(x_n)$ dizisi $f(x_0)$ noktasına yakınsamaz. Şimdi (X,d_1) uzayında $x_n \to x_0$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $\frac{1}{\varepsilon}$ sayısından büyük ilk doğal sayıya n_0 diyelim. Bu durumda $n_0 \leq n$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ ve

$$B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \subseteq B\left(x_0, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq B(x_0,\varepsilon)$$

olduğundan $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ olur. Bu ise (X, d_1) uzayında $x_n \to x_0$ demektir. O halde (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsadığı halde $(f(x_n))$ dizisi $f(x_0)$ noktasına yakınsamaz. Bu ise (b) ile çelişir. Bu durumda f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.✔

Teorem 2.83 ▷

(X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

b) $f(x_0)$ noktasını içeren her bir U açık kümesi için x_0 noktasını içeren bir V açık kümesi $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde vardır.

İSPAT:

a)⇒b). U, $f(x_0)$ noktasını içeren açık bir küme olsun. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı

$$B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq U$$

olacak şekilde vardır. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan

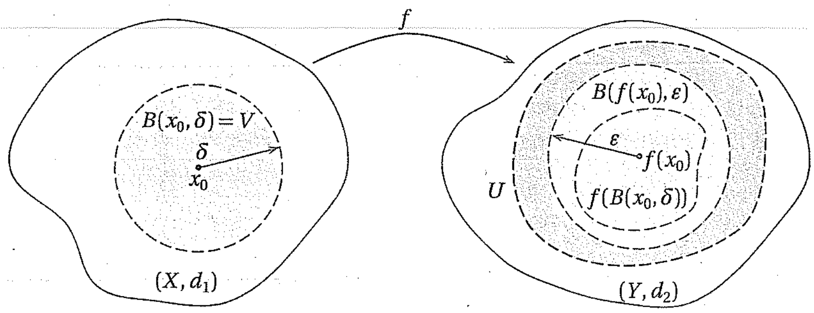
$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. (Şekil 2.34 e bakınız) $V = B(x_0, \delta)$ denilirse V kümesi açık,

$$x_0 \in V \quad \text{ve} \quad f(V) \subseteq U$$

olur.

Şekil 2.34



b)⇒a). $\varepsilon > 0$ olsun. $B(f(x_0), \varepsilon)$ kümesi açık bir küme ve $f(x_0) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ dur. (b) gereğince

$$x_0 \in V \quad \text{ve} \quad f(V) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir V açık kümesi vardır. $x_0 \in V$ ve V açık olduğundan $B(x_0, \delta) \subseteq V$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

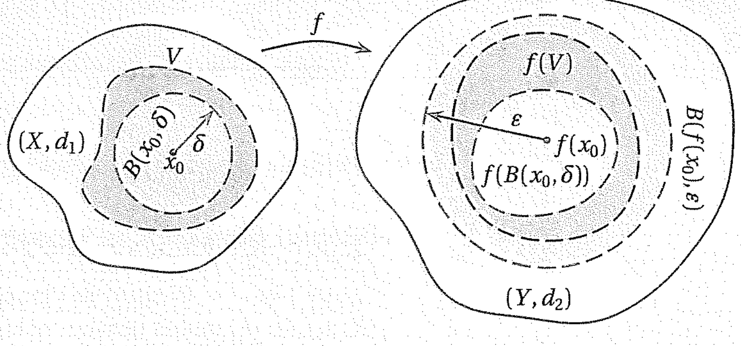
$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq f(V)$$

olur. Böylece

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

elde edilir. (Şekil 2.35 ye bakınız.) O halde f fonksiyonu x_0 da süreklidir.✔

Şekil 2.35



Süreklilik

TANIM 2.84. ▷ **Metrik uzaylarda süreklilik**
(X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzayları ile bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu X uzayının her noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X üzerinde sürekli fonksiyon veya kısaca sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.85. ▷
(X,d_1), (Y,d_2) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) f fonksiyonu süreklidir.
b) (Y,d_2) uzayındaki her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi (X,d_1) uzayında açıktır.

İSPAT:

a)⇒b). U kümesi (Y,d_2) uzayında açık olsun. Eğer $f^{-1}(U) = \emptyset$ ise $f^{-1}(U)$ açıktır. $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $x \in f^{-1}(U)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in U$ ve U açık olduğundan

$$B(f(x),\varepsilon) \subseteq U$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. f sürekli olduğundan $B(f(x),\varepsilon)$ açık yuvarı için

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $B(x,\delta)$ açık yuvarı vardır. Bu durumda

$$f(B(x,\delta)) \subseteq U$$

olur. Buradan

$$B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$$

elde edilir. Bu durumda $f^{-1}(U)$ kümesi açıktır.

b)⇒a). $\varepsilon > 0$ reel sayısı verilsin. Her açık yuvar açık bir küme olduğundan (b) gereğince $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ kümesi (X,d_1) uzayında açıktır. Diğeryandan $f(x) \in B(f(x),\varepsilon)$

olduğundan $x \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ olur. Bu durumda açık küme tanımı gereğince

$$B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$$

olacak biçimde bir $B(x,\delta)$ açık yuvarı vardır. Buradan

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$$

bulunur. Bu durumda f fonksiyonu süreklidir.✔

Düzgün Süreklilik ve Lipschitz Süreklilik

TANIM 2.86. ▷ **Düzgün ve Lipschitz süreklilik**
$(X,d_1),(Y,d_2)$ metrik uzayları ve bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

a) Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ reel sayısı

$$d_1(x,y) < \delta$$

özelliğini sağlayan her $x,y \in X$ için

$$d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir. Buna denk olarak her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı her $x \in X$ için

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

b) Her $x,y \in X$ için

$$d_2(f(x),f(y)) \le k d_1(x,y)$$

olacak şekilde sabit bir $k > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz süreklidir denir.☜

Norm dilinde düzgün süreklilik ve Lipschitz süreklilik şu şekilde ifade edilir.

NOT 2.87. $(X,\|.\|_1),(Y,\|.\|_2)$ normlu uzayları ve bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

a) Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı

$$\|x-y\|_1 < \delta$$

özelliğini sağlayan her $x,y \in X$ için

$$\|f(x)-f(y)\|_2 < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

b) Her $x,y \in X$ için

$$\|f(x)-f(y)\|_2 \le k\|x-y\|_1$$

olacak şekilde sabit bir $k > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz süreklidir denir.☜

ÖRNEK 2.88. ▷
(X,d_1) ayrık uzay olmak üzere (Y,d_2) herhangi bir metrik uzay olsun. Bu durumda

her $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\varepsilon>0$ verilsin. $\delta=\frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$d_1(x,y)<\delta$$

ise $x=y$ olacağından

$$d_2(f(x),f(y))=d_2(f(x),f(x))=0<\varepsilon$$

olur. O halde f düzgün süreklidir.✍

ÖRNEK 2.89. ▷
(X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay ve $c\in Y$ olmak üzere $f(x)=c$ şeklinde tanımlı $f:X\to Y$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x,y\in X$ için

$$d_2(f(x),f(y))=d_2(c,c)=0\le d_1(x,y)\quad (k=1)$$

olur. Böylece f Lipschitz süreklidir.✍

ÖRNEK 2.90. ▷
(X,d) bir metrik uzay olsun. $\mathrm{id}(x)=x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id}:(X,d)\to(X,d)$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x,y\in X$ için

$$d(\mathrm{id}(x),\mathrm{id}(y))=d(x,y)\le d(x,y)\quad (k=1)$$

olur. Böylece id fonksiyonu Lipschitz süreklidir.✍

ÖRNEK 2.91. ▷
$a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=ax+b$ şeklinde tanımlı $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: d standart metrik olmak üzere

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &= |f(x)-f(y)|=|ax+b-(ay+b)|=|a(x-y)|=|a|\,|x-y| \\ &= |a|\,d(x,y)\le|a|\,d(x,y)\quad (k=|a|) \end{aligned}$$

olur. Böylece f fonksiyonu Lipschitz süreklidir.✍

Teorem 2.92. ▷
(X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay olsun. Bu durumda $f:X\to Y$ fonksiyonu düzgün sürekli ise süreklidir.

İSPAT: $x_0\in X$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda bir $\delta>0$ reel sayısı $d_1(x,y)<\delta$ özelliğini sağlayan her $x,y\in X$ için

$$d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$$

olacak şekilde vardır. Böylece $d_1(x_0, y) < \delta$ özelliğini sağlayan her $y \in X$ için

$$d_2(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$$

olur. Bu durumda f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktası keyfi olduğundan f süreklidir.✔

Teorem 2.93. ▷
(X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olsun. Bu durumda $f : X \to Y$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ise düzgün süreklidir.

İSPAT: $\varepsilon > 0$ olsun. f fonksiyonu Lipschitz sürekli olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y)$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ olsun. Bu durumda $d_1(x, y) < \delta$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y) < k\delta = \varepsilon$$

olur. Bu durumda f düzgün süreklidir.✔

Not

1. Teorem 2.92 gereğince düzgün sürekli her fonksiyon sürekli olmasına rağmen sürekli her fonksiyon düzgün sürekli değildir.
2. Teorem 2.93 gereğince Lipschitz sürekli her fonksiyon düzgün sürekli olmasına rağmen düzgün sürekli her fonksiyon Lipschitz sürekli değildir.

ÖRNEK 2.94. ▷
$(\mathbb{R}, d_1)$ ayrık uzay ve $(\mathbb{R}, d)$ standart uzay olmak üzere $\mathrm{id}(x) = x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d)$ fonksiyonu verilsin. id fonksiyonunun Lipschitz sürekli olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: id fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) = |x - y| \leq k d_1(x, y)$$

olacak şekilde bir k sayısı vardır. $x = 0$ ve $y = k + 2$ olsun. Bu durumda

$$d_1(x, y) = 1 \text{ ve } d(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) \leq k d_1(x, y)$$

olduğundan

$$d(\mathrm{id}(0), \mathrm{id}(k+2)) = |0 - (k+2)| = k + 2 \leq k$$

olur. Bu bir çelişkidir. O halde id fonksiyonu Lipschitz sürekli değildir. Diğeryandan Örnek 2.88 gereğince id fonksiyonu düzgün süreklidir.✍

2.9. Alıştırmalar

1. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (M-1) ve (M-3) şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$p(x, y) = d(x, y) + d(y, x)$$

şeklinde tanımlanan p fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

2. d_1 ve d_2 boş olmayan bir X kümesi üzerinde iki metrik olsun. Her $x, y \in X$ için

$$e(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$$

ve

$$p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

şeklinde tanımlanan e ve p fonksiyonlarının X üzerinde birer metrik olduklarını gösteriniz.

3. d boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir metrik olsun. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

a) $f(0)=0$ **b)** f kesin monoton artan
c) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x+y) = f(x)+f(y)$

özelliklerini sağlıyorsa $p(x,y) = f(d(x,y))$ şeklinde tanımlanan p fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

4. Örnek 2.3 de tanımlanan d_∞ fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz.

5. Örnek 2.4 de tanımlanan d_1 fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz.

6. $i = 1,2,\cdots,n$ için (X_i, d_i) bir metrik uzay ve $X = X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ olsun. Bu durumda

a) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ olmak üzere

$$d_t(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

şeklinde tanımlı $d_t : X\times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

b) $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}\right)$ olmak üzere $\left(x^{(m)}\right)$ dizisinin (X, d_t) uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın her $i = 1,2,\cdots,n$ için $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisinin (X_i, d_i) uzayında bir Cauchy dizisi olması gerektiğini ispatlayınız.

c) $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}\right)$ ve $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olmak üzere $\left(x^{(m)}\right)$ dizisinin (X, d_t) uzayında x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şartın her $i = 1,2,\cdots,n$ için $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisinin (X_i, d_i) uzayında x_i noktasına yakınsaması gerektiğini ispatlayınız.

d) (X, d_t) uzayının tam olması için gerek ve yeter şartın her $i = 1,2,\cdots,n$ için (X_i, d_i) uzayının tam olması gerektiğini ispatlayınız.

7. $i = 1,2,\cdots,n$ için (X_i, d_i) bir metrik uzay ve $X = X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ olsun. Bu durumda

a) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ olmak üzere

$$d_m(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1,2,\cdots,n\}$$

şeklinde tanımlı $d_m : X\times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

b) $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}\right)$ olmak üzere $\left(x^{(m)}\right)$ dizisinin (X, d_m) uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın her $i = 1,2,\cdots,n$ için $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisinin (X_i, d_i) uzayında bir Cauchy dizisi olması gerektiğini ispatlayınız.

c) $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}\right)$ ve $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olmak üzere $\left(x^{(m)}\right)$ dizisinin (X, d_m) uzayında x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şartın her $i = 1,2,\cdots,n$ için $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisinin (X_i, d_i) uzayında x_i noktasına yakınsaması gerektiğini ispatlayınız.

d) (X, d_m) uzayının tam olması için gerek ve yeter şartın her $i = 1,2,\cdots,n$ için (X_i, d_i) uzayının tam olması gerektiğini ispatlayınız.

8. (X, d) bir ayrık metrik uzay olmak üzere $x \in X$ ve A, B kümeleri X in boş kümeden farklı iki alt kümesi olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

a) $d(x,A) = \begin{cases} 1, & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$

b) $d(A,B) = \begin{cases} 1, & A\cap B = \emptyset \\ 0, & A\cap B \neq \emptyset \end{cases}$

9. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $x \in X$ ve A, B kümeleri X in boş kümeden farklı iki alt kümesi olsun.

a) $x \in A$ ise $d(x,A) = 0$ olduğunu gösteriniz.
b) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $d(A,B) = 0$ olduğunu gösteriniz.
c) A sonlu ise A nın sınırlı olduğunu gösteriniz.

10.
a) $\mathbb{R}$ standart uzayında $A\cap B = \emptyset$ ve $d(A,B) = 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ nin A ve B alt kümelerini bulunuz.
b) $\mathbb{R}^2$ standart uzayında $A\cap B = \emptyset$ ve $d(A,B) = 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^2$ nin A ve B alt kümelerini bulunuz.

11. Pozitif her n tamsayısı için $X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ için

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

şeklinde tanımlı $\|.\|_2 : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösteriniz.

12.

a) $f \in \mathscr{C}(a,b)$ için

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_\infty$ fonksiyonunun $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde bir norm olduğunu gösteriniz.

b) $f \in \mathscr{C}(a,b)$ için

$$\|f\|_{\text{int}} = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_{\text{int}}$ fonksiyonunun $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde bir norm olduğunu gösteriniz.

13. $i = 1,2,\cdots,n$ için $(X_i, \|\,.\,\|_i)$ bir normlu uzay ve $X = X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ olsun. Bu durumda

a) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ olmak üzere

$$\|x\|_t = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_t : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir norm olduğunu gösteriniz.

b) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ olmak üzere

$$\|x\|_m = \max\{\|x_i\|_i : i = 1,2,\cdots,n\}$$

şeklinde tanımlı $\|\,.\,\|_m : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir norm olduğunu gösteriniz.

c) $\|\,.\,\|_t$ normunun X üzerinde ürettiği metriğin Alıştırma 6 daki d_t metriği olduğunu gösteriniz.

d) $\|\,.\,\|_m$ normunun X üzerinde ürettiği metriğin Alıştırma 7 daki d_m metriği olduğunu gösteriniz.

14. (X,d) bir metrik uzay, A kümesi X in boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x, y, z \in X$ olsun.

a)

$$|d(x,z) - d(x,y)| \le d(y,z)$$

olduğunu gösteriniz.

b)

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

olduğunu gösteriniz.

15. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$$

olduğunu gösteriniz.

16. $\mathbb{R}^n$ standart uzayının bir A alt kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şartın

$$A \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ve $b_1, b_2, \cdots, b_n$ reel sayılarının bulunması olduğunu ispatlayınız.

17. (X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in X$ olsun.

a) $f(x) = d(x,a)$ şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösteriniz.

b) $f(x) = d(x,A)$ şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösteriniz.

18. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. $f(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösteriniz.

19. (X,d) bir metrik uzay olsun.

a) $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ ve $g : (X,d) \to \mathbb{R}$ iki Lipschitz sürekli fonksiyon ise $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ şeklinde tanımlı $f+g$ fonksiyonunun da Lipschitz sürekli olduğunu gösteriniz.

b) $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ ve $g : (X,d) \to \mathbb{R}$ iki sınırlı fonksiyon olsun. Bu durumda f ve g fonksiyonları Lipschitz sürekli ise $(fg)(x) = f(x)g(x)$ şeklinde tanımlı fg fonksiyonunun da sınırlı ve Lipschitz sürekli olduğunu gösteriniz.

c) $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ Lipschitz sürekli fonksiyon ise $g(x) = |f(x)|$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun da Lipschitz sürekli olduğunu gösteriniz.

20. B kümesi (X,d) uzayının sınırlı bir alt kümesi ve $A \subseteq B$ olsun. A nın sınırlı ve Çap$(A) \le$ Çap(B) olduğunu gösteriniz.

21. (X,d) bir metrik uzay ve A, B kümeleri X in boş kümeden farklı sınırlı iki alt kümesi olsun.

a) $A \cap B \neq \emptyset$ ise

$$\text{Çap}(A \cup B) \le \text{Çap}(A) + \text{Çap}(B)$$

olduğunu gösteriniz.

b) $A \cap B = \emptyset$ ise

$$\text{Çap}(A \cup B) \le \text{Çap}(A) + \text{Çap}(B) + d(A,B)$$

olduğunu gösteriniz.

22. $\mathbb{R}^n$ üzerinde Örnek 2.3, 2.4 ve 2.6 de tanımlanan d_∞, d_1

ve d_2 metrikleri için

$$n^{-1}d_1(x,y) \le d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le \sqrt{n}d_\infty(x,y) \le \sqrt{n}d_1(x,y)$$

olduğunu gösteriniz.

23. Örnek 2.9 da tanımlanan $(\mathscr{C}(0,1), d_{\text{int}})$ uzayı verilsin. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere (f_n) dizisi verilsin. (f_n) dizisinin her $x \in [0,1]$ için $f(x) = 0$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna yakınsadığını gösteriniz.

24. $d_1, d_2, \ldots, d_m$ bir X kümesi üzerinde metrikler ve $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pozitif reel sayılar ve

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{m} a_i d_i(x,y)$$

olsun.

a) d fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

b) (x_n) dizisinin (X,d) uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın (x_n) dizisinin her bir (X_i, d_i) uzayında bir Cauchy dizisi olması gerektiğini ispatlayınız.

c) (X,d) uzayında $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şartın her bir (X,d_i) uzayında $x_n \to x$ olması gerektiğini ispatlayınız.

25. d_1 ve d_2 bir X kümesi üzerinde bazı c, C pozitif reel sayıları için

$$cd_2(x,y) \le d_1(x,y) \le Cd_2(x,y) \quad (\text{her } x,y \in X)$$

özelliğini sağlayan iki metrik ve (x_n), X de bir dizi olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

a) $m,n \to \infty$ için $d_1(x_n, x_m) \to 0$ olması için gerek ve yeter şart $m,n \to \infty$ için $d_2(x_n, x_m) \to 0$ olmasıdır.

b) (X,d_1) uzayında $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şart (X,d_2) uzayında $x_n \to x$ olmasıdır.

c) (X,d_1) uzayının tam olması için gerek ve yeter şart (X,d_2) uzayının tam olmasıdır.

26. Bir (X,d_1) metrik uzayı ile X kümesi üzerinde

$$d_2(x,y) = \frac{d_1(x,y)}{1 + d_1(x,y)}$$

metriği verilsin.

a) X içinde alınan bir (x_n) dizisinin d_1 metriğine göre Cauchy dizisi olması için d_2 metriğine göre Cauchy dizisi olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz.

b) (X,d_1) uzayının tam olması için (X,d_2) uzayının tam olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz.

27. $X = \{x \in \mathbb{Q} | x \ge 1\}$ olsun. $f : X \to X$ fonksıyonu

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

şeklinde tanımlansın.

a) f nin bir büzülme olduğunu gösteriniz.

b) f nin X üzerinde sabit noktası olmadığını gösteriniz.

28.

a) $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun büzülme olmadığını gösteriniz.

b) $g(x) = \frac{9}{10}\cos x$ şeklinde tanımlı $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir büzülme olduğunu gösteriniz.

2.10. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

M-1). (M-1) gereğince her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ ve böylece $p(x,y) \geq 0$ dır. $p(x,y) = 0$ ise

$$d(x,y) + d(y,x) = 0$$

dır. $d(x,y) \geq 0$ ve $d(y,x) \geq 0$ olduğundan $d(x,y) = d(y,x) = 0$ dır. Böylece (M-1) gereğince $x = y$ dir. Tersine $x = y$ ise (M-1) gereğince $d(x,y) = d(y,x) = 0$ olur. O halde $d(x,y) + d(y,x) = 0$ yani $p(x,y) = 0$ dır.

M-2). $d(x,y) + d(y,x) = d(y,x) + d(x,y)$ olduğundan $p(x,y) = p(y,x)$ dir.

M-3). $x, y, z \in X$ olsun. Bu durumda (M-3) gereğince

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \text{ ve } d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} p(x,y) &= d(x,y) + d(y,x) \\ &\leq d(x,z) + d(z,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &\leq (d(x,z) + d(z,x)) + (d(z,y) + d(y,z)) \\ &\leq p(x,z) + p(z,y) \end{aligned}$$

olur.✓

ÇÖZÜM 2

a) $e(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ fonksiyonunun metrik olduğunu gösterelim.

M-1). d_1 ve d_2 metrik olduğundan her $x, y \in X$ için $d_1(x,y) \geq 0$ ve $d_2(x,y) \geq 0$ dır. O halde

$$e(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) \geq 0$$

dır. $e(x,y) = 0$ ise $d_1(x,y) + d_2(x,y) = 0$ dır. $d_1(x,y) \geq 0$ ve $d_2(x,y) \geq 0$ olduğundan

$$d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0$$

dır. d_1 ve d_2 metrik olduğundan (M-1) gereğince $x = y$ dir. Tersine $x = y$ olsun. (M-1) gereğince $d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0$ dır. Böylece

$$e(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) = 0$$

dır.

M-2). d_1 ve d_2 metrik olduğundan her $x, y \in X$ için $d_1(x,y) = d_1(y,x)$ ve $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ dir. Bu durumda

$$e(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) = d_1(y,x) + d_2(y,x) = e(y,x)$$

olur.

M-3). Her $x, y, z \in X$ için $d_1$ve d_2 metrik olduğundan (M-1) gereğince

$$d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z) \text{ ve } d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$$

dir. $e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} e(x,z) &= d_1(x,z) + d_2(x,z) \\ &\leq d_1(x,y) + d_1(y,z) + d_2(x,y) + d_2(y,z) \\ &\leq (d_1(x,y) + d_2(x,y)) + (d_1(y,z) + d_2(y,z)) \\ &= e(x,y) + e(y,z) \end{aligned}$$

dir.

Böylece e bir metriktir.

b) Şimdi de p nin bir metrik olduğunu gösterelim.

M-1). Her $x, y \in X$ için $d_1(x,y) \geq 0$ ve $d_2(x,y) \geq 0$ olduğundan

$$p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} \geq 0$$

dır. $p(x,y) = 0$ olsun. Bu durumda $d_1(x,y) \geq 0$ ve $d_2(x,y) \geq 0$ olduğundan

$$d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0$$

ve böylece $x = y$ dir. Tersine $x = y$ olsun. Bu durumda (M-1) gereğince $d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0$ dır. Böylece

$$\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} = \{0\}$$

olacağından

$$p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} = 0$$

dır.

M-2). Her $x, y \in X$ için $d_1(x,y) = d_1(y,x)$ ve $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ olduğundan

$$p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

$$= \max\{d_1(y,x), d_2(y,x)\} = p(y,x)$$

dir.

M-3). $x, y, z \in X$ ve $p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} = d_1(x,y)$ olsun. Bu durumda d_1 metrik olduğundan

$$\begin{aligned} p(x,y) &= d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)() \\ &\leq \max\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} + \max\{d_1(z,y), d_2(z,y)\} \\ &\leq p(x,z) + p(z,y) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} = d_2(x,y)$ ise

$$p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$$

olduğu gösterilir.

Böylece p bir metriktir.✔

ÇÖZÜM 3

M-1). Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$, $f(0) = 0$ ve f kesin monoton artan olduğundan

$$f(d(x,y)) \geq f(0) = 0$$

yani $p(x,y) \geq 0$ dır. $p(x,y) = 0$ ise $f(d(x,y)) = 0 = f(0)$ dır. f kesin monoton artan olduğundan $d(x,y) = 0$ dır. d metrik olduğundan $x = y$ dir. Tersine $x = y$ olsun. Bu durmda $d(x,y) = 0$ ve dolayısıyla $p(x,y) = f(d(x,y)) = f(0) = 0$ dır.

M-2). Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ dir. Böylece $p(x,y) = f(d(x,y)) = f(d(y,x)) = p(y,x)$ dir.

M-3). d bir metrik olduğundan her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} p(x,z) = f(d(x,z)) &\leq f(d(x,y) + d(y,z)) \quad \text{((b) den)} \\ &\leq f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \quad \text{((iii) den)} \\ &= p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

dir.

Bu durumda p bir metriktir.✔

ÇÖZÜM 4

$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

M-1). $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| \geq 0$ olduğundan

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \,|\, i = 1, \cdots, n\} \geq 0$$

dır. $d_\infty(x,y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| = 0$ olmasıdır. Diğer yandan $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $i = 1, \cdots, n$ için $x_i = y_i$ olmasıdır. Böylece $i = 1, \cdots, n$ için $x_i = y_i$ olması için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır. O halde $d_\infty(x,y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır.

M-2). $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ olduğundan $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$ dir.

M-3). $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \,|\, i = 1, \cdots, n\} = |x_{i_0} - y_{i_0}|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= |x_{i_0} - y_{i_0}| \leq |x_{i_0} - z_{i_0}| + |z_{i_0} - y_{i_0}| \\ &\leq \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - z_i| + \max_{i=1,\cdots,n} |z_i - y_i| \\ &\leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y) \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda d_∞ bir metriktir.✔

ÇÖZÜM 5

$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

M-1). $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| \geq 0$ olduğundan $d_1(x,y) \geq 0$ dır. $d_1(x,y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$ olmasıdır. Böylece $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| = 0$ olmasıdır. O halde $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $i = 1, \cdots, n$ için $x_i = y_i$ olmasıdır. Diğer yandan $i = 1, \cdots, n$ için $x_i = y_i$ olması için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır. O halde $d_1(x,y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır.

M-2). $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ olduğundan

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$$

dir.

M-3). Her $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ olduğundan

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \\ &\leq d_1(x,z) + d_1(z,y) \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda d_1 bir metriktir.✔

ÇÖZÜM 6

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in X$ olsun.

a) d_t fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösterelim.

M-1). $i = 1, 2, \cdots, n$ için d_i bir metrik olduğundan $d_i(x_i, y_i) \geq 0$ dır. O halde

$$d_t(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \geq 0$$

dır.

$$\begin{aligned} d_t(x, y) &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } d_i(x_i, y_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } x_i = y_i \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

dır.

M-2). $i = 1, 2, \cdots, n$ için d_i bir metrik olduğundan $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$ dır. O halde

$$d_t(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i(y_i, x_i) = d_t(y, x)$$

dır.

M-3). $i = 1, 2, \cdots, n$ için d_i bir metrik olduğundan

$$d_i(x_i, y_i) \leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i) \end{aligned}$$

olduğundan

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y)$$

olur.

b) Cauchy dizisinin kısaltılmışı C.d olmak üzere

$$\begin{aligned} (X, d_t) \text{ de } \left(x^{(m)}\right) \text{ bir C.d} &\Leftrightarrow d_t\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i\left(x_i^{(m)}, x_i^{(k)}\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \text{ için } d_i\left(x_i^{(m)}, x_i^{(k)}\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \text{ için } (X_i, d_i) \text{ de } \left(x_i^{(m)}\right) \text{ bir C.d} \end{aligned}$$

dir.

c)

$$\begin{aligned} (X, d_t) \text{ de } x^{(m)} \to x &\Leftrightarrow d_t\left(x^{(m)}, x\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i\left(x_i^{(m)}, x_i\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } d_i\left(x_i^{(m)}, x_i\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } (X_i, d_i) \text{ de } x_i^{(m)} \to x_i \end{aligned}$$

dir.

d) (X, d_t) tam ve $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisi (X_i, d_i) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \cdots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \cdots, x_n \in X_n$$

sabit noktalar olmak üzere

$$x^{(m)} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_i^{(m)}, \cdots, x_n\right)$$

şeklinde tanımlı $\left(x^{(m)}\right)$ dizisi (X, d_t) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d_t) tam oduğundan

$$x^{(m)} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_i^{(m)}, \cdots, x_n\right) \to (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in X$$

olur. Bu durumda $x_i^{(m)} \to x_i$ dir. O halde (X_i, d_i) uzayı tamdır.

(X_i, d_i) uzayları tam olsun. $\left(x^{(m)}\right)$ dizisi (X, d_t) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \cdots, n$ için $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisi (X_i, d_i) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X_i, d_i) uzayı tam olduğundan $x_i^{(m)} \to x_i$ olacak şekilde bir $x_i \in X_i$ vardır. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ denilirse $x^{(m)} \to x$ olur. O halde (X, d_t) uzayı tamdır.✔

ÇÖZÜM 7

a) d_m fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösterelim.

M-1). $i = 1, 2, \cdots, n$ için d_i bir metrik olduğundan $d_i(x_i, y_i) \geq 0$

dır. O halde

$$d_m(x,y) = \max\{d_i(x_i,y_i) : i = 1,2,\cdots,n\} \geq 0$$

dır.

$$\begin{aligned} d_m(x,y) &= 0 \Leftrightarrow \max\{d_i(x_i,y_i) : i = 1,2,\cdots,n\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } d_i(x_i,y_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

dır.

M-2). $i = 1,2,\cdots,n$ için d_i bir metrik olduğundan $d_i(x_i,y_i) = d_i(y_i,x_i)$ dır. O halde

$$\begin{aligned} d_m(x,y) &= \max\{d_i(x_i,y_i) : i = 1,2,\cdots,n\} \\ &= \max\{d_i(y_i,x_i) : i = 1,2,\cdots,n\} \\ &= d_m(y,x) \end{aligned}$$

dır.

M-3). $i = 1,2,\cdots,n$ için d_i bir metrik olduğundan

$$d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)$$

dır. Böylece her $i = 1,2,\cdots,n$ için

$$d_i(x_i,z_i) \leq d_m(x,z) \text{ ve } d_i(y_i,z_i) \leq d_m(y,z)$$

olacağından her $i = 1,2,\cdots,n$ için

$$d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i) \leq d_m(x,z) + d_m(y,z)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_m(x,y) &= \max\{d_i(x_i,y_i) : i = 1,2,\cdots,n\} \\ &\leq d_m(x,z) + d_m(y,z) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$d_m(x,y) \leq d_m(x,z) + d_m(y,z)$$

dir.

b) Cauchy dizisinin kısaltılmışı C.d olmak üzere

$$\begin{aligned} (X,d_m) \text{ de } \left(x^{(m)}\right) \text{ C.d } &\Leftrightarrow d_m(x^{(m)},x^{(k)}) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \max_{i=1,\cdots,n} d_i(x_i^{(m)},x_i^{(k)}) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \text{ için } d_i(x_i^{(m)},x_i^{(k)}) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \text{ için } (X_i,d_i) \text{ de } \left(x_i^{(m)}\right) \text{ bir C.d} \end{aligned}$$

dir.

c)

$$\begin{aligned} (X,d_m) \text{ de } x^{(m)} \to &\Leftrightarrow xd_m(x^{(m)},x) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \max_{i=1,\cdots,n} d_i(x_i^{(m)},x_i) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \text{ için } d_i(x_i^{(m)},x_i) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \text{ için } (X_i,d_i) \text{ de } x_i^{(m)} \to x_i \end{aligned}$$

dir.

d) (X,d_m) tam ve $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisi (X_i,d_i) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \cdots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \cdots, x_n \in X_n$$

sabit noktalar olmak üzere

$$x^{(m)} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_i^{(m)}, \cdots, x_n\right)$$

şeklinde tanımlı $\left(x^{(m)}\right)$ dizisi (X,d_m) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X,d_m) tam oduğundan

$$x^{(m)} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_i^{(m)}, \cdots, x_n\right) \to (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in X$$

olur. Bu durumda $x_i^{(m)} \to x_i$ dir. O halde (X_i,d_i) uzayı tamdır.
(X_i,d_i) uzayları tam ve $\left(x^{(m)}\right)$ dizisi (X,d_m) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $i = 1,2,\cdots,n$ için $\left(x_i^{(m)}\right)$ dizisi (X_i,d_i) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X_i,d_i) uzayı tam olduğundan $x_i^{(m)} \to x_i$ olacak şekilde bir $x_i \in X_i$ vardır. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ denilirse $x^{(m)} \to x$ olur. O halde (X,d_m) uzayı tamdır.✓

ÇÖZÜM 8

a) **i)** $x \in A$ ise $d(x,x) = 0$ ve $0 = d(x,x) \in \{d(x,y) | y \in A\}$ olduğundan

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) | y \in A\} = 0$$

dır.

ii) $x \notin A$ ise her $y \in A$ için $x \neq y$ dir. Böylece her $y \in A$ için $d(x,y) = 1$ yani

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) | y \in A\} = \inf\{1\} = 1$$

dır. Bu durumda

$$d(x,A)=\begin{cases}1, & x\notin A\\ 0, & x\in A\end{cases}$$

olur.

b) **i)** $A\cap B\neq\emptyset$ ise $x\in A$ ve $x\in B$ olacak şekilde bir $x\in X$ vardır. Buradan

$$0=d(x,x)\in\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

olur. O halde

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}=0$$

dır.

ii) $A\cap B=\emptyset$ olsun. Bu durumda her $a\in A$ ve $b\in B$ için $a\neq b$ olacağından her $a\in A$ ve $b\in B$ için $d(a,b)=1$ olur. Yani

$$\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}=\{1\}$$

dir. O halde

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}=\inf\{1\}=1$$

dir.✔

ÇÖZÜM 9

a) $x\in A$ ise $d(x,x)=0$ ve

$$0=d(x,x)\in\{d(x,y)\mid y\in A\}$$

olduğundan

$$d(x,A)=\inf\{d(x,y)\mid y\in A\}=0$$

dır.

b) $A\cap B\neq\emptyset$ olsun. Bu durumda $x\in A$ ve $x\in B$ olacak şekilde en az bir $x\in X$ olacağından

$$0=d(x,x)\in\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

olur. O halde

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}=0$$

dır.

c) $A=\{x_1,\cdots,x_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\{d(x_i,x_j)\mid i=1,\cdots n, j=1,\cdots n\}$$

kümesi sonludur. Bu kümenin maksimumu K olsun. Bu durumda her $x_i,x_j\in A$ için

$$d(x_i,x_j)\leq K$$

dır. O halde A sınırlıdır.✔

ÇÖZÜM 10

a) $A=[0,1)$ ve $B=(1,2)$ olsun. Bu durumda $A\cap B=\emptyset$ ve $d(A,B)=0$ dır.

b) $A=\{(x,y)\mid y>0\}$ ve $B=\{(x,y)\mid y<0\}$ olsun. Bu durumda $A\cap B=\emptyset$ ve $d(A,B)=0$ dır.✔

ÇÖZÜM 11

$X=\mathbb{R}$ ise $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ve $X=\mathbb{C}$ ise $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ olmak üzere $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X$ ve $\lambda\in\mathbb{F}$ olsun.

N-1). $|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2\geq 0$ olduğundan

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_2=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}\geq 0$$

dır.

$$\begin{aligned}\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_2 &= 0\Leftrightarrow\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}=0\\ &\Leftrightarrow \text{her } i=1,2,\cdots,n \text{ için } x_i=0\\ &\Leftrightarrow x=(0,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

dır.

N-2). Cauchy Eşitsizliği gereğince

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \|(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)\|_2^2\\ &= \|(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\|_2^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2\leq\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|^2+|y_i|^2+2|x_i||y_i|\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}\\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}\right)^2\\
&= (\|x\|_2+\|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\|x+y\|_2 \le \|x\|_2+\|y\|_2$ elde edilir.

N-3).

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_2 &= \|\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_2 = \|(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)\|_2\\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\lambda x_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\lambda|^2|x_i|^2}=|\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\\
&= |\lambda|\,\|x\|_2
\end{aligned}$$

olur.✔

ÇÖZÜM 12

a) $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\} = \max\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\}$ nin bir norm olduğunu gösterelim.

N-1). $f\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için $|f(x)|\ge 0$ olduğundan $\|f\|_\infty \ge 0$ dır.

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow \text{her } x\in[a,b] \text{ için } |f(x)|=0\\
&\Leftrightarrow \text{her } x\in[a,b] \text{ için } f(x)=0\\
&\Leftrightarrow f=0
\end{aligned}$$

dır.

N-2). $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$|(f+g)(x)|=|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$$

olduğundan

$$|(f+g)(x)|\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$$

olur. Buradan

$$\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$$

elde edilir.

N-3). $f\in\mathscr{C}(a,b)$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\infty &= \sup\{|\lambda f(x)| : x\in[a,b]\}\\
&= \sup\{|\lambda|\,|f(x)| : x\in[a,b]\}\\
&= |\lambda|\sup\{|f(x)| : x\in[a,b]\} = |\lambda|\,\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

olur.

b) $\|f\|_{\text{int}}=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ nin bir norm olduğunu gösterelim.

N-1). $f\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için $|f(x)|\ge0$ olduğundan

$$\|f\|_{\text{int}}=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\ge0$$

olur. f fonksiyonunun sürekli olduğu ve $x\in[a,b]$ için $|f(x)|\ge0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\text{int}} &= 0 \Leftrightarrow \int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=0\\
&\Leftrightarrow \text{her } x\in[a,b] \text{ için } |f(x)|=0\\
&\Leftrightarrow f=0
\end{aligned}$$

olur.

N-2). $f,g\in\mathscr{C}(a,b)$ olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$|(f+g)(x)|=|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$$

olduğundan

$$\int_a^b|(f+g)(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x)|\,\mathrm{d}x$$

olur. Buradan

$$\|f+g\|_{\text{int}}\le\|f\|_{\text{int}}+\|g\|_{\text{int}}$$

elde edilir.

N-3). $f\in\mathscr{C}(a,b)$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x\in[a,b]$ için

$$|\lambda f(x)|=|\lambda|\,|f(x)|$$

olduğundan

$$\int_a^b|\lambda f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b|\lambda|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=|\lambda|\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

olur. Bu durumda $\|\lambda f\|_{\text{int}}=|\lambda|\,\|f\|_{\text{int}}$ olur.✔

ÇÖZÜM 13

Her $i=1,2,\cdots,n$ için θ_i, X_i lineer uzayının sıfır vektörü ise $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$ da X in sıfır vektörüdür. $\lambda\in\mathbb{F}$ olmak üzere $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$ ve $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X$ olsun.

a) $\|x\|_t = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$ nin bir norm olduğunu gösterelim.

N-1). Her i için $\|.\|_i$ bir norm olduğundan $\|x_i\|_i \geq 0$ dır. Bu durumda

$$\|x\|_t = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \geq 0$$

dır. Her i için $\|\cdot\|_i$ nin bir norm olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\|x\|_t &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = 0 \Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } \|x_i\|_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } x_i = \theta_i \Leftrightarrow x = \theta\end{aligned}$$

dır.

N-2). Her i için $\|\cdot\|_i$ bir norm olduğundan

$$\|x_i + y_i\|_i \leq \|x_i\|_i + \|y_i\|_i$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\|x+y\|_t &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i + y_i\|_i \leq \sum_{i=1}^{n} (\|x_i\|_i + \|y_i\|_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i + \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_i \leq \|x\|_t + \|y\|_t\end{aligned}$$

olur. Yani $\|x+y\|_t \leq \|x\|_t + \|y\|_t$ dir.

N-3).

$$\|\lambda x\|_t = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\|_i = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| \, \|x_i\|_i = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = |\lambda| \, \|x\|_t$$

olur.

b) $\|x\|_m = \max\{\|x_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ nin bir norm olduğunu gösterelim.

N-1). Her i için $\|.\|_i$ bir norm olduğundan $\|x_i\|_i \geq 0$ dır. Bu durumda $\|x\|_m \geq 0$ olur. Her i için $\|\cdot\|_i$ nin bir norm olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\|x\|_m = 0 &\Leftrightarrow \max\{\|x_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } \|x_i\|_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \text{ için } x_i = \theta_i \\ &\Leftrightarrow x = \theta\end{aligned}$$

olur.

N-2). Her i için $\|\cdot\|_i$ bir norm olduğundan

$$\|x_i + y_i\|_i \leq \|x_i\|_i + \|y_i\|_i \leq \|x\|_m + \|y\|_m$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\|x+y\|_m &= \max\{\|x_i + y_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &\leq \|x\|_m + \|y\|_m\end{aligned}$$

olur. Yani $\|x+y\|_m \leq \|x\|_m + \|y\|_m$ dir.

N-3).

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_m &= \max\{\|\lambda x_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \max\{|\lambda| \, \|x_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= |\lambda| \max\{\|x_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= |\lambda| \, \|x\|_m\end{aligned}$$

olur. Yani $\|\lambda x\|_m = |\lambda| \, \|x\|_m$ dir.

c)

$$\|x - y\|_t = \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|_i = d_t(x, y)$$

olduğundan $\|.\|_t$ normunun X üzerine ürettiği metrik d_t metriğidir.

d)

$$\|x - y\|_m = \max\{\|x_i - y_i\|_i : i = 1, 2, \cdots, n\} = d_m(x, y)$$

olduğundan $\|.\|_m$ normunun X üzerine ürettiği metrik d_m metriğidir.✓

ÇÖZÜM 14

a) d bir metrik olduğundan her $x, y, z \in X$ için

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \tag{2.5}$$

ve

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \tag{2.6}$$

dir. Böylece (2.5) den

$$-d(y, z) \leq d(x, z) - d(x, y) \tag{2.7}$$

ve (2.6) den

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z) \tag{2.8}$$

elde edilir. Böylece (2.7) ve (2.8) gereğince

$$-d(y, z) \leq d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

olur. Bu ise

$$|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$$

demektir.

b) Her $a \in A$ için $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ dır. Böylece $a \in A$

için
$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$$
ve dolayısıyla $a \in A$ için
$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$$
dır. O halde $d(x,A) - d(x,y)$ sayısı $\{d(y,a) | a \in A\}$ kümesinin bir alt sınırıdır. Dolayısıyla
$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$$
dır. O halde
$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$
dir. Benzer şekilde $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$ olduğu gösterilir. Bu durumda
$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leq d(x,y)$$
olur.✔

ÇÖZÜM 15

Her $x,y \in X$ için $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|x-y\| + \|x\|$ olduğundan
$$-\|y-x\| \leq \|x\| - \|y\| \tag{2.9}$$
olur. Benzer şekilde $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ olduğundan
$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \tag{2.10}$$
olur. Böylece (2.9) ve (2.10) dan
$$-\|y-x\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|y-x\|$$
yani
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$
elde edilir.✔

ÇÖZÜM 16

$\Rightarrow$). Sabit bir $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ noktası seçelim. Bu durumda $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A$ için
$$d_2(y,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} \leq \varepsilon$$
olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı vardır. Buradan $i = 1,2,\cdots,n$ için $\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 \leq \varepsilon^2$ elde edilir. Böylece $i = 1,2,\cdots,n$ için $(y_i - x_i)^2 \leq \varepsilon^2$ ve dolayısıyla $|y_i - x_i| \leq \varepsilon$ olur. Böylece $i = 1,2,\cdots,n$ için $y_i \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ olur. $i = 1,2,\cdots,n$ için $a_i = x_i - \varepsilon$ ve $b_i = x_i + \varepsilon$ denilirse $i = 1,2,\cdots,n$ için $y_i \in [a_i, b_i]$ olacağından
$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
olur. Bu durumda $A \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ olur.

$\Leftarrow$). $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A$ olsun. $A \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ olduğundan $i = 1,2,\cdots,n$ için $x_i, y_i \in [a_i, b_i]$ ve böylece $(y_i - x_i)^2 \leq (b_i - a_i)^2$ olur. Bu durumda
$$d_2(y,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$$
olur. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} = \varepsilon$ denilirse
$$d_2(y,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} \leq \varepsilon$$
olur. Yani her $x,y \in A$ için $d_2(y,x) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. O halde A kümesi sınırlıdır.✔

ÇÖZÜM 17

a) Alıştırma 14(a) gereğince her $x,y \in X$ için
$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|d(x,a) - d(y,a)\right| \leq d(x,y)$$
olduğundan f Lipschitz süreklidir.

b) Alıştırma 14(b) gereğince her $x,y \in X$ için
$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leq d(x,y)$$
olduğundan f Lipschitz süreklidir.✔

ÇÖZÜM 18

Alıştırma 15 gereğince
$$\left|f(x) - f(y)\right| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$
olduğundan f Lipschitz süreklidir.✔

ÇÖZÜM 19

a) f ve g fonksiyonları Lipschitz sürekli olduğun her $x,y \in X$ için
$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq k_1 d(x,y) \text{ ve } \left|g(x) - g(y)\right| \leq k_2 d(x,y)$$
olacak şekilde $k_1 > 0$ ve $k_2 > 0$ sayıları vardır. Bu durumda her $x,y \in X$ için $k = \max\{k_1, k_2\}$ olmak üzere
$$\left|(f+g)(x) - (f+g)(y)\right| = \left|\big(f(x) + g(x)\big) - \big(f(y) + g(y)\big)\right|$$

$$\begin{aligned} &= |(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))| \\ &\le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\ &\le k_1 d(x,y)+k_2 d(x,y) \\ &\le kd(x,y)+kd(x,y) \\ &\le 2kd(x,y) \end{aligned}$$

olur. Yani $f+g$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir.

b) f ve g fonksiyonları sınırlı olduklarından her $x\in X$ için $|f(x)|\le M_1$ ve $|g(x)|\le M_2$ olacak şekilde $M_1>0$ ve $M_2>0$ sayıları vardır. Bu durumda her $x\in X$ için

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\le M_1M_2$$

olduğundan fg fonksiyonu sınırlıdır. Diğer yandan f ve g fonksiyonları Lipschitz sürekli olduklarından her $x,y\in X$ için

$$|f(x)-f(y)|\le k_1 d(x,y) \text{ ve } |g(x)-g(y)|\le k_2 d(x,y)$$

olacak şekilde $k_1>0$ ve $k_2>0$ sayıları vardır. Bu durumda her $x,y\in X$ için $k=\max\{M_1k_2, M_2k_1\}$ ve $A=|(fg)(x)-(fg)(y)|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= |(fg)(x)-(fg)(y)| \\ &= |f(x)g(x)-f(y)g(y)| \\ &= |f(x)g(x)+f(x)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(y)| \\ &= |f(x)(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y))| \\ &\le |f(x)(g(x)-g(y))|+|g(y)(f(x)-f(y))| \\ &= |f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)| \\ &\le M_1|g(x)-g(y)|+M_2|f(x)-f(y)| \\ &\le M_1k_2d(x,y)+M_2k_1d(x,y) \\ &\le kd(x,y)+kd(x,y) \\ &\le 2kd(x,y) \end{aligned}$$

olduğundan fg fonksiyonu Lipschitz süreklidir.

c) f fonksiyonu Lipschitz sürekli olduğun her $x,y\in X$ için

$$|f(x)-f(y)|\le k_1 d(x,y)$$

olacak şekilde $k_1>0$ sayısı vardır. Bu durumda Alıştırma 15 gereğince her $x,y\in X$ için

$$|g(x)-g(y)|=||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|\le k_1d(x,y)$$

olduğundan g fonksiyonu Lipschitz süreklidir.✔

ÇÖZÜM 20

B kümesi sınırlı olduğundan her $x,y\in B$ için $d(x,y)\le r$ olacak şekilde $r\ge 0$ sayısı vardır. $x,y\in A$ olsun. Bu durumda $A\subseteq B$ olduğundan $x,y\in B$ dir. Böylece $d(x,y)\le r$ dir. Yani A sınırlıdır. Diğer yandan

$$\{d(x,y)|x,y\in A\}\subseteq\{d(x,y)|x,y\in B\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Çap}(A) &= \sup\{d(x,y)|x,y\in A\}\le\sup\{d(x,y)|x,y\in B\} \\ &= \text{Çap}(B) \end{aligned}$$

dir.✔

ÇÖZÜM 21

$\text{Çap}(A)=r_1$, $\text{Çap}(B)=r_2$ olsun.

a) $A\cap B\neq\emptyset$ olduğunda $a\in A\cap B$ olacak şekilde bir $a\in X$ vardır. $x,y\in A\cup B$ olsun. Bu durumda

$$d(x,y)\le d(x,a)+d(a,y)$$

dir.

i) $x,y\in A$ ise $d(x,y)\le r_1$
ii) $x,y\in B$ ise $d(x,y)\le r_2$
iii) $x\in A$, $y\in B$ ($x\in B$, $y\in A$ hali benzer şekilde yapılır) ise $d(x,a)\le r_1$, $d(a,y)\le r_2$ ve böylece

$$d(x,y)\le d(x,a)+d(a,y)\le r_1+r_2$$

dir.

(i), (ii) ve (iii) gereğince her $x,y\in A\cup B$ için

$$d(x,y)\le r_1+r_2$$

dir. Yani r_1+r_2 sayısı

$$\{d(x,y)|x,y\in A\cup B\}$$

kümesinin bir üst sınırıdır. O halde

$$\begin{aligned} \text{Çap}(A\cup B) &= \sup\{d(x,y)|x,y\in A\cup B\}\le r_1+r_2 \\ &= \text{Çap}(A)+\text{Çap}(B) \end{aligned}$$

dir.

b) $x, y \in A \cup B$ olsun. Bu durumda

i) $x, y \in A$ ise $d(x,y) \le r_1$ dir.

ii) $x, y \in B$ ise $d(x,y) \le r_2$ dir.

iii) $x \in A$ ve $y \in B$ olsun. Bu durumda her $z \in A$, $t \in B$ için

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,t) + d(t,y) \le r_1 + d(z,t) + r_2$$

ve böylece $d(x,y) - r_1 - r_2 \le d(z,t)$ dir. Yani

$$d(x,y) - r_1 - r_2$$

sayısı

$$\{d(z,t) | z \in A, t \in B\}$$

kümesinin bir alt sınırıdır. O halde

$$d(x,y) - r_1 - r_2 \le \inf\{d(z,t) | z \in A, t \in B\} = d(A,B)$$

dir. Böylece

$$d(x,y) \le r_1 + r_2 + d(A,B) \le \text{Çap}(A) + \text{Çap}(B) + d(A,B)$$

dir.

(i), (ii) ve (iii) gereğince her $x, y \in A \cup B$ için

$$d(x,y) \le r_1 + r_2 + d(A,B)$$

olur. Yani $r_1 + r_2 + d(A,B)$ sayısı

$$\{d(x,y) | x, y \in A \cup B\}$$

kümesinin bir üst sınırıdır. O halde

$$\begin{aligned} \text{Çap}(A \cup B) &= \sup\{d(x,y) | x, y \in A \cup B\} \\ &\le \text{Çap}(A) + \text{Çap}(B) + d(A,B) \end{aligned}$$

dir.✔

ÇÖZÜM 22

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

a)

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le \sum_{i=1}^{n} \max\{|x_i - y_i| \, | i = 1, \cdots, n\} \\ &= n \max\{|x_i - y_i| \, | i = 1, \cdots, n\} = n d_\infty(x,y) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$n^{-1} d_1(x,y) \le d_\infty(x,y) \tag{2.11}$$

dir.

b)

$$(d_\infty(x,y))^2 = \left(\max\{|x_i - y_i| \, | i = 1, \cdots, n\}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2$$

olduğundan

$$d_\infty(x,y) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} = d_2(x,y) \tag{2.12}$$

dir.

c) Her $i = 1, \cdots, n$ için $|x_i - y_i| \le d_\infty(x,y)$ olduğundan

$$|x_i - y_i|^2 \le d_\infty(x,y)^2$$

dir. O halde

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y)^2 = n d_\infty(x,y)^2$$

ve dolayısıyla

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \le \sqrt{n} d_\infty(x,y) \tag{2.13}$$

elde edilir.

d) Her $i = 1, \cdots, n$ için

$$|x_i - y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d_1(x,y)$$

olduğundan

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \, | i = 1, \cdots, n\} \le d_1(x,y)$$

ve dolayısıyla

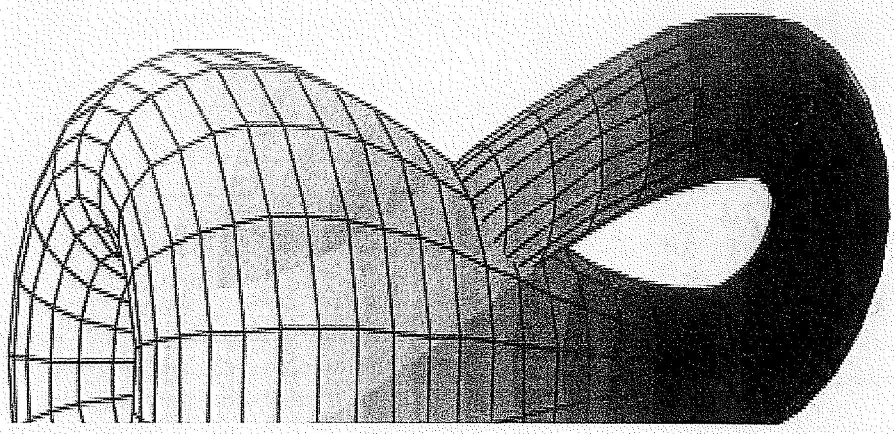
$$\sqrt{n} d_\infty(x,y) \le \sqrt{n} d_1(x,y) \tag{2.14}$$

dir.

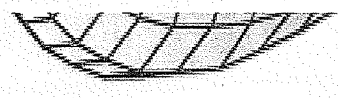
(2.11), (2.12), (2.14) ve (2.13) dan istenilen sonuç elde edilir.✔

ÇÖZÜM 23

$$\begin{aligned} d_{\text{int}}(f_n, f) &= \int_0^1 \left| \frac{\sin(nx)}{n} - f(x) \right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{|\sin(nx)|}{n} \mathrm{d}x \\ &\le \int_0^1 \frac{1}{n} \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \end{aligned}$$



3. Topolojik Uzaylar



Bu bölümde önce topolojik uzay kavramını tanıtılarak kitap içerisinde ileriki bölümlerde sıkça kullanılacak olan topolojik uzay örnekleri verilmiştir. Daha sonra topolojik uzaylarda açık küme ve kapalı küme kavramlarını vereceğiz. Sonra da bir metrik uzaydan bir topolojik uzayın nasıl elde edileceğini göreceğiz. Bu bölümüm son kısımda ise reel eksen üzerinde tanımlı olan standart topoloji ile birlikde $\mathbb{R}$ standart uzayı verilmiştir.

3.1. Tanım ve Örnekler

TANIM 3.1. ▷
X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T}$ da X in kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ in bir alt kolleksiyonu olsun.

T-1). X ve $\emptyset$ kümeleri $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur,

T-2). $\mathcal{T}$ nun herhangi bir alt kolleksiyonununa ait kümelerin birleşkesi yine $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani I herhangi bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ ise

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

dur.

T-3). $\mathcal{T}$ ya ait iki kümenin kesişimi yine $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani $U, V \in \mathcal{T}$ ise

$$U \cap V \in \mathcal{T}$$

dur

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ ya X üzerinde bir topoloji denir. $\mathcal{T}$ kolleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise $(X, \mathcal{T})$ sıralı ikilisine bir topolojik uzay ve X in elemanlarına noktalar denir. Eğer bir karışıklık meydana gelmeyecekse bazen X in kendisine bir topolojik uzay denir. ☜

NOT 3.2. Açıkça tanımdaki (T-3) şartı

"$\mathcal{T}$ ya ait sonlu sayıdaki kümelerin kesişimi yine $\mathcal{T}$ ya aittir"

şartına denktir. Diğer yandan $\mathcal{T}$ nun $U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$ kümelerinin alınarak bunların birleşimi olan $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \cup \cdots$ kümesinin $\mathcal{T}$ ya ait olduğunu göstermek Tanım 3.1 in (T-2) şartının sağlandığını göstermez. Bu sadece $\mathcal{T}$ nun sayılabilir sayıdaki elemanlarının birleşiminin $\mathcal{T}$ nun bir elemanı olduğunu gösterir. $\mathcal{T}$ nun Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağladığını göstermek için $\mathcal{T}$ nun sayılabilir veya sayılamaz sayıdaki elemanlarının birleşiminin $\mathcal{T}$ da olduğu gösterilmelidir. Yani $\mathcal{T}$ ya ait keyfi sayıdaki kümelerin birleşiminin $\mathcal{T}$ ya ait olduğunun gösterilmesi gerekir.

ÖRNEK 3.3. ▷
$X = \{\blacksquare, \bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}\}$$

kolleksiyonunun X kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince X ve $\emptyset$ kümeleri $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur.
T-2). $U, V \in \mathcal{T}$ ise

$U \cup V$	$\emptyset$	X	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	X	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$
X	X	X	X	X	X	X
$\{\blacksquare\}$	$\{\blacksquare\}$	X	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	X
$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	X	$\{,\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$
$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	X	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	X
$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$	X	X	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$	X	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$

olur. Yani $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U \cup V \in \mathcal{T}$ olur. Daha genel olarak $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ olmak üzere $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}$ ise

$U \cap V$	$\emptyset$	X	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$
$\{\blacksquare\}$	$\emptyset$	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacksquare\}$	$\emptyset$	$\{\blacksquare\}$	$\emptyset$
$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\emptyset$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\emptyset$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$
$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\emptyset$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacksquare,\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$
$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$	$\emptyset$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$	$\{\blacksquare\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\blacklozenge,\clubsuit\}$	$\{\bigstar,\blacklozenge,\clubsuit,\spadesuit\}$

olur. Yani $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur.

(T-1), (T-2) ve (T-3) gereğince $\mathcal{T}$ kolleksiyonu X kümesi üzerinde bir topolojidir.

ÖRNEK 3.4. ▷ **Dört nokta uzayı**
$X = \{a, b, c, d\}$ ve
$$\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$
olsun. $\mathcal{T}_{4n}$ nin bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

T-1). $\mathcal{T}_{4n}$ nun tanımı gereğince X ve $\emptyset$ kümeleri $\mathcal{T}_{4n}$ ya aittir. Yani $X \in \mathcal{T}_{4n}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}_{4n}$ dur.

T-2). $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$U \cup V$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
X	X	X	X	X	X	X	X
$\{a\}$	$\{a\}$	X	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	X	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	X	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	X	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$

olur. Yani $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U \cup V \in \mathcal{T}_{4n}$ olur. Daha genel olarak $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_{4n}$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{4n}$ olur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$U \cap V$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$

olur. Yani $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ ise $U \cap V \in \mathcal{T}_{4n}$ dur.

$\mathcal{T}_{4n}$ kolleksiyonu Tanım 3.1 deki (T-1),(T-2),(T-3) şartlarını sağladığından X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye dört nokta topolojisi ve $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayınada dört nokta uzayı denir.✍

ÖRNEK 3.5. ▷
$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere
$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$
olsun.

ÇÖZÜM:

T-1). $\mathcal{T}_{4n}$ nun tanımı gereğince X ve $\emptyset$ kümeleri $\mathcal{T}_{4n}$ ya aittir. Yani $X \in \mathcal{T}_{4n}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}_{4n}$

dur.

T-2). $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$U \cup V$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
X	X	X	X	X	X	X	X
$\{a\}$	$\{a\}$	X	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	X	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	X	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	X	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$

olur. Yani $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U \cup V \in \mathcal{T}_{4n}$ olur. Daha genel olarak $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_{4n}$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{4n}$ olur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$U \cap V$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$

olur. Yani $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ ise $U \cap V \in \mathcal{T}_{4n}$ dur.

$\mathcal{T}_{4n}$ kolleksiyonu Tanım 3.1 deki (T-1), (T-2), (T-3) şartlarını sağladığından X üzerinde bir topolojidir.✍

ÖRNEK 3.6. ▷

$X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun bir topoloji olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ ya ait olan $\{c, d\}$ ve $\{a, c\}$ kümelerinin birleşimi olan $\{a, c, d\}$ kümesi $\mathcal{T}$ ya ait olmadığından Tanım 3.1 deki (T-2) şartı sağlanmaz. Dolayısıyla $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji değildir.✍

ÖRNEK 3.7. ▷

$X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun bir topoloji olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ ya ait olan $\{a, b, c\}$ ve $\{b, c, d\}$ kümelerinin kesişimi olan $\{b, c\}$ kümesi $\mathcal{T}$ ya ait olmadığından Tanım 3.1 in (T-3) şartı sağlanmaz. Dolayısıyla $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji değildir.✍

ÖRNEK 3.8. ▷
$\mathcal{T} = \{\mathbb{N}, \emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{N} \mid U \text{ sonlu}\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun bir topoloji olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $n \geq 2$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

dir.

$$\{2, 3, \cdots, n, \cdots\} \neq \emptyset, \; \{2, 3, \cdots, n, \cdots\} \neq \mathbb{N}$$

ve $\{2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ kümesi sonlu olmadığından $\{2, 3, \cdots, n, \cdots\} \notin \mathcal{T}$ olur. Bu durumda $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağlanmaz. Dolayısıyla $\mathcal{T}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji değildir.✍

ÖRNEK 3.9. ▷ **Ayrık uzay**
X boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ kolleksiyonunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

T-1). $\emptyset \subseteq X$ ve $X \subseteq X$ olduğundan $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur.

T-2). Her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ ise $U_i \subseteq X$ olur. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$ olur. O halde $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U \subseteq X$ ve $V \subseteq X$ olur. Bu durumda $U \cap V \subseteq X$ olduğundan $U \cap V \in \mathcal{T}$ olur.

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ kolleksiyonu Tanım 3.1 deki (T-1), (T-2), (T-3) şartlarını sağladığından X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki ayrık topoloji ve $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına da ayrık topolojik uzay denir.✍

Not
Örnek 3.9 daki X kümesi boş olmayan herhangi bir küme ve herhangi bir küme üzerinde bir ayrık topoloji tanımlı olduğundan sonsuz sayıda ayrık topolojik uzay vardır.

ÖRNEK 3.10. ▷ **Kaba uzay**
X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ olsun.

ÇÖZÜM:

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur.

T-2). Her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ ise $U_i = \emptyset$ veya $U_i = X$ olacağından $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$ veya $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ olur. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U = \emptyset, V = \emptyset$ veya $U = \emptyset, V = X$ veya $U = X, V = \emptyset$ veya $U = X, V = X$ olur. Böylece $U \cap V = \emptyset$ veya $U \cap V = X$ dir. Böylece $U \cap V \in \mathcal{T}$ olur.

Bu durumda $\mathcal{T}$ kolleksiyonu Tanım 3.1 in şartlarını sağlar. Dolayısıyla $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye kaba veya ayrık olmayan topoloji ve $(X, \mathcal{T})$ uzayına da kaba veya ayrık olmayan topolojik uzay denir.✍

Not
Örnek 3.10 deki X kümesi boş olmayan herhangi bir küme ve herhangi bir X kümesi üzerinde bir kaba topoloji tanımlı olduğundan sonsuz sayıda kaba topolojik uzay vardır.

ÖRNEK 3.11. ▷
$X = \{a, b, c\}$ ve $\mathcal{T}$ da X üzerinde $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ ve $\{c\} \in \mathcal{T}$ özelliğine sahip bir topoloji

olsun. $\mathcal{T}$ nun ayrık topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğu ve $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$, $\{c\} \in \mathcal{T}$ olduğu verilmiştir. Yapmamız gereken $\mathcal{T}$ nun X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu göstermektir. Diğer bir deyişle $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{T}$ kolleksiyonu X üzerinde bir topoloji olduğundan Tanım 3.1 in (T-1), (T-2) ve (T-3) şartlarını sağlar. Önce X kümesinin bütün alt kümelerini yazalım. X kümesinin 3 tane elemanı olduğundan X in $2^3 = 8$ tane birbirinden farklı alt kümesi vardır. Bu alt kümeler

$$U_1 = \emptyset,\ U_2 = \{a\},\ U_3 = \{b\},\ U_4 = \{c\},\ U_5 = \{a,b\},$$
$$U_6 = \{a,c\},\ U_7 = \{b,c\},\ U_8 = \{a,b,c\} = X$$

dir. Bu alt kümelerin her birinin $\mathcal{T}$ nun bir elemanı olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan Tanım 3.1 (T-1) gereğince X ve $\emptyset$ kümeleri $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani $U_1 \in \mathcal{T}$ ve $U_8 \in \mathcal{T}$ dur. $\{a\} \in \mathcal{T}$, $\{b\} \in \mathcal{T}$ ve $\{c\} \in \mathcal{T}$ yani $U_2 \in \mathcal{T}$, $U_3 \in \mathcal{T}$ ve $U_4 \in \mathcal{T}$ olduğu verilmiştir. O halde ispatı tamamlamak için $U_5 \in \mathcal{T}$, $U_6 \in \mathcal{T}$ ve $U_7 \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$U_5 = \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\} \text{ ve } \{a\} \in \mathcal{T},\ \{b\} \in \mathcal{T}$$

olduğundan Tanım 3.1 (T-2) gereğince $U_5 \in \mathcal{T}$ dur. Benzer şekilde

$$U_6 = \{a,c\} = \{a\} \cup \{c\},\ U_7 = \{b,c\} = \{b\} \cup \{c\} \text{ ve } \{a\} \in \mathcal{T},\ \{b\} \in \mathcal{T},\ \{c\} \in \mathcal{T}$$

olduğundan $U_6, U_7 \in \mathcal{T}$ olur. Bu durumda, her $U \in \mathcal{P}(X)$ için $U \in \mathcal{T}$ olur. Bu ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ demektir.✍

Teorem 3.12.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve her $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ ayrık topolojidir.

Bu sonuç Örnek 3.11 in bir genellemesidir. Bu yüzden ispatın benzer olacağı düşünülebilir. Fakat X bu örnekte sonsuz bir küme olabileceğinden burada Örnek 3.11 de yaptığımız gibi X in bütün alt kümelerini yazmayacağız. Diğer yandan X in bütün alt kümelerinin $\mathcal{T}$ nun elemanı olduğunu göstermeliyiz. Burada X kümesini 4, 5 hatta 100 elemanlı bir küme olarak alıp ispatı yapmayı düşünebilirsiniz. Fakat bu yaklaşım bizi başarısızlığa götürür. Matematiksel bir ispatın şüphe bırakmaması gerekir. Birkaç özel hal inceleyerek şüphe bırakmaz bir ispat yapamayız. Bu yüzden ispatı bütün halleri içerecek şekilde yapmalıyız. O halde X kümesi olarak boş olmayan herhangi bir kümeyi almalıyız ve bir şekilde X in bütün alt kümelerinin $\mathcal{T}$ nun elemanı olduğunu göstermeliyiz. Örnek 3.11 in çözümüne tekrar dikkatli bir şekilde bakılırsa X in her alt kümesinin yine X in $\mathcal{T}$ ya ait olan tek elamanlı alt kümelerinin birleşimi olarak yazılabileceği gerçeğinin kullanıldığı görülür. Bu genel halde de doğrudur.

İSPAT: $U \in \mathcal{P}(X)$ olsun. Her küme kendisine ait olan elemanların oluşturduğu tek elemanlı kümelerin birleşimine eşit olduğundan $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$ dir. ($U = \emptyset$ ise $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} = \bigcup_{x \in \emptyset} \{x\}$ olduğuna dikkat ediniz.) Her bir $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi $\mathcal{T}$ nun bir elemanı olduğundan Tanım 3.1(T-2) ve yukarıdaki eşitlik gereğince $U \in \mathcal{T}$ elde edilir. U

kümesi X in keyfi bir alt kümesi olduğundan X in her alt kümesi $\mathcal{T}$ nun bir elemanıdır. Yani $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. O halde $\mathcal{T}$ ayrık topolojidir.✓

ÖRNEK 3.13. ▷ **Sonlu tümleyenler uzayı**
X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X\setminus U \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun Tanım 3.1 in şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur. $X\setminus X = \emptyset$ sonlu olduğundan $X \in \mathcal{T}$ dur. O halde $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 (T-1) şartını sağlar.

T-2). J bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j \mid j \in J\}$, $\mathcal{T}$ nun bir alt kolleksiyonu olsun. $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $\bigcup_{j\in J} U_j = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olur.

ii) $\bigcup_{j\in J} U_j \neq \emptyset$ ise en az bir $j_0 \in J$ için $U_{j_0} \neq \emptyset$ dur. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X\setminus U_{j_0}$ sonludur. Diğer yandan $X\setminus \bigcup_{j\in J} U_j \subset X\setminus U_{j_0}$ olduğundan $X\setminus \bigcup_{j\in J} U_j$ sonludur. O halde $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ dur.

T-3). U_1 ve U_2 kümeleri $\mathcal{T}$ nun iki elemanı olsun. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ dur.

ii) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ise $U_1 \neq \emptyset$ ve $U_2 \neq \emptyset$ dur. Bu durumda $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X\setminus U_1$ ve $X\setminus U_2$ kümeleri sonludur. İki sonlu kümenin birleşimi sonlu olduğundan

$$X\setminus(U_1 \cap U_2) = (X\setminus U_1) \cup (X\setminus U_2)$$

kümeside sonludur. O halde $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 in (T-3) şartını da sağlar.✍

Örnek 3.13 da tanımlanan $\mathcal{T}$ topolojisine X üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisi ve $(X, \mathcal{T})$ uzayınada sonlu tümleyenler uzayı denir. Eğer X sonlu bir küme ise X in her alt kümesinin tümleyeni sonlu olacağından X in her alt kümesi $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani X sonlu ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olur.

ÖRNEK 3.14. ▷ **Sayılabilir tümleyenler uzayı**
X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X\setminus U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun Tanım 3.1 in şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur. $X\setminus X = \emptyset$ sayılabilir olduğundan $X \in \mathcal{T}$ dur. O halde $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 (T-1) şartını sağlar.

T-2). J bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j \mid j \in J\}$, $\mathcal{T}$ nun bir alt kolleksiyonu olsun. $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $\bigcup_{j\in J} U_j = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olur.

ii) $\bigcup_{j\in J} U_j \neq \emptyset$ ise en az bir $j_0 \in J$ için $U_{j_0} \neq \emptyset$ dur. Bu durumda $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \setminus U_{j_0}$ sayılabilirdir. Diğer yandan

$$X \setminus \bigcup_{j\in J} U_j \subseteq X \setminus U_{j_0}$$

olduğundan $X \setminus \bigcup_{j\in J} U_j$ sayılabilirdir. O halde $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). U_1 ve U_2 kümeleri $\mathcal{T}$ nun iki elemanı olsun. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ dur.

ii) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ise $U_1 \neq \emptyset$ ve $U_2 \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \setminus U_1$ ve $X \setminus U_2$ kümeleri sayılabilirdir. İki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir olduğundan

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$$

kümeside sayılabilirdir. O halde $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 in (T-3) şartını da sağlar.✍

Örnek 3.14 da tanımlanan $\mathcal{T}$ topolojisine X üzerindeki sayılabilir tümleyenler topolojisi ve $(X, \mathcal{T})$ ya da sayılabilir tümleyenler uzayı denir. Eğer X sayılabilir bir küme ise X in her alt kümesinin tümleyeni sayılabilir olacağından X in her alt kümesi $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani X sayılabilir ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olur.

ÖRNEK 3.15. ▷ **Sieprinski uzayı**
X boş olmayan bir küme, $a \in X$ olsun $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince X ve $\emptyset$ kümeleri $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$ dur.

T-2). $U, V \in \mathcal{T}$ ise

$U \cup V$	$\emptyset$	X	$\{a\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	X	$\{a\}$
X	X	X	X
$\{a\}$	$\{a\}$	X	$\{a\}$

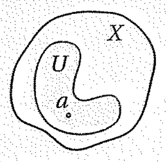
olur. Yani $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U \cup V \in \mathcal{T}$ olur. Daha genel olarak $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ olmak üzere $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}$ ise

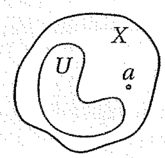
$U \cap V$	$\emptyset$	X	$\{a\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X	$\{a\}$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$

olur. Yani $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur. $\mathcal{T}$ kolleksiyonu Tanım 3.1 deki (T-1), (T-2), (T-3) şartlarını sağladığından X üzerinde bir topolojidir.

$\mathcal{T}$ ya Sieprinski topolojisi ve $(X, \mathcal{T})$ ya Sieprinski uzayı denir.✍



Şekil 3.1 $U \in \mathcal{T}(a)$



Şekil 3.2 $U \in \mathcal{T}_a$

ÖRNEK 3.16. ▷
X boş olmayan bir küme, $a \in X$ olsun. $\mathcal{T}(a) = \{U \subseteq X \mid a \in U\} \cup \{\emptyset\}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

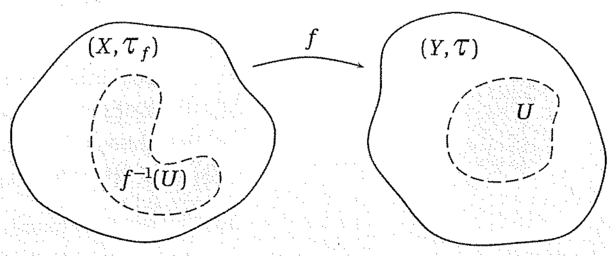
ÇÖZÜM: Alıştırma 12 ve Şekil 3.1 ye bakınız.

ÖRNEK 3.17. ▷
X boş olmayan bir küme, $a \in X$ olsun. $\mathcal{T}_a = \{U \subseteq X \mid a \notin U\} \cup \{X\}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Alıştırma 13 ve Şekil 3.2 ye bakınız.)

ÖRNEK 3.18. ▷
$(Y, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve X boş olmayan bir küme olsun. f, X den Y ye bir fonksiyon ve $\mathcal{T}_f = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}\}$ olsun. $\mathcal{T}_f$ kolleksiyonunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim. (Şekil 3.3 e bakınız.)

Şekil 3.3



ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_f$ nin Tanım 3.1 in (T-1), (T-2) ve (T-3) şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

T-1). $Y \in \mathcal{T}$ ve $X = f^{-1}(Y)$ olduğundan $X \in \mathcal{T}_f$ dir. $\emptyset \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}_f$, Tanım 3.1 in (T-1) şartını sağlar.

T-2). J bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j \mid j \in J\}$, $\mathcal{T}_f$ nin bir alt kolleksiyonu olsun. $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}_f$ olduğunu göstermeliyiz. Her $j \in J$ için $U_j \in \mathcal{T}_f$ olduğundan $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince her bir j için $U_j = f^{-1}(V_j)$ olacak şekilde bir $V_j \in \mathcal{T}$ vardır. Diğer yandan

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right)$$

dir. Her bir $j \in J$ için $V_j \in \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}$, Y üzerinde bir topoloji olduğundan $\bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) \in \mathcal{T}_f$, yani $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}_f$ kolleksiyonu Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağlar.

T-3). U_1 ve U_2 kümeleri $\mathcal{T}_f$ nin iki elemanı olsun. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_f$ olduğunu göstermeliyiz. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_f$ olduğundan $U_1 = f^{-1}(V_1)$ ve $U_2 = f^{-1}(V_2)$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Diğeryandan

$$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

dir. $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ olduğundan $f^{-1}(V_1 \cap V_2) \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_f$ olur Böylece $\mathcal{T}_f$, Tanım 3.1 in (T-3) şartını da sağlar.✍

Örnek 3.18 de X üzerinde tanımlanan $\mathcal{T}_f$ topolojisine $\mathcal{T}$ nun f altındaki ters görüntüsü denir.

ÖRNEK 3.19. ▹
$X = [0,\infty)$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{(a,\infty) \mid a \geq 0\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun Tanım 3.1 in (T-1), (T-2) ve (T-3) şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ dur.

T-2). J bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j \mid j \in J\}$, $\mathcal{T}$ nun bir alt kolleksiyonu olsun. $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $\bigcup_{j\in J} U_j = \emptyset$ ise $\mathcal{T}$ nun tanımından $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olur.

ii) $\bigcup_{j\in J} U_j \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda bazı $j \in J$ için $U_j \neq \emptyset$ dur. Burada iki durum sözkonusudur.

i. $U_j \neq \emptyset$ özelliğindeki en az bir $j_0 \in J$ için $U_{j_0} = X$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{j\in J} U_j = X \in \mathcal{T}$ olur.

ii. $U_j \neq \emptyset$ özelliğindeki her $j \in J$ için $U_j \neq X$ olsun. Bu durumda $U_j \neq \emptyset$ özelliğindeki her $j \in J$ için $U_j = (a_j,\infty)$ olacak şekilde bir $a_j \geq 0$ sayısı vardır. O halde $\{a_j \mid U_j = (a_j,\infty)\}$ kümesi boş değildir ve 0 ile alttan sınırlıdır. Böylece $c = \inf\{a_j \mid U_j = (a_j,\infty)\}$ var ve $c \geq 0$ dır. Bu durumda $\bigcup_{j\in J} U_j = (c,\infty)$ olur. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). U_1 ve U_2 kümeleri $\mathcal{T}$ nun iki elemanı olsun. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olur.

ii) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ise $U_1 \neq \emptyset$ ve $U_2 \neq \emptyset$ dur. Burada iki durum sözkonusudur.

1. $U_1 = X$ veya $U_2 = X$ ise

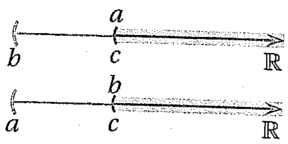
$$U_1 \cap U_2 = U_1 \quad \text{veya} \quad U_1 \cap U_2 = U_2$$

olacağından $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olur.

2. $U_1 \neq X$ ve $U_2 \neq X$ ise $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ olduğundan

$$U_1 = (a,\infty) \quad \text{ve} \quad U_2 = (b,\infty)$$

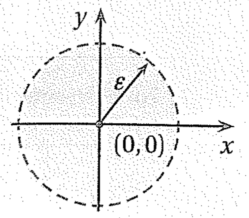
olacak şekilde $a \geq 0$ ve $b \geq 0$ sayıları vardır. O halde $c = \max\{a,b\}$ olmak üzere $U_1 \cap U_2 = (c,\infty)$ dur. (Şekil 3.4 e bakınız.) Böylece $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olur.✍



Şekil 3.4 $c = \max\{a,b\}$

ÖRNEK 3.20. ▹
$X = \mathbb{R}^2$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{$merkezi $(0,0)$ da olan bütün açık diskler$\}$ olsun. (Şekil 3.5 e bakınız.) $\mathcal{T}$ nun bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Alıştırma 14 ye bakınız.✍



Şekil 3.5 $(0,0)$ merkezli açık disk

ÖRNEK 3.21. ▷
$X=\mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}=\{\emptyset\}\bigcup\{U\subseteq\mathbb{R}\mid U$ sonsuz bir küme$\}$ olsun. $\mathcal{T}$ nun bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $U=(-\infty,-1)\bigcup\{0\}\in\mathcal{T}$ ve $V=(1,\infty)\bigcup\{0\}\in\mathcal{T}$ dur. Diğer yandan $U\bigcap V=\{0\}$ dır. Bu durumda $U\bigcap V\neq\emptyset$ ve $U\bigcap V$ sonlu olduğundan $U\bigcap V\notin\mathcal{T}$ olur. O halde $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji değildir.✍

ÖRNEK 3.22. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $a\notin X$ herhangi bir nesne olsun. $Y=\{a\}\bigcup X$ olmak üzere
$$\mathcal{T}'=\{\{a\}\bigcup V\mid V\in\mathcal{T}\}\bigcup\{\emptyset\}$$
olsun. $\mathcal{T}'$ nün Y üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

T-1). $\mathcal{T}'$ nun tanımı gereğince $\emptyset\in\mathcal{T}'$ dür. $X\in\mathcal{T}$ olduğundan $Y=X\bigcup\{a\}\in\mathcal{T}'$ dür.

T-2). J bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j\mid j\in J\}$, $\mathcal{T}'$ nün bir alt kolleksiyonu olsun. $\bigcup_{j\in J}U_j\in\mathcal{T}'$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $\bigcup_{j\in J}U_j=\emptyset$ ise $\mathcal{T}'$ nün tanımı gereğince $\bigcup_{j\in J}U_j\in\mathcal{T}'$ olur.

ii) $\bigcup_{j\in J}U_j\neq\emptyset$ ise en az bir $j\in J$ için $U_j\neq\emptyset$ dur. Her $j\in J$ için $U_j\in\mathcal{T}'$ olduğundan $U_j\neq\emptyset$ özelliğindeki $j\in J$ için $U_j=\{a\}\bigcup V_j$ olacak şekilde bir $V_j\in\mathcal{T}$ vardır. Böylece
$$\bigcup_{j\in J}U_j=\bigcup_{j\in J}(\{a\}\bigcup V_j)=\{a\}\bigcup\left(\bigcup_{j\in J}V_j\right)$$
dir. $\bigcup_{j\in J}V_j\in\mathcal{T}$ olduğundan $\bigcup_{j\in J}U_j\in\mathcal{T}'$ olur.

T-3). U_1 ve U_2 kümeleri $\mathcal{T}'$ nün iki elemanı olsun. $U_1\bigcap U_2\in\mathcal{T}'$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $U_1\bigcap U_2=\emptyset$ ise $\mathcal{T}'$ nün tanımı gereğince $U_1\bigcap U_2\in\mathcal{T}'$ dür.

ii) $U_1\bigcap U_2\neq\emptyset$ ise
$$U_1\neq\emptyset \quad \text{ve} \quad U_2\neq\emptyset$$
dur. Bu durumda $U_1,U_2\in\mathcal{T}'$ olduğundan
$$U_1=\{a\}\bigcup V_1 \quad \text{ve} \quad U_2=\{a\}\bigcup V_2$$
olacak şekilde $V_1,V_2\in\mathcal{T}$ elemanları vardır. Böylece
$$U_1\bigcap U_2=(\{a\}\bigcup V_1)\bigcap(\{a\}\bigcup V_2)=\{a\}\bigcup(V_1\bigcap V_2)$$
dir. $V_1\bigcap V_2\in\mathcal{T}$ olduğundan $U_1\bigcap U_2\in\mathcal{T}'$ olur.✍

O halde $\mathcal{T}'$, Y üzerinde bir topoloji dir.

3.2. Alt Uzaylar

Bir topolojik uzaydan yeni topolojik uzaylar elde edilebilir. Bunlardan bir taneside alt uzaylardır.

ÖRNEK 3.23. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topoljik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{T}_A = \{U \cap A | U \in \mathcal{T}\}$ kolleksiyonunun A kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

T-1). $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \cap A = \emptyset$, $X \cap A = A$ olduğundan $\emptyset, A \in \mathcal{T}_A$ dır.

T-2). I bir indis kümesi olmak üzere $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_A$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince her $i \in I$ için $U_i = A \cap V_i$ olacak şekilde bir $V_i \in \mathcal{T}$ vardır. $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$ dur. Böylece

$$\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap A) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

olduğundan $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_A$ dır.

T-3). $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_A$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince $U_1 = A \cap V_1$, $U_2 = A \cap V_2$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ vardır. $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ dur.

$$(V_1 \cap V_2) \cap A = (V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A) = U_1 \cap U_2$$

olduğundan $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_A$ olur.✍

TANIM 3.24. ▷ **Alt uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topoljik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A üzerindeki $\mathcal{T}_A = \{U \cap A | U \in \mathcal{T}\}$ topolojisine $\mathcal{T}$ dan A üzerine indirgenmiş topoloji veya alt uzay topolojisi denir. $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayınada $(X,\mathcal{T})$ uzayının bir alt uzayı veya bir karışıklık meydana gelmeyecekse A nın kendisine X in bir alt uzayı denir.☜

ÖRNEK 3.25. ▷
$X = \{a,b,c,d\}$ ve $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayı verilsin. $A = \{a,b,d\}$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}_{4n_A}$ yı bulalım.

ÇÖZÜM:

$\emptyset \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$\emptyset = \emptyset \cap A$	$\{a,b\} \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$\{a,b\} = \{a,b\} \cap A$
$X \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$A = X \cap A$	$\{a,c\} \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$\{a\} = \{a,c\} \cap A$
$\{a\} \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$\{a\} = \{a\} \cap A$	$\{a,b,c\} \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$\{a,b\} = \{a,b,c\} \cap A$
$\{b\} \in \mathcal{T}_{4n}$	ve	$\{b\} = \{b\} \cap A$			

olduğundan $\mathcal{T}_{4n_A} = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ olur.✍

ÖRNEK 3.26. ▷
$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = \{a,b,d\}$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}_A$ yı bulalım.

ÇÖZÜM:

$\emptyset \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset = \emptyset \cap A$,	$\{c,d\} \in \mathcal{T}$	ve $\{d\} = \{c,d\} \cap A$,
$X \in \mathcal{T}$ ve $A = X \cap A$,	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}$	ve $\{a,d\} = \{a,c,d\} \cap A$,
$\{a\} \in \mathcal{T}$ ve $\{a\} = \{a\} \cap A$,	$\{b,c,d,e,f\} \in \mathcal{T}$	ve $\{b,d\} = \{b,c,d,e,f\} \cap A$

olduğundan $\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{b,d\}\}$ olur.✍

ÖRNEK 3.27. ▶
$X = [0,\infty)$, $\mathcal{T} = \{(a,\infty) \mid a \geq 0\} \cup \{\emptyset, X\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin.

a) $\mathbb{N}$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ yi bulalım.
b) $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}_A$ yı bulalım.

ÇÖZÜM:

a) Her bir $(a,\infty) \in \mathcal{T}$ için n doğal sayısı a dan büyük ilk doğal sayı olmak üzere

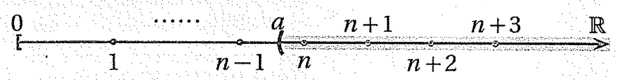
$$(a,\infty) \cap \mathbb{N} = \{n, n+1, \cdots\}, \quad \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset \text{ ve } X \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

olduğundan

$$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

olur. (Şekil 3.6 e bakınız.)

Şekil 3.6



b)

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

dür.

$$\emptyset = \emptyset \cap A, \quad A = X \cap A, \quad \{3\} = (2,\infty) \cap A, \quad \{2,3\} = (1,\infty) \cap A$$

ve $\emptyset, X, (2,\infty), (1,\infty) \in \mathcal{T}$ olduğundan $\emptyset, A, \{3\}, \{2,3\} \in \mathcal{T}_A$ dır. Diğer yandan

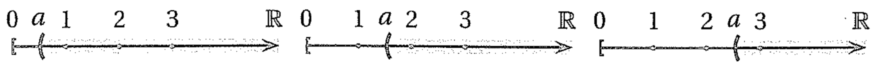
$$\{1\} = (a,\infty) \cap A, \quad \{2\} = (b,\infty) \cap A, \quad \{1,2\} = (c,\infty) \cap A, \quad \{1,3\} = (d,\infty) \cap A$$

olacak şekilde $a, b, c, d \geq 0$ sayıları olmadığından $\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\} \notin \mathcal{T}_A$ dır. (Şekil 3.7 ye bakınız.) Bu durumda

$$\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{3\}, \{2,3\}\}$$

olur.✍

Şekil 3.7



ÖRNEK 3.28. ▷
$\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki sonlu tümleyenler topoloji olsun. $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerindeki al uzay topolojisi $\mathcal{T}_A$ yı bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

dür.

$\{1\} = A \cap (\mathbb{R}\setminus\{2,3\})$, $\{2\} = A \cap (\mathbb{R}\setminus\{1,3\})$, $\{3\} = A \cap (\mathbb{R}\setminus\{1,2\})$, $\{1,2\} = A \cap (\mathbb{R}\setminus\{3\})$, $\{1,3\} = A \cap (\mathbb{R}\setminus\{2\})$, $\{2,3\} = A \cap (\mathbb{R}\setminus\{1\})$, $\emptyset = A \cap \emptyset$, $A = A \cap \mathbb{R}$

ve

$$\mathbb{R}\setminus\{2,3\}, \mathbb{R}\setminus\{1,3\}, \mathbb{R}\setminus\{1,2\}, \mathbb{R}\setminus\{2\}, \mathbb{R}\setminus\{3\}, \mathbb{R}\setminus\{1\}, \emptyset, \mathbb{R}$$

kümeleri $\mathcal{T}$ nun elemanları olduğundan

$$\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\} = \mathcal{P}(A)$$

olur. Diğer bir deyişle $\mathcal{T}_A$, A üzerindeki ayrık topolojidir.

Daha genel olarak $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ve A, X in sonlu bir alt kümesi i: her $a \in A$ için

$$\{a\} = A \cap (X\setminus(A\setminus\{a\})$$

dır. Diğer yandan $A\setminus\{a\}$ sonlu olduğundan $(X\setminus(A\setminus\{a\}) \in \mathcal{T}$ dur. O halde her $a \in A$ içi $\{a\} \in \mathcal{T}_A$ dır. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}_A = \mathcal{P}(A)$ olur.✍

Teorem 3.29 ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq B \subseteq X$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{T}_B)_A = \mathcal{T}_A$ dır.

İSPAT: $U \in (\mathcal{T}_B)_A$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V_1$ olacak şekilde bir $V_1 \in \mathcal{T}_B$ vard: Böylece $V_1 \in \mathcal{T}_B$ olduğundan $V_1 = B \cap V_2$ olacak şekilde bir $V_2 \in \mathcal{T}$ vardır. $A \subseteq B$ olduğ göz önüne alınırsa

$$U = A \cap V_1 = A \cap (B \cap V_2) = A \cap V_2$$

olur. Böylece $V_2 \in \mathcal{T}$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_A$ olur. Bu her $U \in (\mathcal{T}_B)_A$ için doğru olduğunda

$$(\mathcal{T}_B)_A \subseteq \mathcal{T}_A \tag{3.1}$$

olur. Şimdi, $U \in \mathcal{T}_A$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V_1$ olacak şekilde bir $V_1 \in \mathcal{T}$ vardı Böylece $A \subseteq B$ olduğundan $U \subseteq B$ dir.

$$U = U \cap B = (A \cap V_1) \cap B = A \cap (B \cap V_1)$$

ve $B \cap V_1 \in \mathcal{T}_B$ olduğundan $U \in (\mathcal{T}_B)_A$ olur. Bu her $U \in \mathcal{T}_A$ için doğru olduğundan

$$\mathcal{T}_A \subseteq (\mathcal{T}_B)_A \tag{3.2}$$

olur. (3.1) ve (3.2) gereğince $\mathcal{T}_A = (\mathcal{T}_B)_A$ olur.✔

3.3. Açık Kümeler ve Kapalı Kümeler

Açık Kümeler

TANIM 3.30. ▷ **Topolojik uzaylarda açık küme**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{T}$ nun elemanlarına $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık kümeleri veya bir karışıklık meydana gelmeyecekse X in açık kümeleri denir.

ÖRNEK 3.31. ▷
Örnek 3.4 de tanımlanan $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olduğundan bu uzayın açık kümeleri

$$\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}$$

dir.

ÖRNEK 3.32. ▷
Örnek 3.5 de tanımlanan $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olduğundan bu uzayın açık kümeleri

$$X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}$$

dir.

ÖRNEK 3.33. ▷
$X = \{\blacksquare, \bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince bu uzayın açık kümeleri

$$X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$$

dir.

ÖRNEK 3.34. ▷
$(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $U \subseteq X$ ise $U \in \mathcal{P}(X)$ olduğundan U açıktır. Bu durumda X in her alt kümesi $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayında açık bir kümedir.

ÖRNEK 3.35. ▷
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ olduğundan bu uzayın açık kümeleri sadece X ve $\emptyset$ kümeleridir.

ÖRNEK 3.36. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince tümleyeni sonlu olan X in bütün alt kümeleri ve $\emptyset$

kümesi açıktır. Böylece X kümesi sonlu ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğundan X in her alt kümesi bu uzayda açıktır.✍

ÖRNEK 3.37. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayında X in sonsuz her alt kümesinin açık olması gerekmediğini gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{N}$ üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisi $\mathcal{T}$ olsun. $\mathbb{N} \setminus \{2n | n \in \mathbb{N}\} = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olmadığından, yani pozitif çift tamsayıların kümesinin tümleyeni sonlu olmadığından pozitif çift tamsayıların kümesi $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ uzayında açık değildir. Böylece herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayında X in sonsuz her alt kümesi açık olmak zorunda değildir.✍

ÖRNEK 3.38. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince tümleyeni sayılabilir olan X in bütün alt kümeleri ve $\emptyset$ kümesi açıktır. Böylece X kümesi sayılabilir ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğundan X in her al kümesi bu uzayda açıktır.✍

ÖRNEK 3.39. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince X in $a \in U$ özelliğindeki alt kümeleri ve $\emptyset$ kümesi açıktır. Bu uzayda a noktasını içermeyen tek açık küme $\emptyset$ kümedir.✍

ÖRNEK 3.40. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ topolojik uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince X in $a \notin U$ özelliğindeki alt kümeleri ve X kümedir. Bu uzayda a noktasını içeren tek açık küme X dir.✍

Tanım 3.30 ve Tanım 3.1 gereğince aşağıdaki önermeyi yazabiliriz.

Teorem 3.41. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda
a) X ve $\emptyset$ kümeleri açıktır.
b) Açık kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun birleşimi açıktır.
c) İki açık kümenin kesişimi yine açıktır. (Sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi açıktır.)

Not
Teorem 3.41 yi okurken aklımıza şu soru gelebilir: Niçin açık kümelerin sonlu veya sonsuz birleşimi açık bir küme olurken sadece sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi açıktır. Açık kümelerin keyfi bir kesişimi her zaman açık mıdır? Aşağıdaki örnek bu sorunun cevabının "hayır" olduğunu gösterir. Açık kümelerin sonsuz kesişimlerinin açık olmayabileceğini göstermek için bir karşıt örnek vermek yeterlidir.

ÖRNEK 3.42. ▷
Her hangi bir $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık kümelerin kesişimlerinin açık olması gerekmediğini gösterelim.

ÇÖZÜM: $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı verilsin. Her bir n doğal sayısı için

$$U_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \left(\bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\} \right)$$

olsun. U_n nin tümleyeni olan $\mathbb{N}\setminus U_n = \{2,3,\cdots,n\}$ kümesi sonlu olduğundan U_n kümesi $\mathcal{T}$ topolojisine göre açık bir kümedir. Diğer yandan, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{1\}$ dir. $\{1\}$ in tümleyeni olan $\{2,3,4,\cdots\}$ kümesi $\mathbb{N}$ den farklıdır. Bu küme sonlu olmadığından $\{1\}$ kümesi $\mathcal{T}$ nun bir elemanı değildir. O halde U_n açık kümelerinin kesişimi açık değildir.✍

Teorem 3.43. ▶
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ve $U \in \mathscr{P}(X)$ olsun. Aşağıdaki (a) ve (b) önermeleri denktir.

a) Her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathscr{B}$ vardır.

b) U kümesi $\mathscr{B}$ kolleksiyonuna ait bir takım kümelerin birleşimidir.

İSPAT:

a)⇒b). Her $x \in U$ için $B_x \subseteq U$ olduğundan

$$\bigcup_{x\in U} B_x \subseteq U \tag{3.3}$$

olur. Diğer yandan $x \in U$ ise $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathscr{B}$ olduğundan $x \in \bigcup_{x\in U} B_x$ olur. Bu durumda

$$U \subseteq \bigcup_{x\in U} B_x \tag{3.4}$$

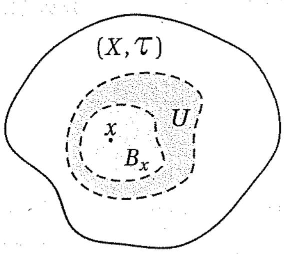
olur. O halde (3.3) ve (3.4) gereğince $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ olur. Yani U kümesi $\mathscr{B}$ kolleksiyonuna ait bir takım kümelerin birleşimidir.

b)⇒a). U kümesi $\mathscr{B}$ ye ait birtakım kümelerin birleşimi olsun. Bu durumda $j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{j\in J} B_j$ olacak şeklinde bir J indis kümesi vardır. $x \in U$ olsun. Bu durumda $x \in \bigcup_{j\in J} B_j$ olacağından bazı $j_0 \in J$ için $x \in B_{j_0}$ olur. $B_{j_0} = B_x$ denilirse $x \in B_x \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j = U$ ve $B_x \in \mathscr{B}$ olur.✔

SONUC 3.44. ▶ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $U \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U kümesi açıktır.

b) Her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{T}$ vardır.



Şekil 3.8

İSPAT:

a)⇒b). U kümesi açık ve $x \in U$ olsun. $B_x = U$ alınırsa $x \in B_x \subseteq U$ ve $B_x \in \mathcal{T}$ olur.

b)⇒a). Her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olcak şekilde bir $B_x \in \mathcal{T}$ olsun. Teorem 3.43 gereğince $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ olur. (Şekil 3.8 e bakınız.) Her $x \in U$ için $B_x \in \mathcal{T}$ olduğundan Tanım 3.1 (T-2) şartı gereğince $U \in \mathcal{T}$ olur. Yani U açıktır.✔

ÖRNEK 3.45. ▶
$\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki sonlu tümleyenler topoloji ve $A = \{1,2,3\}$ olsun. $\{1\}$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında açık ve $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayında açık olmadığını göstere-

lim.

ÇÖZÜM: Örnek 3.28 gereğince

$$\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\} = \mathscr{P}(A)$$

olduğundan $\{1\}$ kümesi $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayında açıkdır. Diğeryandan $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sonlu olmadığında $\{1\}$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayında açık değildir.

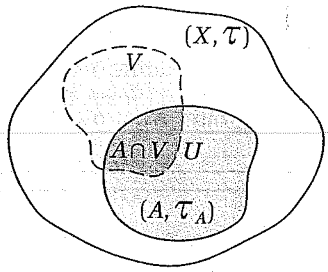
ÖRNEK 3.46. ▷
$X = [0,\infty)$, $\mathcal{T} = \{(a,\infty) | a \geq 0\} \cup \{\emptyset, X\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayı verilsin ve $A = \{1,2,3\}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $\{n, n+1, \cdots\}$ kümesinin $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ uzayında açık ve $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 3.27 gereğince

$$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} | n \in \mathbb{N}\}$$

olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için $\{n, n+1, \cdots\}$ kümesi $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ uzayında açıkdır. Diğeryandan $\{n, n+1, \cdots\} \notin \mathcal{T}$ olduğundan $\{n, n+1, \cdots\}$ kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık değildir.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayında açık olan bir küme $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olmak zorunda değildir. Şimdi $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayında açık olan bir kümenin ne zaman $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olacağını gösteren bir teorem verelim.



Şekil 3.9

Teorem 3.47. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \in \mathcal{T}$ olmak üzere $U \subseteq A$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U kümesi A alt uzayında açıktır. **b)** U kümesi X uzayında açıktır.

İSPAT:

a)⇒b). U kümesi A uzayında açık olduğundan $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. $A, V \in \mathcal{T}$ olduğundan $U \in \mathcal{T}$ dur. (Şekil 3.9 a bakınız.)
b)⇒a). U kümesi X uzayında açık ve $U = A \cap U$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_A$ olur. Yani U, A alt uzayında açıktır.✔

Kapalı Kümeler

TANIM 3.48. ▷ **Topolojik uzaylarda kapalı küme**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve U kümesi X in bir alt kümesi olsun. U nun X e göre tümleyeni olan $X \setminus U$ kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açıksa U ya $(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı alt kümesi denir.

ÖRNEK 3.49. ▷
$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM:

a) $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{T}$
b) $X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{T}$
c) $X \setminus \{a\} = \{b, c, d, e, f\} \in \mathcal{T}$
d) $X \setminus \{b, e, f\} = \{a, c, d\} \in \mathcal{T}$
e) $X \setminus \{a, b, e, f\} = \{c, d\} \in \mathcal{T}$
f) $X \setminus \{b, c, d, e, f\} = \{a\} \in \mathcal{T}$

olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümeleri

$$X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b, e, f\},\ \{a, b, e, f\},\ \{b, c, d, e, f\}$$

kümeleridir.✍

ÖRNEK 3.50. ▷
$X = \{\blacksquare, \bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} \in \mathcal{T}$ ve

a) $X \setminus X = \emptyset$
b) $X \setminus \emptyset = X$
c) $X \setminus \{\blacksquare\} = \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$
d) $X \setminus \{\blacklozenge, \clubsuit\} = \{\blacksquare, \bigstar, \spadesuit\}$
e) $X \setminus \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\} = \{\bigstar, \spadesuit\}$
f) $X \setminus \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\blacksquare\}$

olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümeleri

$$\emptyset,\ X,\ \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\},\ \{\blacksquare, \bigstar, \spadesuit\},\ \{\bigstar, \spadesuit\},\ \{\blacksquare\}$$

olur.✍

ÖRNEK 3.51. ▷
Örnek 3.19 $X = [0, \infty)$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{(a, \infty) \mid a \geq 0\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ve $a \geq 0$ için $(a, \infty) \in \mathcal{T}$ olduğundan

a) $X \setminus X = \emptyset$
b) $X \setminus \emptyset = X$
c) $a \geq 0$ için $X \setminus (a, \infty) = [0, a]$

kümeleri $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalıdır. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X\} \cup \{[0, a] \mid a \geq 0, a \in \mathbb{R}\}$$

dir.✍

ÖRNEK 3.52. ▷
$(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $U \subseteq X$ olsun. $X \setminus U \in \mathcal{P}(X)$ olduğundan $X \setminus U$ kümesi açıktır. Bu durumda

$$X \setminus (X \setminus U) = U$$

kümesi kapalıdır. Bu durumda X in her U alt kümesi $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayında kapalıdır.

ÖRNEK 3.53. ▶
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının açık kümeleri X ve $\emptyset$ dir. Bu durumda $X \setminus X = \emptyset$ ve $X \setminus \emptyset = X$ olduğundan $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının kapalı kümeleri X ve $\emptyset$ dir.✍

ÖRNEK 3.54. ▶
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: U kümesi kapalı olsun. Bu durumda $X \setminus U$ açık olacağından

$$X \setminus U = \emptyset \text{ veya } X \setminus (X \setminus U) = U \text{ sonlu}$$

dur. Bu durumda

$$U = X \text{ veya } U \text{ sonlu}$$

dur. Bu durumda bu uzayda kapalı kümelerin kolleksiyonu

$$\mathscr{F} = \{X\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ sonlu}\}$$

dur.

Not

Örnek 3.54 den X ve X in bütün sonlu alt kümelerinin kapalı olduğu her topolojik uzayın sonlu tümleyenler uzayı olduğu sonucu çıkartılamaz. Bir uzayın sonlu tümleyenler uzayı olması için uzayın kapalı kümelerin sadece bu kümeler olması gerekir. Diğer bir deyişle uzayın bu kümelerden başka hiçbir kapalı kümesi olmamalıdır.

ÖRNEK 3.55. ▶
$(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümlu tümleyenler uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: U kümesi kapalı olsun. Bu durumda $X \setminus U$ açık olacağından

$$X \setminus U = \emptyset \text{ veya } X \setminus (X \setminus U) = U \text{ sayılabilir}$$

dir. Böylece

$$U = X \text{ veya } U \text{ sayılabilir}$$

dir. Bu durumda bu uzayda kapalı kümelerin kolleksiyonu

$$\mathscr{F} = \{X\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ sayılabilir}\}$$

dur.✍

ÖRNEK 3.56. ▶
$(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: U kümesi kapalı ise $X \setminus U$ açıktır. Böylece $X \setminus U \in \mathcal{T}(a)$ dır. Böylece $X \setminus U = \emptyset$ veya $a \in X \setminus U$ dur. Bu durumda $U = X$ veya $a \notin U$ olur. Böylece bu uzayda kapalı kümelerin kolleksiyonu

$$\mathscr{F} = \{X\} \cup \{U \subseteq X \mid a \notin U\} = \mathcal{T}_a$$

dır. Bu uzayda a yı içeren kapalı küme sadece X dir.✍

ÖRNEK 3.57. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ topolojik uzayının kapalı kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: U kümesi kapalı ise $X \setminus U$ açıktır. Böylece $X \setminus U \in \mathcal{T}_a$ dır. Böylece $X \setminus U = X$ veya $a \notin X \setminus U$ dur. Bu durumda $U = \emptyset$ veya $a \in U$ olur. Böylece bu uzayda kapalı kümelerin kolleksiyonu

$$\mathcal{F} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid a \in U\} = \mathcal{T}(a)$$

dır. Bu uzayda a yı içermeyen kapalı küme sadece $\emptyset$ küme dir.

Teorem 3.58. ▷
$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. Bu durumda
a) $\emptyset$ ve X kümeleri kapalıdır.
b) Keyfi sayıdaki kapalı kümelerin kesişimi kapalıdır.
c) Sonlu sayıdaki kapalı kümelerin birleşimi kapalıdır.

İSPAT:

a) X in tümleyeni $\emptyset$ ve $\emptyset$ un tümleyeni X olduğundan $\emptyset$ ve X kümeleri kapalıdır.
b) I bir indis kümesi ve her $i \in I$ için U_i kümesi X uzayında kapalı olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $X \setminus U_i$ kümesi X uzayında açıktır. Teorem 3.41 gereğince $\bigcup_{i \in I}(X \setminus U_i)$ kümesi açıktır. O halde Tanım 3.48 gereğince

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i) \right) = \bigcap_{i \in I} U_i$$

kümesi kapalıdır.
c) $U_1, U_2, \cdots, U_n$ kümeleri kapalı olsun. Bu durumda $U_1, U_2, \cdots, U_n$ kümelerinin tümleyenleri olan

$$X \setminus U_1, X \setminus U_2, \cdots, X \setminus U_n$$

kümeleri açıktır. Diğer yandan

$$X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n) = (X \setminus U_1) \cap \cdots \cap (X \setminus U_n) \tag{3.5}$$

dir. (3.5) eşitliğinin sağ tarafı sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi olduğundan Önerne 3.41 gereğince açıktır. O halde (3.5) eşitliğinin sol tarafındaki küme açıktır. Böylece

$$U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$$

kümesi kapalıdır. Dolayısıyla (c) doğrudur.✔

Teorem 3.59. ▷
X bir küme ve $\mathcal{F}$ de X in
i). $\emptyset$ ve X kümeleri $\mathcal{F}$ ye aittir,
ii). $\mathcal{F}$ ye ait keyfi sayıdaki kümelerin kesişimi yine $\mathcal{F}$ ye aittir,
iii). $\mathcal{F}$ ye ait sonlu sayıdaki kümelerin birleşimi yine $\mathcal{F}$ ye aittir
özelliklerini sağlayan alt kümelerinin bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda

a) $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \in \mathcal{F}\}$ kolleksiyonu X üzerinde bir topolojidir.
b) Bu topolojiye göre X in bütün kapalı kümelerinin kolleksiyonu $\mathcal{F}$ dir.

İSPAT:

a) X in bir U alt kümesi için $U \in \mathcal{T}$ ($U \in \mathcal{F}$) olması için gerek ve yeter şartın $X \setminus U \in$ ($X \setminus U \in \mathcal{T}$) olması gerektiğine dikkat ediniz.

T-1). (i) gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ dir. Böylece $\emptyset = X \setminus X$ ve $X = X \setminus \emptyset$ olduğundan $\emptyset, X \in$ dur.

T-2). I bir indis kümesi ve her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ içi $X \setminus U_i \in \mathcal{F}$ dir. Böylece (ii) gereğince $\bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i) \in \mathcal{F}$ olur. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğinc

$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i)\right) \in \mathcal{T}$ ve

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \setminus \left(\bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i)\right)$$

olduğundan $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ olur.

T-3). $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ olsun. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{T}$ nun tanım gereğince

$$X \setminus U_1, X \setminus U_2 \in \mathcal{F}$$

olur. Diğer yandan (iii) gereğince

$$(X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) \in \mathcal{F}$$

dir.

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$$

olduğundan $X \setminus (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{F}$ olur. Bu durumda $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğinc $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olur.

b) $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{K}$ olsun. $\mathcal{K} = \mathcal{F}$ olduğunu göster meliyiz. $U \in \mathcal{K}$ ise $X \setminus U \in \mathcal{T}$ dur. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \setminus (X \setminus U) \in \mathcal{F}$ olu $U = X \setminus (X \setminus U)$ olduğundan $U \in \mathcal{F}$ olur. O halde

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F} \tag{3.6}$$

dir. $U \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $X \setminus U \in \mathcal{T}$ olacağından $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \setminus (X \setminus U) \in \mathcal{K}$ olur. $U = X \setminus (X \setminus U)$ olduğundan $U \in \mathcal{K}$ olur. O halde

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K} \tag{3.7}$$

dır. Böylece (3.6) ve (3.7) den $\mathcal{F} = \mathcal{K}$ elde edilir.✔

UYARI! Bazı kümelerin açık veya kapalı olarak isimlendirilmelerine rağmen bazı açık kümeler aynı zamanda kapalıdır. Üstelik bazı kümelerde ne açık ne de kapalıdır.

ÖRNEK 3.61. ▶
$X = \{■, ★, ♦, ♣, ♠\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{■\}, \{♦, ♣\}, \{■, ♦, ♣\}, \{★, ♦, ♣, ♠\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin.

a) {■} b) {■, ♠} c) {♦, ♣} d) {★, ♠}

kümelerinin açık, kapalı veya açık-kapalı olup olmadıklarını belirleyiniz.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T} = \{X, \emptyset,$ {■}, {♦, ♣}, {■, ♦, ♣}, {★, ♦, ♣, ♠}$\}$ olduğundan bu uzayın kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$\mathcal{K} = \{\emptyset, X,$ {■}, {★, ♠}, {■, ★, ♠}, {★, ♦, ♣, ♠}$\}$

olur. Böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayında

a) {■} kümesi hem açık hem kapalıdır. b) {■, ♠} kümesi ne açık ne kapalıdır.
c) {♦, ♣} kümesi açık fakat kapalı değildir. d) {★, ♠} kümesi kapalı fakat açık değildir.✍

ÖRNEK 3.62. ▷
$(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayının hem açık hem kapalı alt kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM: Örnek 3.34 gereğince X in her alt kümesi açık ve Örnek 3.52 gereğince X in her alt kümesi kapalıdır. Bu durumda $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayında X in her alt kümesi hem açık hem de kapalıdır.✍

ÖRNEK 3.63. ▷
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının hem açık hem kapalı alt kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM: Örnek 3.35 gereğince X in açık kümeleri X ve $\emptyset$ dir. Örnek 3.53 gereğince X in kapalı kümeleri X ve $\emptyset$ dir. Buna göre $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayın hem açık hem kapalı alt kümesi X ve $\emptyset$ dir.✍

Bir küme hem açık hem de kapalı olabileceğininden aşağıdaki tanımı verebiliriz.

TANIM 3.64. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $U \subseteq X$ olsun. U kümesi hem açık hem kapalı ise U ya $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık-kapalı (veya kapalı-açık veya kaçık) bir alt kümesi denir.☜

Her $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında X ve $\emptyset$ kümeleri açık-kapalıdır. Böylece her topolojik uzayda X ve $\emptyset$ kümeleri hem açık hem kapalıdır. Ayrık bir uzayda X in her alt kümesi açık-kapalı olmasına rağmen herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayında sadece X ve $\emptyset$ kümeleri açık-kapalıdır.

ÖRNEK 3.65. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ ve $(X, \mathcal{T}_a)$ uzaylarının açık-kapalı kümelerinin sadece $\emptyset$ ve X kümeleri olduklarını gösterelim.☜

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayının açık-kapalı kümelerinin sadece $\emptyset$ ve X kümeleri olduklarını gösterelim. $\emptyset$ ve X kümeleri her uzayda açık-kapalı olduğundan bu kümeler $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayında açık-kapalıdır. $U \in \mathscr{P}(X)$ ve $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ olmak üzere kümesi $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayında hem açık hem kapalı olsun. U kümesi kapalı olduğundan $X \setminus U$

kümesi açıktır. Bu durumda $a \in U$ ve $a \in X \setminus U$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde U kümes hem açık hem kapalı olmamaz.

Benzer şekilde $(X, \mathcal{T}_a)$ uzaylarının açık-kapalı kümelerinin sadece $\emptyset$ ve X kümeleri olduğu gösterilir.✍

ÖRNEK 3.66. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir sayılabilir tümleyenler uzayı olsun. X in en az 3 tane faklı hem açık hem kapalı alt kümesi varsa X kümesinin sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}$ nun sayılabilir tümleyenler topolojisi olduğu ve $(X, \mathcal{T})$ uzayının en az üç tane farklı hem açık hem kapalı alt kümesinin olduğu verilmiştir. Bizden X in sayılabilir bir küme olduğunun gösterilmesi istenmiştir. $\mathcal{T}$ sayılabilir tümleyenler topolojisi olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümeleri sadece X ve X in sayılabilir alt kümeleridir.

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında en az 3 tane hem açık hem kapalı kümenin olduğu bize verilmiştir. Bu ise $\mathcal{T}$ ya göre $\emptyset$ ve X kümelerinden farklı en az bir tane hem açık hem kapalı kümenin mevcut olması demektir. Diğer bir deyişle $(X, \mathcal{T})$ uzayında $U \neq \emptyset$, $U \neq X$ özelliğinde hem açık hem kapalı olan en az bir U alt kümesi vardır. U, $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olduğundan Tanım 3.48 gereğince U nun tümleyeni olan $X \setminus U$ kümesi sayılabilir tümleyenler topolojisine göre kapalıdır. Böylece U ve $X \setminus U$ kümeleri sayılabilir tümleyenler topolojisine göre kapalı kümelerdir. U ve $X \setminus U$ kümelerinin her ikiside X kümesinden farklı olduğundan U ve $X \setminus U$ kümeleri sayılabilirdir. Diğer yandan $X = U \cup (X \setminus U)$ dur. X sayılabilir iki kümenin birleşimine eşit olduğundan X kümeside sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 3.67. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir sonlu tümleyenler uzayı olsun. X in en az 3 tane faklı hem açık hem kapalı alt kümesi varsa X kümesinin sonlu olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında en az 3 tane hem açık hem kapalı kümesi olduğundan $U \neq \emptyset$, $U \neq X$ özelliğinde hem açık hem kapalı olan en az bir U alt kümesi vardır. U, $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olduğundan Tanım 3.48 gereğince U nun tümleyeni olan $X \setminus U$ kümesi sonlu tümleyenler topolojisine göre kapalıdır. Böylece U ve $X \setminus U$ kümeleri sonlu tümleyenler topolojisine göre kapalı kümelerdir. U ve $X \setminus U$ kümelerinin her ikiside X kümesinden farklı olduğundan U ve $X \setminus U$ kümeleri sonludur. Diğer yandan $X = U \cup (X \setminus U$ olur. X sonlu iki kümenin birleşimine eşit olduğundan X kümeside sonludur.✍

Teorem 3.68. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere $U \subseteq A$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U kümesi A alt uzayında kapalıdır.
b) $U = A \cap V$ olacak şekilde X uzayında kapalı bir V kümesi vardır.

İSPAT:

a)⇒b). U kümesi A alt uzayında kapalı olduğundan $A \setminus U$ kümesi A alt uzayında açıktır. Böylece

$$A \setminus U = A \cap V_1$$

olacak şekilde X uzayında bir V_1 açık kümesi vardır. Bu durumda $U = A \cap (X \setminus V_1)$ olur. Böylece, $V = X \setminus V_1$ kümesi X uzayında kapalı ve $U = A \cap V$ dir.

b)⇒a). $U = A \cap V$ olacak şelilde X uzayında kapalı bir V kümesi olsun. Bu durumda

$$A \setminus U = A \cap (X \setminus V)$$

olur. Böylece $X \setminus V$ kümesi X uzayında açık olduğundan $A \setminus U$ kümesi A alt uzayında açıktır. O halde U kümesi A alt uzayında kapalıdır.✓

ÖRNEK 3.69. ▷
$X = [0, \infty)$, $\mathcal{T} = \{(a, \infty) | a \geq 0\} \cup \{\emptyset, X\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin ve $A = \{1, 2, 3\}$ olsun.

a) $\{1, 2\}$ kümesinin $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

b) $\{1, 2\}$ kümesinin $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

c) $\{1, 2\}$ kümesinin$(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM:

a) Örnek 3.27 gereğince $\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{3\}, \{2, 3\}\}$ dir. Buna göre $A \setminus \{1, 2\} = \{3\} \in \mathcal{T}_A$ olduğundan $\{1, 2\}$ kümesi $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayında kapalı dır.

b) Örnek 3.27 gereğince

$$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} | n \in \mathbb{N}\}$$

dir. $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ olduğundan $\{1, 2\}$ kümesinin $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ uzayında kapalı dır.

c) $X \setminus \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty) \notin \mathcal{T}$ olduğundan $\{1, 2\}$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı değildir.✍

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayında kapalı olan bir küme $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olmak zorunda değildir. Şimdi $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayında kapalı olan bir kümenin ne zaman $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olacağını gösteren bir sonuç verelim.

SONUÇ 3.70. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, A kümesi X uzayında kapalı ve $U \subseteq A$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U kümesi A alt uzayında kapalıdır.

b) U kümesi X uzayında kapalıdır.

İSPAT:

a)⇒b). U kümesi A alt uzayında kapalı olduğundan Teorem 3.68 gereğince $U = A \cap V$ olacak şekilde X uzayında kapalı bir V alt kümesi vardır. A ve V kümeleri X uzayında kapalı olduğundan U kümesi X uzayında kapalıdır.

b)⇒a). U kümesi X uzayında kapalı ve $U = A \cap U$ olduğundan U kümesi Teorem 3.68

gereğince A alt uzayında kapalıdır. ✔

3.4. Metrik Topoloji

Teorem 3.71. ▷

(X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\mathcal{T}_d = \{U \subseteq X \mid U \text{ kümesi } (X,d) \text{ uzayında açık } (d\text{-açık})\}$$

kolleksiyonu X üzerinde bir topolojidir.

İSPAT:

T-1). Metrik uzayda açık küme tanımı gereğince $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ ve $X \in \mathcal{T}_d$ dir.

T-2). I bir indis kümesi ve her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_d$ olmak üzere $\{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyor $\mathcal{T}_d$ nin bir alt kolleksiyonu olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ olduğunu gösterelim. $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ olsu Bu durumda $x \in U_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. U_{i_0} kümesi (X,d) uzayınc açık olduğundan $B(x,\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

olacağından $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ kümesi (X,d) uzayında açıktır. Böylece $\mathcal{T}_d$ nin tanır gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ olur.

T-3). $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$ olsun. Bu durumda U_1 ve U_2 kümeleri (X,d) uzayında açıktır.

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

ise (T-1) gereğince $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$ olur. $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ve $x \in U_1 \cap U_2$ olsun. Bu d rumda U_1 ve U_2 kümeleri (X,d) uzayında açık olduğundan

$$B(x,\varepsilon_1) \subseteq U_1 \text{ ve } B(x,\varepsilon_2) \subseteq U_2$$

olacak biçimde $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ sayıları vardır. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ diyelim. Bu durumda

$$B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,\varepsilon_1) \subseteq U_1 \text{ ve } B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,\varepsilon_2) \subseteq U_2$$

olur. Buradan da

$$B(x,\varepsilon) \subseteq U_1 \cap U_2$$

elde edilir. Yani $U_1 \cap U_2$ kümesi (X,d) uzayında açıktır. $\mathcal{T}_d$ nin tanımı gereğin $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$ olur. ✔

TANIM 3.72. ▷

a) (X,d) bir metrik uzay olsun. X üzerindeki $\mathcal{T}_d$ topolojisine metrik topoloji veya metriğinin ürettiği (indirgediği) topoloji denir. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_d)$ sıralı ikilisin de metrik topolojik uzay veya (X,d) metrik uzayının ürettiği (indirgediği) topoloji uzay denir.

b) $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{T}$ topolojisi X üzerindeki bir d metriği tarafından üretiliyorsa (indirgeniyorsa) $(X,\mathcal{T})$ uzayına metriklenebilir topolojik uzay denir. Yani $\mathcal{T}=\mathcal{T}_d$ oluyorsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına metriklenebilir topolojik uzay denir.

ÖRNEK 3.73. ▷
$(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının metriklenebildiğini gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x\in X$ için

$$B(x,1/2)=\{x\}$$

dir. Böylece, d nin X üzerinde ürettiği $\mathcal{T}_d$ topolojisine göre tek elemanlı her $\{x\}$ kümesi açıktır. Yani her $x\in X$ için $\{x\}\in\mathcal{T}_d$ dir. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}_d$, X üzerindeki ayrık topolojidir. Dolayısıyla $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı metriklenebilirdir.

ÖRNEK 3. ▷
$(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının metriklenemediğini gösterelim.

ÇÖZÜM: d, X üzerinde bir metrik olsun. $x\neq y$ olmak üzere $x,y\in X$ olsun. $\varepsilon=d(x,y)/2$ diyelim. Bu durumda $y\notin B(x,\varepsilon)$ olur. Yani $y\notin B(x,\varepsilon)$ dir. Bu durumda $B(x,\varepsilon)\neq X$ olur. $B(x,\varepsilon)\neq\emptyset$ ve $B(x,\varepsilon)\neq X$ olduğundan $B(x,\varepsilon)\notin\mathcal{T}$ dur. $B(x,\varepsilon)\in\mathcal{T}_d$ olduğundan $\mathcal{T}\neq\mathcal{T}_d$ dir. O halde $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayı metriklenemez.

ÖRNEK 3.75. ▷
$X=\{a,b\}$ ve $\mathcal{T}=\{\emptyset,X,\{b\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının metriklenemediğini gösterelim.

ÇÖZÜM: d, X üzerinde bir metrik olsun. $\varepsilon=d(a,b)/2$ diyelim. Bu durumda $b\notin B(a,\varepsilon)$ olur. Buradan $B(a,\varepsilon)=\{a\}$ elde edilir. Böylece

$$B(a,\varepsilon)\neq\emptyset,\quad B(a,\varepsilon)\neq\{b\}\quad \text{ve}\quad B(a,\varepsilon)\neq X$$

olur. O halde $B(a,\varepsilon)\notin\mathcal{T}$ dur. $B(a,\varepsilon)\in\mathcal{T}_d$ olduğundan $\mathcal{T}\neq\mathcal{T}_d$ olur. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı metriklenemez.

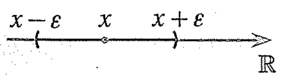
3.5. ℝ Standart Uzayı ve Bazı Açık ve Kapalı Alt Kümeleri

ℝ üzerindeki standart (mutlak değer) metriğine göre bir $a\in\mathbb{R}$ ve $\varepsilon>0$ için $B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ olduğundan bir $U\subseteq\mathbb{R}$ kümesinin $\mathcal{T}_d$ nin bir elemanı olması için gerek ve yeter şart her $x\in U$ için

$$B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq U$$

olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısının olmasıdır. Buna göre ℝ üzerindeki standart (mutlak değer) metriğinin ℝ üzerinde ürettiği topoloji

$$\mathcal{T}_d=\{U\subseteq\mathbb{R}\mid \text{her } x\in U \text{ için } (x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq U \text{ olacak şekilde bir } \varepsilon>0 \text{ sayısı vardır}\} \tag{3.8}$$



Şekil 3.10

olur. (Şekil 3.10 a bakınız.) ℝ üzerindeki $\mathcal{T}_d$ topolojisine ℝ nin standart (Öklid veya alışılmış) topolojisi ve $(\mathbb{R},\mathcal{T}_d)$ uzayına da ℝ standart (Öklid veya alışılmış) uzayı denir. ℝ den bir topolojik uzay olarak bahsedildiğinde ℝ nin topolojisi belirtilmiyorsa topolojinin standart topoloji olduğu anlaşılacaktır.

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

olmak üzere d_2 nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde ürettiği topoloji $\mathcal{T}_{d_2}$ olsun. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ için

$$B(x, \varepsilon) = \left\{ (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

olmak üzere bir $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin $\mathcal{T}_{d_2}$ nin bir elemanı olması için gerek ve yeter şa her $x \in U$ için $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısının olmasıdır. Buna göre $\mathbb{R}$ üzerindeki d_2 metriğinin $\mathbb{R}^n$ üzerinde ürettiği topoloji

$$\mathcal{T}_{d_2} = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{her } x \in U \text{ için } B(x, \varepsilon) \subseteq U \text{ olacak şekilde bir } \varepsilon > 0 \text{ sayısı vardır}\} \quad (3.9$$

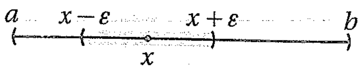
olur. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki $\mathcal{T}_{d_2}$ topolojisine $\mathbb{R}^n$ nin standart (Öklid veya alışılmış) topolojisi ve $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{d_2})$ uzayına da $\mathbb{R}^n$ standart (Öklid veya alışılmış) uzayı denir. $\mathbb{R}^n$ den bir topo lojik uzay olarak bahsedildiğinde $\mathbb{R}^n$ nin topolojisi belirtilmiyorsa topolojinin standar topoloji olduğu anlaşılacaktır.

Benzer şekilde $n \geq 1$ için $\mathbb{C}^n$ üzerinde

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

metriğinin ürettiği $\mathcal{T}_{d_2}$ topolojisine $\mathbb{C}^n$ nin standart (alışılmış) topolojisi ve $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T}_{d_2})$ uzayına da $\mathbb{C}^n$ standart (alışılmış) uzayı denir. $\mathbb{C}^n$ den bir topolojik uzay olarak bah sedildiğinde $\mathbb{C}^n$ nin topolojisi belirtilmiyorsa topolojinin standart topoloji olduğu anlaşılacaktır.

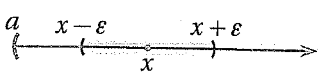
ÖRNEK 3.76. ▷
Herhangi bir (a, b) açık aralığının $\mathbb{R}$ standart uzayında açık bir küme olduğunu gösterelim.



Şekil 3.11

ÇÖZÜM: Bunun için $x \in (a, b)$ özelliğindeki her x için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ olacak şe kilde bir $\varepsilon > 0$ reel sayısının bulunabileceğini göstermeliyiz. $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|x - a|, |b - x|\}$ olsun. Bu durumda açıkça $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ dir. (Şekil 3.11 e bakınız.) O halde (a, b) kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açıktır.✍

ÖRNEK 3.77. ▷
Her a reel sayısı için (a, ∞) ve $(-\infty, a)$ aralıklarının $\mathbb{R}$ standart uzayında birer açık küme olduklarını gösterelim.



Şekil 3.12

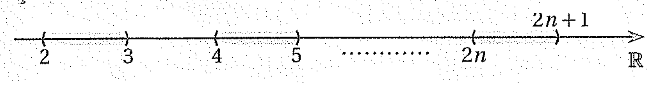
ÇÖZÜM: Önce (a, ∞) aralığının açık bir küme olduğunu gösterelim. $x \in (a, \infty)$ ve $\varepsilon = |x - a|/2$ olsun. Bu durumda $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, \infty)$ olur. (Şekil 3.12 ye bakınız.) Böylece (a, ∞) aralığı $\mathbb{R}$ standart uzayında açıktır. $(-\infty, a)$ kümesinin açık bir küme olduğu benzer şekilde gösterilir.✍

NOT 3.78. Her açık aralık $\mathbb{R}$ standart uzayında açık bir küme olmasına rağmen bunun tersi doğru değildir. Yani her açık küme açık bir aralık olmak zorunda değildir. Örneğin, $(1,3) \cup (5,6)$ kümesi $\mathbb{R}$ de açıktır, fakat bu küme bir aralık değildir. Üstelik,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n, 2n+1)$$

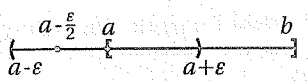
kümesi de $\mathbb{R}$ de açık bir küme olmasına rağmen bir aralık değildir. (Şekil 3.13 e bakınız.)

Şekil 3.13



ÖRNEK 3.79. ▷
Herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığının $\mathbb{R}$ standart uzayında açık bir küme olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bunun için $[a,b]$ aralığının (3.8) deki $\mathcal{T}_d$ ye ait olmadığını göstermeliyiz. Bunu göstermek için bir $x \in [a,b]$ noktası için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [a,b]$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısının bulunamayacağını göstermeliyiz. a ve b noktaları $[a,b]$ aralığının kritik noktalarıdır. $x = a$ seçelim ve $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [a,b]$ özelliği sağlayacak şekilde hiçbir $\varepsilon > 0$ sayısının bulunamayacağını gösterelim. $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [a,b]$ özelliğinde $\varepsilon > 0$ reel sayısının mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ olduğundan $a-\varepsilon < a-\frac{\varepsilon}{2} < a < a+\varepsilon$ olur. (Şekil 3.14 e bakınız.) Bu durumda $a-\frac{\varepsilon}{2} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ve $a-\frac{\varepsilon}{2} \notin [a,b]$ olur. Yani $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \nsubseteq [a,b]$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Bu durumda $[a,b]$ aralığı $\mathbb{R}$ standart uzayında açık değildir.✍



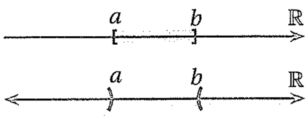
Şekil 3.14

ÖRNEK 3.80. ▷
Herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığının $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı bir küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $[a,b]$ aralığının tümleyeni $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ kümesidir. Yani

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

dir. (Şekil 3.15 e bakınız.) $(-\infty, a)$ ve (b, ∞) kümeleri Örnek 3.77 gereğince açık olduğundan bu kümelerin birleşimi olan $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ kümesi açıktır. O halde $[a,b]$ kapalı bir kümedir.✍



Şekil 3.15

Not
Örnek 3.80 de "$a = b$" alınır ve $\{a\} = [a,a]$ olduğu düşünülürse $\{a\}$ kümesinin kapalı olduğu gösterilmiş olur.

ÖRNEK 3.81. ▷
Her $a \in \mathbb{R}$ için tek elemanlı $\{a\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı bir küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\{a\}$ kümesinin tümleyeni $(-\infty, a)$ ve (a, ∞) açık aralıklarının birleşimidir.

$(-\infty, a)$ ve (a, ∞) aralıkları Örnek 3.77 gereğince açık olduğundan bu kümelerin b leşimide açıktır. Böylece $\{a\}$ kümesi kapalıdır.✍

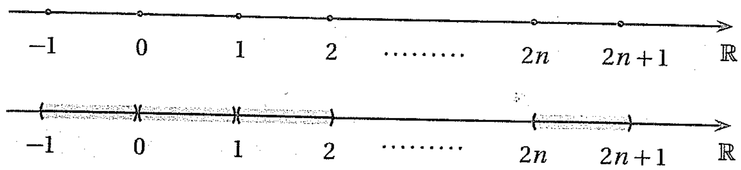
ÖRNEK 3.82. ▶
Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı bir küme olduğunu gösterelim

ÇÖZÜM:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n+1)$$

ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $(n, n+1)$ aralığı $\mathbb{R}$ de açık olduğundan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{R}$ de açıktır. B durumda $\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı olur. (Şekil 3.16 ya bakınız.)✍

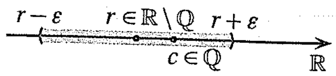
Şekil 3.16



ÖRNEK 3.83. ▶
Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ standart uzayında ne kapalı ne de açık bir küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

Şekil 3.17



Şekil 3.18

a) $\mathbb{Q}$ nun açık olmadığını göstermek için $\mathbb{Q}$ nun (3.8) daki $\mathcal{T}_d$ ye ait olmadığını göste meliyiz. $r \in \mathbb{Q}$ olsun.

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısının mevcut olduğunu varsayalım. Farklı iki reel say arasında en az bir c irrasyonel sayısı olduğundan

$$c \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$$

olacak şekilde en az bir $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sayısı vardır. (Alıştırma 26 ve Şekil 3.17 e bakınız.) Böylece

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \nsubseteq \mathbb{Q}$$

dur. Bu ise

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$$

olması ile çelişir. Böylece $(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$ olacak şeklinde $\varepsilon > 0$ reel sayısı yoktur. O halde $\mathbb{Q}$ açık olamaz.

b) $\mathbb{Q}$ nun kapalı olmadığını göstermek için $\mathbb{Q}$ nun tümleyeninin açık olmadığını göstermek yeterlidir. $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Farklı iki reel sayı arasında en az bir rasyonel sayı olduğundan (Alıştırma 26 ve ve Şekil 3.18 ye bakınız)

$$c \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$$

olacak şekilde en az bir $c \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \nsubseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

olur. Yani

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı yoktur. Böylece $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık değildir. O halde $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.✍

3.6. Alıştırmalar

1. $X = \{a,b,c,d,e\}$ olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan aşağıdaki kolleksiyonların X kümesi üzerinde birer topoloji olup olmadıklarını araştırınız.

a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$
b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$
c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d,e\}\}$.

2. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan aşağıdaki kolleksiyonların X kümesi üzerinde birer topoloji olup olmadıklarını araştırınız.

a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{b,f\}, \{a,b,f\}\}$
b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{a,b,f\}, \{a,b,d\}, \{a,b,d,f\}\}$
c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e,f\}, \{a,f\}\}$.

3. Aşağıda verilen her bir küme üzerindeki bütün topolojileri yazınız.

a) $X = \{a,b\}$ b) $Y = \{a,b,c\}$ c) $Z = \{a,b,c,d\}$

4. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\mathcal{T}$ da X kümesi üzerindeki ayrık topoloji olsun. Aşağıda verilenlerden hangileri doğrudur?

a) $X \in \mathcal{T}$ b) $\{X\} \in \mathcal{T}$ c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$
d) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e) $\emptyset \in X$ f) $\{\emptyset\} \in X$
g) $\{a\} \in \mathcal{T}$ h) $a \in X$ i) $\emptyset \subseteq X$
j) $\{a\} \in X$ k) $\{\emptyset\} \subseteq X$ l) $a \in \mathcal{T}$
m) $X \subseteq \mathcal{T}$ n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$ o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$
p) $a \subseteq X$

5. X boş olmayan bir küme olsun.

a) $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ kolleksiyonları X üzerinde iki topoloji ise

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{U \subseteq X \mid U \in \mathcal{T}_1, U \in \mathcal{T}_2\}$$

kolleksiyonunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

b) I bir indis kümesi ve her $i \in I$ için $\mathcal{T}_i$ kolleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i = \{U \subseteq X \mid U \in \mathcal{T}_i\}$$

kolleksiyonunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

c) $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ kolleksiyonları X üzerinde iki topoloji ise

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{U \subseteq X \mid U \in \mathcal{T}_1 \text{ veya } U \in \mathcal{T}_2\}$$

kolleksiyonunun X üzerinde bir topoloji olup olmadığını araştırınız.

d) $X = \{a,b,c\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

olsun. $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ kolleksiyonunun X kümesi üzerinde bir topoloji olup olmadığını araştırınız.

6. X boş olmayan bir küme ve A, B kümeleri X in boş olmayan $A \neq X$, $B \neq X$, $A \neq B$ özelliğinde iki alt kümesi olmak üzere

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$$

olsun. A ve B nin aşağıdaki şartlardan sadece bir tanesini sağladığını gösteriniz.

a) $B = X \setminus A$ b) $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$

7. Alıştırmalar 6 yı kullanarak

a) $X = \{1,2,3,4\}$ b) $Y = \{a,b\}$ c) $Z = \{a,b,c\}$

kümeleri üzerindeki dört elemanlı bütün topolojileri yazınız.

8. Aşağıda verilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinden oluşan kolleksiyonların her birinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x,\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$,
d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$,
e) $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

9. Aşağıda verilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinden oluşan kolleksiyonların her birinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olmadığını gösteriniz.

a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(q, \infty) \mid q \in \mathbb{Q}\}$,
b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

10. Aşağıda verilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinden oluşan kolleksiyonların her birinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

a) $\mathcal{T}_1 = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
b) $\mathcal{T}_2 = \{[x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

11. Aşağıda verilen $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinden oluşan kolleksiyonların her birinin $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \cdots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

12. Örnek 3.16 de tanımlanan $\mathcal{T}(a)$ kolleksiyonunun X kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

13. Örnek 3.17 de tanımlanan $\mathcal{T}_a$ kolleksiyonunun X kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

14. Örnek 3.20 de tanımlanan $\mathcal{T}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

15. X sonsuz bir küme ve $\mathcal{T}$ da X üzerinde bir topoloji olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin.

a) X kümesinin sonsuz her alt kümesi açık ise $\mathcal{T}$ nun X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.
b) X kümesinin sonsuz her alt kümesi kapalı ise $\mathcal{T}$ nun X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.
c) X kümesinin her alt kümesi kapalı ise $\mathcal{T}$ nun X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

16. X kümesi üzerinde Alıştırmalar 1 de verilen X kümesinin alt kümelerinden oluşan $\mathcal{T}$ kolleksiyonlarından topoloji olanlarına göre $(X, \mathcal{T})$ uzayının bütün

a) Kapalı alt kümelerini,
b) Hem açık hem kapalı alt kümelerini,
c) Ne açık ne de kapalı alt kümelerini,
d) Açık olan fakat kapalı olmayan alt kümelerini,
e) Kapalı olan fakat açık olmayan alt kümelerini

belirleyiniz.

17. X kümesi üzerinde Alıştırmalar 2 de verilen X kü sinin alt kümelerinden oluşan $\mathcal{T}$ kolleksiyonlarından top olanlarına göre $(X, \mathcal{T})$ uzayının bütün

a) Kapalı alt kümelerini,
b) Hem açık hem kapalı alt kümelerini,
c) Ne açık ne de kapalı alt kümelerini,
d) Açık olan fakat kapalı olmayan alt kümelerini,
e) Kapalı olan fakat açık olmayan alt kümelerini

belirleyiniz.

18. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde ayrık ve kaba topoloj farklı ve her elemanı hem açık hem kapalı olan bir top yazınız.

19. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $[a, b)$ ve $(a, b]$ aralıkların standart uzayında açık veya kapalı kümeler olmadıklarını teriniz.

20. $[a, \infty)$ ve $(-\infty, a]$ aralıklarının $\mathbb{R}$ standart uzayınd palı kümeler olduklarını gösteriniz.

21. $\mathbb{R}$ standart uzayının sonsuz sayıdaki kapalı kümeler birleşiminin kapalı olması gerekmediğini bir örnek ver gösteriniz.

22.

a) $\mathbb{Z}$ kümesinin $\mathbb{R}$ standart uzayında açık olmadığını gös niz.
b) Bütün asal sayıların kümesi S nin $\mathbb{R}$ standart uzayınd palı fakat açık olmadığını gösteriniz.
c) Bütün irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nin $\mathbb{R}$ standart yında ne açık ne de kapalı bir küme olduğunu gösteri

23.

a) F, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan sonlu bir alt kümesi olsun. F n standart uzayında kapalı olduğunu fakat açık olmad gösteriniz.
b) F, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan sayılabilir sonsuz bir alt küme sun. F nin $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı olmayabilec gösteriniz.
c) F, $\mathbb{R}$ nin sayılabilir bir alt kümesi olsun. F nin $\mathbb{R}$ stan uzayında açık bir küme olmadığını gösteriniz.

24.

a) $S=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

b) $T=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı olup olmadığını araştırınız.

c) $\{\sqrt{2},2\sqrt{2},3\sqrt{2},\cdots,n\sqrt{2},\cdots\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalı olup olmadığını araştırınız.

25. $(X,\mathcal{T})$ bir topoljik uzay olsun. Sayılabilir sayıdaki kapalı kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilen X in bir S alt kümesine bir F_σ-kümesi denir.

a) Bütün (a,b) açık aralıklarının $\mathbb{R}$ standart uzayında birer F_σ-kümesi olduğunu gösteriniz.

b) Bütün $[a,b]$ kapalı aralıklarının $\mathbb{R}$ standart uzayında birer F_σ-kümesi olduğunu gösteriniz.

c) Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ standart uzayında bir F_δ-kümesi olduğunu gösteriniz.

26. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Sayılabilir sayıdaki açık kümelerin bir kesişimi olarak yazılabilen X in bir T alt kümesine G_δ-kümesi denir.

a) Bütün (a,b) açık aralıklarının $\mathbb{R}$ standart uzayında birer G_δ-kümesi olduğunu gösteriniz.

b) Bütün $[a,b]$ kapalı aralıklarının $\mathbb{R}$ standart uzayında birer G_δ-kümesi olduğunu gösteriniz.

c) İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ standart uzayında bir G_δ-kümesi olduğnu gösteriniz.

27. Bir F_σ-kümesinin tümleyeninin bir G_δ-kümesi olduğunu ve bir G_δ-kümesinin tümleyeninin de bir F_δ-kümesi olduğunu gösteriniz.

28. $i=1,2,3,4,5$ için $\mathcal{T}_i$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde Alıştırmalar 8 de verilen topolojiler olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_i)$ uzayları verilsin.

a) Her bir $(\mathbb{R},\mathcal{T}_i)$ uzayında herhangi bir $x\in\mathbb{R}$ noktasını içeren bütün açık kümeleri yazınız.

b) Her bir $(\mathbb{R},\mathcal{T}_i)$ uzayının bütün kapalı kümelerini yazınız.

29. Örnek 3.4 de tanımlanan $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayı verilsin.

a) $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının kapalı kümelerini yazınız.

b) $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının hem açık hem kapalı kümelerini yazınız.

30. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ kolleksiyonları $\mathbb{N}$ üzerinde Alıştırmalar 11 da verilen topolojiler olmak üzere $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin.

a) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzaylarında herhangi bir $m\in\mathbb{N}$ noktasını içeren bütün açık kümeleri yazınız.

b) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzaylarının bütün kapalı kümelerini yazınız.

31. Örnek 3.16 ve Örnek 3.17 de tanımlanan $(X,\mathcal{T}(a))$ ve $(X,\mathcal{T}_a)$ uzayları verilsin ve $A\subseteq X$ olsun.

a) $a\notin A$ ise A üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}(a)_A$ nın A üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

b) $a\notin A$ ise A üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}_{a_A}$ nın A üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

32. Alıştırmalar 8 de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_i)$ uzayları verilsin ve $A=[0,\infty)$ olsun. $i=1,2,3,4,5$ için $\left(A,\mathcal{T}_{i_A}\right)$ alt uzaylarının açık ve kapalı kümelerini bulunuz.

33. $\mathbb{R}$ standart uzayının $A=(0,1]$ alt uzayı verilsin. $(0,1/2]$, $(0,1/2)$, $(1/2,1]$, $[1/2,1]$, $(1/2,1)$ kümelerinin A alt uzayında açık veya kapalı olduklarını araştırınız.

34. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A,B\subseteq X$ ve $C\subseteq A\cup B$ olsun. C kümesi $\left(A\cup B,\mathcal{T}_{A\cup B}\right)$ uzayında açık ise

a) $C\cap A$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında açık olduğunu gösteriniz.

b) $C\cap B$ kümesinin $(B,\mathcal{T}_B)$ uzayında açık olduğunu gösteriniz.

3.7. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

a) $\mathcal{T}_1$ in bir topoloji olup olmadığını araştıralım. Bunun için $\mathcal{T}_1$ in Tanım 3.1 in (T-1),(T-2) ve (T-3) şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-2). Her $U \in \mathcal{T}_1$ için

$$U \cup X = X \in \mathcal{T}_1 \quad \text{ve} \quad U \cup \emptyset = U \in \mathcal{T}_1$$

dir.

$$\begin{aligned}
&\{a\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{a\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{a\} \cup \{b,c,d,e\} = X \in \mathcal{T}_1\\
&\{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{c,d\} \cup \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{a,c,d\} \cup \{b,c,d,e\} = X \in \mathcal{T}_1
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_1$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{T}_1$, Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağlar.

T-3). Her $U \in \mathcal{T}_1$ için

$$U \cap X = U \in \mathcal{T}_1 \quad \text{ve} \quad U \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}_1$$

dir.

$$\begin{aligned}
&\{a\} \cap \{c,d\} = \emptyset \in \mathcal{T}_1\\
&\{a\} \cap \{a,c,d\} = \{a\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{c,d\} \cap \{a,c,d\} = \{c,d\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{a\} \cap \{b,c,d,e\} = \emptyset \in \mathcal{T}_1\\
&\{c,d\} \cap \{b,c,d,e\} = \{c,d\} \in \mathcal{T}_1\\
&\{a,c,d\} \cap \{b,c,d,e\} = \{c,d\} \in \mathcal{T}_1
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_1$, Tanım 3.1 in (T-3) şartınıda sağlar.

O halde $\mathcal{T}_1$ bir topolojidir.

b) $\mathcal{T}_2$ in bir topoloji olup olmadığını araştıralım. Bunun için $\mathcal{T}_2$ in Tanım 3.1 in (T-1),(T-2) ve (T-3) şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{T}_2$ dir.

T-2). Her $U \in \mathcal{T}_2$ için

$$U \cup X = X \in \mathcal{T}_2 \quad \text{ve} \quad U \cup \emptyset = U \in \mathcal{T}_2$$

dir.

$$\begin{aligned}
&\{a\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2\\
&\{a\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2\\
&\{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_2$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{T}_2$, Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağlar.

T-3). Her $U \in \mathcal{T}_2$ için

$$U \cap X = U \in \mathcal{T}_2 \quad \text{ve} \quad U \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}_2$$

dir.

$$\begin{aligned}
&\{a\} \cap \{c,d\} = \emptyset \in \mathcal{T}_2,\\
&\{a\} \cap \{a,c,d\} = \{a\} \in \mathcal{T}_2,\\
&\{c,d\} \cap \{a,c,d\} = \{c,d\} \in \mathcal{T}_2
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_2$, Tanım 3.1 in (T-3) şartınıda sağlar.

O halde $\mathcal{T}_2$ bir topolojidir.

c) $\mathcal{T}_3$ e ait olan $\{a,c,d\}$ ve $\{a,b,d,e\}$ kümelerinin kesişimi olan $\{a,d\}$ kümesi $\mathcal{T}_3$ e ait olmadığından Tanım 3.1 in (T-3) şartı sağlanmaz. Böylece $\mathcal{T}_3$ bir topoloji değildir.✔

ÇÖZÜM 2

a) $\mathcal{T}_1$ in bir topoloji olup olmadığını araştıralım. Bunun için $\mathcal{T}_1$ in Tanım 3.1 in (T-1),(T-2) ve (T-3) şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-2). Her $U \in \mathcal{T}_1$ için

$$U \cup X = X \in \mathcal{T}_1 \quad \text{ve} \quad U \cup \emptyset = U \in \mathcal{T}_1$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{a\} \cup \{f\} &= \{a,f\} \in \mathcal{T}_1\\
\{f\} \cup \{b,f\} &= \{b,f\} \in \mathcal{T}_1\\
\{a\} \cup \{a,f\} &= \{a,f\} \in \mathcal{T}_1\\
\{f\} \cup \{a,b,f\} &= \{a,b,f\} \in \mathcal{T}_1\\
\{a\} \cup \{b,f\} &= \{a,b,f\} \in \mathcal{T}_1\\
\{a,f\} \cup \{b,f\} &= \{a,b,f\} \in \mathcal{T}_1\\
\{a\} \cup \{a,b,f\} &= \{a,b,f\} \in \mathcal{T}_1
\end{aligned}$$

$$\{a,f\}\bigcup\{a,b,f\} = \{a,b,f\}\in\mathcal{T}_1$$
$$\{f\}\bigcup\{a,f\} = \{a,f\}\in\mathcal{T}_1$$
$$\{b,f\}\bigcup\{a,b,f\} = \{a,b,f\}\in\mathcal{T}_1$$

dir. Benzer şekilde $i\in I$ için $U_i\in\mathcal{T}_1$ olmak üzere $\bigcup_{i\in I} U_i\in\mathcal{T}_1$ olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{T}_1$, Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağlar.

T-3). Her $U\in\mathcal{T}_1$ için

$$U\bigcap X=U\in\mathcal{T}_1 \quad \text{ve} \quad U\bigcap\emptyset=\emptyset\in\mathcal{T}_1$$

dir.

$$\{a\}\bigcap\{f\}=\emptyset\in\mathcal{T}_1 \qquad \{f\}\bigcap\{b,f\}=\{f\}\in\mathcal{T}_1$$
$$\{a\}\bigcap\{a,f\}=\{a\}\in\mathcal{T}_1 \qquad \{f\}\bigcap\{a,b,f\}=\{f\}\in\mathcal{T}_1$$
$$\{a\}\bigcap\{b,f\}=\emptyset\in\mathcal{T}_1 \qquad \{a,f\}\bigcap\{b,f\}=\{f\}\in\mathcal{T}_1$$
$$\{a\}\bigcap\{a,b,f\}=\{a\}\in\mathcal{T}_1 \qquad \{a,f\}\bigcap\{a,b,f\}=\{a,f\}\in\mathcal{T}_1$$
$$\{f\}\bigcap\{a,f\}=\{f\}\in\mathcal{T}_1 \qquad \{b,f\}\bigcap\{a,b,f\}=\{b,f\}\in\mathcal{T}_1$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_1$, Tanım 3.1 in (T-3) şartınıda sağlar.
O halde $\mathcal{T}_1$ bir topolojidir.

b) $\mathcal{T}_2$ in bir topoloji olup olmadığını araştıralım. Bunun için $\mathcal{T}_2$ in Tanım 3.1 in (T-1),(T-2) ve (T-3) şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz.

T-1). $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\emptyset, X\in\mathcal{T}_2$ dir.

T-2). Her $U\in\mathcal{T}_2$ için

$$U\bigcup X=X\in\mathcal{T}_2 \quad \text{ve} \quad U\bigcup\emptyset=U\in\mathcal{T}_2$$

dir.

$$\{a,b\}\bigcup\{a,b,f\}=\{a,b,f\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b,f\}\bigcup\{a,b,d\}=\{a,b,d,f\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b\}\bigcup\{a,b,d\}=\{a,b,d\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b,f\}\bigcup\{a,b,d,f\}=\{a,b,d,f\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b\}\bigcup\{a,b,d,f\}=\{a,b,d,f\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b,d\}\bigcup\{a,b,d,f\}=\{a,b,d,f\}\in\mathcal{T}_2$$

dir. Benzer şekilde $i\in I$ için $U_i\in\mathcal{T}_2$ olmak üzere $\bigcup_{i\in I} U_i\in\mathcal{T}_2$ olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{T}_2$, Tanım 3.1 in (T-2) şartını sağlar.

T-3). Her $U\in\mathcal{T}_2$ için

$$U\bigcap X=U\in\mathcal{T}_2 \quad \text{ve} \quad U\bigcap\emptyset=\emptyset\in\mathcal{T}_2$$

dir.

$$\{a,b\}\bigcap\{a,b,f\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b,f\}\bigcap\{a,b,d\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b\}\bigcap\{a,b,d\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b,f\}\bigcap\{a,b,d,f\}=\{a,b,f\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b\}\bigcap\{a,b,d,f\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}_2$$
$$\{a,b,d\}\bigcap\{a,b,d,f\}=\{a,b,d\}\in\mathcal{T}_2$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_2$, Tanım 3.1 in (T-3) şartınıda sağlar.
O halde $\mathcal{T}_2$ bir topolojidir.

c) $\mathcal{T}_3$ e ait olan $\{a,f\}$ ve $\{e,f\}$ kümelerinin birleşimi olan $\{a,e,f\}$ kümesi $\mathcal{T}_3$ e ait olmadığından Tanım 3.1 in (T-3) şartı sağlanmaz. Böylece $\mathcal{T}_3$ bir topoloji değildir.✓

ÇÖZÜM 3

a) $X=\{a,b\}$ kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},X\}$ in $2^2=4$ tane farklı elemanı olduğundan X kümesi üzerinde enfazla $2^4=16$ topoloji olabilir. Aslında X üzerinde 4 tane farklı topoloji vardır ve bu topolojiler

$$\mathcal{T}_1=\{X,\emptyset\},\ \mathcal{T}_2=\{X,\emptyset,\{a\}\},\ \mathcal{T}_3=\{X,\emptyset,\{b\}\} \text{ ve } \mathcal{T}_4=\mathcal{P}(X)$$

dir.

b) $Y=\{a,b,c\}$ kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(Y)=\{\emptyset,Y,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ in $2^3=8$ tane farklı elemanı olduğundan X kümesi üzerinde enfazla $2^8=64$ topoloji olabilir. Aslında Y üzerinde 29 tane farklı topoloji vardır ve bu topolojiler

$$\mathcal{T}_1=\{\emptyset,Y\},\quad \mathcal{T}_2=\{\emptyset,\{a\},Y\}\quad \mathcal{T}_3=\{\emptyset,\{b\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_4=\{\emptyset,\{c\},Y\}\quad \mathcal{T}_5=\{\emptyset,\{a,b\},Y\}\quad \mathcal{T}_6=\{\emptyset,\{a,c\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_7=\{\emptyset,\{b,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_8=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},Y\}\quad \mathcal{T}_9=\{\emptyset,\{a\},\{a,c\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{10}=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_{11}=\{\emptyset,\{b\},\{a,b\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{12}=\{\emptyset,\{b\},\{a,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_{13}=\{\emptyset,\{b\},\{b,c\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{14}=\{\emptyset,\{c\},\{a,b\},Y\}\quad \mathcal{T}_{15}=\{\emptyset,\{c\},\{a,c\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{16}=\{\emptyset,\{c\},\{b,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_{17}=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{18}=\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_{19}=\{\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{20}=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_{21}=\{\emptyset,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},Y\}$$
$$\mathcal{T}_{22}=\{\emptyset,\{c\},\{a,c\},\{b,c\},Y\}\quad \mathcal{T}_{23}=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},Y\}$$

dir.

c) $Z=\{a,b,c,d\}$ kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(Z)$ nin $2^4=16$ tane farklı elemanı olduğundan Z kümesi üzerinde enfazla $2^{16}=65536$ topoloji olabilir. Aslında Z üzerinde 355 tane farklı topoloji vardır. Bu topolojilerden bazıları şunlardır:

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, Z\},\quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, Z\},\quad \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{b\}, Z\}$$
$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{c\}, Z\},\quad \mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{d\}, Z\},\quad \mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{a,c\}, Z\}$$
$$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{b,c\}, Z\}\quad \mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, Z\}$$
$$\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,c\}, Z\}\quad \mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, Z\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\quad \mathcal{T}_{355} = \mathcal{P}(Z)$$

ÇÖZÜM 4

X in tanımı gereğince $a \in X$ ve $\emptyset \subseteq X$ dir. $\mathcal{T}$, X kümesi üzerindeki ayrık topoloji olduğundan $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. Yani $A \subseteq X$ ise $A \in \mathcal{T}$ dır. Diğeryandan $A \in \mathcal{T}$ ise $\{A\} \subseteq \mathcal{T}$ dur. Buna göre $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğundan $\emptyset, X, \{a\} \in \mathcal{T}$ dir. Böylece $\emptyset, X, \{a\} \in \mathcal{T}$ ve $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$, $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$ dur. Bu durumda

$$\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T},\ \{a\} \in \mathcal{T},\ \{X\} \subseteq \mathcal{T},\ \emptyset \subseteq X \text{ ve } a \in X$$

ifadeleri doğrudur. O halde (a),(d),(g),(h),(i) ve (o) ifadeleri doğru diğerleri yanlıştır.✔

ÇÖZÜM 5

a) **T-1).** $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1$ ve $\emptyset, X \in \mathcal{T}_2$ olduğundan $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ dir.

T-2). I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1$ ve $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ birer topoloji olduğundan $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ ve $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir. Böylece $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U, V \in \mathcal{T}_1$ ve $U, V \in \mathcal{T}_2$ dir. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ birer topoloji olduğundan $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ ve $U \cap V \in \mathcal{T}_2$ dir. Böylece $U \cap V \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ dir.

O halde $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ bir topolojidir.

b) **T-1).** Her $i \in I$ için $\mathcal{T}_i$ bir topoloji olduğundan $\emptyset, X \in \mathcal{T}_i$ dir. O halde $\emptyset, X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ dir.

T-2). J herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j : j \in J\} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{T}_i$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $\{U_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{T}_i$ dir. Her $i \in I$ için $\mathcal{T}_i$ bir topoloji olduğundan $\bigcup\limits_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}_i$ dir. Böylece $\bigcup\limits_{j\in J} U_j \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{T}_i$ dir.

T-3). $U, V \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{T}_i$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U, V \in \mathcal{T}_i$ dir. Her $i \in I$ için $\mathcal{T}_i$ bir topoloji olduğundan $U \cap V \in \mathcal{T}_i$ dir. Böylece $U \cap V \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{T}_i$ dir.

O halde $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bir topolojidir.

c) $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ nin topoloji olup olmaması hakkında kesin bir şe söyleyemeyiz.

d) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ o sun. Bu durumda

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

dir. $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ye ait olan $\{a,b\}, \{a,c\}$ kümelerinin kesişin olan $\{a\}$ kümesi $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ye ait olmadığından $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ko leksiyonu X kümesi üzerinde bir topoloji değildir.

Diğer yandan $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b,c\}, X\}$ kolleks yonları X üzerinde birer topolojidir. Üstelik,

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{b,c\}, X\}$$

de X üzerinde bir topolojidir.✔

ÇÖZÜM 6

$A, B \in \mathcal{T}$ olduğundan $A \cup B \in \mathcal{T}$ dur. A ve B boş olmadığın dan

$$A \cup B = A \text{ veya } A \cup B = B \text{ veya } A \cup B = X$$

dir.

a) $A \cup B = A$ ise $B \subseteq A$ dır.

b) $A \cup B = B$ ise $A \subseteq B$ dir.

c) $A \cup B = X$ olsun. Bu durumda

$$A \cap B = A \text{ veya } A \cap B = B \text{ veya } A \cap B = \emptyset$$

dur.

i) $A \cap B = A$ ise $A \subseteq B$ ve böylece $A \cup B = X$ olduğundan $B = X$ dir. Bu ise çelişkidir. Bu durumda $A \cap B = A$ olamaz.

ii) $A \cap B = B$ ise $B \subseteq A$ ve böylece $A \cup B = X$ olduğundan $A = X$ dir. Bu ise çelişkidir. Bu durumda $A \cap B = B$ olamaz.

iii) O halde $A \cap B = \emptyset$ dur. Bu durumda $A \cup B = X$ olduğundan $A = X \setminus B$ ve $B = X \setminus A$ dır.

O halde

i). $A = X \setminus B$ $(B = X \setminus A)$ **ii).** $B \subseteq A$ veya $A \subseteq B$

şartlarından en az bir tanesi doğrudur. (i) ve (ii) şartlarının her ikisinin de doğru olduğunu varsayalım. $B = X \setminus A$ olduğundan $A \cap B = \emptyset$ olur. Bu durumda $A \subseteq B$ $(B \subseteq A)$ olduğundan $A \cap B = A$ $(A \cap B = B)$ olur. Bu ise $A \neq \emptyset$ $(B \neq \emptyset)$ olduğundan bir çelişkidir. O halde

i). $A = X \setminus B$ $(B = X \setminus A)$ ii). $B \subseteq A$ veya $A \subseteq B$

şartlarından sadece bir tanesi doğrudur.✔

ÇÖZÜM 7

a) $X = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerindeki dört elemanlı topolojilerden bazılarını yazalım.

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\{1\},\{1,2\},X\} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\{1\},\{1,3\},X\}$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset,\{1\},\{1,4\},X\} \quad \mathcal{T}_4 = \{\emptyset,\{1\},\{1,2,3\},X\}$$
$$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset,\{1\},\{1,2,4\},X\} \quad \mathcal{T}_6 = \{\emptyset,\{1\},\{1,3,4\},X\}$$
$$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset,\{1\},\{2,3,4\},X\} \quad \mathcal{T}_8 = \{\emptyset,\{2\},\{1,3,4\},X\}$$
$$\mathcal{T}_9 = \{\emptyset,\{1,2\},\{3,4\},X\} \quad \mathcal{T}_{10} = \{\emptyset,\{2,3\},\{1,4\},X\}$$

b) $Y = \{a,b\}$ kümesi üzerindeki dört elemanlı sadece $\mathcal{P}(Y) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},Y\}$ ayrık topolojisi vardır.

c) $Z = \{a,b,c\}$ kümesi üzerindeki dört elemanlı topolojileri yazalım. Bu topolojiler

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\{a\},\{a,b\},Z\} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\{a\},\{a,c\},Z\}$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset,\{b\},\{a,b\},Z\} \quad \mathcal{T}_4 = \{\emptyset,\{b\},\{b,c\},Z\}$$
$$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset,\{c\},\{a,c\},Z\} \quad \mathcal{T}_6 = \{\emptyset,\{a\},\{b,c\},Z\}$$
$$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset,\{b\},\{a,c\},Z\} \quad \mathcal{T}_8 = \{\emptyset,\{c\},\{a,b\},Z\}$$
$$\mathcal{T}_9 = \{\emptyset,\{c\},\{b,c\},Z\}$$

dir.✔

ÇÖZÜM 8

a) $\mathcal{T}_1$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1$ olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = \mathbb{R}$ veya $U_i = (x_i,\infty)$ olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ vardır. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = (x_i,\infty)$ dur. Böylece $\{x_i : U_i = (x_i,\infty), i \in I\}$ kümesi boş değildir. Üstelik $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan bu küme alttan sınırlıdır.

$$c = \inf\{x_i : U_i = (x_i,\infty), i \in I\}$$

olsun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I} U_i = (c,\infty)$ dur. O halde $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece $U = \mathbb{R}$ veya $U = (x,\infty)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Benzer şekilde $V = \mathbb{R}$ veya $V = (y,\infty)$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{R}$ veya $U \cap V = (x,\infty)$ veya $U \cap V = (y,\infty)$ dur. Her üç durumda da $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ dir.

O halde $\mathcal{T}_1$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.

b) $\mathcal{T}_2$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_2$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_2$ olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = \mathbb{R}$ veya $U_i = (-\infty, x_i)$ olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ vardır. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = (-\infty, x_i)$ dir. Böylece $\{x_i : U_i = (-\infty, x_i), i \in I\}$ kümesi boş değildir. Üstelik $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan bu küme üstten sınırlıdır.

$$c = \sup\{x_i : U_i = (-\infty, x_i), i \in I\}$$

olsun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I} U_i = (-\infty, c)$ dir. O halde $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece $U = \mathbb{R}$ veya $U = (-\infty, x)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Benzer şekilde $V = \mathbb{R}$ veya $V = (-\infty, y)$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{R}$ veya $U \cap V = (-\infty, x)$ veya $U \cap V = (-\infty, y)$ dir. Her üç durumda da $U \cap V \in \mathcal{T}_2$ dir.

O halde $\mathcal{T}_2$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.

c) $\mathcal{T}_3$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_3$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_3$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_3$ olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_3$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_3$ dür. $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\mathcal{T}_3$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_3$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = \mathbb{R}$ veya $U_i = (-n_i, n_i)$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ vardır. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = (-n_i, n_i)$ dir. $\{n_i : U_i = (-n_i, n_i), i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi boş değildir ve üstten sınırlıdır. $n_0 = \max\{n_i : U_i = (-n_i, n_i), i \in I\}$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I} U_i = (-n_0, n_0)$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ dir. O halde $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_3$ dür.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_3$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_3$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece $U = \mathbb{R}$ veya $U = (-n_1, n_1)$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde $V = \mathbb{R}$ veya $V = (-n_2, n_2)$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{R}$ veya $U \cap V = (-n_1, n_1)$ veya $U \cap V = (-n_2, n_2)$ dir. Her üç durumda da $U \cap V \in \mathcal{T}_3$ dür.

O halde $\mathcal{T}_3$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.

d) **$\mathcal{T}_4$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.**

T-1). $\mathcal{T}_4$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_4$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_4$ olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_4$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_4$ dür. $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\mathcal{T}_4$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_4$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = \mathbb{R}$ veya $U_i = [-n_i, n_i]$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ vardır. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = [-n_i, n_i]$ dir. Bu durumda $\{n_i : U_i = [-n_i, n_i], i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi boş değildir ve üstten sınırlıdır. $n_0 = \max\{x_i : U_i = [-n_i, n_i], i \in I\}$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I} U_i = [-n_0, n_0]$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ dir. O halde $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_4$ dür.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_4$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_4$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece $U = \mathbb{R}$ veya $U = [-n_1, n_1]$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde $V = \mathbb{R}$ veya $V = [-n_2, n_2]$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{R}$ veya $U \cap V = [-n_1, n_1]$ veya $U \cap V = [-n_2, n_2]$ dir. Her üç durumda da $U \cap V \in \mathcal{T}_4$ dür.

O halde $\mathcal{T}_4$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.

e) **$\mathcal{T}_5$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.**

T-1). $\mathcal{T}_5$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_5$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_5$ olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_5$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_5$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\mathcal{T}_5$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_5$ dir. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i \neq \mathbb{R}$ veya $U_i = [n_i, \infty)$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ vardır. $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = [n_i, \infty)$ dur. Bu dı rumda $\{n : U_i = [n_i, \infty), i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi boş değildi ve alttan sınırlıdır. $n_0 = \min\{n_i : U_i = [n_i, \infty), i \in I\}$ o sun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I} U_i = [n_0, \infty)$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ dir. O hald $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_5$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_5$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_5$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bı durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece $U = \mathbb{R}$ vey $U = [n_1, \infty)$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benze şekilde $V = \mathbb{R}$ veya $V = [n_2, \infty)$ olacak şekilde bir $n_2 \in$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{R}$ veya $U \cap V = [n_1, \infty$ veya $U \cap V = [n_2, \infty)$ dir. Her üç durumda da $U \cap V$ $\mathcal{T}_5$ dir.

O halde $\mathcal{T}_5$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.✔

ÇÖZÜM 9

a) $I = \{r \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < r\}$ ve $r \in I$ için $U_r = (r, \infty)$ olsun. Bı durumda $\{U_r : r \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1$ dir. Diğer yandan $\bigcup_{r\in I} U_r =$ $(\sqrt{2}, \infty) \notin \mathcal{T}_1$ dir. O halde $\mathcal{T}_1$ bir bir topoloji değildir.

b) $I = \{r \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} > r\}$ ve $r \in I$ için $U_r = (-\infty, r)$ olsun. Bı durumda $\{U_r : r \in I\} \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. Diğer yandan $\bigcup_{r\in I} U_r =$ $(-\infty, \sqrt{2}) \notin \mathcal{T}_2$ dir. O halde $\mathcal{T}_2$ bir bir topoloji değildir.✔

ÇÖZÜM 10

a) Önce $\mathcal{T}_1$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-2). $U_i \in \mathcal{T}_1$ olmak üzere bir $\{U_i : i \in I\}$ kolleksiyon alalım. $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$ veya $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ olu $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in$ için $U_i = (-\infty, x_i]$ veya $U_i = (-\infty, x_i)$ olacak şekilde bi $x_i \in \mathbb{R}$ vardır.

$$A = \{x_i | U_i = (-\infty, x_i]\}$$

ve

$$B = \{x_i | U_i = (-\infty, x_i)\}$$

olsun. Bu durumda A ve B kümelerinden en az bi üsten sınırlı değilse $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$ olur. O halde A ve B küme lerinin her ikiside üsten sınırlıdır. $a = \sup A$, $b = \sup$ olsun. Bu durumda $a < b$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i = (-\infty, b)$ ve $b \leq$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i = (-\infty, a]$ dır. Böylece $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_1$ olsun. U, V kümelerinden bir tanesi ise $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{T}_1$ olur. U, V kümelerinden en az bir tanesi $\mathbb{R}$ ise $U \cap V = U$ veya $U \cap V = V$ olacağından $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ olur U, V kümelerinin her ikiside $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ den farklı olsun. Bu durumda bazı $x, y \in \mathbb{R}$ için $U = (-\infty, x]$ veya $U = (-\infty, x)$ ve $V = (-\infty, y]$ veya $V = (-\infty, y)$ dir. Bu durumda $U \cap V = (-\infty, x)$ veya $U \cap V = (-\infty, x]$ veya $U \cap V = (-\infty, y)$ veya $U \cap V = (-\infty, y]$ dır. Dolayısıyla $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ dir.

Böylece $\mathcal{T}_1$ bir topolojidir.

b) Şimd, $\mathcal{T}_2$ nin bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-2). $U_i \in \mathcal{T}_2$ olmak üzere bir $\{U_i : i \in I\}$ kolleksiyonu alalım. $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$ veya $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R}$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ olur. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = [x_i, \infty)$ veya $U_i = (x_i, \infty)$ olacak şekilde bir $x_i \in \mathbb{R}$ vardır.

$$A = \{x_i | U_i = [x_i, \infty)\}$$

ve

$$B = \{x_i | U_i = (x_i, \infty)\}$$

olsun. Bu durumda A ve B kümelerinden en az biri alttan sınırlı değilse $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R}$ olur. O halde A ve B kümelerinin her ikiside alttan sınırlıdır. $a = \inf A$, $b = \inf B$ olsun. Bu durumda $a < b$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i = [a, \infty)$ ve $b \le a$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i = (b, \infty)$ dur. Böylece $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_2$ olsun. U, V kümelerinden bir tanesi $\emptyset$ ise $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{T}_2$ olur. U, V kümelerinden en az bir tanesi $\mathbb{R}$ ise $U \cap V = U$ veya $U \cap V = V$ olacağından $U \cap V \in \mathcal{T}_2$ olur U, V kümelerinin her ikiside $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ den farklı olsun. Bu durumda bazı $x, y \in \mathbb{R}$ için $U = [x, \infty)$ veya $U = (x, \infty)$ ve $V = [y, \infty)$ veya $V = (y, \infty)$ dur. Bu durumda $U \cap V = [x, \infty)$ veya $U \cap V = (x, \infty)$ veya $U \cap V = [y, \infty)$ veya $U \cap V = (y, \infty)$ dır. Dolayısıyla $U \cap V \in \mathcal{T}_2$ dir.

Böylece $\mathcal{T}_2$ bir topolojidir.

---

a) $\mathcal{T}_1$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1$ olsun. $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir. $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{N}$ ise $\mathcal{T}_1$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = \mathbb{N}$ veya $U_i = \{1, 2, \ldots, n_i\}$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ vardır. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \mathbb{N}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = \{1, 2, \ldots, n_i\}$ dir. Bu durumda $\{n_i : U_i = \{1, 2, \ldots, n_i\}, i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi boş değildir ve üstten sınırlıdır.

$$n_0 = \max\{n_i : U_i = \{1, 2, \ldots, n_i\}, i \in I\}$$

olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \{1, 2, \cdots, n_0\} \quad \text{ve} \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

dir. O halde $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_1$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece

$$U = \mathbb{N} \quad \text{veya} \quad U = \{1, 2, \ldots, n_1\}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde

$$V = \mathbb{N} \quad \text{veya} \quad V = \{1, 2, \ldots, n_2\}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{N}$ veya

$$U \cap V = \{1, 2, \ldots, n_1\} \quad \text{veya} \quad U \cap V = \{1, 2, \ldots, n_2\}$$

dir. Her üç durumda da $U \cap V \in \mathcal{T}_1$ dir.

O halde $\mathcal{T}_1$ kolleksiyonu $\mathbb{N}$ üzerinde bir topolojidir.

b) $\mathcal{T}_2$ in bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{T}_2$ dir.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_2$ olsun. $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir. $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{N}$ ise $\mathcal{T}_2$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = \mathbb{N}$ veya $U_i = \{n_i, n_i + 1, \ldots\}$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ vardır. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \mathbb{N}$ olduğundan en az bir $i \in I$ için $U_i = \{n_i, n_i + 1, \ldots\}$ dir. Bu durumda $\{n_i : U_i = \{n_i, n_i + 1, \ldots\}, i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi boş değildir ve alttan sınırlıdır. $n_0 = \min\{n_i : U_i = \{n_i, n_i + 1, \ldots\}, i \in I\}$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} U_i = \{n_0, n_0 + 1, \cdots\}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ dir. O halde $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_2$ dir.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_2$ dir. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ dur. Böylece

$$U = \mathbb{N} \quad \text{veya} \quad U = \{n_1, n_1+1, \ldots\}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde

$$V = \mathbb{N} \quad \text{veya} \quad V = \{n_2, n_2+1, \ldots\}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $U \cap V = \mathbb{N}$ veya $U \cap V = \{n_1, n_1+1, \ldots\}$ veya $U \cap V = \{n_2, n_2+1, \ldots\}$ dir. Her üç durumdada $U \cap V \in \mathcal{T}_2$ dir.

O halde $\mathcal{T}_2$ kolleksiyonu $\mathbb{N}$ üzerinde bir topolojidir.✓

ÇÖZÜM 12

$\mathcal{T}(a) = \{U \subseteq X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$ dur.

T-1). $a \in X$ olduğundan $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{T}(a)$ dır.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}(a)$ olsun. $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$ ise $\mathcal{T}(a)$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(a)$ dır. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ise en az bir $i \in I$ için $U_i \neq \emptyset$ dur. Böylece $a \in U_i$ dir. O halde $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$ dir. $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(a)$ dır.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}(a)$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}(a)$ dır. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda

$$U \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad V \neq \emptyset$$

dur. Böylece $a \in U$ ve $a \in V$ dir. O halde $a \in U \cap V$ ve böylece $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}(a)$ dır.

O halde $\mathcal{T}(a)$ kolleksiyonu X üzerinde bir topolojidir.✓

ÇÖZÜM 13

$\mathcal{T}_a = \{U \subseteq X : a \notin U\} \cup \{X\}$ dir.

T-1). $a \notin \emptyset$ olduğundan $\mathcal{T}_a$ in tanımı gereğince $\emptyset, X \in \mathcal{T}_a$ dır.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_a$ olsun. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ ise $\mathcal{T}_a$ in tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_a$ dır. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq X$ ise her $i \in I$ için $U_i \neq X$ dir. Böylece her $i \in I$ için $a \notin U_i$ dir. O halde $a \notin \bigcup_{i \in I} U_i$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_a$ dır.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}_a$ olsun. Bu durumda $U \cap V = X$ ise (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_a$ dır. $U \cap V \neq X$ olsun. Bu durumda

$$U \neq X \quad \text{ve} \quad V \neq X$$

dir. Böylece $a \notin U$ ve $a \notin V$ dir. O halde $a \notin U \cap V$ dir. $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}_a$ dır.

O halde $\mathcal{T}_a$ kolleksiyonu X üzerinde bir topolojidir.✓

ÇÖZÜM 14

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{$merkezi $(0,0)$ da olan bütün açık diskler$\}$ d

T-1). $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$ dur.

T-2). $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ olsun. $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$ veya $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R}^2$ ise nun tanımı gereğince $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ dir. $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{i \in I} U_i \neq$ olsun. Bu durumda en az bir $i \in I$ için $U_i \neq \emptyset$ dur. Böyle

$$J = \{r_i : U_i = \{(0,0) \text{ merkezli, } r_i \text{ yarı çaplı açık disk}\}, i \in I$$

kümesi boş değildir. Diğer yandan $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \mathbb{R}^2$ olduğund J kümesi üstten sınırlıdır. $r = \sup J$ olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \{\text{merkezi } (0,0) \text{ da olan } r \text{ yarı çaplı açık disk}\}$$

dir. Böylece $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ dur.

T-3). $U, V \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $U = \emptyset$ veya $V = \emptyset$ i $U \cap V = \emptyset$ olup (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur. $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U = V = \mathbb{R}^2$ ise $U \cap V = \mathbb{R}^2$ ol (T-1) gereğince $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur. $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ ve $V \neq X$ olsun. Bu durumda $U \cap V = U$ veya $U \cap V = V$ Böylece $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur.

O halde $\mathcal{T}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topolojidir.✓

ÇÖZÜM 15

a) X sonsuz olduğundan X in elemanları birbirinden fa olan

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

gibi sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır. $x \in X$ ve

$$A = \{x, a_1, a_3, a_5, \cdots\} \text{ ve } B = \{x, a_2, a_4, a_6, \cdots\}$$

olsun. Bu durumda A ve B kümeleri sonsuz olduğund açıktırlar. Diğer yandan $A \cap B = \{x\}$ dir. O halde $\{x\}$ iki a kümenin arakesiti olduğundan açıktır. Böylece Teorem 3 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir.

b) $x \in X$ olsun. Bu durumda $X \setminus \{x\}$ sonsuz olduğundan palıdır. O halde $\{x\}$ açıktır. Böylece Teorem 3.12 gereği $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir.

c) $x \in X$ olsun. Bu durumda $X \setminus \{x\}$, X in bir alt kümesi ol ğundan kapalıdır. O halde $\{x\}$ açıktır. Böylece Teorem 3 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir.✓

ÇÖZÜM 16

Alıştırma 1 de verilen küme $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

kolleksiyonları X üzerinde birer topolojidir.

a) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\emptyset, X, \{a\}, \{e,b\}, \{e,c,b,d\}, \{e,a,b\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\emptyset, X, \{e,b\}, \{e,c,b,d\}, \{e,a,b\}\}$$

dir.

b) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının hem açık hem kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\emptyset, X, \{a\}, \{e,c,b,d\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının hem açık hem kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu $\{\emptyset, X\}$ dir.

c) $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X) = \; & \{\emptyset, \{e,a,c,b,d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,c\},\\ & \{a,d\}, \{e,a\}, \{c,b\}, \{b,d\}, \{e,b\}, \{c,d\}, \{e,c\},\\ & \{a,c,d\}, \{e,a,c\}, \{c,b,d\}, \{e,a,b\}, \{a,c,b\},\\ & \{a,b,d\}, \{e,c,d\}, \{e,c,b\}, \{a,c,b,d\}, \{e,d\},\\ & \{e,a,d\}, \{e,b,d\}, \{e,a,b,d\}, \{e,a,c,b\}, \{e,a,c,d\}\\ & ,\{e,c,b,d\}\}\end{aligned}$$

dir. Buna göre
$(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının ne açık ne kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{e,a\}, \{c,b\}, \{b,d\}, \{e,c\}, \{e,d\}, \{a,c,b\}, \{a,b,d\}, \{e,a,c\}, \{a,e,d\}, \{b,c,d\}, \{e,c,b\}, \{b,e,d\}, \{e,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e,c\}, \{a,b,e,d\}, \{e,a,c,d\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının ne açık ne kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{e,a\}, \{c,b\}, \{b,d\}, \{e,c\}, \{e,d\}, \{a,c,b\}, \{a,b,d\}, \{e,a,c\}, \{a,e,d\}, \{b,c,d\}, \{b,e,c\}, \{b,e,d\}, \{e,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e,c\}, \{a,b,e,d\}, \{a,e,c,d\}\}$$

dir.

d) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının açık olan fakat kapalı olmayan alt kümelerininin kolleksiyonu

$$\{\{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının açık olan fakat kapalı olmayan alt kümelerininin kolleksiyonu

$$\{\{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

dir.

e) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı olan fakat açık olmayan alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\{b,e\}, \{a,b,e\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı olan fakat açık olmayan alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\{b,e\}, \{a,b,e\}, \{b,c,d,e\}\}$$

dir.✓

ÇÖZÜM 17

Alıştırma 2 de verilen küme $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{b,f\}, \{a,b,f\}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{a,b,f\}, \{a,b,d\}, \{a,b,d,f\}\}$$

kolleksiyonları X üzerinde birer topolojidir.

a) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\emptyset, X, \{e,c,d\}, \{e,c,b,f,d\}, \{e,a,c,b,d\}, \{e,c,b,d\}, \{e,a,c,d\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$\{\emptyset, X, \{c,e\}, \{c,e,f\}, \{c,d,e\}, \{c,d,e,f\}\}$$

dir.

b) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının hem açık hem kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu $\{e,a,c,b,f,d\}$ dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının hem açık hem kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu $\{\emptyset,X\}$ dir.

c) $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(X) = \; & \{\emptyset,X,\{e,a,b\},\{a,c,d\},\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\\
& \{a,b\},\{f,d\},\{a,c\},\{a,d\},\{e,a\},\{a,f\},\{c,b\},\\
& \{b,d\},\{b,f\},\{c,d\},\{e,d\},\{e,f\},\{e,b\},\{e,c\},\\
& \{c,f\},\{e,a,c\},\{a,b,d\},\{a,b,f\},\{b,f,d\},\{c,b,f\},\\
& \{e,f,d\},\{a,c,b\},\{e,a,f\},\{e,c,d\},\{c,f,d\},\\
& \{c,b,d\},\{e,a,d\},\{e,c,b\},\{a,c,f\},\{a,f,d\},\\
& \{e,b,d\},\{e,b,f\},\{a,c,b,d\},\{a,b,f,d\},\\
& \{e,a,b,f\},\{e,c,f\},\{e,a,c,f\},\{e,c,b,f\},\\
& \{e,a,c,d\},\{a,c,f,d\},\{e,a,f,d\},\{e,b,f,d\},\\
& \{e,c,f,d\},\{e,a,c,b,d\},\{e,a,c,b\},\{c,b,f,d\},\\
& \{e,c,b,d\},\{a,c,b,f,d\},\{e,a,c,b,f\},\{e,a,b,d\},\\
& \{a,c,b,f\},\{e,a,b,f,d\},\{e,a,c,f,d\},\\
& \{e,c,b,f,d\}\}
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre
$(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının ne açık ne kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$$
\begin{aligned}
& \{\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{e,a\},\{c,b\},\{b,d\},\\
& \{e,c\},\{e,d\},\{a,c,b\},\{a,b,d\},\{e,a,c\},\{a,e,d\},\{b,c,d\},\\
& \{e,c,b\},\{b,e,d\},\{e,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e,c\},\{a,b,e,d\},\\
& \{e,a,c,d\}\}
\end{aligned}
$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının ne açık ne kapalı alt kümelerinin kolleksiyonu

$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{a,c\},\{a,d\},\{e,a\},\{a,f\},\{b,c\},\{b,d\}$
$\{b,e\},\{f,b\},\{c,d\},\{f,c\},\{e,d\},\{f,d\},\{f,e\},\{a,c,b\},\{e,a,$
$\{a,c,d\},\{a,e,c\},\{f,a,c\},\{a,e,d\},\{f,a,d\},\{f,a,e\},\{b,c,$
$\{b,e,c\},\{f,b,c\},\{b,e,d\},\{f,b,d\},\{f,b,e\},\{f,c,d\},\{f,e,$
$\{a,b,c,d\},\{a,b,e,c\},\{f,a,b,c\},\{a,b,e,d\},\{f,a,b,e\},$
$\{a,e,c,d\},\{f,a,c,d\},\{f,a,e,c\},\{b,e,c,d\},\{f,b,c,d\},$
$\{f,b,e,c\},\{f,b,e,d\},\{f,a,e,d\},\{a,b,e,c,d\},\{f,a,b,c,d$
$\{f,a,b,e,c\},\{f,a,b,e,d\},\{f,a,e,c,d\},\{f,b,e,c,d\}\}$

dir.

d) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının açık olan fakat kapalı olmayan alt küme rininin kolleksiyonu

$$\{\{a\},\{f\},\{a,f\},\{b,f\},\{a,b,f\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının açık olan fakat kapalı olmayan alt küme rininin kolleksiyonu

$$\{\{a,b\},\{a,b,f\},\{a,b,d\},\{a,b,d,f\}\}$$

dir.

e) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı olan fakat açık olmayan alt küme rinin kolleksiyonu

$$\{\{b,c,d,e,f\},\{a,b,c,d,e\},\{b,c,d,e\},\{a,c,d,e\},\{c,d,e\}\}$$

dir.
$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı olan fakat açık olmayan alt küme rini kolleksiyonu

$$\{\{c,d,e,f\},\{c,d,e\},\{c,e,f\},\{e,c\}\}$$

dir.✔

ÇÖZÜM 18

$$\mathcal{T}_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c,d\}\},\quad \mathcal{T}_2=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,c,d\}\},$$
$$\mathcal{T}_3=\{\emptyset,X,\{c\},\{a,b,d\}\},\quad \mathcal{T}_4=\{\emptyset,X,\{d\},\{a,b,c\}\}$$

topolojileri istenilen özellikte dört farklı topolojidir.✔

ÇÖZÜM 19

$\mathbb{R}$ nin bir U alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şa her $x\in U$ için $(r,s)\subseteq U$ olacak şekilde r ve s reel sayıların olmasıdır. Veya $\mathbb{R}$ nin bir U alt kümesinin açık olması içi gerek ve yeter şart her $x \in U$ için

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$$

olacak şekilde bir $0 < \varepsilon$ reel sayısının olmasıdır.

a) Önce $[a,b)$ aralığının açık veya kapalı olmadığını gösterelim.

i) $[a,b)$ nin açık olmadığını gösterelim. $x = a$ olsun.

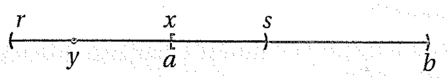
$$a \in (r,s) \subseteq [a,b)$$

olacak şekilde r, s sayılarının olduğunu kabul edelim. Bu durumda $r < a < s$ dir. Böylece

$$r < y < a$$

olacak şekilde bir $y \in (r,s)$ vardır. (Şekil 3.19 e bakınız.) Üstelik, $y \notin [a,b)$ dir. Bu ise $(r,s) \subseteq [a,b)$ olması ile çelişir. Böylece $a \in (r,s) \subseteq [a,b)$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}$ sayıları yoktur. O halde $[a,b)$ açık değildir.

Şekil 3.19



ii) Şimdi $[a,b)$ nin kapalı olmadığını gösterelim. Bunun için $\mathbb{R}\setminus[a,b)$ nin açık olmadığını göstermemiz yeterlidir. $x = b$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde

$$b \in (r,s) \subseteq \mathbb{R}\setminus[a,b)$$

olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}$ sayılarının olmadığı gösterilir. Böylece $\mathbb{R}\setminus[a,b)$ açık değildir. O halde $[a,b)$ kapalı değildir.

b) Benzer şekilde $(a,b]$ nin açık veya kapalı olmadığı gösterilir.✓

ÇÖZÜM 20

Örnek 3.77 gereğince

$$\mathbb{R}\setminus[a,\infty) = (-\infty,a) \quad \text{ve} \quad \mathbb{R}\setminus(-\infty,a] = (a,\infty)$$

kümeleri açıktır. O halde $[a,\infty)$ ve $(-\infty,a]$ kümeleri kapalıdır.✓

ÇÖZÜM 21

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\{x\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalıdır. Diğeryandan

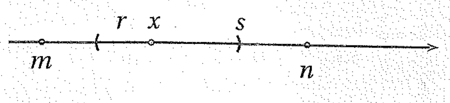
$$(0,1) = \bigcup_{x\in(0,1)} \{x\}$$

dir. Üstelik $(0,1)$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.✓

ÇÖZÜM 22

a) $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Herhangi bir (r,s) aralığı sayılamaz ve $\mathbb{Z}$ sayılabilir olduğundan $n \in (r,s) \subseteq \mathbb{Z}$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}$ sayıları yoktur. Böylece $\mathbb{Z}$ açık bir küme değildir.

Şekil 3.20



b) **i)** $n \in S$ olsun. Herhangi bir (r,s) aralığı sayılamaz ve S sayılabilir olduğundan $n \in (r,s) \subseteq S$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}$ sayıları yoktur. Böylece S açık bir küme değildir.

ii) Şimdi S nin kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathbb{R}\setminus S$ nin açık olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}\setminus S$ olsun. n, x den büyük ilk asal sayı ve m de x den küçük ilk asal sayı olsun. Bu durumda

$$m < r < s < n$$

özelliğindeki her $r, s \in \mathbb{R}$ için

$$x \in (r,s) \subseteq \mathbb{R}\setminus S$$

dir. O halde $\mathbb{R}\setminus S$ kümesi açıktır. Böylece S kapalıdır.

c) Örnek 3.83 gereğince $\mathbb{Q}$ ne açık ne de kapalıdır. Böylece $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne açık ne de kapalıdır.✓

ÇÖZÜM 23

a) $F = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ ve $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ olsun.

i) Önce F nin kapalı olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}\setminus F$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x-a_i| \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ olsun. Bu durumda

$$x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}\setminus F$$

dir. Böylece $\mathbb{R}\setminus F$ açıktır. O halde F kapalıdır.

ii) Şimdi F nin açık olmadığını gösterelim. $a_i \in F$ olsun. $a_i \in (r,s)$ özelliğine sahip her (r,s) açık aralığının sonsuz sayıda elemanı vardır. F nin sonlu sayıda elemanı olduğundan $(r,s) \nsubseteq F$ dir. O halde F açık bir küme değildir.

b) $\mathbb{Q}$, sayılabilir sonsuz bir kümedir ve Örnek 3.83 gereğince $\mathbb{Q}$ açık veya kapalı değildir.

c) F sonlu ise (a) gereğince F açık bir küme değildir. F sayılabilir sonsuz bir küme ve $F = \{a_1, a_2, \cdots\}$ olsun. Her açık aralığın sayılamaz sayıda elemanı olduğundan $a_i \in (r,s)$ açık aralığının sayılamaz sayıda elemanı vardır. F nin sayılabilir sayıda elemanı olduğundan $(r,s) \nsubseteq F$ dir. O halde F açık bir küme değildir.✔

ÇÖZÜM 24

a) $x \in \mathbb{R}\setminus S$ olsun. Bu durumda $x \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x \neq \frac{1}{n}$ dir.

i) $x > 1$ ise $x \in \left(x - \frac{x-1}{2}, x+1\right) \subseteq \mathbb{R}\setminus S$ dir.

ii) $x < 0$ ise $x \in \left(x-1, x+\frac{|x|}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}\setminus S$ dir.

iii) $0 < x < 1$ olsun. $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x - 1/(n+1)|, |x - 1/n|\}$$

olsun. Bu durumda $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}\setminus S$ dir. O halde $\mathbb{R}\setminus S$ kümesi açıktır. Böylece S kapalıdır.

b) Bunun için $\mathbb{R}\setminus T$ nin açık olup olmadığını araştıralım. $0 \in \mathbb{R}\setminus T$ dir. $0 \in (r,s) \subseteq \mathbb{R}\setminus T$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}$ olduğunu varsayalım. $\frac{1}{s} < n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda $\frac{1}{n} \in (r,s)$ ve böylece $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}\setminus T$ dir. $\frac{1}{n} \notin \mathbb{R}\setminus T$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $0 \in (r,s) \subseteq \mathbb{R}\setminus T$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}$ yoktur. O halde $\mathbb{R}\setminus T$ kümesi açık değildir. Böylece T kapalı değildir.

c)

$$\mathbb{R}\setminus K = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \cup \ldots$$

dır. Eşitliğin sağ tarafındaki ifade açık kümelerin bir birleşimi olduğundan açıktır. Böylce $\mathbb{R}\setminus K$ kümesi açık ve dolayısıyla K kapalıdır.✔

ÇÖZÜM 25

a)

$$(a,b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left[a + \frac{b-a}{n+1}, b - \frac{b-a}{n+1}\right]$$

dır. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $\left[a + \frac{b-a}{n+1}, b - \frac{b-a}{n+1}\right]$ aralıkları kapalı birer kümedir. O halde (a,b) aralığı sayılabilir sayıdaki kapalı kümelerin bir birleşimidir. Böylece (a,b) bir F_σ-kümesidir.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = a$ ve $b_n = b$ olmak üzere

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

dır. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $[a_n, b_n] = [a,b]$ aralığı kapalı bir kümedir. O halde $[a,b]$ aralığı sayılabilir sayıdaki kapalı kümelerin bir birleşimidir. Böylece $[a,b]$ bir F_σ-kümesidir.

c) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\{x\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalıdır. Diğer yandan

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$$

dir. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan $\mathbb{Q}$ sayılabilir sayıdaki kapalı kümelerin bir birleşimidir. Böylece $\mathbb{Q}$ bir F_σ-kümesidir.✔

ÇÖZÜM 26

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = a$ ve $b_n = b$ olmak üzere

$$(a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$$

dır. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_n, b_n) = (a,b)$ aralığı açık bir kümedir. O halde (a,b) aralığı sayılabilir sayıdaki açık kümelerin bir kesişimidir. Böylece (a,b) bir G_δ-kümesidir.

b)

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

ve her $\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ aralığı açık olduğundan $[a,b]$ bir G_δ kümesidir.

c) Her $x \in \mathbb{Q}$ için $\{x\}$ kümesi kapalı olduğundan $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ kümesi açıktır. Dolayısıyla

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcap_{x\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R}\setminus\{x\})$$

olduğundan $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesi bir G_δ-kümesidir.✔

ÇÖZÜM 27

a) F bir F_σ-kümesi olsun. Bu durumda I sayılabilir bir küme ve her $i \in I$ için F_i kapalı küme olmak üzere

$$F = \bigcup_{i\in I} F_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$X\setminus F = \bigcap_{i\in I}(X\setminus F_i)$$

dir. Her $i \in I$ için F_i kapalı olduğundan $X\setminus F_i$ açıktır. Böylece $X\setminus F$ kümesi bir G_δ-kümesidir.

b) F bir G_δ–kümesi olsun. Bu durumda I sayılabilir bir küme ve her $i \in I$ için F_i açık küme olmak üzere

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$X\setminus F = \bigcup_{i\in I}(X\setminus F_i)$$

dir. Her $i \in I$ için F_i açık olduğundan $X\setminus F_i$ kapalıdır. Böylece $X\setminus F$ kümesi bir F_σ-kümesidir.✓

ÇÖZÜM 28

a) i) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(x,\infty)|x\in\mathbb{R}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında bir $x\in\mathbb{R}$ noktasını içeren bütün açık kümeler $\mathbb{R}$ ve $y<x$ olmak üzere (y,∞) formundaki açık aralıklarıdır.

ii) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(-\infty,x)|x\in\mathbb{R}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ uzayında bir $x\in\mathbb{R}$ noktasını içeren bütün açık kümeler $\mathbb{R}$ ve $x<y$ olmak üzere $(-\infty,y)$ formundaki açık aralıklarıdır.

iii) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(-n,n)|n\in\mathbb{N}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayında bir $x\in\mathbb{R}$ noktasını içeren bütün açık kümeler $\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x\in(-n,n)$ özelliğindeki bütün $(-n,n)$ açık aralıklarıdır.

iv) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{[-n,n]|n\in\mathbb{N}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_4)$ uzayında bir $x\in\mathbb{R}$ noktasını içeren bütün açık kümeler $\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x\in[-n,n]$ özelliğindeki bütün $[-n,n]$ aralıklarıdır.

v) $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{[n,\infty)|n\in\mathbb{N}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_5)$ uzayında bir $x\in\mathbb{R}$ noktasını içeren bütün açık kümeler $\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x\in[n,\infty)$ özelliğindeki bütün $[n,\infty)$ aralıklarıdır.

b) i) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(-\infty,x]|x\in\mathbb{R}\}$$

dir.

ii) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_2 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{[x,\infty)|x\in\mathbb{R}\}$$

dir.

iii) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_3 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(-\infty,-n]\bigcup[n,\infty)|n\in\mathbb{N}\}$$

dir.

iv) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_4)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_4 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(-\infty,-n)\bigcup(n,\infty)|n\in\mathbb{N}\}$$

dir.

v) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_5)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_5 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\bigcup\{(-\infty,n)|n\in\mathbb{N}\}$$

dir.✓

ÇÖZÜM 29

a) $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_{4n} = \{\emptyset,X,\{d\},\{c,d\},\{b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\}\}$$

dir.

b) $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının hem açık hem kapalı alt kümeleri $\emptyset$ ve X dir.✓

ÇÖZÜM 30

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\mathbb{N}\}\bigcup\{\{1,2,\cdots,n\}|n\in\mathbb{N}\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\mathbb{N}\}\bigcup\{\{n,n+1,\cdots\}|n\in\mathbb{N}\}$ dir. Buna göre

a) i) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayında bir $m\in\mathbb{N}$ noktasını içeren açık kümeler $\mathbb{N}$ ve $n\geq m$ olmak üzere $\{1,2,\cdots,n\}$ şeklindeki kümelerdir.

ii) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayında bir $m\in\mathbb{N}$ noktasını içeren açık kümeler $\mathbb{N}$ ve $m\geq n$ olmak üzere $\{n,n+1,\cdots\}$ şeklindeki kümelerdir.

b) i) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzaylarının bütün kapalı kümelerininin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset,\mathbb{N}\}\bigcup\{\{n,n+1,\cdots\}|n\in\mathbb{N}\} = \mathcal{T}_2$$

dir.

ii) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzaylarının bütün kapalı kümelerininin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_2 = \{\emptyset,\mathbb{N}\}\bigcup\{\{1,2,\cdots,n\}|n\in\mathbb{N}\} = \mathcal{T}_1$$

dir.✓

ÇÖZÜM 31

$\mathcal{T}(a) = \{U\subseteq X|a\in U\}\bigcup\{\emptyset\}$ ve $\mathcal{T}_a = \{U\subseteq X|a\notin U\}\bigcup\{X\}$ dir.

a) $x\in A$ olsun. Bu durumda $U=\{x,a\}\in\mathcal{T}(a)$ dır. Böylece

$$\{x\} = U\bigcap A \quad (a\notin A)$$

olduğundan $\{x\}\in\mathcal{T}(a)_A$ dır. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}(a)_A = \mathcal{P}(A)$ dır.

b) $x\in A$ olsun. Bu durumda $a\notin A$ olduğundan $x\neq a$ ve

$U = \{x\} \in \mathcal{T}_a$ dır. Böylece

$$\{x\} = U \cap A$$

olduğundan $\{x\} \in \mathcal{T}_a$ dır. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}_{a_A} = \mathcal{P}(A)$ dır.✔

ÇÖZÜM 32

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x,\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[-n,n] \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[n,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$

dir.

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ **uzayı için soruyu çözelim:** $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. $U = \emptyset$ ise

$$U \cap A = \emptyset$$

dur. $U = \mathbb{R}$ ise

$$U \cap A = A$$

dır. Bazı $x \in \mathbb{R}$ için $U = (x,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$U \cap A = \begin{cases} (x,\infty), & x \geq 0 \\ [0,\infty) = A, & x < 0 \end{cases}$$

dır. Böylece

$$\mathcal{T}_{1_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{(x,\infty) | x \geq 0\}$$

dır. $(A, \mathcal{T}_{1_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu ise

$$\mathcal{K}_{1_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,x] | x \geq 0\}$$

dır. (Örnek 3.19 e bakınız.)

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ **uzayı için soruyu çözelim:** $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. $U = \emptyset$ ise

$$U \cap A = \emptyset$$

dur. $U = \mathbb{R}$ ise

$$U \cap A = A$$

dır. Bazı $x \in \mathbb{R}$ için $U = (-\infty, x)$ olsun. Bu durumda

$$U \cap A = \begin{cases} \emptyset, & x \leq 0 \\ [0,x), & x > 0 \end{cases}$$

dır. Böylece

$$\mathcal{T}_{2_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,x) | x > 0\}$$

dır. $(A, \mathcal{T}_{2_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu ise

$$\mathcal{K}_{2_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[x,\infty) | x > 0\}$$

dır.

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ **uzayı için soruyu çözelim:** $U \in \mathcal{T}_3$ olsun. $U = \emptyset$ ise $U \cap A = \emptyset$ dur. $U = \mathbb{R}$ ise $U \cap A = A$ dır. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $U = (-n, n)$ olsun. Bu durumda $U \cap A = [0, n)$ dir. Böylece

$$\mathcal{T}_{3_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,n) | n \in \mathbb{N}\}$$

dir. $(A, \mathcal{T}_{3_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu ise

$$\mathcal{K}_{3_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[n,\infty) | n \in \mathbb{N}\}$$

dir.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_4)$ **uzayı için soruyu çözelim:** $U \in \mathcal{T}_4$ olsun. $U = \emptyset$ ise $U \cap A = \emptyset$ dur. $U = \mathbb{R}$ ise $U \cap A = A$ dır. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $U = [-n, n]$ olsun. Bu durumda $U \cap A = [0, n]$ dir. Böylece

$$\mathcal{T}_{4_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,n] | n \in \mathbb{N}\}$$

dir. $(A, \mathcal{T}_{4_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu ise

$$\mathcal{K}_{4_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{(n,\infty) | n \in \mathbb{N}\}$$

dır.

e) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_5)$ **uzayı için soruyu çözelim:** $U \in \mathcal{T}_5$ olsun. $U = \emptyset$ ise $U \cap A = \emptyset$ dur. $U = \mathbb{R}$ ise $U \cap A = A$ dır. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $U = [n, \infty)$ olsun. Bu durumda $U \cap A = [n, \infty)$ dur. Böylece

$$\mathcal{T}_{5_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[n,\infty) | n \in \mathbb{N}\}$$

dir. $(A, \mathcal{T}_{5_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu ise

$$\mathcal{K}_{5_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,n) | n \in \mathbb{N}\}$$

dır.✔

ÇÖZÜM 33

a) $(0, 1/2] = U \cap A$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ de açık bir küme olmadığından A alt uzayında $(0, 1/2]$ kümesi açık değildir.

$$(0, 1/2] = [-1, 1/2] \cap A$$

ve $[-1, 1/2]$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı olduğundan $(0, 1/2]$ kümesi A alt uzayında kapalıdır.

b) $(0, 1/2)$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık bir küme ve

$$(0, 1/2) = (0, 1/2) \cap A$$

olduğundan $(0,1/2)$ kümesi A alt uzayında açıktır.

$$(0,1/2)=K\cap A$$

olacak şekilde ℝ de kapalı bir küme olmadığından $(0,1/2)$ kümesi A alt uzayında kapalı değildir.

c) $(1/2,2)$ kümesi ℝ de açık bir küme ve

$$(1/2,1]=(1/2,2)\cap A$$

olduğundan $(1/2,1]$ kümesi A alt uzayında açıktır.

$$(1/2,1]=K\cap A$$

olacak şekilde ℝ de kapalı bir küme olmadığından $(1/2,1]$ kümesi A alt uzayında kapalı değildir.

d)

$$[1/2,1]=U\cap A$$

olacak şekilde ℝ de açık bir küme olmadığından A alt uzayında $[1/2,1]$ kümesi açık değildir.

$$[1/2,1]=[1/2,1]\cap A$$

ve $[1/2,1]$ kümesi ℝ de kapalı olduğundan $[1/2,1]$ kümesi A alt uzayında kapalıdır.

e) $(1/2,1)$ kümesi ℝ de açık bir küme ve

$$(1/2,1)=(1/2,1)\cap A$$

volduğundan $(1/2,1)$ kümesi A alt uzayında açıktır.

$$(1/2,1)=K\cap A$$

olacak şekilde ℝ de kapalı bir küme olmadığından $(1/2,1)$ kümesi A alt uzayında kapalı değildir.✔

ÇÖZÜM 34

a) $C\in\mathcal{T}_{A\cup B}$ olsun. Bu durumda

$$C=U\cap(A\cup B)$$

olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ vardır. Bu durumda

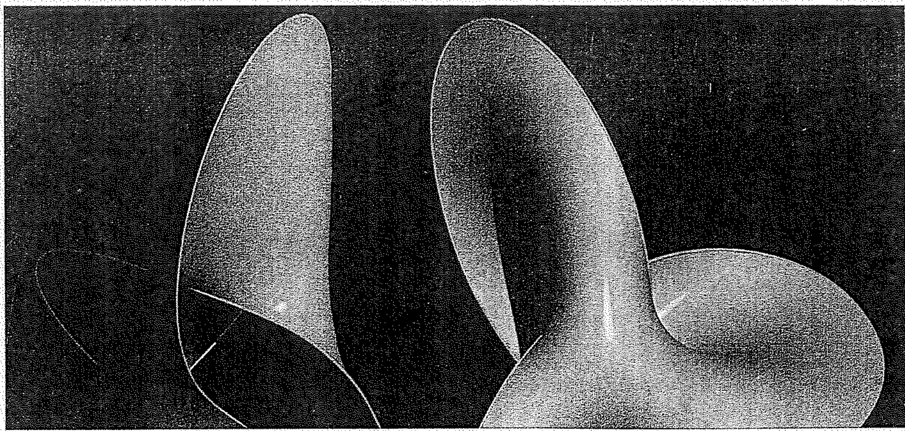
$$A\cap C=U\cap(A\cup B)\cap A=U\cap A$$

dır. $U\in\mathcal{T}$ olduğundan $U\cap A\in\mathcal{T}_A$ yani $C\cap A\in\mathcal{T}_A$ dır.

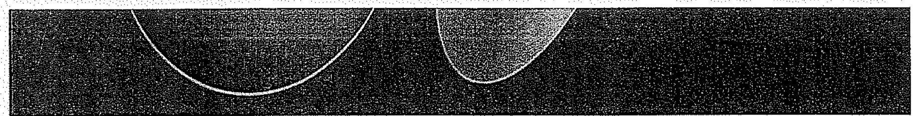
b)

$$B\cap C=U\cap(A\cup B)\cap B=U\cap B$$

dir. $U\in\mathcal{T}$ olduğundan $U\cap B\in\mathcal{T}_B$ yani $C\cap B\in\mathcal{T}_B$ dır.✔



4. Tabanlar



Bazı matematiksel yapılar için taban veya benzeri kavramlar vardır. Lineer cebir derslerinden bilindiği gibi bir vektör uzayının tabanı biliniyorsa vektör uzayına ait her vektör tabana ait vektörler kullanılarak belirlenebilir. Bu bölümde topolojik uzaylarda taban, alt taban ve yerel taban kavramları verilerek bu kavramlar örneklerle desteklenecektir.

4.1. Bir Topolojinin Tabanı

Teorem 4.1.

(X,d) bir metrik uzay ve $\mathscr{B} = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U kümesi $\mathscr{B}$ kolleksiyonuna ait bir takım kümelerin birleşimidir.

b) U kümesi (X,d) metrik uzayında açıktır.

İSPAT:

a)⇒ b). U kümesi $\mathscr{B}$ kolleksiyonuna ait bir takım kümelerin bir birleşimi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $\varepsilon_i > 0$ ve $x_i \in X$ olmak üzere $U = \bigcup\limits_{i\in I} B(x_i,\varepsilon_i)$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. Teorem 2.43 gereğince her bir $B(x_i,\varepsilon_i)$ açık yuvarı açık bir kümedir. U açık kümelerin bir birleşimi olduğundan açık bir kümedir.

b)⇒ a). U kümesi (X,d) metrik uzayında açık olsun. Tanım 2.41 gereğince her bir $x \in U$ için $B(x,\varepsilon_x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $B(x,\varepsilon_x) \in \mathscr{B}$ vardır. Teorem 3.43 gereğince $U = \bigcup\limits_{x\in U} B(x,\varepsilon_x)$ olur. Yani U kümesi $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir. ✓

Bu önermeden yararlanılarak (X,d) metrik uzayının topolojisi yeniden şu şekilde tanımlanabilir: (X,d) metrik uzayının açık alt kümeleri, $B(x,\varepsilon)$ şeklindeki açık yuvarlar ve açık yuvarların bir birleşimi şeklinde yazılabilen X nin bütün alt kümeleridir.

TANIM 4.2. ▹ **Analitik taban**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$ de açık kümelerin bir kolleksiyonu olsun. $\mathcal{T}$ nun her elemanı $\mathcal{B}$ ye ait olan bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanı (veya analitik tabanı) denir. Yani
TB-1). $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ dur
TB-2). $U \in \mathcal{T}$ ise $i \in I$ için $B_i \in \mathcal{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır
şartları sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanı (veya analitik tabanı) denir.

Not
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ise

$$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i \quad (B_i \in \mathcal{B})$$

ve $U \in \mathcal{B}$ için

$$U = U \cup U$$

şeklinde yazılabileceği için Tanım 4.2 nin (TB-2) şartının sağlandığını göstermek için

$$U \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{B} \quad \text{ve} \quad U \neq \emptyset$$

özelliğindeki U kümelerinin $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabileceğinin gösterilmesi yeterlidir.

ÖRNEK 4.3. ▹
$X = \{a, b, c, d, e\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin.

$$\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{b,d\}, X\}$$

nin $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

TB-1). $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır.
TB-2).

$$\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}, \qquad \{a,b,c\} = \{b\} \cup \{a,c\},$$
$$\{a,b,d\} = \{a\} \cup \{b,d\}, \qquad \{a,b,c,d\} = \{a,c\} \cup \{b,d\}$$

olur. Yani $\mathcal{T}$ nun her elemanı $\mathcal{B}$ ye ait olan birtakım elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.
(TB-1) ve (TB-2) gereğince $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanıdır.

ÖRNEK 4.4. ▹
$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin. $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ nin $\mathcal{T}$ nun tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

TB-1). $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır.
TB-2).

$$\{a,c,d\} = \{a\} \cup \{c,d\}, \qquad X = \{a\} \cup \{c,d\} \cup \{b,c,d,e,f\}$$

olur. Yani $\mathcal{T}$ nun her elemanı $\mathcal{B}$ ye ait olan birtakım elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.
(TB-1) ve (TB-2) gereğince $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanıdır.

ÖRNEK 4.5. ▷
(X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda bütün açık yuvarların

$$\mathscr{B} = \{B(x,\varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

kolleksiyonunun X üzerindeki $\mathcal{T}_d$ topolojisinin bir tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

TB-1). Teorem 2.43 gereğince her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon)$ açık yuvarı açıktır. Yani $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_d$ dir.
TB-2). U kümesi açık ise Teorem 4.1 gereğince U kümesi $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir.

Bu durumda (TB-1) ve (TB-2) gereğince $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_d$ nin bir tabanıdır.

Benzer şekilde $r > 0$ olmak üzere $\mathscr{B} = \{B(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ 0 < \varepsilon < r\}$ kolleksiyonunun X üzerindeki $\mathcal{T}_d$ topolojisinin bir tabanı olduğunu gösterilir.✍

NOT 4.6.
a) Örnek 4.5 gereğince

$$\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$$

ve $r > 0$ olmak üzere

$$\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon < r\}$$

kolleksiyonunları $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin birer tabanıdır.
b) Örnek 4.5 gereğince $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$B(x,\varepsilon) = \left\{ (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

olmak üzere

$$\mathscr{B} = \{B(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$$

ve $r > 0$ olmak üzere

$$\mathscr{B} = \{B(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < \varepsilon < r\}$$

kolleksiyonları $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topolojinin birer tabanıdır.✎

ÖRNEK 4.7. ▷
$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ nin $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

TB-1). Örnek 3.76 gereğince her $(a,b) \in \mathscr{B}$ aralığı $\mathbb{R}$ de açık olduğundan $\mathscr{B}$, standart topolojinin bir alt kümesidir.
TB-2). U kümesi $\mathbb{R}$ de açık olsun. U nun $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini gösterelim. U açık olduğundan Not 4.6 gereğince $i \in I$ için $x_i \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon_i > 0$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} (x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)$ olacak şekilde bir I indis kümesi

vardır. Her $i \in I$ için $a_i = x_i - \varepsilon_i$ ve $b_i = x_i + \varepsilon_i$ denilirse her $i \in I$ için $(a_i, b_i) \in \mathcal{B}$ v $U = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$ olur. Yani U kümesi $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi şeklind yazılabilir.

(TB-1) ve (TB-2) gereğince $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanıdır. ✍

ÖRNEK 4.8. ▶

$(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık bir uzay olsun. $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ nin ayrık topolojinin bir tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

TB-1). $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olduğu açıktır.

TB-2). $U \in \mathcal{P}(X)$ ise $U = \bigcup_{x \in U}\{x\}$ olduğundan U kümesi $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir.

(TB-1) ve (TB-2) gereğince $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}(X)$ in bir tabanıdır. ✍

Not

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{B} = \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanıdır. Örneğin, X kümesinin bütün alt kümelerinin kolleksiyonu X üzerindeki ayrık topolojinin bir tabanıdır. O halde bir topolojinin bir çok tabanı olabilir. Aslında $\mathcal{B}$, X kümesi üzerindeki $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanı ise

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$$

özelliğindeki her $\mathcal{B}_1$ kolleksiyonu da $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanıdır. (Alıştırma 11 a bakınız.)

Bir metrik uzayda açık küme tanımı gereğince herhangi bir (X, d) metrik uzayında bir U alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart her $x \in U$ için $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ reel sayısının mevcut olmasıdır. Bundan yararlanarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.9. ▶

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanıdır.

b) Aşağıdaki (i) ve (ii) şartları sağlanır.

i) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ dur.

ii) Her $U \in \mathcal{T}$ ve her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $\mathcal{B}$ kolleksiyonunun $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanı olduğunu kabul edelim.

i) Taban tanımı gereğince $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ dur.

ii) $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ olsun. $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan U, $\mathcal{B}$ ye ait birtakım kümelerin birleşimidir. Yani $i \in I$ için $B_i \in \mathcal{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ olacak şeklinde bir I indis kümesi vardır. $x \in U$ olduğundan bazı $i_0 \in I$ için $x \in B_{i_0}$ dır. Böylece $B_{i_0} = B_x$ denilirse $x \in B_x \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = U$ ve $B_x \in \mathcal{B}$ olur.

b)⇒ a). $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunu gösterelim.

TB-1). (i) gereğince $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ dur.

TB-2). $\mathcal{T}$ nun her elemanının $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerinin birleşimi olduğunu göstermeliyiz. $U \in \mathcal{T}$ olsun. $U = \emptyset$ ise $i \in \emptyset$ için $B_i \in \mathcal{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i$ olur. $U \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda (ii) gereğince her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır. Teorem 3.43 gereğince $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ olur. Bu durumda $U \in \mathcal{T}$ ise U kümesi $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir. O halde taban tanımı gereğince $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanıdır. ✔

Teorem 4.10. ▷

X boş olmayan bir küme ve $\mathscr{B}$ de $\mathcal{T}$ topolojinin bir tabanı olsun. Bu durumda

a) $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$

b) Her $B_1 \in \mathscr{B}$ ve her $B_2 \in \mathscr{B}$ için $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir.

İSPAT:

a). $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan Tanım 3.1 in (T-1),(T-2) ve (T-3) şartlarını sağlar. Böylece $X \in \mathcal{T}$ ve $\mathscr{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan X kümesi $\mathscr{B}$ ye ait birtakım kümelerin bir birleşimidir. Bu durumda $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$ olur.

b). $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ise $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ olur. $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ dur. $\mathscr{B}$, $\mathcal{T}$ nun tabanı olduğundan $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathscr{B}$ ye ait birtakım kümelerin bir birleşimi şeklinde yazılabilir.✓

Bir topolojinin tabanı bir topoloji tanımlamak için iyi bir yöntem olarak düşünülebilir. Aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi dikkatli olmalıyız.

ÖRNEK 4.11. ▷

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\mathscr{B} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ olsun. $\mathscr{B}$ nin X üzerinde hiçbir topolojinin tabanı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bunu göstermek için $\mathscr{B}$ nin bir $\mathcal{T}$ topolojisinin tabanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathcal{T}$, $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimleri şeklinde yazılabilen alt kümelerden oluşur. Yani

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

olur. $X = \{a, b, c, d\} \notin \mathcal{T}$ olduğundan Tanım 3.1 (T-1) şartı sağlanmaz. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir topoloji olamaz. Bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $\mathscr{B}$, X üzerinde hiçbir topolojinin tabanı olamaz.✍

ÖRNEK 4.12. ▷

$X = \{a, b, c\}$ ve $\mathscr{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ olsun. $\mathscr{B}$ nin X üzerinde hiçbir topolojinin tabanı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bunu göstermek için $\mathscr{B}$ nin bir $\mathcal{T}$ topolojisinin tabanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathcal{T}$, $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimleri şeklinde yazılabilen alt kümelerden oluşur. Yani

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olur. $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ ve $\{b\} \notin \mathcal{T}$ olduğundan Tanım 3.1 (T-3) şartı sağlanmaz. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir topoloji olamaz. Bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $\mathscr{B}$, X üzerinde hiçbir topolojinin tabanı olamaz.✍

Yukarıdaki örnekler göz önüne alınarak, X in alt kümelerinden oluşan bir $\mathscr{B}$ kolleksiyonu ne zaman X üzerinde bir topolojinin tabanı olur? sorusunu sorabiliriz. Bu sorunun cevabını aşağıdaki Teorem 4.14 vermektedir.

TANIM 4.13. ▷ **Sentetik taban**
X boş olmayan bir küme ve $\mathscr{B}$ de X in alt kümelerinden oluşan bir kolleksiyon olsun. $\mathscr{B}$ kolleksiyonu X üzerinde bir topolojinin tabanı oluyorsa $\mathscr{B}$ ye sentetik taban denir.

Teorem 4.14. ▷
X boş olmayan bir küme ve $\mathscr{B}$ de X in alt kümelerinden oluşan bir kolleksiyon olsun.
STB-1). $X = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$
STB-2). Her $B_1 \in \mathscr{B}$ ve her $B_2 \in \mathscr{B}$ için $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathscr{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir
şartları sağlanıyorsa $\mathscr{B}$, X üzerinde tek bir topolojinin tabanıdır. (Yani, $\mathscr{B}$ sentetik bir tabandır.)

İSPAT: $\mathcal{T}$, $\mathscr{B}$ ye ait birtakım kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabilen X in alt kümelerinin kolleksiyonu olsun. Yani

$$\mathcal{T} = \left\{U \subseteq X \mid U = \bigcup_{i\in I} B_i,\ I \text{ bir indis kümesi ve } i \in I \text{ için } B_i \in \mathscr{B}\right\}$$

olsun. $\mathcal{T}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

T-1). (STB-1) gereğince $X = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$ dir. Böylece, $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \in \mathcal{T}$ olur. $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} B_i$ ($B_i \in \mathscr{B}$) olduğundan $\emptyset \in \mathcal{T}$ olur. O halde $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 in (T-1) şartını sağlar.

T-2). $\{U_j \mid j \in J\}$, $\mathcal{T}$ nun bir alt kolleksiyonu olsun. Bu durumda her bir U_j, $\mathscr{B}$ nin birtakım elemanlarının birleşimidir. Böylece U_j lerin birleşimi de $\mathscr{B}$ ye ait olan birtakım kümelerin birleşimi olur. O halde $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince U_j lerin birleşimi $\mathcal{T}$ ya aittir. Yani $\mathcal{T}$, Tanım 3.1 (T-2) şartını da sağlar.

T-3). U ve V kümeleri $\mathcal{T}$ ya ait olsun. $U \in \mathcal{T}$ olduğundan $k \in K$ için $B_k \in \mathscr{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{k\in K} B_k$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, $V \in \mathcal{T}$ olduğundan $j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}$ olmak üzere $V = \bigcup_{j\in J} B_j$ şeklinde yazılabilir. Böylece

$$U \cap V = \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(k,j)\in(K,J)} (B_k \cap B_j)$$

olur. (STB-2) nedeniyle her bir $B_k \cap B_j$ kümesi $\mathscr{B}$ ye ait birtakım kümelerin birleşimidir. O halde $U \cap V$ de $\mathscr{B}$ ye ait birtakım kümelerin birleşimi olur. Bu durumda $U \cap V \in \mathcal{T}$ olur. Böylece Tanım 3.1 in (T-3) şartı da sağlanır.

Bu durumda $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topolojidir. $\mathscr{B}$ nin $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğu $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince açıktır.

Şimdi $\mathscr{B}$ nin tek bir topolojinin tabanı olduğunu gösterelim. $\mathscr{B}$ nin $\mathcal{T}_1$ topolojisininde tabanı olduğunu kabul edelim.

a) $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $j \in J$ için $B_j \in \mathcal{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ şeklinde yazılabilir. $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunundan $U \in \mathcal{T}$ olur. O halde

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T} \tag{4.1}$$

dur.

b) $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $j \in J$ için $B_j \in \mathcal{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ şeklinde yazılabilir. $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}_1$ in bir tabanı olduğunundan $U \in \mathcal{T}_1$ olur. O halde

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1 \tag{4.2}$$

dir.

Bu durumda (4.1) ve (4.2) gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ dir.✓

NOT 4.15.

a) Teorem 4.10 nin (b) şartı ve Teorem 4.14 un (STB-2) şartı

STB-2′). "Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır"

şartına denktir.

b) $\mathcal{B}$ kolleksiyonu X kümesi üzerindeki bir $\mathcal{T}$ topolojisinin (sentetik) tabanı ise bir U alt kümesinin $\mathcal{T}$ ya ait olması için U nun $\mathcal{B}$ ye ait birtakım kümelerin birleşimi olarak yazılabilmesi gerekir. O halde hangi kümelerin $\mathcal{B}$ ye ait olduğunu biliyorsak $\mathcal{T}$ ya ait kümeleri de belirleyebiliriz. $\mathcal{T}$ ya ait kümeler $\mathcal{B}$ ye ait olan birtakım kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilen X kümesinin alt kümelerdir. $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i$ $(B_i \in \mathcal{B})$ ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ olacağından $\mathcal{T}$ yu belirlemek için $U \in \mathcal{P}(X) \backslash \mathcal{B}$ ve $U \neq \emptyset$ özelliğindeki U kümeleri içerisinden $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabilenlerin belirlenmesi yeterlidir. ✎

Teorem 4.14 çok kullanışlıdır. Bunun yardımıyla bir X kümesi üzerinde bir sentetik taban yazılarak bir topoloji elde edilebilir.

ÖRNEK 4.16. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ nin bir sentetik taban olduğunu göstererek tabanı $\mathcal{B}$ olan topolojiyi bulalım.

ÇÖZÜM:

STB-1). $X = \{a\} \cup \{b, c, d\}$ ve $\{a\}, \{b, c, d\} \in \mathcal{B}$ olduğundan $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ dir.

STB-2).

$$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset, \quad \{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset, \quad \{a\} \cap \{b, c, d\} = \emptyset$$
$$\{b\} \cap \{c, d\} = \emptyset, \quad \{b\} \cap \{b, c, d\} = \{b\}, \quad \{c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c, d\}$$

olduğundan her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ kümeleri için $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ olur. Bu durumda her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ kümeleri için $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathcal{B}$ ye ait birtakım kümelerin birleşimi olarak yazılabilir.

O halde Teoren 4.14 gereğince $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topolojinin sentetik tabanıdır.

Şimdi $\mathcal{T}$ topoljisini bulalım. Not ?? gereğince $U \in \mathcal{P}(X)\setminus\mathcal{B}$ ve $U \neq \emptyset$ özelliğindeki U kümeleri içerisinden $\mathcal{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabilenlerin belirlenmesi yeterlidir. Yani $\mathcal{B}$ ye ait birtakım kümelerin mümkün bütün birleşimlerini bulmalıyız.

$$\{a\}\bigcup\{b\} = \{a,b\},$$
$$\{b\}\bigcup\{c,d\} = \{b,c,d\},$$
$$\{c,d\}\bigcup\{b,c,d\} = \{b,c,d\},$$
$$\{a\}\bigcup\{c,d\} = \{a,c,d\},$$
$$\{a\}\bigcup\{b\}\bigcup\{b,c,d\} = \{a,b,c,d\} = X,$$
$$\{a\}\bigcup\{b\}\bigcup\{c,d\}\bigcup\{b,c,d\} = X$$
$$\{a\}\bigcup\{b\}\bigcup\{c,d\} = \{a,b,c,d\} = X,$$
$$\{a\}\bigcup\{b,c,d\} = \{a,b,c,d\} = X,$$
$$\{b\}\bigcup\{b,c,d\} = \{b,c,d\},$$
$$\{a\}\bigcup\{c,d\}\bigcup\{b,c,d\} = \{a,b,c,d\} = X,$$
$$\{b\}\bigcup\{c,d\}\bigcup\{b,c,d\} = \{b,c,d\},$$

olduğundan

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

olur.✍

ÖRNEK 4.17. ▷ **Ayrışım uzayı**

$\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in bir ayrışımı olsun. $\mathcal{P}$ nin bir sentetik taban olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

STB-1). $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in bir ayrışımı olduğundan $X = \bigcup_{B\in\mathcal{P}} B$ dir.

STB-2). Her $B_1, B_2 \in \mathcal{P}$ için $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ veya $B_1 = B_2$ dir. Bu durumda

$$\emptyset = B_1 \bigcap B_2 = \bigcup_{i\in\emptyset} B_i \ (B_i \in \mathcal{P}) \text{ ve } B_1 = B_1 \bigcap B_2 = B_1 \cup B_1 \ (B_1 \in \mathcal{P})$$

olduğundan $B_1 \bigcap B_2$ kümesi $\mathcal{P}$ nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.14 gereğince $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X üzerinde bir topolojinin tabanıdır. Bu topolojiye X üzerindeki $\mathcal{P}$ ayrışımına karşılık gelen ayrışım ($\mathcal{P}$ nin ürettiği) topolojisi veya kısaca ayrışım topolojisi denir ve genellikle $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ile göstererilir. $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ uzayınada ayrışım uzayı denir.✍

ÖRNEK 4.18. ▷

Herhangi bir $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayında her açık kümenin kapalı ve her kapalı kümenin açık olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayında bir U kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart U nın $\mathcal{P}$ nin birtakım elemanlarının birleşimi olarak yazılabilmesidir.

a) U kümesi açık olsun. Bu durumda

$$U = \bigcup_{i\in I} B_i \quad (B_i \in \mathcal{P})$$

olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. Diğeryandan

$$X\setminus U = \bigcup_{i\notin I} B_i \quad (B_i \in \mathcal{P})$$

olur. Yani $X\setminus U$ kümesi $\mathcal{P}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir. Böylece $X\setminus U$

kümesi açıktır. Bu durumda U kümesi kapalı olur.

b) U kümesi kapalı olsun. Bu durumda $X\setminus U$ kümesi açık olacağından

$$X\setminus U = \bigcup_{i\in I} B_i \quad (B_i \in \mathscr{P})$$

olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. Diğeryandan

$$U = \bigcup_{i\notin I} B_i \quad (B_i \in \mathscr{P})$$

olur. Yani U kümesi $\mathscr{P}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir. Böylece U kümesi açıktır.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ ayrışım uzayında her açık küme kapalı ve her kapalı küme açıktır.✍

TANIM 4.19. ▷
$\mathscr{P} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ve $\mathscr{P} = \{X\}$ kolleksiyonları X kümesinin birer ayrışımıdır. Bu ayrışımlara X in aşikar ayrışımları denir.

ÖRNEK 4.20. ▷
X bir küme olsun.

a) $\mathscr{P} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ayrışımının ürettiği topolojiyi bulalım.
b) $\mathscr{P} = \{X\}$ ayrışımının ürettiği topolojiyi bulalım.

ÇÖZÜM:

a) Örnek 4.8 gereğince $\mathscr{P} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ayrışımı X üzerindeki ayrık $\mathscr{P}(X)$ topolojisininin tabanıdır. Böylece $\mathscr{P} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ayrışımı X üzerindeki ayrık $\mathscr{P}(X)$ topolojisini üretir.

b) $\mathscr{P} = \{X\}$ ayrışımı X üzerindeki kaba topolojinin tabanıdır. Böylece $\mathscr{P} = \{X\}$ ayrışımı X üzerindeki kaba topolojiyi üretir.✍

TANIM 4.21. ▷ **$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ tek-çift uzayı**
$\mathscr{P} = \{\{2k-1, 2k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımıdır. Bu ayrışımın $\mathbb{N}$ üzerinde ürettiği topolojiye tek-çift topolojisi denir.☜

ÖRNEK 4.22. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\mathscr{P} = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$ olsun. Bu durumda $\mathscr{P}$ kolleksiyonu X in bir ayrışımıdır. $\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ topolojisini bulalım.

ÇÖZÜM: Not **??** gereğince $\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, c\} \in \mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ olur. Diğeryandan

$$X = \{a\} \cup \{b, c\} \cup \{d\}, \qquad \{a, d\} = \{a\} \cup \{d\},$$
$$\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b, c\}, \qquad \{b, c, d\} = \{d\} \cup \{b, c\}$$

olduğundan $\{a, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X \in \mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ olur. Buna göre

$$\mathcal{T}_{\mathscr{P}} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

olur.✍

ÖRNEK 4.23. ▷ $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ **uzayları**
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ olmak üzere $\mathscr{B}_{\text{sol}}$, $(a,b]$ tipindeki bütün aralıkların kolleksiyonu yani

$$\mathscr{B}_{\text{sol}} = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

olsun. $\mathscr{B}_{\text{sol}}$ un $\mathbb{R}$ üzerinde bir toplojinin tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

STB-1). $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x-1 \in \mathbb{R}$ ve $x \in (x-1, x] \in \mathscr{B}_{\text{sol}}$ dir. Bu durumda $x \in \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{\text{sol}}} B$ olur. O halde $\mathbb{R} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{\text{sol}}} B$ dir.

STB-2). $(a,b], (c,d] \in \mathscr{B}_{\text{sol}}$ olsun. Bu durumda

$$(a,b] \bigcap (c,d] = \emptyset \quad \text{veya} \quad (a,b] \bigcap (c,d] \neq \emptyset$$

dur.

i) $(a,b] \bigcap (c,d] = \emptyset$ ise

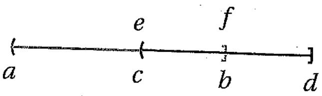
$$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i \quad (B_i \in \mathscr{B}_{\text{sol}})$$

olduğundan $(a,b] \bigcap (c,d]$ kümesi $\mathscr{B}_{\text{sol}}$ a ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabilir.

ii) $(a,b] \bigcap (c,d] \neq \emptyset$ ise $e = \max\{a,c\}$ ve $f = \min\{b,d\}$ olmak üzere

$$(a,b] \bigcap (c,d] = (e,f]$$

olur. $(e,f] \in \mathscr{B}_{\text{sol}}$ olduğundan $(a,b] \bigcap (c,d]$ kümesi $\mathscr{B}_{\text{sol}}$ a ait kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilir. Şekil 4.1 e bakınız.



Şekil 4.1

Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{B}_{\text{sol}}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojinin tabanıdır. Bu topolojiye $\mathbb{R}$ üzerindeki sol yarı açık aralık topolojisi ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayınada sol yarı açık aralık uzayı denir.

Tabanı $\mathscr{B}_{\text{sol}}$ olan $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisi $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topoloji değildir. Bunu şu şekilde gösterebiliriz. $(a,b]$ şeklindeki aralıklar $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisine göre açık olmalarına rağmen $(a,b]$ tipindeki aralıkar standart topolojiye göre açık değildir. Böylece $\mathscr{B}_{\text{sol}}$ bir topolojinin tabanı olmasına rağmen standart topolojinin bir tabanı değildir.

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ olmak üzere $\mathscr{B}_{\text{sağ}}$, $[a,b)$ tipindeki bütün aralıkların kolleksiyonu yani $\mathscr{B}_{\text{sağ}} = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\mathbb{R}$, $\mathscr{B}_{\text{sağ}}$ ın bütün elemanlarının birleşimi ve $\mathscr{B}$ nin herhangi iki elemanının arakesiti $\emptyset$ yada yine $\mathscr{B}_{\text{sağ}}$ ın bir elemanı olduğundan Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{B}_{\text{sağ}}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojinin tabanıdır. Bu topolojiye $\mathbb{R}$ üzerindeki sağ yarı açık aralık topolojisi ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayınada sağ yarı açık aralık uzayı denir. $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisi de $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiden farklıdır.✍

TANIM 4.24. ▷
$\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ise $\mathcal{T}_2$ topolojisine $\mathcal{T}_1$ den daha incedir veya $\mathcal{T}_1$ topolojisine $\mathcal{T}_2$ den daha kabadır denir. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ veya $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ oluyorsa bu topolojilere karşılaştırılabilir, aksi halde karşılaştırılamaz denir.☜

ÖRNEK 4.25. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\} \text{ ve } \mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

olsun. $\mathcal{T}$ nun $\mathcal{T}_{4n}$ topolojisinden daha kaba olduğunu gösterelim.✍

ÇÖZÜM: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\} \subseteq \mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ olduğundan $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{4n}$ den daha kabadır.

ÖRNEK 4.26. ▷
$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olsun. $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}$ dan daha kaba olduğunu gösterelim.✍

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}$ dan daha kabadır.

Teorem 4.27. ▷

$\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ kolleksiyonları sırasıyla boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojilerinin birer tabanı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ dir.

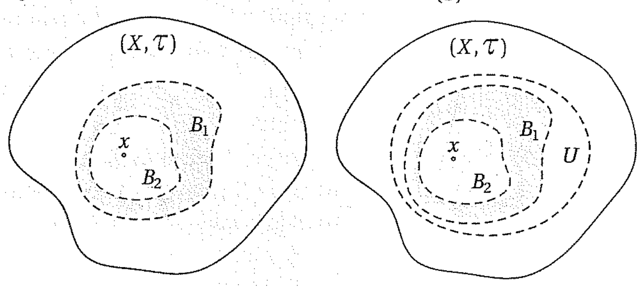
b) Her $B_1 \in \mathscr{B}_1$ ve her $x \in B_1$ için $x \in B_2 \subseteq B_1$ olacak şekilde bir $B_2 \in \mathscr{B}_2$ vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $B_1 \in \mathscr{B}_1$ ve $x \in B_1$ olsun. $\mathscr{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_1$ olduğundan $B_1 \in \mathcal{T}_1$ dir. Böylece $B_1 \in \mathcal{T}_2$ dir. Teorem 4.9 gereğince $x \in B_2 \subseteq B_1$ olacak şekilde bir $B_2 \in \mathscr{B}_2$ vardır. (Şekil 4.2(a) ya bakınız.)

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Teorem 4.9 gereğince her $x \in U$ için $x \in B_1 \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathscr{B}_1$ vardır. (b) gereğince $x \in B_2 \subseteq B_1$ olacak şekilde bir $B_2 \in \mathscr{B}_2$ vardır. Bu ise her $x \in U$ için $x \in B_2 \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_2 \in \mathscr{B}_2$ var demektir. Teorem 4.9 gereğince $U \in \mathcal{T}_2$ olur. U keyfi olduğundan $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. (Şekil 4.2(b) ye bakınız.)✔

Şekil 4.2 (a) (b)



ÖRNEK 4.28. ▷
$\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ ve $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojilerinin standart topolojiden daha ince olduklarını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ ve $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojilerinin standart topolojiden farklı olduklarını biliyoruz. Şimdi, $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ ve $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojilerinin standart topolojiden daha ince olduklarını gösterelim.

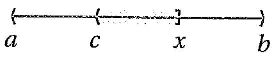
$$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı ve

$$\mathscr{B}_{\text{sol}} = \{(c,d] \mid c < d,\, c,d \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonununda $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisinin bir tabanı olduğunu biliyoruz. $(a,b) \in \mathscr{B}$ ve $x \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $a < c < x$ olmak üzere

$$x \in (c,x] \subseteq (a,b)$$



Şekil 4.3

olur. Teorem 4.27 gereğince $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisi standart topolojiden daha incedir. Şekil 4.3 e bakınız.

Benzer şekilde $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisinin standart topolojiden daha ince olduğu gösterilir.

TANIM 4.29. ▷
$\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ kolleksiyonları X kümesi üzerinde sırasıyla $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojilerinin tabanları olsun. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ ise $\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ ye denk tabanlar denir.

ÖRNEK 4.30. ▷
$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{b,e,f\}, \{a,c,d\}, \{a,b,e,f\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayı verilsin. Bu durumda

$$\mathscr{B}_1 = \{\{a\},\{c,d\},\{b,e,f\}\} \text{ ve } \mathscr{B}_2 = \{\{a\},\{c,d\},\{b,e,f\},\{a,c,d\}\}$$

kolleksiyonları $\mathcal{T}$ nun birer tabanı olduklarından denktirler.

Bir topolojinin birden fazla tabana sahip olabileceğini biliyoruz. $\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ gibi iki sentetik taban ne zaman aynı topolojiyi üretirler? Bu sorunun cevabını Teorem 4.27 yardımıyla yazacağımız Sonuç 4.31 vermektedir.

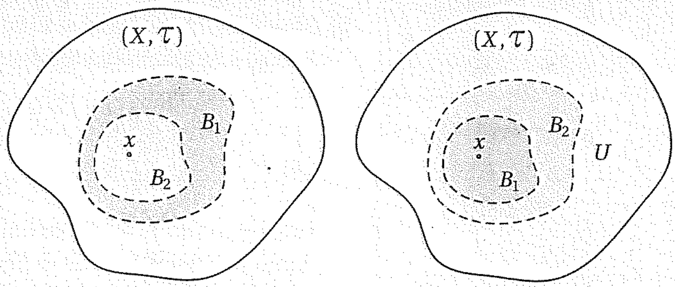
SONUÇ 4.31. ▷ $\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ kolleksiyonları sırasıyla boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojilerinin birer tabanı olsun. Bu durumda aşağıdaki (a) ve (b) önermeleri denktir. (Şekil 4.4 e bakınız.)

a) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ dir. ($\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ tabanları denktir.)

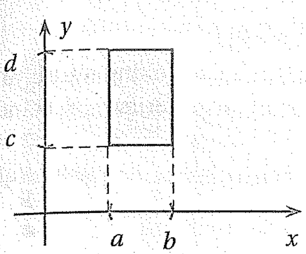
b) Aşağıdaki şartlar sağlanır.

   i) Her $B_1 \in \mathscr{B}_1$ ve her $x \in B_1$ için $x \in B_2 \subseteq B_1$ olacak şekilde bir $B_2 \in \mathscr{B}_2$ vardır.

   ii) Her $B_2 \in \mathscr{B}_2$ ve her $x \in B_2$ için $x \in B_1 \subseteq B_2$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathscr{B}_1$ vardır.



Şekil 4.4



Şekil 4.5

ÖRNEK 4.32. ▷
$\mathscr{B}_1 = \{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ olsun. (Şekil 4.5 e bakınız.) Sonuç 4.31 yı kullanarak $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Önce $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topolojinin tabanı olduğunu gösterelim.

STB-1). $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ olsun. $a<x<b$ ve $c<y<d$ olmak üzere $(x,y)\in(a,b)\times(c,d)$ dir. Bu durumda (x,y) noktası $\mathscr{B}_1$ e ait kümelerin birleşimine aittir. O halde $\mathbb{R}^2$, $(a,b)\times(c,d)$ şeklindeki kümelerin birleşimidir. Yani $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}_1$ e ait kümelerin birleşimidir.

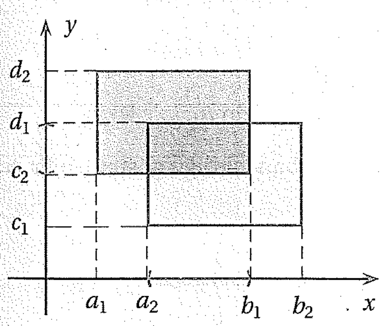
STB-2). $(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)$ ve $(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)$, $\mathscr{B}_1$ in iki elemanı olsun. Bu durumda

$$[(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)]\bigcap[(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)]=\emptyset$$

veya

$$[(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)]\bigcap[(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)]\neq\emptyset$$

dur.



Şekil 4.6

$[(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)]\bigcap[(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)]=\emptyset$ ise $\emptyset=\bigcup_{i\in\emptyset} B_i$, $B_i\in\mathscr{B}_1$ olduğundan bu arakesit $\mathscr{B}_1$ e ait bir takım kümelerin birleşimidir.
$[(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)]\bigcap[(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)]\neq\emptyset$ olsun.

$$a=\max\{a_1,a_2\},\ b=\min\{b_1,\ b_2\},\ c=\max\{c_1,c_2\},\ d=\min\{d_1,d_2\}$$

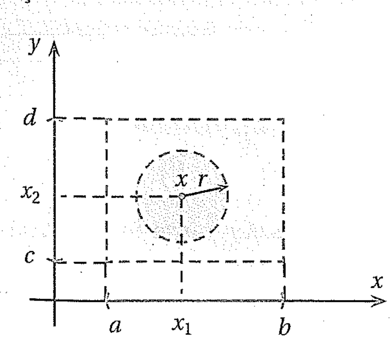
diyelim. Bu durumda

$$(a,b)\times(c,d)=[(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)]\bigcap[(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)]$$

olur. (Şekil 4.6 ye bakınız.) Böylece $(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)$ ve $(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)$ şeklindeki kümelerin arakesitleri yine $(a,b)\times(c,d)$ şeklinde bir kümedir. Yani bu arakesit yine $\mathscr{B}_1$ e aittir. Böylece

$$[(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)]\bigcap[(a_2,b_2)\times(c_2,d_2)]$$

kümesi $\mathscr{B}_1$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir.



Şekil 4.7

Teorem 4.14 ün şartları sağlanır. O halde $\mathscr{B}_1$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topolojinin tabanıdı

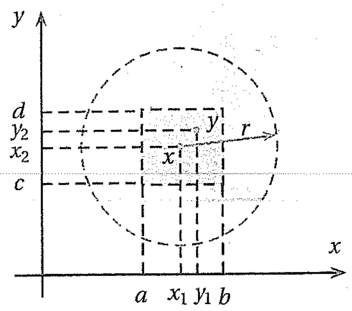
b) Şimdi $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğun Sonuç 4.31 yı kullanarak gösterelim. Not 4.6 gereğince $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$B(x,r) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2\}$$

olmak üzere

$$\mathscr{B} = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojisinin bir tabanı olduğunu biliyoru Sonuç 4.31 gereğince $\mathscr{B}$ ve $\mathscr{B}_1$ tabanlarının denk olduğunu gösterirsek $\mathscr{B}_1$ standa topolojinin bir tabanı olur.



Şekil 4.8

i) $(a,b) \times (c,d) \in \mathscr{B}_1$ ve $x = (x_1,x_2) \in (a,b) \times (c,d)$ için Şekil 4.7 de görüldüğü gibi

$$x \in B(x,r) \quad \text{ve} \quad B(x,r) \subseteq (a,b) \times (c,d)$$

olacak şekilde bir $B(x,r) \in \mathscr{B}$ vardır.

ii) $B(x,r) \in \mathscr{B}$ ve $y = (y_1,y_2) \in B(x,r)$ için Şekil 4.8 da görüldüğü gibi

$$y \in (a,b) \times (c,d) \quad \text{ve} \quad (a,b) \times (c,d) \subseteq B(x,r)$$

olacak şekilde bir $(a,b) \times (c,d) \in \mathscr{B}_1$ vardır.

Sonuç 4.31 gereğince, $\mathscr{B}$ ve $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonları $\mathbb{R}^2$ üzerinde aynı topolojinin t banıdırlar. $\mathscr{B}$, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğundan $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanıdır.

Benzer şekilde

$$\mathscr{B} = \{(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n) \mid i = 1,2,\cdots,n \text{ için } a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK 4.33. ▷

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,|\, x \in [a,b]\} \text{ ve } d_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

olmak üzere $(\mathscr{C}(a,b), d_\infty)$ ve $(\mathscr{C}(a,b), d_{\text{int}})$ metrik uzayları verilsin. d_∞ nin $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde ürettiği topoloji $\mathcal{T}_{d_\infty}$ ve d_{int} nin $\mathscr{C}(a,b)$ üzerinde ürettiği topoloji $\mathcal{T}_{d_{\text{int}}}$ olsun.

a) $\mathcal{T}_{d_\infty}$ nin $\mathcal{T}_{d_{\text{int}}}$ den daha ince olduğunu gösterelim.

b) $\mathcal{T}_{d_{\text{int}}}$ topolojisinin $\mathcal{T}_{d_\infty}$ topolojisinden ince olamayacağını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon)$, $(\mathscr{C}(a,b), d_{\text{int}})$ uzayında f_0 merkezli ε yarı çaplı açık yuvar ve $f \in B_{d_{\text{int}}}(f_0,$ olsun. $B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon)$ kümesi (X, d_{int}) uzayında açık olduğundan

$$B_{d_{\text{int}}}(f,\varepsilon_1) \subseteq B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ vardır. $\delta = \varepsilon_1/(b-a)$ diyelim. $B_{d_\infty}(f,\delta) \subseteq B_{d_{\text{int}}}(f,\varepsilon_1)$ old ğunu gösterelim. $g \in B_{d_\infty}(f,\delta)$ olsun. Bu durumda

$$d_\infty(g,f) = \sup\{|g(x)-f(x)| : x \in [a,b]\} < \delta = \frac{\varepsilon_1}{b-a}$$

dır. Böylece her $x \in [a,b]$ için

$$|g(x)-f(x)| \leq d_\infty(g,f) < \frac{\varepsilon_1}{b-a}$$

olduğundan

$$d_{\text{int}}(g,f) = \int_a^b |g(x)-f(x)|\,dx < \int_a^b \left(\frac{\varepsilon_1}{b-a}\right) dx = \varepsilon_1$$

olur. O halde $g \in B_{d_{\text{int}}}(f,\varepsilon_1)$ olur. Bu her $g \in B_{d_\infty}(f,\delta)$ için doğru olduğundan

$$B_{d_\infty}(f,\delta) \subseteq B_{d_{\text{int}}}(f,\varepsilon_1)$$

olur. Bu durumda her $f \in B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon)$ için $B_{d_\infty}(f,\delta) \subseteq B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Teorem 4.27 gereğince $\mathcal{T}_{d_\infty}$ topolojisi $\mathcal{T}_{d_{\text{int}}}$ topolojisinden incedir. Yani

$$\mathcal{T}_{d_{\text{int}}} \subseteq \mathcal{T}_{d_\infty}$$

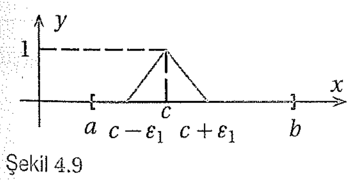
dur.

b) Her $x \in [a,b]$ için $f_0(x) = 0$ olmak üzere $B_{d_\infty}(f_0,1)$ kümesini göz önüne alalım. $f_0 \in B_{d_\infty}(f_0,1)$ için $B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(f_0,1)$ olacak şelilde bir $\varepsilon > 0$ olduğunu varsayalım. Bir $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ seçelim ve

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a < x \leq c-\varepsilon_1 \\ \dfrac{x-c}{\varepsilon_1}+1, & c-\varepsilon_1 \leq x \leq c \\ \dfrac{c-x}{\varepsilon_1}+1, & c \leq x \leq c+\varepsilon_1 \\ 0, & c+\varepsilon_1 \leq x \leq b \end{cases}$$

şeklinde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. (Şekil 4.9 ye bakınız.) Açıkça

$$d_{\text{int}}(f_0,f) = \int_a^b |f(x)|\,dx = \varepsilon_1 < \varepsilon$$



Şekil 4.9

dur. Yani $f \in B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon)$ dur. Diğer yandan

$$d_\infty(f_0,f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = 1$$

olduğundan $f \notin B_{d_\infty}(f_0,1)$ olur. Bu ise $B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(f_0,1)$ olması ile çelişir. Bu durumda

$$B_{d_{\text{int}}}(f_0,\varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(f_0,1)$$

olacak şekilde hiç bir $\varepsilon > 0$ yoktur. Teorem 4.27 gereğince $\mathcal{T}_{d_{\text{int}}}$ topolojisi $\mathcal{T}_{d_\infty}$ topolojisinden ince olamaz. ✍

Herhangi bir X kümesi üzerindeki farklı metrikler aynı topolojiyi üretebilir.

TANIM 4.34. ▷
d_1 ve d_2 bir X kümesi üzerinde iki metrik olsun. d_1 ve d_2 metrikleri X kümesi üzerinde aynı topolojiyi üretiyorlarsa bu metriklere denk metrikler denir.

ÖRNEK 4.35. ▷
Her $x, y \in X$ için $e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ şeklinde tanımlanan e metriğinin d metriği ile denk olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) (X,e) uzayında keyfi bir $B_e(x,\varepsilon)$ açık yuvarı verilsin.

i) Önce, $0<\delta<1$, $\delta<\varepsilon$ ise $B_d(x,\delta) \subseteq B_e(x,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. $y \in B_d(x,\delta)$ olsun. Bu durumda

$$d(x,y) < \delta < 1$$

olduğundan $e(x,y) = d(x,y)$ dir. Böylece $\delta < \varepsilon$ olduğundan

$$e(x,y) = d(x,y) < \delta < \varepsilon$$

olur. O halde $y \in B_e(x,\varepsilon)$ dur. Bu her $y \in B_d(x,\delta)$ için doğru olduğundan $B_d(x,\delta) \subseteq B_e(x,\varepsilon)$ olur.

ii) Şimdi, $y \in B_e(x,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $B_e(x,\varepsilon)$ kümesi (X,e) uzayında açık bir küme olduğundan $B_e(y,\varepsilon_1) \subseteq B_e(x,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ sayısı vardır. (i) gereğince $B_d(y,\delta) \subseteq B_e(y,\varepsilon_1)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda her $y \in B_e(x,\varepsilon)$ için

$$B_d(y,\delta) \subseteq B_e(x,\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $\mathcal{T}_e \subseteq \mathcal{T}_d$ dir.

b) (X,d) uzayında keyfi bir $B_d(x,\varepsilon)$ açık yuvarı verilsin ve $y \in B_d(x,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $B_d(x,\varepsilon)$ kümesi (X,d) uzayında açık olduğundan

$$B_d(y,\varepsilon_1) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ sayısı vardır. $\delta < 1$ ve $\delta < \varepsilon_1$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı seçelim. $z \in B_e(y,\delta)$ ise $e(z,y) < \delta < 1$ olduğundan

$$d(z,y) = e(z,y) < \delta < \varepsilon_1$$

dir. Böylece $d(z,y) < \varepsilon_1$ dir. O halde $z \in B_d(y,\varepsilon_1)$ olur. Bu her $z \in B_e(y,\delta)$ için doğru olduğundan $B_e(y,\delta) \subseteq B_d(y,\varepsilon_1)$ olur. Bu durumda

$$B_e(y,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$$

olur. Bu durumda $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_e$ dir.

(a), (b) ve Sonuç 4.31 gereğince d ve e metrikleri X üzerinde aynı topolojiyi üretir.

ÖRNEK 4.36. ▷
Her $x, y \in X$ için

$$p(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

şeklinde tanımlanan p metriğinin d metriğine denk olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\varepsilon > 0$ için $p(x,y) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ise açıkça $d(x,y) < \varepsilon$ olur. (X,d) uzayında $B_d(x,\varepsilon)$ açık yuvarı verilsin. $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ise $B_p(x,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. $y \in B_p(x,\delta)$ ise $p(x,y) < \delta$ dır. Böylece $p(x,y) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ olur. O halde $d(x,y) < \varepsilon$ dur. Yani $y \in B_d(x,\varepsilon)$ dur. Bu her $y \in B_p(x,\delta)$ için doğru olduğundan

$$B_p(x,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$$

olur. Şimdi, $y \in B_d(x,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $B_d(x,\varepsilon)$ kümesi (X,d) uzayında açık olduğundan $B_d(y,\varepsilon_1) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ vardır. Böylece $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}$ olmak üzere

$$B_p(y,\delta_1) \subseteq B_d(y,\varepsilon_1) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$$

olur.

b) Benzer şekilde (X,p) uzayında verilen her $B_p(x,\delta)$ açık yuvarı ve her $y \in B_p(x,\delta)$ için

$$y \in B_d(y,\varepsilon) \subseteq B_p(x,\delta)$$

olacak şekilde (X,d) uzayında bir $B_d(y,\varepsilon)$ açık yuvarı olduğu gösterilir.

(a), (b) ve Sonuç 4.31 gereğince d ve p metrikleri X üzerinde aynı topolojiyi üretirler.✍

Örnek 4.35 ve Örnek 4.36 gereğince X üzerindeki d metriği ile e ve d metriği ile p metriği denk olduklarından aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 4.37. ▷ (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda X üzerinde d metriği ile denk olan en az bir sınırlı metrik vardır.

TANIM 4.38. ▷
d_1 ve d_2 bir X kümesi üzerinde iki metrik olsun. Her $x,y \in X$ için

$$cd_1(x,y) \le d_2(x,y) \le Cd_1(x,y)$$

olacak şekilde $c, C > 0$ reel sayıları varsa d_1 ve d_2 metriklerine Lipschitz denk metrikler denir.☜

Teorem 4.39. ▷
d_1 ve d_2 bir X kümesi üzerinde Lipschitz denk metrikler olsun. Bu durumda d_1 ve d_2 metrikleri denktir.

İSPAT: Önce her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için

$$B_{d_2}(x,c\varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x,\varepsilon) \text{ ve } B_{d_1}(x,\varepsilon/C) \subseteq B_{d_2}(x,\varepsilon)$$

olduğunu gösterelim. $y \in B_{d_2}(x,c\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $d_2(x,y) < c\varepsilon$ olur. $cd_1(x,y) \le d_2(x,y)$ olduğundan $cd_1(x,y) < c\varepsilon$ yani $d_1(x,y) < \varepsilon$ olur. Bu ise $y \in B_{d_1}(x,\varepsilon)$ demektir.

Bu her $y \in B_{d_2}(x, c\varepsilon)$ için doğru olduğundan

$$B_{d_2}(x, c\varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon) \tag{4.3}$$

olur.

$y \in B_{d_1}(x, \varepsilon / C)$ olsun. Bu durumda $d_1(x, y) < \frac{\varepsilon}{C}$ olur. $d_2(x, y) \le C d_1(x, y)$ olduğundan

$$d_2(x, y) \le C d_1(x, y) < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

yani $d_2(x, y) < \varepsilon$ olur. Bu ise $y \in B_{d_2}(x, \varepsilon)$ demektir. Bu her $y \in B_{d_1}(x, \varepsilon / C)$ için doğru olduğundan

$$B_{d_1}(x, \varepsilon / C) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon) \tag{4.4}$$

olur.

a) $y \in B_{d_2}(x, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $B_{d_2}(x, \varepsilon)$ kümesi (X, d_2) uzayında açık olduğundan

$$B_{d_2}(y, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ vardır. Bu durumda 4.4 gereğince

$$B_{d_1}(y, \delta_1) \subseteq B_{d_2}(y, \varepsilon_1)$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ vardır. O halde her $y \in B_{d_2}(x, \varepsilon)$ için

$$B_{d_1}(y, \delta_1) \subseteq B_{d_2}(y, \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ vardır.

b) $y \in B_{d_1}(x, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $B_{d_1}(x, \varepsilon)$ kümesi (X, d_1) uzayında açık olduğundan

$$B_{d_1}(y, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ vardır. Bu durumda 4.3 gereğince

$$B_{d_2}(y, \delta_1) \subseteq B_{d_1}(y, \varepsilon_1)$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ vardır. O halde $y \in B_{d_1}(x, \varepsilon)$ için

$$B_{d_2}(y, \delta_1) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ vardır.

(a), (b) ve Sonuç 4.31 gereğince $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ olur. Yani d_1 ve d_2 metrikleri denktir.✓

ÖRNEK 4.40. ▷
$\mathbb{R}^n$ üzerinde Örnek 2.3, Örnek 2.4 ve Örnek 2.6 de tanımlanan d_∞, d_1 ve d_2 metriklerinin denk olduklarını gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$n^{-1} d_1(x, y) \le d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le \sqrt{n} d_\infty(x, y) \le \sqrt{n} d_1(x, y)$$

olduğundan bu metrikler denktirler. (Alıştırmalar 22 e bakınız.)✍

Teorem 4.41. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topoljik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_A = \{A \cap B_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu da $\mathcal{T}_A$ nın bir tabanıdır.

İSPAT:

TB-1). $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{T}_A$ olduğu açıktır.
TB-2). $U \in \mathcal{T}_A$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan $V = \bigcup_{j \in J} B_j$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ vardır. Bu durumda $j \in J$ için $A \cap B_j \in \mathcal{B}_A$ ve

$$U = A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j)$$

olur.

O halde $\mathcal{B}_A$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_A$ nın bir tabanıdır.✔

ÖRNEK 4.42. ▷
$\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{R} \times \{0\}$ alt uzayının bir tabanını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 4.32 gereğince

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ nin standart topolojisi $\mathcal{T}_{d_2}$ nin bir tabanıdır. Her bir $(a, b) \times (c, d) \in \mathcal{B}$ için

$$(\mathbb{R} \times \{0\}) \cap ((a, b) \times (c, d)) = (a, b) \times \{0\}$$

olduğundan Teorem 4.2 gereğince

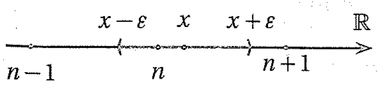
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \{0\}} = \{(a, b) \times \{0\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $\mathbb{R} \times \{0\}$ üzerindeki $(\mathcal{T}_{d_2})_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ alt uzay topolojinin bir tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.43. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayı verilsin. $\mathbb{N}$ üzerindeki alt uzay topolojisini bulalım.

ÇÖZÜM: Not 4.6 gereğince

$$\mathcal{B} = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon < 1/2\}$$



Şekil 4.10

kolleksiyonu $\mathbb{R}$ nin standart topolojisi $\mathcal{T}_d$ nin bir tabanıdır. Her bir $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathcal{B}$ için

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{N} = \{n\}$$

olacak şekilde tek bir $n \in \mathbb{N}$ olduğundan Teorem 4.2 gereğince $\mathcal{B}_{\mathbb{N}} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{N}$ üzerindeki $(\mathcal{T}_d)_{\mathbb{N}}$ alt uzay topolojinin bir tabanıdır. (Şekil 4.10 ye bakınız.) O halde, $\mathbb{N}$ üzerindeki $(\mathcal{T}_d)_{\mathbb{N}}$ alt uzay topolojisi $\mathbb{N}$ üzerindeki ayrık topolojidir.✍

Teorem 4.44. ▷

(X,d) bir metrik uzay, d nin X üzerinde ürettiği topoloji $\mathcal{T}_d$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere d_A nın A üzerinde ürettiği topoloji $\mathcal{T}_{d_A}$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{d_A}$ dır.

İSPAT: Örnek 4.5 gereğince $\{B_X(x,\varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_d$ nin bir tabanı ve $\mathcal{B} = \{B_A(x,\varepsilon) | x \in A, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu da $\mathcal{T}_{d_A}$ nın bir tabanıdır.

a) $U \in \mathcal{T}_{d_A}$ olsun. Bu durumda $i \in I$ için $x_i \in U$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} B_A(x_i, \varepsilon_i)$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. Teorem 2.29 gereğince her bir $i \in I$ için

$$B_A(x_i,\varepsilon_i) = A \cap B_X(x_i,\varepsilon_i)$$

dir. Böylece

$$U = \bigcup_{i \in I} B_A(x_i,\varepsilon_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_X(x_i,\varepsilon_i)) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_X(x_i,\varepsilon_i) \right)$$

dir. $\bigcup_{i \in I} B_X(x_i,\varepsilon_i) \in \mathcal{T}_d$ olduğundan $U \in (\mathcal{T}_d)_A$ olur. Böylece

$$\mathcal{T}_{d_A} \subseteq (\mathcal{T}_d)_A \tag{4.5}$$

dır.

b) $U \in (\mathcal{T}_d)_A$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}_d$ vardır. $x \in U$ ise $x \in A$ ve $x \in V$ olduğundan $B_X(x,\varepsilon_x) \subseteq V$ olacak şekilde bir $\varepsilon_x > 0$ vardır. Böylece

$$x \in A \cap B_X(x,\varepsilon_x) \subseteq V \cap A = U$$

olur. Teorem 2.29 gereğince $B_A(x,\varepsilon_x) \subseteq U$ olur. O halde $U = \bigcup_{x \in U} B_A(x,\varepsilon_x)$ dir. Her $x \in U$ için $B_A(x,\varepsilon_x) \in \mathcal{T}_{d_A}$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_{d_A}$ dır. O halde

$$(\mathcal{T}_d)_A \subseteq \mathcal{T}_{d_A} \tag{4.6}$$

olur.

Böylece (4.5) ve (4.6) gereğince $(\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{d_A}$ dır.✔

4.2. Alt Tabanlar

TANIM 4.45. ▷ **Alt taban**

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$, X in açık kümelerinden oluşan boş olmayan bir kolleksiyon olsun. $\mathcal{S}$ ye ait bütün sonlu sayıdaki bir takım kümelerin arakesiti $\mathcal{T}$ nun bir tabanı oluyorsa $\mathcal{S}$ ye $\mathcal{T}$ nun bir alt tabanı denir. Yani

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{j \in J} S_j \,\middle|\, J \text{ sonlu bir indis kümesi ve } j \in J \text{ için } S_j \in \mathcal{S} \right\}$$

kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı oluyorsa $\mathcal{S}$ ye $\mathcal{T}$ nun bir alt tabanı denir.

Teorem 4.46. ▷

X boş olmayan bir küme ve $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ olsun. Bu durumda $\mathscr{S}$ kolleksiyonu X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanıdır.

Not

$\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı ise

$$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}} \subseteq \mathcal{T}$$

olduğu açıktır. Diğer yandan

$$X = \bigcap_{j\in\emptyset} S_j \quad (j \in \emptyset \text{ için } S_j \in \mathscr{S})$$

olduğundan her zaman $X \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ olur.

İSPAT: $\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \left\{ \bigcap_{j\in J} S_j \,\middle|\, J \text{ sonlu bir indis kümesi ve } j \in J \text{ için } S_j \in \mathscr{S} \right\}$ olsun. $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ nin Teorem 4.14 un şartlarını sağlandığını gösterelim.

STB-1). $j \in \emptyset$ için $S_j \in \mathscr{S}$ olmak üzere

$$X = \bigcap_{j\in\emptyset} S_j$$

olduğundan $X \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ dir. Yani $X = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_{\mathscr{S}}} B$ dir.

STB-2). $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ olsun.

i) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ise

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i\in\emptyset} B_i \quad (B_i \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}})$$

olduğundan $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimidir.

ii) $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ nin tanımı gereğince bazı $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$S_1, S_2, \cdots, S_n \in \mathscr{S} \quad \text{ve} \quad S'_1, S'_2, \cdots, S'_m \in \mathscr{S}$$

olmak üzere

$$B_1 = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \text{ ve } B_2 = S'_1 \cap S'_2 \cap \cdots \cap S'_m$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n) \cap (S'_1 \cap S'_2 \cap \cdots \cap S'_m) \\ &= S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \cap S'_1 \cap S'_2 \cap \cdots \cap S'_m \end{aligned}$$

olduğundan $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ nin tanımı gereğince $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ olur. O halde, $B_1 \cap B_2$ kümesi $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabilir.

Teorem 4.14 gereğince $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ kolleksiyonu X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisininin tabanıdır. Alt taban tanımı gereğince $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir alt tabanıdır.✔

ÖRNEK 4.47. ▷

$\mathscr{S} = \{\{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ kolleksiyonunun $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olduğunu göstererek $\mathcal{T}$ topolojisini bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 4.12 da

$$\mathscr{S} = \{\{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

kolleksiyonunun $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde hiç bir topolojinin tabanı olmadığını gördük. $\mathscr{S}$ kolleksiyonunun X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olduğunu Teorem 4.46 den biliyoruz. Şimdi bu $\mathcal{T}$ topolojisini bulalım. $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}} \subseteq \mathcal{T}$ ve Not 4.2 gereğince topolojisi $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ayrık topolojidir.✍

ÖRNEK 4.52. ▷
$\mathscr{S} = \{(a,\infty), (-\infty, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart $\mathcal{T}_d$ topolojisinin alt tabanı olduğunu gösterelim.

Not
$(X, \mathcal{T})$ bir topoljik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathscr{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir alt tabanı ise $\mathscr{S}_A = \{A \cap S_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonunun $\mathcal{T}_A$ nın bir alt tabanı olduğu gösterilebilir.

ÇÖZÜM: $\mathscr{S}$ ye ait sonlu sayıdaki kümelerin arakesitleri $\emptyset, (a,\infty), (-\infty, b)$ veya (a,b) şeklinde bir aralıktır. Yani $\mathscr{S}$ nin ürettiği taban

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{\emptyset, (a,b), (c,\infty), (-\infty, d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

dir. Diğer yandan

$$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}} \subseteq \mathcal{T}_d$ olduğundan $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ de $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır. Böylece $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.53. ▷
$\mathscr{S} = \{(a,b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki $\mathcal{T}_{d_2}$ standart topolojisinin bir alt tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{S}$ ye ait sonlu sayıdaki kümelerin arakesitleri $\emptyset, (a,b) \times (c,d), (e,f) \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} \times (g,h)$ şeklindeki kümelerdir. Yani $\mathscr{S}$ nin ürettiği taban

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{\emptyset, (a,b) \times (c,d), (e,f) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (g,h) \mid a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}\}$$

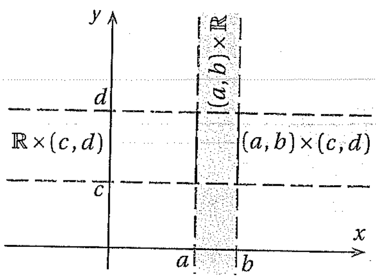
dir. Diğer yandan

$$\mathscr{B} = \{(a,b) \times (c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}} \subseteq \mathcal{T}_{d_2}$ olduğundan $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ de $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır. $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır. Benzer şekilde,

$$\mathscr{S} = \{(a_1, b_1) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}, \cdots, \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times (a_n, b_n) \mid i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } a_n, b_n \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanı olduğu gösterilir.✍



Şekil 4.11

4.3. Bir Noktanın Komşuluğu

TANIM 4.54. ▷ **Bir noktanın komşuluğu**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesine x noktasının bir komşuluğu denir. Diğer bir deyişle $\mathcal{T}$ nun x noktasını içeren her elemanına x noktasının bir komşuluğu denir. Bir $x \in X$ noktasının komşuluklarının kolleksiyonu genellikle $\mathscr{N}_x$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 4.55. ▷
$(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayında bir x noktasının komşuluklarının kolleksiyonunu bulalım.

Not

1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ ise $x \in X$ ve $X \in \mathcal{T}$ olduğundan tanım gereğince X kümesi x noktasının bir komşuluğu olur. Yani X kümesi her $x \in X$ noktasının bir komşuluğudur.
2. Bazı yazarlar x noktasını içeren bir açık kümeyi kapsayan X in herhangi bir alt kümesini x noktasının bir komşuluğu olarak ve x noktasını içeren açık bir kümeyi ise x in açık komşuluğu olarak isimlendirirler. Biz bu kitap boyunca x noktasını içeren açık bir kümeye x in bir komşuluğu diyeceğiz.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayında X in her alt kümesi açık olduğundan x noktasının komşuluklarının kolleksiyonu $\mathcal{N}_x = \{V \subseteq X \mid x \in V\}$ dir.

ÖRNEK 4.56. ▷
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayında bir x noktasının komşuluklarının kolleksiyonunu bulalım.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayında kaba uzayının açık kümeleri sadece $\emptyset$ ve X olduğundan x noktasının komşuluğu sadece X kümesidir. Yani $\mathcal{N}_x = \{X\}$ dir.

ÖRNEK 4.57. ▷
$(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayında a, b, c noktalarının komşuluklarının kolleksiyonunu bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olduğundan

a) $a \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$$U = X,\ U = \{a\},\ U = \{b\},\ U = \{a,b\},\ U = \{a,c\} \text{ ve } U = \{a,b,c\}$$

olacağından a noktasının komşuluklarının kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_a = \{X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

dir.

b) $b \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$$U = X,\ U = \{b\},\ U = \{a,b\} \text{ ve } U = \{a,b,c\}$$

olacağından b noktasının komşuluklarının kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_b = \{X, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

dir.

c) $c \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_{4n}$ ise

$$U = X,\ U = \{a,c\}, \text{ ve } U = \{a,b,c\}$$

olacağından c noktasının komşuluklarının kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_c = \{X, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

dir.

ÖRNEK 4.58. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı ve $x \in X$ verilsin. x noktasının komşuluklarını bulalım.

ÇÖZÜM:

a) $x = a$ olsun. U, a nın bir komşuluğu olsun. Bu durumda $a \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_a$ olur. Bu durumda $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince $U = X$ olmak zorundadır. Bu durumda a nın tek bir X komşuluğu vardır. Yani a nın komşuluklarının kolleksiyonu $\mathcal{N}_a = \{X\}$ dir.

b) $x \neq a$ olsun. U, x nın X den farklı bir komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_a$ olur. $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince $a \notin U$ dur. Böylece $a \notin U, x \in U$ olur. Diğer bir deyişle X in $x \in U \setminus \{a\}$ özelliğindeki her U alt kümesi için $U \setminus \{a\}$ kümesi x in b komşuluğudur. O halde x in komşuluklarının kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_x = \{U \mid x \in U, a \notin U\} \cup \{X\} = \{U \setminus \{a\} \subseteq X \mid x \in U \setminus \{a\}\}$$

dir.✍

ÖRNEK 4.59. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı ve $x \in X$ verilsin. x noktasının komşuluklarını bulalım.

ÇÖZÜM:

a) $x = a$ olsun. $a \in U$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $U \in \mathcal{T}(a)$ olu Buna göre X in $a \in U$ özelliğindeki her alt kümesi a nın bir komşuluğudur. O hald a nın komşuluklarının kolleksiyonu $\mathcal{N}_a = \{U \subseteq X \mid a \in U\}$ dur.

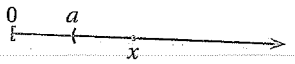
b) $x \neq a$ olsun. U, x in bir komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}(a)$ olur $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $a \in U$ dur. Bu durumda $\{a, x\} \subseteq U$ olur. O halde x in komşuluklarının kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_x = \{U \subseteq X \mid \{a, x\} \subseteq U\}$$

dur.✍

ÖRNEK 4.60. ▷
$X = [0, \infty)$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{(a, \infty) \mid a \geq 0\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı ve $x \in X$ verilsin. x noktasının komşuluklarını bulalım.

ÇÖZÜM:



Şekil 4.12

a) $x = 0$ olsun. Bu durumda x noktasını içeren tek açık küme X olduğundan $x = 0$ noktasınının komşuluklarının kolleksiyonu $\mathcal{N}_0 = \{X\}$ dir.

b) $x \neq 0$ olsun. U, x in X den farklı bir komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olur. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $U = (a, \infty)$ olacak şekilde $a \geq 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $x \in U$ olduğundan $a < x$ dir. Bu durumda $x \in X$ noktasının komşuluklarının kolleksiyonu $\mathcal{N}_x = \{(a, \infty) \mid 0 \leq a < x\} \cup \{X\}$ olur. (Şekil 4.12 a bakınız.)✍

4.4. Yerel Tabanlar

TANIM 4.61. ▷ **Bir noktanın yerel tabanı**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathcal{B}_x$ de x noktasını içeren açık kümelerin bir kolleksiyonu olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}_x$ varsa $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonuna x noktasının komşuluklarının bir tabanı veya x noktasının bir yerel tabanı denir. Yani

YTB-1). $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ dur,

YTB-2). $B \in \mathcal{B}_x$ ise $x \in B$ dir,

YTB-3). $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}_x$ vardır

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonuna x noktasının komşuluklarının bir tabanı veya x noktasının bir yerel tabanı denir.

ÖRNEK 4.62. ▷
$(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı verilsin. $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ kolleksiyonunun $x \in X$ noktasının yerel tabanını olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

YTB-1). $\mathcal{B}_x$ in tanımı gererğince $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ olduğu açıktır.
YTB-2). $x \in \{x\}$ dir.
YTB-3). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{P}(X)$ ise $\{x\} \subseteq U$ dur.

Bu durumda tanım gereğince $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.63. ▷
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayı verilsin. $\mathcal{B}_x = \{X\}$ kolleksiyonunun $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

YTB-1). $X \in \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ olur.
YTB-2). $x \in X$ dir.
YTB-3). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ ise $U = X$ olur. Böylece $X \subseteq U$ dur.

Tanım gereğince $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.64. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı verilsin. $x \in X$ için $\mathcal{B}_x = \{\{a, x\}\}$ kolleksiyonunun x noktasının yerel tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

YTB-1). $\mathcal{B}_x$ ve $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}(a)$ dır.
YTB-2). $x \in \{a, x\}$ dır.
YTB-3). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}(a)$ ise $a \in U$ olacağından $\{a, x\} \subseteq U$ olur.

Bu durumda tanım gereğince $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.65. ▷
(X, d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda
a) $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun x noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösterelim.
b) $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonunun x noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun x noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösterelim.
YTB-1). $\mathcal{B}_x$ in her elemanının açık olduğunu biliyoruz.
YTB-2). Her $\varepsilon > 0$ için $x \in B(x, \varepsilon)$ dir.
YTB-3). $x \in U$ ve U açık olsun. Örnek 4.5 gereğince $U = \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon_i)$ şeklinde

yazılabilir. Böylece $x \in B(x_{i_0}, \varepsilon_{i_0})$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Bu durumda

$$B(x_{i_0}, \varepsilon_{i_0}) \in \mathscr{B}_x \quad \text{ve} \quad B(x_{i_0}, \varepsilon_{i_0}) \subseteq U$$

olur.

Tanım gereğince $\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu (X,d) uzayında x noktasının yerel bir tabanıdır.

b) Benzer şekilde $\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonunun x noktasının yerel tabanı olduğu gösterilir.✍

NOT 4.66. Örnek 4.65 gereğince

a) $x \in \mathbb{R}$ için $\mathscr{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayında x noktasının yerel bir tabanıdır.

b) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$B(x,\varepsilon) = \left\{ (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

olmak üzere $\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^n$ standart uzayında x noktasının yerel bir tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.67. ▷

$\mathscr{B}$ kolleksiyonu bir $\mathcal{T}$ topolojisinin tabanı olsun.

$$\mathscr{B}_x = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$$

kolleksiyonunun x noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

YTB-1). Taban tanımı gereğince $\mathscr{B}_x \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ dur.

YTB-2). $\mathscr{B}_x$ in tanımı gereğince $U \in \mathscr{B}_x$ ise $x \in U$ dur.

YTB-3). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Teorem 4.9 gereğince $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır.

Tanım gereğince $\mathscr{B}_x$, x noktasının bir yerel tabanıdır.✍

ÖRNEK 4.68. ▷

$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayında a,b,c,d,e,f noktalarının birer yerel tabanlarını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 4.4 gereğince

$$\mathscr{B} = \{\{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

kolleksiyonu $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ kümesi üzerindeki

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

topolojisinin bir tabanıdır. Örnek 4.67 gereğince

$$\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}, \quad \mathscr{B}_b = \{\{b,c,d,e,f\}\}, \quad \mathscr{B}_c = \{\{c,d\},\{b,c,d,e,f\}\},$$
$$\mathscr{B}_d = \{\{c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}, \quad \mathscr{B}_e = \{\{b,c,d,e,f\}\}, \quad \mathscr{B}_f = \{\{b,c,d,e,f\}\}$$

olur. Diğer yandan $\{c,d\} \subseteq \{b,c,d,e,f\}$ olduğundan $\{b,c,d,e,f\}$ yi kapsayan her U açık kümesi $\{c,d\}$ kümesinide kapsar. Bu durumda

$$\mathscr{B}_c = \{\{c,d\}\} \text{ ve } \mathscr{B}_d = \{\{c,d\}\}$$

olarak alınabilir.✍

SONUÇ 4.69. ⊳ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in A$ olmak üzere $\mathscr{B}_x = \{B_i | i \in I\}$ kolleksiyonu x noktasının $(X,\mathcal{T})$ uzayında yerel bir tabanı olsun. Bu durumda $\mathscr{B}_{A_x} = \{A \cap B_i | i \in I\}$ kolleksiyonu da x noktasının $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında yerel bir tabanıdır.

İSPAT:

YTB-1). $\mathscr{B}_{A_x}$ in tanımı gereğince $\mathscr{B}_{A_x} \subseteq \mathcal{T}_A$ dır.

YTB-2). $A \cap B_i \in \mathscr{B}_{A_x}$ ise $x \in A$ ve $x \in B_i$ olduğundan $x \in A \cap B_i$ olur.

YTB-3). $U \in \mathcal{T}_A$ ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Diğer yandan $\mathscr{B}_x = \{B_i | i \in I\}$ kolleksiyonu x noktasının $(X,\mathcal{T})$ uzayında yerel bir tabanı olduğundan $B_{i_0} \subseteq V$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Bu durumda $A \cap B_{i_0} \in \mathscr{B}_{A_x}$ ve $A \cap B_{i_0} \subseteq A \cap V = U$ olur.

O halde $\mathscr{B}_{A_x}$ kolleksiyonu x noktasının $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında yerel bir tabanıdır. ✔

4.5. Alıştırmalar

1. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ boş olmayan bir X kümesi üzerinde iki topoloji olmak üzere $\mathscr{B}$, $\mathcal{T}_1$ in bir tabanı olsun. $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_2$ ise $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğunu gösteriniz.

2. $\mathscr{B}$ boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin tabanı olsun.

a) $\mathscr{B}_1$, X in alt kümelerinden oluşan $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$ özelliğinde bir kolleksiyon olsun. $\mathscr{B}_1$ in $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunu gösteriniz.

b) (a) dan yararlanarak $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin sayılamaz sayıda farklı tabanının olduğunu gösteriniz.

3.

a) $\mathscr{S}_{\text{sağ}} = \{(-\infty,x), [y,\infty) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyononunun Örnek 4.23 da tanımlanan $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisinin bir alt tabanı olduğunu gösteriniz.

b) $\mathscr{S}_{\text{sol}} = \{(-\infty,x], (y,\infty) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyononunun Örnek 4.23 da tanımlanan $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisinin bir alt tabanı olduğunu gösteriniz.

4. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayında aşağıdaki kümelerin açık, kapalı ve hem açık hem kapalı olanlarını belirleyiniz.

a) $A = (4,\infty)$ **b)** $B = (-\infty,2]$ **c)** $C = (a,\infty)$
d) $D = (-\infty,b]$ **e)** $E = (a,b]$ **f)** $F = \{1,3,5,7,9\}$

5. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında aşağıdaki kümelerin açık, kapalı ve hem açık hem kapalı olanlarını belirleyiniz.

a) $A = (4,\infty)$ **b)** $B = (-\infty,2]$ **c)** $C = (a,\infty)$
d) $D = (-\infty,b]$ **e)** $E = (a,b]$ **f)** $F = \{1,3,5,7,9\}$

6. $S = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,\cdots\right\}$ olmak üzere $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ nin

a) $\mathscr{B}_1 = \{(x,\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

b) $\mathscr{B}_2 = \{(-\infty,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

c) $\mathscr{B}_3 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus S \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

alt kolleksiyonları verilsin.

a) $i=1,2,3$ için $\mathscr{B}_i$ kolleksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde birer $\mathcal{T}_i$ topolojilerinin tabanları olduklarını ve $\mathcal{T}_1$ topolojisinin Alıştırmalar 8 de tanımlanan $\mathcal{T}_1$ topolojisi ile, $\mathcal{T}_2$ topolojisininde Alıştırmalar 8 de tanımlanan $\mathcal{T}_2$ topolojisi ile aynı olduğunu gösteriniz.

b) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ ve $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojileri karşılaştırınız.

c) $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ nin $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanı olduğunu gösteriniz.

7. $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ nin

a) $\mathscr{B}_1 = \{[a,b] \mid a<b, a,b \in \mathbb{Q}\}$,

b) $\mathscr{B}_2 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$,

c) $\mathscr{B}_3 = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$,

d) $\mathscr{B}_4 = \{[a,b] \mid a<b, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$,

e) $\mathscr{B}_5 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

alt kolleksiyonları verilsin.

a) $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde hiç bir topolojinin tabanı olmadığını gösteriniz.

b) $i=2,3,4,5$ için $\mathscr{B}_i$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_i$ topolojisinin tabanı olduğunu gösteriniz.

c) $\mathcal{T}_2$ nin Örnek 4.23 de tanımlanan $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisinden farklı olduğunu gösteriniz.

d) $\mathcal{T}_3$ ün Örnek 4.23 de tanımlanan $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisinden farklı olduğunu gösteriniz.

e) $\mathcal{T}_5$ in $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topoloji olduğunu gösteriniz.

f) $i=2,3,4,5$ için $\mathcal{T}_i$ topolojilerini karşılaştırınız.

8. $i=1,2,3,4,5$ için Alıştırmalar 8 de verilen $\mathcal{T}_i$ topolojileri ile $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiyi karşılaştırınız.

9.

a) $\mathscr{B} = \{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

b) $\mathscr{B} = \{(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times(x_2-\delta, x_2+\delta) \mid \varepsilon,\delta \in \mathbb{Q}^+ \text{ ve } x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

10. $\mathbb{R}^2$ nin alt kümelerinden oluşan aşağıdaki kolleksiyonların $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olup olmadığını araştırınız.

a) Kenarları eksenlere paralel olan "açık karelerin" kolleksiyonu.

b) Bütün "açık üçgenlerin" kolleksiyonu.

11. $\mathscr{B}$ boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin tabanı ve

$$\mathscr{H} = \{\mathcal{T}_i \mid \mathcal{T}_i, X \text{ üzerinde bir topoloji ve } \mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_i\}$$

olsun. $\mathcal{T} = \bigcap_{\mathcal{T}_i \in \mathscr{H}} \mathcal{T}_i$ olduğunu gösteriniz.

12. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{T}$ nun sonlu olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{T}$ nun sonlu bir tabanının olması gerektiğini gösteriniz.

13. $m \neq 0$ olmak üzere m ve c iki reel sayı ve

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + c\}$$

olsun. L nin $\mathbb{R}^2$ standart uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

14.

a) $\mathbb{R}^2$ nin aşağıda verilen alt kümelerinin $\mathbb{R}^2$ standart uzayında kapalı olduklarını gösteriniz.

i) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

ii) $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

iii) $\mathbb{D}^2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

b) $\mathbb{R}^2$ nin aşağıda verilen alt kümelerinin $\mathbb{R}^2$ standart uzayında açık olduklarını gösteriniz.

i) $A = \{(x,y) \mid x>0, y>0\}$

ii) $B = \{(x,y) \mid x>0, y\neq 0\}$

iii) $C = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

15. X herhangi bir sonsuz küme olmak üzere $(X,\mathscr{P}(X))$ ayrık uzayı verilsin. $\mathscr{P}(X)$ in bir $\mathscr{S}$ alt tabanını tek elemanlı hiçbir alt kümeyi içermeyecek şekilde bulunuz.

16. $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ deki bütün doğruların kolleksiyonu ve $\mathscr{S}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olsun. $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini belirleyiniz.

17. $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ de x-eksenine paralel bütün doğruların kolleksiyonu ve $\mathscr{S}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olsun. $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini belirleyiniz.

18. $\mathscr{S}$ kolleksiyonu merkezi x-ekseni üzerinde olan $\mathbb{R}^2$ deki bütün açık disklerin kümesi ve $\mathscr{S}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olsun. $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ uzayının açık kümelerini belirleyiniz.

19. $\mathscr{S} = \{(-\infty,a),(b,\infty) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanı olduğunu gösteriniz.

20. $\mathbb{R}$ üzerinde alt tabanı $\mathscr{S} = \{[a,a+1] \mid a \in \mathbb{R}\}$ olan topolojiyi bulunuz.

21. $X = \{a,b,c,d\}$ ve $\mathscr{S} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{d\}\}$ olsun. X üzerindeki alt tabanı $\mathscr{S}$ olan topolojiyi bulunuz.

22. Örnek 3.4 de verilen $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayında

a) $\mathcal{T}_{4n}$ nin $\mathcal{T}_{4n}$ den farklı olan bir tabanını ve bir alt tabanını bulunuz.

b) a, b, c noktalarının yerel tabanlarını bulunuz.

23. Örnek 3.5 de verilen $(X, \mathcal{T})$ uzayının bütün noktalarının yerel tabanlarını bulunuz.

24. Örnek 3.17 de tanımlanan $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı verilsin.

a) $\mathcal{T}_a$ nın bir tabanını bulunuz.

b) a ve $x \neq a$ özelliğindeki x noktalarının yerel tabanlarını bulunuz.

25. Örnek 3.16 de tanımlanan $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayının bir tabanını bulunuz.

26. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ Alıştırma 11 de tanımlanan $\mathbb{N}$ üzerindeki topolojiler olmak üzere $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ uzaylarında herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ noktasınının bir yerel tabanını bulunuz.

27. $\mathbb{R}$ üzerinde Alıştırma 8 de ve Alıştırma 6 de verilen $\mathcal{T}_i$ topolojilerine göre herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulunuz.

28. $\mathbb{R}^2$ üzerinde Alıştırma 16, 17 ve 18 da verilen $\mathcal{T}_i$ topolojilerine göre herhangi bir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktasının yerel bir tabanını bulunuz.

29. $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$\mathscr{B}^2_{\text{sağ}} = \{[a, b) \times [c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$ topolojisinin tabanı ve

$$\mathscr{B}^2_{\text{sol}} = \{(a, b] \times (c, d] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunund a $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}^2_{\text{sol}}$ topolojisinin tabanı olduğunu gösteriniz.

30. $\mathscr{S} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olduğunu ve $\mathcal{T}$ nun standart topolojiden daha ince olduğunu gösteriniz.

31. Bir X kümesi üzerindeki sayılabilir tümleyenler ve sonlu tümleyenler topolojilerini karşılaştırınız.

32. Örnek 4.17 de tanımlanan $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ tek-çift uzayında bir n noktasının yerel tabanını bulunuz.

33. Örnek 4.17 de tanımlanan ayrışım uzayının bir x noktasının yerel tabanını bulunuz.

34.

a) $\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

b) $\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

c) $\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

35.

a) $\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \mid x, y \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

b) $\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \mid x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

c) $\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \mid x, y, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

36. $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$\mathscr{B}_x = \{X \setminus A \mid A \text{ sonlu ve } x \notin A\}$$

kolleksiyonunun x noktasının yerel bir tabanı olduğunu gösteriniz.

37. Örnek 3.16 ve Örnek 3.17 de tanımlanan $(X, \mathcal{T}(a))$ ve $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayları verilsin ve $a \notin A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{T}(a)_A$ ve $\mathcal{T}_{a_A}$ nın birer tabanını bulunuz.

38. Örnek 4.23 de tanımlanan $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayları verilsin ve $A = (0, \infty)$ olsun.

a) $\mathcal{T}_{\text{sağ}_A}$ ve $\mathcal{T}_{\text{sol}_A}$ topolojilerinin birer tabanını bulunuz.

b) Bir $x \in A$ noktasının $(A, \mathcal{T}_{\text{sağ}_A})$ ve $(A, \mathcal{T}_{\text{sol}_A})$ uzaylarında yerel bir tabanını bulunuz.

39. $\mathbb{R}$ standart uzayının $A = (0, 1]$ alt uzayı verilsin.

a) A alt uzayının bir tabanını bulunuz.

b) A alt uzayının bir alt tabanını bulunuz.

c) Bir $x \in A$ noktasının A alt uzayındaki yerel bir tabanını bulunuz.

40. $\mathbb{R}$ standart uzayının $A = (0, 1) \cup \{2\}$ alt uzayı verilsin.

a) A alt uzayının bir tabanını bulunuz.

b) A alt uzayının bir alt tabanını bulunuz.

c) Bir $x \in (0, 1)$ noktasının A alt uzayındaki yerel bir tabanını bulunuz.

d) 2 noktasının A alt uzayındaki yerel bir tabanını bulunuz.

41. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olmak üzere $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde iki topoloji ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{T}_{1_A}$ ve $\mathcal{T}_{2_A}$ topolojilerini karşılaştırınız.

42. Alıştırmalar 29 da tanımlanan $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}})$, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzayları ve $\mathbb{R}^2$ nin

$$A = \{(x,y) \mid y = -x\} \quad \text{ve } B = \{(x,y) \mid y = x\}$$

alt kümeleri verilsin.

a) $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}_A}$ nın A kümesi üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

b) $\mathcal{T}^2_{\text{sol}_B}$ nin B kümesi üzerindeki ayrık topoloji olmadığını gösteriniz.

c) $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}_B}$ nin B kümesi üzerindeki ayrık topoloji olmadığını gösteriniz.

d) $\mathcal{T}^2_{\text{sol}_A}$ nin A kümesi üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

4.6. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

$U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $i \in I$ için $B_i \in \mathscr{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan her $i \in I$ için $B_i \in \mathcal{T}_2$ olur. Bu durumda

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}_2$$

dir. Yani $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ dir.

ÇÖZÜM 2

a) $\mathscr{B}_1$ in $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunu gösterelim.

TB-1). $\mathscr{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$ olduğu verilmiştir.

TB-2). $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ olacak şekilde bir J indis kümesi vardır. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_1$ olduğundan her $j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}_1$ dir. Böylece $j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}_1$ olmak üzere $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ şeklinde yazılır.

Bu durumda $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanıdır.

b) $\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanıdır. $q > 0$ irrasyonel bir sayı olmak üzere $\mathscr{B}_q = \mathscr{B} \cup \{(-q,q)\}$ kolleksiyonu (a) gereğince $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanıdır. Pozitif irrasyonel sayıların kümesi sayılamaz olduğundan $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin sayılamaz sayıda tabanı vardır.

ÇÖZÜM 3

a) $(-\infty, x)$ formundaki sonlu sayıdaki aralığın arakesiti yine $(-\infty, x)$ formundadır. $[y, \infty)$ formundaki sonlu sayıdaki aralığın arakesiti yine $[y, \infty)$ formundadır. $(-\infty, x)$ ve $[y, \infty)$ formundaki sonlu sayıdaki aralıkların arakesitleri ya $\emptyset$ ya da $[y, x)$ formundadır. Böylece $\mathscr{S}_{\text{sağ}}$ yardımıyla elde edilen taban

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}_{\text{sağ}}} = \{\emptyset, (-\infty, x), [y, \infty), [z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

dir. Diğer yandan

$$\mathscr{B}_{\text{sağ}} = \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisinin bir tabanı ve $\mathscr{B}_{\text{sağ}} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}_{\text{sağ}}}$ olduğundan $\mathscr{B}_{\mathscr{S}_{\text{sağ}}}$, $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ ın bir tabanıdır. Bu durumda $\mathscr{S}_{\text{sağ}}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ ın bir alt tabanıdır.

b) $(-\infty, x]$ formundaki sonlu sayıdaki aralığın arakesiti yine $(-\infty, x]$ formundadır. (y, ∞) formundaki sonlu sayıdaki aralığın arakesiti yine (y, ∞) formundadır. $(-\infty, x]$ ve (y, ∞) formundaki sonlu sayıdaki aralıkların arakesitleri ya $\emptyset$ ya da $(y, x]$ formundadır. Böylece $\mathscr{S}_{\text{sol}}$ yardımıyla elde edilen taban

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}_{\text{sol}}} = \{\emptyset, (-\infty, x], (y, \infty), (z, t] \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

dir. Diğer yandan

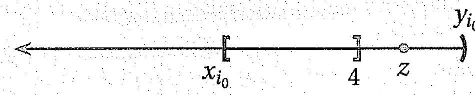
$$\mathscr{B}_{\text{sol}} = \{(a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisinin bir tabanı ve $\mathscr{B}_{\text{sol}} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}_{\text{sol}}}$ olduğundan $\mathscr{B}_{\mathscr{S}_{\text{sol}}}$, $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ ın bir tabanıdır. Bu durumda $\mathscr{S}_{\text{sol}}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ un bir alt tabanıdır.

ÇÖZÜM 4

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında verilen kümelerin açık, kapalı ve hem açık hem kapalı olanlarını belirleyelim. Örnek 4.28 gereğince $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisi $\mathcal{T}_d$ standart topolojiden daha incedir. Bu durumda bir U kümesi $(\mathbb{R}, d_2)$ uzayında açık ise U kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında açıktır. Benzer şekilde bir U kümesi $(\mathbb{R}, d_2)$ uzayında kapalı ise U kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında kapalıdır.

Şekil 4.13



a) i) $A = (4, \infty) = \bigcup_{n=5}^{\infty} [4 + 1/n, n)$ ve her $n \geq 5$ için $[4 + 1/n, n) \in \mathcal{T}_{\text{sağ}}$ olduğundan (T-2) gereğince $(4, \infty) \in \mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır. Yani $(4, \infty)$ açıktır. Veya $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$, standart topolojiden inceve $(4, \infty)$ standart uzayda açık olduğundan $(4, \infty) \in \mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır.

ii) $(4, \infty)$ un kapalı olduğunu varsayalım. Bu durumda $(-\infty, 4]$ açıktır. O halde $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 4] = \bigcup_{i \in I} [x_i, y_i)$ şeklinde yazılır. Böylece $4 \in [x_{i_0}, y_{i_0})$ olacak şekilde $i_0 \in I$ vardır. Böylece $x_{i_0} \leq 4 < y_{i_0}$ dır. $4 \neq y_{i_0}$ olduğundan $4 < z < y_{i_0}$ olacak şekilde bir $z \in \mathbb{R}$ vardır. $z \in [x_{i_0}, y_{i_0}) \subseteq \bigcup_{i \in I} [x_i, y_i) = (-\infty, 4]$ dir. Bu ise $z \notin (-\infty, 4]$ olması ile çelişir. Böylece $(-\infty, 4]$ açık değildir. Bu ise bir çelişkidir.

Böylece $(4,\infty)$ kapalı değildir.

b) **i)** $B=(-\infty,2]$ kümesinin açık olduğunu varsayalım. Bu durumda $B=\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)$ şeklinde yazılır. Bu durumda $2\in[x_{i_0},y_{i_0})$ olacak şekilde $i_0\in I$ olacağından $x_{i_0}\le 2<y_{i_0}$ dır. $2\neq y_{i_0}$ olduğundan $2<z<y_{i_0}$ olacak şekilde bir $z\in\mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $z\notin(-\infty,2]$ olur. Bu ise $z\in[x_{i_0},y_{i_0})\subseteq\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)=(-\infty,2]$ olması ile çelişir. Böylece B açık değildir.

ii) Örnek 4.28 gereğince $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisi standart topolojiden daha incedir. Böylece $\mathbb{R}\setminus B=(2,\infty)$ kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açık olduğundan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında açıktır. O halde B kümesi $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında kapalıdır.

c) **i)** $C=(a,\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a+1/n,a+n)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $[a+1/n,a+n)\in\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ olduğundan $C\in\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır. Yani $C=(a,\infty)$ kümesi açıktır. Veya $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$, standart topolojiden inceve (a,∞) standart uzayda açık olduğundan $(a,\infty)\in\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır.

ii) $\mathbb{R}\setminus C=(-\infty,a]$ kümesinin açık olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\mathbb{R}\setminus C=\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)$$

şeklinde yazılır. Böylece $a\in[x_{i_0},y_{i_0})$ olacak şekilde $i_0\in I$ vardır. Böylece $x_{i_0}\le a<y_{i_0}$ dır. $a\neq y_{i_0}$ olduğundan $a<z<y_{i_0}$ olacak şekilde bir $z\in\mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $z\notin(-\infty,a]$ ve $z\in[x_{i_0},y_{i_0})$ olduğundan $z\in\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)=(-\infty,a]$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $\mathbb{R}\setminus C$ açık değildir. O halde C kapalı değildir.

d) **i)** (c) gereğince $a\in\mathbb{R}$ için $(-\infty,a]$ aralığı açık değildir. Bu durumda $D=(-\infty,b]$ kümesi açık değildir.

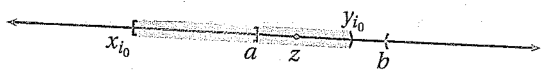
ii) $\mathbb{R}\setminus D=(b,\infty)$ kümesi (c) gereğince açıktır. O halde D kapalıdır.

e) **i)** $E=(a,b]$ nin açık olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$(a,b]=\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)$$

şeklinde yazılır. Böylece $b\in[x_{i_0},y_{i_0})$ olacak şekilde $i_0\in I$ vardır. Bu durumda $x_{i_0}\le b<y_{i_0}$ dır. $b\neq y_{i_0}$ olduğundan $b<z<y_{i_0}$ olacak şekilde bir $z\in\mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $z\notin(a,b]$ ve $z\in[x_{i_0},y_{i_0})$ olduğundan $z\in\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)=(a,b]$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece E açık değildir.

Şekil 4.14



ii) $E=(a,b]$ nin kapalı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathbb{R}\setminus E=(-\infty,a]\cup(b,\infty)$ kümesi açıktır. O halde

$$(-\infty,a]\cup(b,\infty)=\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)$$

şeklinde yazılır. Böylece $a\in[x_{i_0},y_{i_0})$ olacak şekilde $i_0\in I$ vardır. Bu durumda

$$x_{i_0}\le a<y_{i_0}$$

dır. $a\neq y_{i_0}$ ve $a\neq b$ olduğundan $a<z<\min\{y_{i_0},b\}$ olacak şekilde bir $z\in\mathbb{R}$ vardır. Bu durumda

$$z\notin(-\infty,a]\cup(b,\infty)\text{ ve }z\in[x_{i_0},y_{i_0})\subseteq(-\infty,a]\cup(b,\infty)$$

dır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece E kapalı değildir.

f) **i)** Herhangi bir I indis kümesi için $\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)$ nin sonsuz sayıda elemanı vardır. F sonlu olduğundan herhangi bir I indis kümesi için

$$F\neq\bigcup_{i\in I}[x_i,y_i)$$

dır. Bu durumda F açık değildir.

ii) $\mathbb{R}\setminus F=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,5)\cup(5,7)\cup(7,9)\cup(9,\infty)$ dır. Böylece $\mathbb{R}\setminus F$ kümesi açık kümelerin bir birleşimi olduğundan açıktır. Bu durumda F kapalıdır. Veya $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$, standart topolojiden ince ve

$$\mathbb{R}\setminus F=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,5)\cup(5,7)\cup(7,9)\cup(9,\infty)$$

standart uzayda açık olduğundan $\mathbb{R}\setminus F\in\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır. Bu durumda F kapalıdır.

ÇÖZÜM 5

$(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayında verilen kümelerin açık, kapalı ve hem açık hem kapalı olanlarını belirleyelim.

a) **i)** $A=(4,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(4,4+n]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $(4,4+n]\in\mathcal{T}_{\text{sol}}$ olduğundan (T-2) gereğince $(4,\infty)\in\mathcal{T}_{\text{sol}}$ dur. Yani $A=(4,\infty)$ kümesi açıktır. Veya $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$, standart topolojiden ince ve $(4,\infty)$ standart uzayda açık olduğundan $(4,\infty)\in\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır.

ii) $\mathbb{R}\setminus A=(-\infty,4]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,4]$ olduğundan $\mathbb{R}\setminus A$ açıktır. O halde A kapalıdır.

(i) ve (ii) gereğince A hem açık hemde kapalıdır.

b) **i)** $B=(-\infty,2]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,2]$ olduğundan B açıktır.

ii) $\mathbb{R}\setminus B=(2,\infty)=\bigcup_{n=3}^{\infty}(2,n]$ olduğundan $\mathbb{R}\setminus B$ kümesi açıktır. O halde B kapalıdır.
(i) ve (ii) gereğince B hem açık hemde kapalıdır.

c) **i)** $C=(a,\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a,a+n]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $(a,a+n]\in\mathcal{T}_{sol}$ olduğundan $C\in\mathcal{T}_{sol}$ dır. Yani $C=(a,\infty)$ kümesi açıktır.

ii) $\mathbb{R}\setminus C=(-\infty,a]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a-n,a]$ olduğundan $\mathbb{R}\setminus C=(-\infty,a]$ açıktır. Bu durumda C kümesi C kapalıdır.
(i) ve (ii) gereğince C hem açık hem de kapalıdır.

d) **i)** $D=(-\infty,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(b-n,b]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $(b-n,b]\in\mathcal{T}_{sol}$ olduğundan D açıktır.

ii) $\mathbb{R}\setminus D=(b,\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(b,b+n]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $(b,b+n]\in\mathcal{T}_{sol}$ olduğundan $\mathbb{R}\setminus D$ açık ve böylece D kapalıdır.
(i) ve (ii) gereğince D hem açık hem kapalıdır.

e) **i)** $E=(a,b]\in\mathcal{T}_{sol}$ olduğundan E açıktır.

ii) $\mathbb{R}\setminus E=(-\infty,a]\cup(b,\infty)$ ve (d) gereğince $(-\infty,a]$ ve (b,∞) açık olduğundan $\mathbb{R}\setminus E$ açık ve böylece E kapalıdır.
(i) ve (ii) gereğince E hem açık hem kapalıdır.

f) **i)** Herhangi bir I indis kümesi için $\bigcup_{i\in I}(x_i,y_i]$ nin sonsuz sayıda elemanı vardır. F sonlu olduğundan herhangi bir I indis kümesi için $F\neq\bigcup_{i\in I}(x_i,y_i]$ dır. O halde F açık değildir.

ii) $\mathbb{R}\setminus F=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,5)\cup(5,7)\cup(7,9)\cup(9,\infty)$ dir. Böylece $\mathbb{R}\setminus F$ kümesi açık kümelerin bir birleşimi olduğundan açıktır. Bu durumda F kapalıdır.

ÇÖZÜM 6

a) Teorem 4.14 (STB–1) ve (STB-2) şartlarının sağlandığını gösterelim.

i) $\mathcal{B}_1$ için soruyu cevaplandıralım:

STB–1). $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,\infty)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$(-n,\infty)\in\mathcal{B}_1$$

olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

STB–2). $(x,\infty),(y,\infty)\in\mathcal{B}_1$ ve $z\in(x,\infty)\cap(y,\infty)$ olsun.

$$c=\max\{x,y\}$$

olmak üzere

$$z\in(x,\infty)\cap(y,\infty)=(c,\infty)\in\mathcal{B}_1$$

olduğundan Teorem 4.14 (STB-2) şartıda sağlanır. O halde $\mathcal{B}_1$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_1$ topolojisinin tabanıdır.

ii) $\mathcal{B}_2$ için soruyu cevaplandıralım:

STB–1). $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,n)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$(-\infty,n)\in\mathcal{B}_2$$

olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

STB–2). $(-\infty,x),(-\infty,y)\in\mathcal{B}_2$ ve $z\in(-\infty,x)\cap(-\infty,y)$ olsun. Bu durumda

$$c=\min\{x,y\}$$

olmak üzere

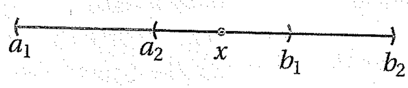
$$z\in(-\infty,x)\cap(-\infty,y)=(-\infty,c)\in\mathcal{B}_2$$

olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-2) şartıda sağlanır. O halde $\mathcal{B}_2$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_2$ topolojisinin tabanıdır.

iii) $\mathcal{B}_3$ için soruyu cevaplandıralım:

STB–1). $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $(-n,n)\in\mathcal{B}_2$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

Şekil 4.15



STB–2). $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathcal{B}_3$ ve $z\in(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)$ olsun.

$$c_1=\max\{a_1,a_2\}\text{ ve }c_2=\min\{b_1,b_2\}$$

olmak üzere

$$z\in(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)=(c_1,d_1)\in\mathcal{B}_3$$

dür.

$$(a_1,b_1)\setminus S,(a_2,b_2)\setminus S\in\mathcal{B}_3$$

ve

$$z\in((a_1,b_1)\setminus S)\cap((a_2,b_2)\setminus S)$$

olsun. Bu durumda

$$c_1=\max\{a_1,a_2\}\text{ ve }d_1=\min\{b_1,b_2\}$$

olmak üzere

$$z \in ((a_1, b_1)\setminus S) \cap ((a_2, b_2)\setminus S) = (c_1, d_1)\setminus S \in \mathscr{B}_3$$

dür.

$(a_1, b_1) \in \mathscr{B}_3$ ve $(a_2, b_2)\setminus S \in \mathscr{B}_3$ ve $z \in (a_1, b_1) \cap ((a_2, b_2)\setminus S)$ olsun. Bu durumda

$$c_1 = \max\{a_1, a_2\} \text{ ve } d_1 = \min\{b_1, b_2\}$$

olmak üzere

$$z \in (a_1, b_1) \cap ((a_2, b_2)\setminus S) = (c_1, d_1)\setminus S \in \mathscr{B}_3$$

dür.

Böylece Teorem 4.14 ün (STB-2) şartıda sağlanır. O halde $\mathscr{B}_2$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}_3$ topolojisinin tabanıdır.

iv) **$\mathscr{B}_1$ in ürettiği topoloji**

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U = \bigcup_{x \in I} (x, \infty),\ I \text{ bir indis kümesi}\} \\ &= \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $\mathscr{B}_2$ in ürettiği topoloji

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U = \bigcup_{x \in I} (-\infty, x),\ I \text{ bir indis kümesi}\} \\ &= \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_1$ topolojisi Alıştırmalar 8 de tanımlanan $\mathcal{T}_1$ topolojisi ile ve $\mathcal{T}_2$ topolojiside Alıştırmalar 8 de tanımlanan $\mathcal{T}_2$ topolojisi ile aynıdır.

b) **i)** $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $U = \emptyset$, $U = \mathbb{R}$ veya $U = (x, \infty)$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ vardır. Her üç durumda da U kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açıktır. O halde standart topoloji $\mathcal{T}_1$ den daha incedir.

ii) $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U = \emptyset$, $U = \mathbb{R}$ veya $U = (-\infty, x)$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ vardır. Her üç durumdada U kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açıktır. O halde standart topoloji $\mathcal{T}_1$ den daha incedir.

iii) $\mathscr{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu standart topolojinin bir tabanıdır. $(a, b) \in \mathscr{B}$ olsun. Bu durumda $(a, b) \in \mathscr{B}_3$ ve böylece $(a, b) \in \mathcal{T}_3$ dür. O halde $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_3$ dür. Bu durumda $\mathcal{T}_3$ topolojisi standart topolojiden daha incedir.

c)

$$\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 = \{(x, \infty), (-\infty, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

dir. $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ kolleksiyonu Örnek 4.52 gereğince standart topolojinin bir alt tabanıdır.

ÇÖZÜM 7

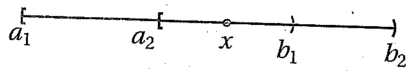
a) **$\mathscr{B}_1$ kolleksiyonunun hiç bir topolojinin tabanı olmadığını gösterelim:** $[a, b], [b, c] \in \mathscr{B}_1$ olsun. Bu durumda $\{b\} = [a, b] \cap [b, c]$ dir. Fakat $b \in [k, t] \subseteq \{b\}$ olacak şekilde $k < t$ özelliğinde k ve r sayıları yoktur. O halde Teorem 4.14 ün (STB-2) şartı sağlanmaz. Böylece $\mathscr{B}_1$ kolleksiyonu bir topolojinin tabanı değildir.

b) $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$ ve $\mathscr{B}_5$ kolleksiyonlarının birer topolojinin tabanı olduklarını göstermek için Teorem 4.14 ün (STB-1) ve (STB-2) şartlarının sağlandığını gösterelim.

i) **$\mathscr{B}_2$ için soruyu cevaplandıralım:**

STB-1). $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n)$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

Şekil 4.16



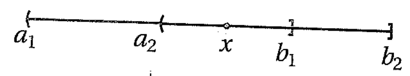
STB-2). $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \in \mathscr{B}_2$ ve $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$ olsun. $a = \max\{a_1, a_2\}$ ve $b = \min\{b_1, b_2\}$ olmak üzere $a \leq x < b$ ve $a, b \in \mathbb{Q}$ dur. Böylece $x \in [a, b) \in \mathscr{B}_2$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-2) şartıda sağlanır.

O halde $\mathscr{B}_2$ kolleksiyonu bir $\mathcal{T}_2$ topolojisinin tabanıdır.

ii) **$\mathscr{B}_3$ için soruyu cevaplandıralım:**

STB-1). $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n]$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

Şekil 4.17



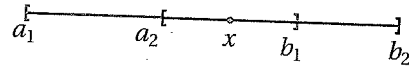
STB-2). $(a_1, b_1], (a_2, b_2] \in \mathscr{B}_3$ ve $x \in (a_1, b_1] \cap (a_2, b_2]$ olsun. $a = \max\{a_1, a_2\}$ ve $b = \min\{b_1, b_2\}$ olmak üzere $a < x \leq b$ ve $a, b \in \mathbb{Q}$ dur. Böylece $x \in (a, b] \in \mathscr{B}_3$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-2) şartıda sağlanır.

O halde $\mathscr{B}_3$ kolleksiyonu bir $\mathcal{T}_3$ topolojisinin tabanıdır.

iii) **$\mathscr{B}_4$ için soruyu cevaplandıralım:**

STB-1). $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, \sqrt{2}n]$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

Şekil 4.18



STB-2). $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in \mathscr{B}_4$ ve $x \in [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ olsun. $a = \max\{a_1, a_2\}$ ve $b = \min\{b_1, b_2\}$ olmak üzere

$a \le x \le b$ dir. Böylece $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $x \in [a,b] \in \mathscr{B}_4$ dir. O halde Teorem 4.14 ün (STB-2) şartıda sağlanır.

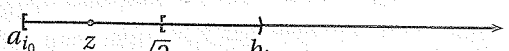
O halde $\mathscr{B}_4$ kolleksiyonu bir $\mathcal{T}_4$ topolojisinin tabanıdır.

iv) $\mathscr{B}_5$ için soruyu cevaplandıralım:

STB-1). $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n,n)$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-1) şartı sağlanır.

STB-2). $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathscr{B}_5$ ve $x \in (a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)$ olsun. $a = \max\{a_1,a_2\}$ ve $b = \min\{b_1,b_2\}$ olmak üzere $a < x < b$ ve $a,b \in \mathbb{Q}$ dur. Böylece $x \in (a,b) \in \mathscr{B}_5$ olduğundan Teorem 4.14 ün (STB-2) şartıda sağlanır. O halde $\mathscr{B}_5$ kolleksiyonu bir $\mathcal{T}_5$ topolojisinin tabanıdır.

Şekil 4.19



c) $\mathcal{T}_2$ nin $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dan farklı olduğunu gösterelim. $[\sqrt{2},\infty) \in \mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır. $[\sqrt{2},\infty) \notin \mathcal{T}_2$ olduğunu gösterelim. $[\sqrt{2},\infty) \in \mathcal{T}_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $[\sqrt{2},\infty) = \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i)$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\sqrt{2} \in [a_{i_0},b_{i_0})$ olacak şekilde $i_0 \in I$ vardır. Yani $a_{i_0} \le \sqrt{2} < b_{i_0}$ dır. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $a_{i_0} \in \mathbb{Q}$ olduğundan $a_{i_0} < \sqrt{2} < b_{i_0}$ dır. Böylece $a_{i_0} < z < \sqrt{2}$ olacak şekilde bir z vardır. Bu durumda $z \notin [\sqrt{2},\infty)$ ve $z \in [a_{i_0},b_{i_0})$ yani $z \in \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i)$ dir. Böylece $[\sqrt{2},\infty) = \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i)$ olamaz. O halde $[\sqrt{2},\infty) \notin \mathcal{T}_2$ dir. Bu durumda $\mathcal{T}_2$ topolojisi $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisinden farklıdır.

d) $\mathcal{T}_3$ nin $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ dan farklı olduğunu gösterelim. (c) ye benzer şekilde $(-\infty,\sqrt{2}] \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$ ve $[\sqrt{2},\infty) \notin \mathcal{T}_3$ olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisinden farklıdır.

e) $\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu standart topolojinin bir tabanıdır. Sonuç 4.31 in (a) ve (b) şartının sağlandığını gösterelim.

i) $B \in \mathscr{B}_5$ olsun. Bu durumda $B = (a,b)$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Q}$ sayıları vardır. $x \in B$ olsun. $B' = B$ olmak üzere $B' \in \mathscr{B}$ ve $x \in B' \subseteq B$ dir. Dolayısıyla Sonuç 4.31 in (a) şartı sağlanır.

ii) $B \in \mathscr{B}$ ve $x \in B$ olsun. $B = (a,b)$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Bu durumda $a < x < b$ olduğundan $a < a_1 < x < b_1 < b$ olacak şekilde $a_1,b_1 \in \mathbb{Q}$ sayıları vardır. Böylece $B' = (a_1,b_1)$ için $B' \in \mathscr{B}_5$ ve $x \in B' \subseteq B$ dir. Böylece Sonuç 4.31 in (b) şartıda sağlanır.

Bu durumda $\mathcal{T}_5$ ile standart topoloji aynıdır.

f) i) $\mathcal{T}_2$ ile $\mathcal{T}_3$ topolojileri için soruyu çözelim: $[a,b) \in \mathcal{T}_2$ olsun. $[a,b) \in \mathcal{T}_3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[a,b) = \bigcup_{i\in I}(a_i,b_i]$ $(a_i,b_i \in \mathbb{Q})$ şeklinde yazılabilir. Böylece $a \in (a_{i_0},b_{i_0}]$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. O halde $a_{i_0} < a \le b_{i_0}$ dır. $a_{i_0} \ne a$ olduğundan $a_{i_0} < z < a \le b_{i_0}$ olacak şekilde $z \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $z \in (a_{i_0},b_{i_0}]$ ve $z \notin [a,b)$ dir. Bu ise $[a,b) = \bigcup_{i\in I}(a_i,b_i]$ olması ile çelişir. Böylece $\mathcal{T}_2 \nsubseteq \mathcal{T}_3$ dür. Yani $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathcal{T}_2$ den ince değildir. Benzer şeklilde $\mathcal{T}_2$ topolojisinin $\mathcal{T}_3$ den ince olmadığı gösterilir. O halde $\mathcal{T}_2$ ile $\mathcal{T}_3$ karşılaştırılamaz.

ii) $\mathcal{T}_2$ ile $\mathcal{T}_4$ topolojileri için soruyu çözelim: $[0,\sqrt{2}] \in \mathcal{T}_4$ olsun. $[0,\sqrt{2}] \in \mathcal{T}_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[0,\sqrt{2}] = \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i)$ $(a_i,b_i \in \mathbb{Q})$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\sqrt{2} \in [a_{i_0},b_{i_0})$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. O halde $a_{i_0} \le \sqrt{2} < b_{i_0}$ dır. $b_{i_0} \ne \sqrt{2}$ olduğundan $a_{i_0} \le \sqrt{2} < z < b_{i_0}$ olacak şekilde $z \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $z \in [a_{i_0},b_{i_0}) \subseteq \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i) = [0,\sqrt{2}]$ ve $z \notin [0,\sqrt{2}]$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\mathcal{T}_4 \nsubseteq \mathcal{T}_2$ dir. Yani $\mathcal{T}_2$ topolojisi $\mathcal{T}_4$ den ince değildir.

$[a,b) \in \mathscr{B}_2$ olsun. Bu durumda $i \in I$ için $a < b_i < b$ ve $b_i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olmak üzere $[a,b) = \bigcup_{i\in I}[a,b_i]$ ve $[a,b_i] \in \mathcal{T}_4$ olduğundan $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathcal{T}_4$ olur. Doolayısıyla $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_4$ dür. Yani $\mathcal{T}_4$ topolojisi $\mathcal{T}_2$ den incedir.

iii) $\mathcal{T}_2$ ile $\mathcal{T}_5$ topolojileri için soruyu çözelim: $(a,b) \in \mathcal{T}_5$ olsun. Bu durumda $I = \{a_i \in \mathbb{Q} \mid a < a_i < b\}$ olmak üzere $(a,b) = \bigcup_{a_i\in I}[a_i,b)$ olduğundan $\mathscr{B}_5 \subseteq \mathcal{T}_2$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. Yani $\mathcal{T}_2$ topolojisi $\mathcal{T}_5$ den incedir.

$[a,b) \in \mathcal{T}_2$ olsun. $[a,b) \in \mathcal{T}_5$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[a,b) = \bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$ şeklinde yazılabilir. Böylece $a \in (a_{i_0},b_{i_0})$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. O halde $a_{i_0} < a < b_{i_0}$ dır. $a_{i_0} \ne a$ olduğundan $a_{i_0} < z < a$ olacak şekilde z vardır. Bu durumda $z \in (a_{i_0},b_{i_0})$ ve $z \notin [a,b)$ dir. Bu ise $[a,b) = \bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$ olması ile çelişir. Böylece $[a,b) \notin \mathcal{T}_5$ dir. O halde $\mathcal{T}_2 \nsubseteq \mathcal{T}_5$ dir. Yani $\mathcal{T}_5$ topolojisi $\mathcal{T}_2$ den ince değildir.

iv) $\mathcal{T}_3$ ile $\mathcal{T}_4$ topolojileri için soruyu çözelim: $[1,\sqrt{2}] \in \mathcal{T}_4$ dür. $[1,\sqrt{2}] \in \mathcal{T}_3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[1,\sqrt{2}] = \bigcup_{i\in I}(a_i,b_i]$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\sqrt{2} \in (a_{i_0},b_{i_0}]$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. O halde $a_{i_0} < \sqrt{2} \le b_{i_0}$ dır. $b_{i_0} \in \mathbb{Q}$ olduğundan $\sqrt{2} \ne b_{i_0}$ dır. O halde $a_{i_0} < \sqrt{2} < b_{i_0}$ dır. Bu durumda $\sqrt{2} < z < b_{i_0}$ olacak şekilde $z \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $z \in (a_{i_0}, b_{i_0}] \subseteq [1, \sqrt{2}]$ ve $z \notin [1, \sqrt{2}]$ dir. Bu ise bir çelişir. Böylece $\mathcal{T}_4 \nsubseteq \mathcal{T}_3$ dir. Yani $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathcal{T}_4$ den ince değildir.

$(a, b] \in \mathscr{B}_3$ olsun. $(a, b] \in \mathcal{T}_4$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $i \in I$ için $a_i \in \mathbb{Q}$ ve $b_i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ olmak üzere $(a, b] = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i]$ şeklinde yazılabilir. $b \in (a, b]$ olduğundan $b \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Böylece $a_{i_0} \le b \le b_{i_0}$ dır. $b \in \mathbb{Q}$ ve $b_{i_0} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ olduğundan $a_{i_0} \le b < b_{i_0}$ dır. Böylece $a_{i_0} \le b < r < b_{i_0}$ olacak şekilde bir r vardır. Bu durumda $r \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$ ve dolayısıyla $r \in \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i]$ dir. Diğer yandan $b < r$ olduğundan $r \notin (a, b]$ dir. O halde $(a, b] = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i]$ şeklinde yazılamaz. Böylece $(a, b] \notin \mathcal{T}_4$ dür. Yani $\mathcal{T}_3 \nsubseteq \mathcal{T}_4$ dür. Böylece $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{T}_3$ den ince değildir.

v) **$\mathcal{T}_3$ ile $\mathcal{T}_5$ topolojileri için soruyu çözelim:** $(a, b) \in \mathscr{B}_5$ olsun. Bu durumda $i \in I$ için $a < b_i < b$ ve $b_i \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $(a, b) = \bigcup_{i\in I}(a, b_i]$ şeklinde yazılabilir. Her $i \in I$ için $(a, b_i] \in \mathcal{T}_3$ olduğundan $(a, b) \in \mathcal{T}_3$ olur. Bu durumda $\mathscr{B}_5 \subseteq \mathcal{T}_3$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_3$ dür. Yani $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathcal{T}_5$ den incedir.

$(a, b] \in \mathscr{B}_3$ olmak üzere $(a, b] \in \mathcal{T}_5$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $i \in I$ için $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $(a, b] = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ şeklinde yazılabilir. $b \in (a, b]$ olduğundan bazı $i_0 \in I$ için $b \in (a_{i_0}, b_{i_0})$ dır. Bu durumda $a_{i_0} < b < b_{i_0}$ dır. Böylece $b < z < b_{i_0}$ olacak şekilde bir z vardır. Bu durumda $z \in (a_{i_0}, b_{i_0})$ ve $z \notin (a, b]$ olur. Böylece $(a, b] = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ şeklinde yazılamaz. O halde $(a, b] \notin \mathcal{T}_5$ dir. Yani $\mathcal{T}_3 \nsubseteq \mathcal{T}_5$ dir. Böylece $\mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_3$ den ince değildir.

vi) **$\mathcal{T}_4$ ile $\mathcal{T}_5$ topolojileri için soruyu çözelim:** $[a, b] \in \mathscr{B}_4$ olsun. $[a, b] \in \mathcal{T}_5$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $i \in I$ için $a_i \in \mathbb{Q}$ ve $b_i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ olmak üzere $[a, b] = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ şeklinde yazılabilir. Böylece $b \in [a, b]$ olduğundan bazı $i_0 \in I$ için $b \in (a_{i_0}, b_{i_0})$ dır. Böylece $a_{i_0} < b < b_{i_0}$ dır. Diğeryandan $b < z < b_{i_0}$ olacak şekilde bir z vardır. Bu durumda $z \in (a_{i_0}, b_{i_0})$ ve $z \notin [a, b]$ dir. Böylece $[a, b] = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ şeklinde yazılamaz. O halde $[a, b] \notin \mathcal{T}_5$ dir. Yani $\mathcal{T}_4 \nsubseteq \mathcal{T}_5$ dir. Böylece $\mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_4$ den ince değildir.

$(a, b) \in \mathscr{B}_5$ olsun. Bu durumda $i \in I$ için $a < a_i < a + (b - a)/2$ ve $a + (b - a)/2 < b_i < b$, $b_i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ve $a_i \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $(a, b) = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i]$ dir. Her $i \in I$ için $[a_i, b_i] \in \mathcal{T}_4$ olduğundan $(a, b) \in \mathcal{T}_4$ dür. Yani $\mathscr{B}_5 \subseteq \mathcal{T}_4$ ve böylece $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_4$ dür. Yani $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{T}_5$ den incedir.

ÇÖZÜM 8

$\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiyi $\mathcal{T}$ ile gösterelim.

a) $(x, \infty) \in \mathcal{T}_1$ olsun. $(x, \infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(x, x + n)$ olduğundan $(x, \infty) \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $\mathcal{T}$ standart topolojisi $\mathcal{T}_1$ den incedir. Diğer yandan $(a, b) \in \mathcal{T}$ olmasına rağmen $(a, b) \notin \mathcal{T}_1$ dir. Yani $\mathcal{T}_1$ topolojisi $\mathcal{T}$ standart topolojisinden ince değildir.

b) $(-\infty, x) \in \mathcal{T}_2$ olsun. $(-\infty, x) = \bigcup_{n\in I}(x - n, x)$ olduğundan $(-\infty, x) \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $\mathcal{T}$ standart topolojisi $\mathcal{T}_2$ den incedir. Diğer yandan $(a, b) \in \mathcal{T}$ olmasına rağmen $(a, b) \notin \mathcal{T}_2$ dir. Yani $\mathcal{T}_2$ topolojisi $\mathcal{T}$ standart topolojisinden ince değildir.

c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(-n, n) \in \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{T}$ standart topolojisi $\mathcal{T}_3$ den incedir. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathcal{T}$ olmasına rağmen $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \notin \mathcal{T}_3$ olduğundan $\mathcal{T}_3$ topolojisi $\mathcal{T}$ standart topolojisinden ince değildir.

d) $[-1, 1] \in \mathcal{T}_4$ olmasına rağmen $[-1, 1] \notin \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{T}$ standart topolojisi $\mathcal{T}_4$ den ince değildir. $(a, b) \in \mathcal{T}$ olmasına rağmen $(a, b) \notin \mathcal{T}_4$ olduğundan $\mathcal{T}_4$ topolojisi $\mathcal{T}$ standart topolojisinden ince değildir. Bu durumda $\mathcal{T}_4$ ile standart topoloji karşılaştırılamaz.

e) $(a, b) \in \mathcal{T}$ olmasına rağmen $(a, b) \notin \mathcal{T}_5$ olduğundan $\mathcal{T}_5$ topolojisi $\mathcal{T}$ standart topolojisinden ince değildir. $[2, \infty) \in \mathcal{T}_5$ olmasına rağmen $[2, \infty) \notin \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{T}$ standart topolojisi $\mathcal{T}_5$ topolojisinden ince değildir. Bu durumda $\mathcal{T}_4$ ile standart topoloji karşılaştırılamaz.

ÇÖZÜM 9

$\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojiyi $\mathcal{T}$ ile gösterelim.

$$\{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \text{ ve } \{B((x, y), \varepsilon) : 0 < \varepsilon, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

kolleksiyonlarının $\mathbb{R}^2$ standart uzayının birer tabanı olduğunu biliyoruz.

a) $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır. U kümesi $\mathbb{R}^2$ standart uzayında açık ve $(x, y) \in U$ olsun. Bu durumda $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (c_1, d_1) \subseteq U$ olacak şekilde $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Bu durumda $a_1 < x < b_1$ ve $c_1 < y < d_1$ dir. Diğer yandan farklı iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı olduğundan $a_1 < a <$

$x < b < b_1$ ve $c_1 < c < y < d < d_1$ olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ sayıları vardır. Böylece $(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq U$ dur. Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ standart uzayının bir tabanıdır.

b) $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır. U kümesi $\mathbb{R}^2$ standart uzayında açık ve $(x, y) \in U$ olsun. Bu durumda $(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq U$ olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ ve $0 < \delta < \frac{d-c}{2}$ olsun. Bu durumda $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a, b)$ ve $(y-\delta, y+\delta) \subseteq (c, d)$ dir. Üstelik,

$$(x, y) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\delta, y+\delta) \subseteq U$$

dur. Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ standart uzayının bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 10

$\{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ve $\{B((x, y), \varepsilon) : 0 < \varepsilon, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

kolleksiyonlarının $\mathbb{R}^2$ standart uzayının birer tabanı olduğunu biliyoruz.

a) Kenerları eksenlere paralel olan "açık karelerin" kolleksiyonu

$$\mathscr{B} = \{(a, b) \times (a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

dir. O halde $\mathscr{B}$ nin $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olup olmadığını araştırmalıyız.

$\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır. U kümesi $\mathbb{R}^2$ standart uzayında açık ve $(x, y) \in U$ olsun. Bu durumda

$$(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq U$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları vardır.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|x-a|, |x-b|, |y-c|, |y-d|\}$$

olsun. Bu durumda

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq (a, b) \times (c, d) \subseteq U$$

dur. Üstelik, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \in \mathscr{B}$ dir. Böylece Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ standart uzayının bir tabanıdır.

b) Bütün "açık üçgenlerin" kolleksiyonu $\mathscr{B}$ olsun. $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır. U kümesi $\mathbb{R}^2$ standart uzayında açık ve $(x, y) \in U$ olsun. Bu durumda $(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq U$ olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Diğer yandan farklı iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı olduğundan $a < a_1 < x < b_1 < b$ ve $c < c_1 < y < d_1 < d$ olacak şekilde $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ sayıları seçebiliriz. Δ, köşeleri $(a_1, c_1), (b_1, c_1)$ ve (x, d_1) olan üçgen olsun. Şekil 2.4 e bakınız. Bu durumda

$$(x, y) \in \Delta \subseteq (a, b) \times (c, d) \subseteq U$$

dur. Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ standart uzayının bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 11

$U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ şeklinde yazılır. Her i için $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_i$ olduğundan her $j \in J$ için $B_j \in \mathcal{T}_i$ dir. Her i için $\mathcal{T}_i$ bir topoloji olduğundan $U \in \mathcal{T}_i$ dir. Yani her i için $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$ dir. Böylece $\mathcal{T} \subseteq \bigcap_{\mathcal{T}_i \in \mathscr{H}} \mathcal{T}_i$ dir. Diğer yandan $\mathcal{T} \in \mathscr{H}$ olduğundan $\bigcap_{\mathcal{T}_i \in \mathscr{H}} \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}$ dir. O halde

$$\bigcap_{\mathcal{T}_i \in \mathscr{H}} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$$

dur.

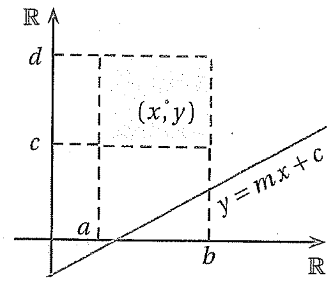
ÇÖZÜM 12

$\mathcal{T}$ sonlu olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun sonlu bir tabanıdır. Şimdi, $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun sonlu bir tabanı olsun. Bu durumda X in

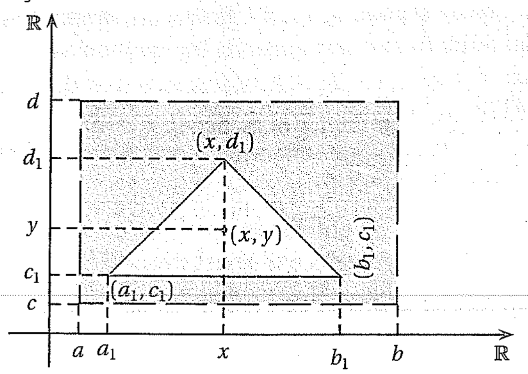
$$U = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathscr{B}$$

şeklinde yazılabilecek alt kümelerinin sayısı sonludur. O halde $\mathcal{T}$ sonludur.

Şekil 4.20



Şekil 4.21



ÇÖZÜM 13

$$\{(a,b)\times(c,d) : a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ standart uzayının bir tabanı olduğunu biliyoruz.

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash L$$

olsun. Bu durumda Şekil 4.20 de görüldüğü gibi

$$(x,y)\in(a,b)\times(c,d)\subseteq\mathbb{R}^2\backslash L$$

olacak şekilde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde $\mathbb{R}^2\backslash L$ kümesi açık ve böylece L kapalıdır.

ÇÖZÜM 14

$$\{(a,b)\times(c,d) : a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ standart uzayının bir tabanı olduğunu biliyoruz.

a) **i)** C kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.

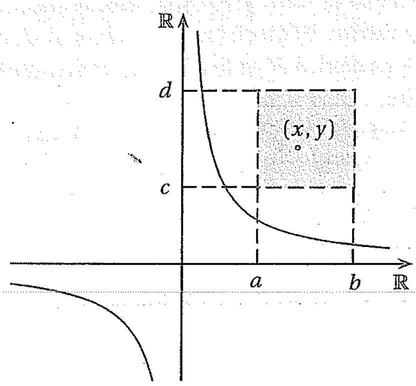
$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash C$$

olsun. Bu durumda Şekil 4.22 görüldüğü gibi

$$(x,y)\in(a,b)\times(c,d)\subseteq\mathbb{R}^2\backslash C$$

olacak şekilde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde Teorem 4.9 gereğince $\mathbb{R}^2\backslash C$ kümesi açık ve böylece C kapalıdır.

Şekil 4.22

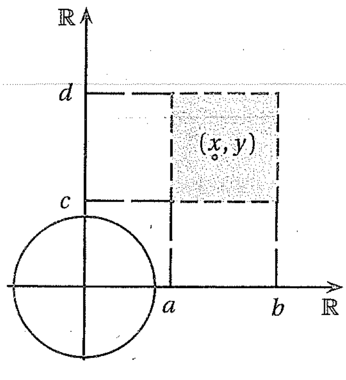


ii) $\mathbb{S}^1$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{S}^1$ olsun. Bu durumda Şekil 4.23 görüldüğü gibi

$$(x,y)\in(a,b)\times(c,d)\subseteq\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{S}^1$$

olacak şekilde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde Teorem 4.9 gereğince $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{S}^1$ kümesi açık ve böylece $\mathbb{S}^1$ kapalıdır.

Şekil 4.23



iii) $\mathbb{D}^2$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.

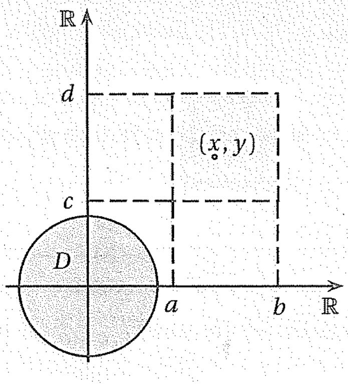
$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{D}^2$$

olsun. Bu durumda Şekil 4.24 görüldüğü gibi

$$(x,y)\in(a,b)\times(c,d)\subseteq\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{D}^2$$

olacak şekilde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde Teorem 4.9 gereğince $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{D}^2$ kümesi açık ve böylece $\mathbb{D}^2$ kapalıdır. ($\mathbb{D}^2$ kapalı bir yuvar olduğundan kapalıdır.)

Şekil 4.24

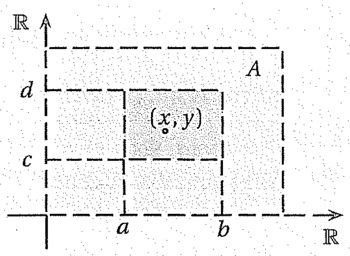


b) i) A kümesinin açık olduğunu gösterelim. $(x, y) \in A$ olsun. Bu durumda Şekil 4.25 görüldüğü gibi

$$(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq A$$

olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde Teorem 4.9 gereğince A kümesi açıktır.

Şekil 4.25

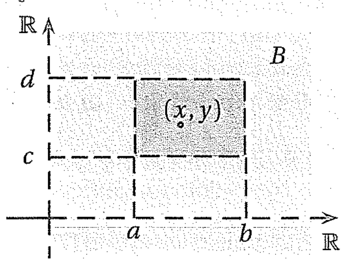


ii) B kümesinin açık olduğunu gösterelim. $(x, y) \in B$ olsun. Bu durumda Şekil 4.26 görüldüğü gibi

$$(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq B$$

olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde Teorem 4.9 gereğince B kümesi açıktır.

Şekil 4.26

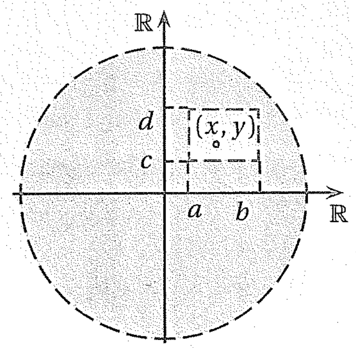


iii) C kümesinin açık olduğunu gösterelim. $(x, y) \in C$ olsun. Bu durumda Şekil **??** görüldüğü gibi

$$(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq C$$

olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. O halde Teorem 4.9 gereğince C kümesi açıktır.

Şekil 4.27



ÇÖZÜM 15

$\mathscr{S} = \{\{x, y\} | x, y \in X\}$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ise $\{x, y\} \cap \{x, z\} = \{x\}$ olduğundan her $x \in X$ için $\{x\} \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ dir. Bu durumda $\mathscr{B} = \{\{x\} | x \in X\} \subseteq \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ olur. $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathscr{P}(X)$ in tabanı olduğundan $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ de $\mathscr{P}(X)$ in bir tabanıdır. Böylece $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathscr{P}(X)$ in alt tabanıdır.

ÇÖZÜM 16

$\mathscr{S} = \{L | L$ bir doğru$\}$ dır. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda

$$L_1 = \{(x, y_1) | x \in \mathbb{R}\} \text{ ve } L_2 = \{(x_1, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

doğruları $\mathscr{S}$ nin elemanlarıdır. Bu durumda

$$L_1 \cap L_2 = \{(x, y)\} \in \mathscr{B}_{\mathscr{S}}$$

dir. Böylece $\{(x, y)\} \in \mathcal{T}$ dur. Yani her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\{(x, y)\} \in \mathcal{T}$ dur. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T} = \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ dir.

ÇÖZÜM 17

$\mathscr{S}$ nin elemanları $\{(x, x_1) | x \in \mathbb{R}\}$ formundadır. Yani

$$\mathscr{S} = \{\{(x, x_1) | x \in \mathbb{R}\} | x_1 \in \mathbb{R}\}$$

dir. I sonlu bir indis kümesi olmak üzere $i \in I$ için $L_i \in \mathscr{S}$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} L_i = \emptyset$ veya $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$ dur. $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$ ise $\bigcap_{i \in I} L_i$ kümesi x-eksenine paralel bir doğru veya $\bigcap_{i \in \emptyset} L_i = \mathbb{R}^2$ dur.

Bu durumda

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \left\{ \bigcap_{i \in I} L_i \,|\, I \text{ sonlu ve } i \in I \text{ için } L_i \in \mathscr{S} \right\} = \mathscr{S} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$$

dir. Böylece

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} L_i \,\middle|\, \begin{array}{c} I \text{ bir indis kümesi ve } i \in I \text{ için } L_i, \\ x\text{-eksenine paralel bir doğru} \end{array} \right\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$$

dur.

ÇÖZÜM 18

$\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ kolleksiyonu $\mathscr{S}$ nin ürettiği taban olsun. Bu durumda

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{\bigcap_{i \in I} S_i | I \text{ sonlu ve } i \in I \text{ için } S_i \in \mathscr{S}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$$

dir. Böylece

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} L_i | I \text{ bir indis kümesi ve } i \in I \text{ için } L_i \in \mathscr{B}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$$

dur.

ÇÖZÜM 19

I sonlu bir indis kümesi olmak üzere $L_i \in \mathscr{S}$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} L_i = \emptyset$ veya $\bigcap_{i \in \emptyset} L_i = \mathbb{R}^2$ veya $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$ dur. $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$ ve $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $L_i = (-\infty, a_i)$ veya $L_i = (b_i, \infty)$ olacak şekilde $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ sayıları vardır. Böylece $a = \min\{a_i | i \in I\}$ ve $b = \max\{b_i | i \in I\}$ olmak üzere $\bigcap_{i \in I} L_i = (b, a)$ olur. O halde $\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Q}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ dir. $\emptyset$ kümesi ve $\mathbb{R}^2$ kümesi (a, b) $(a, b \in \mathbb{Q})$ şeklindeki aralıkların birleşimi olarak yazılabileceğinden $\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$ olarak alınabilir. Alıştırma 7 gereğince $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanıdır. O halde $\mathscr{S}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir alt tabanıdır.

ÇÖZÜM 20

$\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanı olsun. $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\{a\} = [a-1, a] \cap [a, a+1]$ dir. $[a-1, a], [a, a+1] \in \mathscr{S}$ olduğundan $\{a\} \in \mathcal{T}$ dur. Yani her $a \in \mathbb{R}$ için $\{a\} \in \mathcal{T}$ dur. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dir.

ÇÖZÜM 21

I sonlu bir indis kümesi olmak üzere $i \in I$ için $S_i \in \mathscr{S}$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} S_i = \emptyset$ veya $\{b\}$ veya $\{a, b\}$ veya $\{b, c\}$ veya $\{d\}$ veya X dir. Buna göre

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$$

ve

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, b\}, \{d\}, \{b\}, \{a, c, b\}, \{a, b, d\}, \{c, b, d\}, \{b, d\}\}$$

dir.

ÇÖZÜM 22

Örnek 3.4 de verilen topoloji

$$\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, b\}\}$$

dir.

a) $\mathscr{S} = \{X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olsun. Bu durumda

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

ve

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

olur. Bu durumda $\mathcal{T}_{4n} = \mathcal{T}$ olduğundan $\mathscr{S}$, $\mathcal{T}_{4n}$ nin bir alt tabanıdır.

b) **i)** a noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu

$$\{X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, b\}\}$$

dir. $\{a\} \subseteq X$, $\{a\} \subseteq \{a, b\}$, $\{a\} \subseteq \{a, c\}$ ve $\{a\} \subseteq \{a, c, b\}$ olduğundan $\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}$ kolleksiyonu a nın yerel tabanıdır.

ii) b noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu

$$\{X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, b\}\}$$

dir. $\{b\} \subseteq X$, $\{b\} \subseteq \{b\}$, $\{b\} \subseteq \{a, b\}$, $\{b\} \subseteq \{a, c, b\}$ olduğundan $\mathscr{B}_b = \{\{b\}\}$ kolleksiyonu b nin yerel tabanıdır.

iii) c noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu

$$\{X, \{a, c\}, \{a, c, b\}\}$$

dir. $\{a, c\} \subseteq X$, $\{a, c\} \subseteq \{a, c\}$, $\{a, c\} \subseteq \{a, c, b\}$ olduğundan $\mathscr{B}_c = \{\{a, c\}\}$ kolleksiyonu c nın yerel tabanıdır.

ÇÖZÜM 23

Örnek 3.5 de verilen topoloji $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

dir. Böylece

a) a yı içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\{X, \{a\}, \{a, c, d\}\}$ dir.

Böylece $\{a\} \subseteq \{a,c,d\}$ ve $\{a\} \subseteq X$ olduğundan a noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}$ dır.

b) b yı içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\{X, \{b,c,d,e,f\}\}$ dir. Böylece $\{b,c,d,e,f\} \subseteq X$ olduğundan b noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_b = \{X\}$ dir.

c) c yi içeren açık kümelerin kolleksiyonu

$$\{X, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

dir. Böylece $\{c,d\} \subseteq X, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}$ olduğundan c noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_c = \{\{c,d\}\}$ dir.

d) d yi içeren açık kümelerin kolleksiyonu

$$\{X, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

dir. $\{c,d\} \subseteq X, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}$ olduğundan d noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_d = \{\{c,d\}\}$ dir.

e) e yi içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\{X, \{b,c,d,e,f\}\}$ dir. Böylece $\{b,c,d,e,f\} \subseteq X$ olduğundan e noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_e = \{\{b,c,d,e,f\}\}$ dir.

f) f yi içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\{X, \{b,c,d,e,f\}\}$ dir. Böylece $\{b,c,d,e,f\} \subseteq X$ olduğundan f noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_f = \{\{b,c,d,e,f\}\}$ dir.

ÇÖZÜM 24

Örnek 3.17 de verilen topoloji $\mathcal{T}_a = \{U \subseteq X | a \notin U\} \cup \{X\}$ dir.

a) $\mathscr{B} = \{\{x\} | x \neq a, x \in X\} \cup \{X\}$ olsun. Açıkça $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_a$ dır. $U \in \mathcal{T}_a$ olsun. Bu durumda

$$U = X \quad \text{veya} \quad a \notin U$$

dur. $U = X$ ise $U \in \mathscr{B}$ dir. $a \notin U$ ise

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$$

ve $x \in X$ için $\{x\} \in \mathscr{B}$ olduğundan $\mathscr{B}$ kolleksiyonu Teorem 4.9 gereğince $\mathcal{T}_a$ nın bir tabanıdır.

b) Örnek 4.67 gereğince $\mathscr{B}_x = \{U \in \mathscr{B} | \; x \in U\}$ kolleksiyonu x noktasının bir yerel tabanıdır. Böylece a nın yerel tabanı $\mathscr{B}_a = \{X\}$ ve $x \neq a$ özelliğindeki x noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_x = \{\{x\}\}$ dir.

ÇÖZÜM 25

Örnek 3.16 de verilen topoloji

$$\mathcal{T}(a) = \{U \subseteq X | a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

dir.

$$\mathscr{B} = \{\{a,x\} | x \in X\}$$

olsun. Açıkça $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}(a)$ dır. $U \in \mathcal{T}(a)$ olsun. Bu durumda $U = \emptyset$ veya $a \in U$ dur. $U = \emptyset$ ise

$$U = \bigcup_{x \in \emptyset} \{a,x\}$$

dir. $a \in U$ ise $U = \bigcup_{x \in U} \{a,x\}$ ve $x \in X$ için $\{a,x\} \in \mathscr{B}$ olduğundan $\mathscr{B}$ kolleksiyonu Teorem 4.9 gereğince $\mathcal{T}(a)$ nın bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 26

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1,2,\cdots,n\} | n \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} | n \in \mathbb{N}\}$$

dir.

a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ uzayında bir m noktasının yerel tabanını bulalım. $m \in \mathbb{N}$ ve

$$\mathscr{B}_m = \{\{1,2,\cdots,m\}\}$$

olsun. Açıkça $\mathscr{B}_m \subseteq \mathcal{T}_1$ dir. $U \in \mathcal{T}_1$ ve $m \in U$ olsun. Bu durumda

$$U = \mathbb{N} \text{ veya } U = \{1,2,\cdots,n\}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $U = \mathbb{N}$ ise

$$\{1,2,\cdots,m\} \subseteq U$$

dur. $U = \{1,2,\cdots,n\}$ ise $m \in U$ olduğundan $m \leq n$ dir. O halde

$$\{1,2,\cdots,m\} \subseteq U$$

dur. Böylece $\mathscr{B}_m$ kolleksiyonu $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ uzayında m noktasının yerel tabanıdır.

b) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ uzayında bir m noktasının yerel tabanını bulalım. $m \in \mathbb{N}$ ve

$$\mathscr{B}_m = \{\{m, m+1, \cdots\}\}$$

olsun. Açıkça $\mathscr{B}_m \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. $U \in \mathcal{T}_2$ ve $m \in U$ olsun. Bu durumda

$$U = \mathbb{N} \text{ veya } U = \{n, n+1, \cdots\}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $U = \mathbb{N}$ ise

$$\{m, m+1, \cdots\} \subseteq U$$

dur. $U = \{n, n+1, \cdots\}$ ise $m \in U$ olduğundan $m \geq n$ dir. O halde

$$\{m, m+1, \cdots\} \subseteq U$$

dur. Böylece $\mathscr{B}_m$ kolleksiyonu $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ uzayında m noktasının yerel tabanıdır.

ÇÖZÜM 27

Alıştırma 8 de verilen topolojiler

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \bigcup \{(x,\infty) | x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \bigcup \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \bigcup \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \bigcup \{[-n, n] | n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \bigcup \{[n,\infty) | n \in \mathbb{N}\}$$

ve Alıştırma 3 de verilen $\mathcal{T}'_1, \mathcal{T}'_2, \mathcal{T}'_3$ topolojilerinin tabanları sırasıyla $S = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere

$$\mathcal{B}_1 = \{(x,\infty) | x \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a,b) \setminus S | a, b \in \mathbb{R}\}$$

dir. Bu durumda $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}'_1$ ve $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}'_2$ dür.

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulalım. $\mathcal{B} = \{(y,\infty) | y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir tabanıdır. Böylece $\mathcal{B}_x = \{(y,\infty) | y \in \mathbb{R}, y < x\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulalım. $\mathcal{B} = \{(-\infty, y) | y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir tabanıdır. Böylece $\mathcal{B}_x = \{(-\infty, y) | y \in \mathbb{R}, y > x\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır.

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulalım. $\mathcal{B} = \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayının bir tabanıdır. Böylece $\mathcal{B}_x = \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}, |x| < n\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_4)$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulalım. $\mathcal{B} = \{[-n, n] | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_4)$ uzayının bir tabanıdır. Böylece $\mathcal{B}_x = \{[-n, n] | n \in \mathbb{N}, |x| \leq n\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_4)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır.

e) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_5)$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulalım.

$$\mathcal{B} = \{[n,\infty) | n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_5)$ uzayının bir tabanıdır. Böylece $x \geq 1$ ise

$$\mathcal{B}_x = \{[n,\infty) | n, m \leq x \text{ özelliğindeki en büyük doğal sayı}\}$$

kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_5)$ uzayının da x noktasının yerel bir tabanıdır. $x < 1$ ise $\mathcal{B}_x = \{\mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_5)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır.

f) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}'_3)$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel bir tabanını bulalım.

$$\mathcal{B}_3 = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a,b) \setminus S | a, b \in \mathbb{R}\} \ (S = \{1/n | n \in \mathbb{N}\})$$

kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}'_3)$ uzayının bir tabanıdır. Böylece $x > 1$ ise $\mathcal{B}_3 = \{(a,b) | a < x < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}'_3)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır. $x \leq 1$ ise $\{(a,b) \setminus S | a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}'_3)$ uzayınında x noktasının yerel bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 28

a) Alıştırma 16 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ dir. Böylece bu uzayda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ noktasının yerel bir tabanı $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{(x,y)\}$ dir.

b) Alıştırma 17 da verilen topolojinin tabanı

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i \in I} L_i \;\middle|\; \begin{array}{c} I \text{ sonlu bir indis kümesi} \\ \text{ve } i \in I \text{ için } L_i \in \mathcal{S} \end{array} \right\} = \mathcal{S} \bigcup \{\emptyset\}$$

dir. Böylece bu uzayda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ noktasının yerel bir tabanı $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{\{(z,y) | z \in \mathbb{R}\}\}$ dir.

c) Alıştırma 18 da verilen topolojinin tabanı

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i \in I} S_i \;\middle|\; \begin{array}{c} I \text{ sonlu bir indis kümesi} \\ \text{ve } i \in I \text{ için } S_i \in \mathcal{S} \end{array} \right\} \bigcup \{\emptyset\}$$

dir. Böylece bu uzayda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ noktasının yerel bir tabanı $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ ye ait olan ve (x,y) noktasını içine alan kümelerin kolleksiyonudur.

ÇÖZÜM 29

a) Önce

$$\mathcal{B}^2_{\text{sağ}} = \{[a,b) \times [c,d) \mid a < b, c < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$ topolojisinin tabanı olduğunu gösterelim.

STB-1). $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([-n, n) \times [-n, n))$ olduğundan Teorem 4.14 ın (STB-1) şartı sağlanır.

STB-2). $[a_1, b_1) \times [c_1, d_1), [a_2, b_2) \times [c_2, d_2) \in \mathcal{B}^2_{\text{sağ}}$ olmak üzere

$$(x,y) \in ([a_1, b_1) \times [c_1, d_1)) \bigcap ([a_2, b_2) \times [c_2, d_2))$$

olsun. Bu durumda

$$a_1 \leq x < b_1, a_2 \leq x < b_2 \text{ ve } c_1 \leq y < d_1, c_2 \leq y < d_2$$

dir.

$$a = \max\{a_1, a_2\}, b = \min\{b_1, b_2\}$$

ve
$$c = \max\{c_1, c_2\}, d = \min\{d_1, d_2\}$$
olsun. Bu durumda $a \le x < b$ ve $c \le y < d$ dir. Üstelik,
$$(x, y) \in [a, b) \times [c, d) \subseteq ([a_1, b_1) \times [c_1, d_1))$$
$$[a, b) \times [c, d) \subseteq ([a_1, b_1) \times [c_1, d_1)) \cap ([a_2, b_2) \times [c_2, d_2))$$
ve $[a, b) \times [c, d) \in \mathscr{B}^2_{\text{sağ}}$ dır. O halde Teorem 4.14 ın (STB-2) şartıda sağlanır.

Böylece $\mathscr{B}^2_{\text{sağ}}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$ topolojisinin tabanıdır.

b)
$$\mathscr{B}^2_{\text{sol}} = \{(a, b] \times (c, d] \mid a < b, c < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $\mathcal{T}^2_{\text{sol}}$ topolojisinin tabanı olduğu benzer şekilde yapılır.

ÇÖZÜM 30

Teorem 4.46 gereğince $\mathscr{S}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanıdır. $\mathscr{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ standart topolojinin tabanı olmak üzere $(a, b) \in \mathscr{B}$ olsun. Bu durumda $(a, b) \in \mathscr{S}$ ve böylece $(a, b) \in \mathcal{T}$ dur. Yani $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ dur. Alıştırma 1 gereğince $\mathcal{T}$ topolojisi standart topolojiden daha incedir.

ÇÖZÜM 31

$\mathcal{T}_{\text{son}}$ sonlu tümleyenler topolojisi ve $\mathcal{T}_{\text{say}}$ sayılabilir tümleyenler topolojisi olsun.

a) X sonlu bir küme ise
$$\mathcal{T}_{\text{say}} = \mathcal{T}_{\text{son}} = \mathscr{P}(X)$$
dir.

b) X sonlu bir küme olmasın.

i) $U \in \mathcal{T}_{\text{son}}$ olsun. Bu durumda $X \setminus U$ sonludur. Böylece $X \setminus U$ sayılabilirdir. O halde $U \in \mathcal{T}_{\text{say}}$ dır. Yani $\mathcal{T}_{\text{son}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{say}}$ dır. Diğer bir deyişle $\mathcal{T}_{\text{say}}$ topolojisi $\mathcal{T}_{\text{son}}$ topolojisinden daha incedir.

ii) $\mathcal{T}_{\text{say}} \nsubseteq \mathcal{T}_{\text{son}}$ olduğunu gösterelim. A kümesi X in X den farklı sayılabilir sonsuz bir alt kümesi olsun. Bu durumda
$$X \setminus (X \setminus A) = A$$
sayılabilir olduğundan $X \setminus A \in \mathcal{T}_{\text{say}}$ dır. Diğer taraftan $X \setminus (X \setminus A) = A$ sonlu olmadığından $X \setminus A \notin \mathcal{T}_{\text{son}}$ dur. Örneğin $X = \mathbb{R}$ ise
$$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$
sayılabilir olduğunda $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{\text{say}}$ dır. Diğer taraftan $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ sonlu olmadığından $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \notin \mathcal{T}_{\text{son}}$ dur.

ÇÖZÜM 32

$\mathscr{B} = \{\{2k-1, 2k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu tek-çift uzayının bir tabanıdır. Böylece n tek ise $\{\{n, n+1\}\}$ kolleksiyonu n noktasının yerel tabanı ve n çift ise $\{\{n-1, n\}\}$ kolleksiyonu n noktasının yerel tabanıdır.

ÇÖZÜM 33

X in bir ayrışımı $\mathscr{P}$ olsun. Bu durumda $\mathscr{P}$ ayrışımı $\mathcal{T}_P$ ayrışım topolojisinin tabanıdır ve $\mathscr{P}$ nin tek bir elemanı x noktasını içerir. O halde tek elemanlı $\{B \in \mathscr{P} \mid x \in B\}$ kolleksiyonu x in yerel tabanıdır.

ÇÖZÜM 34

$\mathscr{B}' = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğununu biliyoruz.

a) **i)** $(a, b) \in \mathscr{B}'$ ve $x \in (a, b)$ olsun. Bu durumda
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|x-a|, |x-b|\}$$
olmak üzere $x_1 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ ve $x_1 > x$ olacak şekilde bir x_1 ve $x - \varepsilon < x_1 - \delta < x < x_1 < x_1 + \delta < x + \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı seçelim. Bu durumda $(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subseteq (a, b)$ ve $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \in \mathscr{B}$ dir.

ii) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}$ ve $x_1 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $a = x - \varepsilon$ ve $b = x + \varepsilon$ olmak üzere $x_1 \in (a, b) \in \mathscr{B}'$ ve $(a, b) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ dur.

O halde Sonuç 4.31 gereğince $\mathscr{B}'$ nün ürettiği topoloji ile $\mathscr{B}$ nin ürettiği topoloji aynıdır. Böylece $\mathscr{B}$ kolleksiyonu standart topolojinin bir tabanıdır.

b) **i)** $(a, b) \in \mathscr{B}'$ ve $x \in (a, b)$ olsun. Bu durumda
$$\delta = \min\{|x-a|, |x-b|\}$$
olmak üzere $0 < \varepsilon < \delta$ özelliğinde bir $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a, b)$ ve $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}$ dir.

ii) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}$ ve $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $a = x - \varepsilon$ ve $b = x + \varepsilon$ olmak üzere $y \in (a, b) \in \mathscr{B}'$ ve $(a, b) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ dur.

O halde Sonuç 4.31 gereğince $\mathscr{B}'$ nün ürettiği topoloji ile $\mathscr{B}$ nin ürettiği topoloji aynıdır. Böylece $\mathscr{B}$ kolleksiyonu standart topolojinin bir tabanıdır.

c) (a) da δ nın seçiminde $\delta \in \mathbb{Q}$ seçilirse istenilen elde edilir.

ÇÖZÜM 35

$\mathcal{B}' = \{(a,b)\times(c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı olduğununu biliyoruz.

a)

b) i)

ii) $(a,b)\times(c,d) \in \mathcal{B}'$ ve $(x,y) \in (a,b)\times(c,d)$ olsun. Bu durumda $x < x_0 < b$, $c < y_0 < y$ özelliğinde $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ sayılarını ve

$$a < x_0 - \delta < x < x_0 < x_0 + \delta < b$$

ve

$$c < y_0 - \delta < y_0 < y < y_0 + \delta < d$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı seçelim. Bu durumda

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq (a,b)\times(c,d)$$

ve

$$(x,y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \in \mathcal{B}$$

dir.

iii)

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \in \mathcal{B}$$

ve

$$(x_1, y_1) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$$

olsun. Bu durumda $a = x-\varepsilon$, $b = x+\varepsilon$ ve $c = y-\varepsilon$ ve $d = y+\varepsilon$ olmak üzere

$$(x_1, y_1) \in (a,b)\times(c,d) \in \mathcal{B}'$$

ve

$$(a,b)\times(c,d) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$$

dur.

O halde Sonuç 4.31 gereğince $\mathcal{B}'$ nün ürettiği topoloji ile $\mathcal{B}$ nin ürettiği topoloji aynıdır. Böylece $\mathcal{B}$ kolleksiyonu standart topolojinin bir tabanıdır.

c) i)

ii) $(a,b)\times(c,d) \in \mathcal{B}'$ ve $(x,y) \in (a,b)\times(c,d)$ olsun. Bu durumda $a < x < b$ ve $c < y < d$ dir.

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\{|d-y|, |c-y|, |b-x|, |x-a|\}$$

özelliğinde bir $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda

$$(x,y) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq (a,b)\times(c,d)$$

ve

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \in \mathcal{B}$$

dir.

iii) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \in \mathcal{B}$ ve

$$(x_1, y_1) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$$

olsun. Bu durumda $a = x-\varepsilon$, $b = x+\varepsilon$ ve $c = y-\varepsilon$ ve $d = y+\varepsilon$ olmak üzere

$$(x_1, y_1) \in (a,b)\times(c,d) \in \mathcal{B}'$$

$$(a,b)\times(c,d) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$$

dur.

O halde Sonuç 4.31 gereğince $\mathcal{B}'$ nün ürettiği topoloji ile $\mathcal{B}$ nin ürettiği topoloji aynıdır. Böylece $\mathcal{B}$ kolleksiyonu standart topolojinin bir tabanıdır.

d) (a) da δ nın seçiminde $\delta \in \mathbb{Q}$ seçilirse istenilen elde edilir.

ÇÖZÜM 36

$\mathcal{B}_x$ kolleksiyonunun x noktasının yerel bir tabanı olduğunu gösterelim.

YTB-1). $X \setminus A \in \mathcal{B}_x$ olsun. Bu durumda $X\setminus(X\setminus A) = A$ sonlu olduğundan $X\setminus A \in \mathcal{T}$ dur. Yani $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ dur.

YTB-2). $X\setminus A \in \mathcal{B}_x$ olsun. Bu durumda $x \notin A$ olduğundan $x \in X\setminus A$ dır. Yani her $B \in \mathcal{B}_x$ için $x \in B$ dir.

YTB-3). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $X\setminus U$ sonludur. $X\setminus U \subseteq A$ ve $x \notin A$ olacak şekilde sonlu bir $A \subseteq X$ seçilirse $X\setminus A \subseteq U$ olur. Bu durumda $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ kümesi için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B = X\setminus A \in \mathcal{B}_x$ vardır.

O halde $\mathcal{B}_x = \{X\setminus A | A$ sonlu ve $x \notin A\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 37

$\mathcal{T}(a) = \{U \subseteq X | a \in U\} \cup \{\emptyset\}$ ve $\mathcal{T}_a = \{U \subseteq X | a \notin U\} \cup \{X\}$ dir. Alıştırma 31 gereğince $\mathcal{T}(a)_A = \mathcal{T}_{a_A} = \mathcal{P}(A)$ olduğundan $\mathcal{B} = \{\{x\} | x \in A\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}(a)_A$ ve $\mathcal{T}_{a_A}$ nın bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 38

a) i) $\mathcal{B}_{sağ} = \{[x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sağ})$ uzayının bir tabanıdır. O halde Teorem 4.2 gereğince $\mathcal{B}_{sağ_A} = \{[x,y) \cap A | x,y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(A, \mathcal{T}_{sağ_A})$ uzayının bir tabanıdır.

ii) $\mathcal{B}_{sol} = \{(x,y] | x,y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sol})$ uzayının bir tabanıdır. O halde Teorem 4.2 gereğince $\mathcal{B}_{sol} =$

$\{(x,y] \cap A | x, y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(A, \mathcal{T}_{\text{sol}_A})$ uzayının bir tabanıdır.

b) i) (a) gereğince $\mathcal{B}_{\text{sağ}_A} = \{[x,y),(0,z) | x,y,z > 0\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sağ}_A}$ ın bir tabanıdır. Böylece Sonuç 4.69 gereğince $\{[a,y) | y \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(A, \mathcal{T}_{\text{sağ}_A})$ uzayında $a \in A$ noktasının yerel bir tabanıdır.

ii) (a) gereğince $\mathcal{B}_{\text{sol}_A} = \{(x,y] | x \geq 0\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sol}_A}$ ın bir tabanıdır. Böylece Sonuç 4.69 gereğince $\{(x,a] | x \geq 0\}$ kolleksiyonu $(A, \mathcal{T}_{\text{sol}_A})$ uzaylarında $a \in A$ noktasının yerel bir tabanıdır.

ÇÖZÜM 39

a) $\mathcal{B} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayının bir tabanıdır. Böylece Teorem 4.2 gereğince

$$\mathcal{B}_A = \{(a,b) \cap A | a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a,b),(d,1] | a, d \geq 0, b \leq 1\}$$

kolleksiyonu A alt uzayının bir tabanıdır.

b) $\mathcal{S} = \{(-\infty,b),(a,\infty) | a, b \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayının bir alt tabanıdır. Böylece Teorem 4.2 gereğince

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A &= \{(-\infty,b) \cap A, (a,\infty) \cap A | a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,b),(c,d),(a,1] | a \geq 0, b \leq 1, c \geq 0, d \leq 1\} \end{aligned}$$

dir. $(c,d) \in \mathcal{S}_A$ ise

$$(c,d) = (0,d) \cap (c,1]$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\mathcal{S}_A = \{(0,b),(a,1] | a \geq 0, b \leq 1\}$$

kolleksiyonu A alt uzayının bir alt tabanıdır.

c) $\mathcal{B}_1 = \{(a,1] | 0 \leq a < 1\}$ kolleksiyonu A alt uzayında 1 noktasının yerel tabanıdır.

$$\mathcal{B}_x = \{(a,b) | x \in (a,b), 0 < a < b < 1\}$$

kolleksiyonu A alt uzayında x noktasının yerel tabanıdır.

ÇÖZÜM 40

a) $\mathcal{T} = \{\{2\},(0,a),(b,1),(c,d) | 0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1, 0 \leq c < d \leq 1\}$ kolleksiyonu A alt uzayının bir tabanıdır.

b) $\mathcal{S} = \{(0,a),(b,1),\{2\} | 0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1\}$ kolleksiyonu A alt uzayının bir alt tabanıdır.

c) $\mathcal{B}_x = \{(a,b) | x \in (a,b) \subseteq (0,1)\}$ kolleksiyonu $x \in (0,1)$ noktasının bir yerel tabanıdır.

d) $\mathcal{B}_2 = \{\{2\}\}$ kolleksiyonu 2 noktasının bir yerel tabanıdır.

ÇÖZÜM 41

$U \in \mathcal{T}_{1_A}$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}_1$ kümesi vardır. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan $V \in \mathcal{T}_2$ dir. Böylece $U \in \mathcal{T}_{2_A}$ dır. O halde $\mathcal{T}_{1_A} \subseteq \mathcal{T}_{2_A}$ dir.

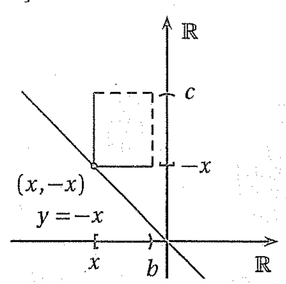
ÇÖZÜM 42

a) $(x,-x) \in A$ olsun. $x < b$ ve $-x < c$ olacak şekilde b ve c reel sayıları seçelim. Bu durumda $[x,b) \times [-x,c) \in \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$ dır. Böylece

$$\{(x,-x)\} = ([x,b) \times [-x,c)) \cap A \in \mathcal{T}^2_{\text{sağ}_A}$$

dır. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}_A} = \mathcal{P}(A)$ dir. (Şekil 4.28 ya bakınız.)

Şekil 4.28



b) $(x,x) \in B$ ve $(x,x) \in U$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}^2_{\text{sol}}$ olsun. Bu durumda

$$(a,x] \times (b,x] \subseteq U$$

olacak şekilde a, b reel sayıları vardır. $x > d > \max\{a,b\}$ olsun. Bu durumda

$$(d,d) \in (a,x] \times (b,x]$$

yani

$$(d,d) \in U \cap B$$

dir. Böylece

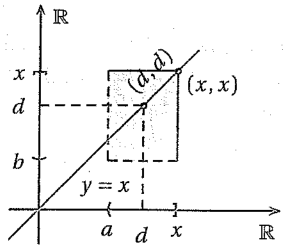
$$\{(x,x)\} \neq U \cap B$$

dir. Bu durumda

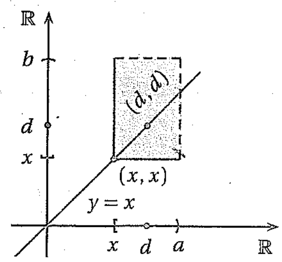
$$\{(x,x)\} \notin \mathcal{T}^2_{\text{sol}_B}$$

dir. O halde $\mathcal{T}^2_{\text{sol}_B}$ ayrık topoloji değildir. (Şekil 4.29 ye bakınız.)

Şekil 4.29



Şekil 4.30



c) $(x,x) \in B$ ve $(x,x) \in U$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}^2_{\text{sağ}_B}$ olsun. Bu durumda

$$[x,b) \times [x,c) \subseteq U$$

olacak şekilde b, c reel sayıları vardır. $x < d < \min\{b,c\}$ olsun. Bu durumda

$$(d,d) \in [x,b) \times [x,c)$$

yani

$$(d,d) \in U \cap B$$

dir. Böylece

$$\{(x,x)\} \neq U \cap B$$

dir. Bu durumda

$$\{(x,x)\} \notin \mathcal{T}^2_{\text{sağ}_B}$$

dir. O halde $\mathcal{T}^2_{\text{sağ}_B}$ ayrık topoloji değildir. (Şekil 4.30 ya bakınız.)

d) $(x,-x) \in A$ olsun. $b < x$ ve $c < -x$ olacak şekilde b ve c reel sayıları seçelim. Bu durumda

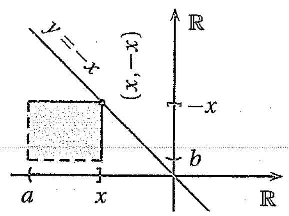
$$(b,x] \times (c,-x] \in \mathcal{T}^2_{\text{sol}_A}$$

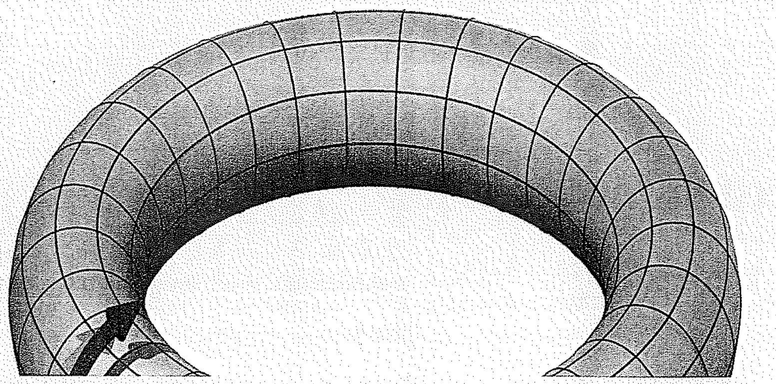
dır. Böylece

$$\{(x,-x)\} = ((b,x] \times (c,-x]) \cap A \in \mathcal{T}^2_{\text{sol}_A}$$

dır. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}^2_{\text{sol}_A} = \mathcal{P}(A)$ dır. (Şekil 4.31 ye bakınız.)

Şekil 4.31





5. Bir Noktanın Bir Kümeye Göre Konumu

Bu bölümde bir noktanın bir kümeye göre konumu, bir kümenin kapanışı, içi ve sınırı gibi kavramlar verilerek yoğun ve hiç bir yerde yoğun olmayan küme kavramları tanıtılacaktır.

5.1. Bir Kümenin Limit Noktaları

Tanım 5.1. ▹ **Bir kümenin limit noktaları**
A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her U açık kümesi x noktasından başka A nın bir elemanını içeriyor ise x noktasına A kümesinin bir limit (yığılma veya yapışık) noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için

$$(A\setminus\{x\}) \cap U \neq \emptyset$$

ise x noktasına A kümesinin bir limit (yığılma veya yapışık) noktası denir. A nın bütün limit noktalarının kümesi $\widetilde{A}$ ile gösterilir.

Not 5.2.
1. Tanımdan hemen görüleceği gibi $A \subseteq B$ ve x noktası A nın bir limit noktası ise x noktası B nin de bir limit noktasıdır. Böylece, $A \subseteq B$ ise $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ olur. Açıkça $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$ dur.
2. Bir $x \in X$ noktasının bir A kümesinin limit noktası olduğunun gösterilmesi için $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için

$$(A\setminus\{x\}) \cap U \neq \emptyset$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Böylece bir $x \in X$ noktasının bir A kümesinin limit noktası olmadığının gösterilmesi için $x \in U$ özelliğindeki bir $U \in \mathcal{T}$ için $(A\setminus\{x\}) \cap U = \emptyset$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.
3. Bir $x \in A$ noktası A nın limit noktası olmak zorunda değildir. Diğer yandan $x \notin A$ özelliğindeki bir $x \in X$ noktası A nın limit noktası olabilir.

ÖRNEK 5.3. ▷
$X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = \{a,b,c\}$ olsun. b,d,e noktalarının A nın birer limit noktası ve a, c noktalarının A nın limit noktaları olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\{a\}$ kümesi a yı içeren açık bir küme olup A nın a dan farklı hiçbir noktasını içermez. Yani

$$a \in \{a\}, \ \{a\} \in \mathcal{T} \text{ ve } (A\setminus\{a\}) \cap \{a\} = \{b,c\} \cap \{a\} = \emptyset$$

dur. Böylece a noktası A nın limit noktası değildir.

b) $\{c,d\}$ kümesi c yi içeren açık bir küme olup bu küme c den başka A nın hiçbir elemanını içermez. Yani

$$c \in \{c,d\}, \ \{c,d\} \in \mathcal{T} \text{ ve } (A\setminus\{c\}) \cap \{c,d\} = \{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$$

dur. O halde c, A nın bir limit noktası değildir.

c) b nin A nın bir limit noktası olduğunu göstermek için b yi içeren her açık kümenin b den farklı A nın bir elemanını içerdiğini göstermeliyiz. b yi içeren açık kümeler

$$X \text{ ve } \{b,c,d,e\}$$

kümeleridir. Bu kümeler A nın b den farklı c elemanını içerirler. Yani

$$b \in \{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}, \ b \in X \in \mathcal{T}$$

ve

$$\begin{aligned} (A\setminus\{b\}) \cap X &= \{a,c\} \cap X = \{a,c\} \neq \emptyset, \\ (A\setminus\{b\}) \cap \{b,c,d,e\} &= \{a,c\} \cap \{b,c,d,e\} = \{c\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

dur. Böylece b, A nın bir limit noktasıdır.

d) d nin A nın bir limit noktası olduğunu göstermek için d yi içeren her açık kümenin d den farklı A nın bir elemanını içerdiğini göstermeliyiz. d yi içeren açık kümeler

$$X, \ \{c,d\}, \ \{a,c,d\}, \ \{b,c,d,e\}$$

kümeleridir. Bu kümeler A nın b den farklı c ve d elemanını içerirler. Yani $d \in U \in \mathcal{T}$ ise

$$(A\setminus\{d\}) \cap U = \{a,b,c\} \cap U = \begin{cases} \{a,b,c\}, & U = X \\ \{c\}, & U = \{c,d\} \\ \{a,c\}, & U = \{a,c,d\} \\ \{b,c\}, & U = \{b,c,d,e\} \end{cases}$$

olduğundan

$$(A\setminus\{d\}) \cap U \neq \emptyset$$

dur. Böylece d, A nın bir limit noktasıdır.

e) e nin A nın bir limit noktası olduğunu göstermek için e yi içeren her açık kümenin

e den farklı A nın bir elemanını içerdiğini göstermeliyiz. e yi içeren açık kümeler

$$X,\ \{b,c,d,e\}$$

kümeleridir. Bu kümeler A nın e den farklı b ve c elemanını içerirler. Yani

$$e \in X \in \mathcal{T},\ e \in \{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}$$

ve

$$\begin{aligned}(A\setminus\{e\}) \cap X &= \{a,b,c\} \cap X = \{a,b,c\} \neq \emptyset,\\ (A\setminus\{e\}) \cap \{b,c,d,e\} &= \{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c\} \neq \emptyset\end{aligned}$$

dur. Böylece e, A nın bir limit noktasıdır.

O halde d ve e noktaları A ya ait olmadıkları halde A nın birer limit noktasıdırlar. Diğer yandan a ve c noktaları A ya ait olmalarına rağmen A nın limit noktaları değildir.✍

ÖRNEK 5.4. ▷
$X = \{\blacksquare, \bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\}$ olsun. $\bigstar, \spadesuit$ noktalarının A nın birer limit noktası ve $\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit$ noktalarının A nın limit noktaları olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\blacksquare$ yi içeren açık kümeler $X, \{\blacksquare\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}$ ve $A\setminus\{\blacksquare\} = \{\clubsuit, \spadesuit\}$ dir.

$$(A\setminus\{\blacksquare\}) \cap \{\blacksquare\} = \{\clubsuit, \spadesuit\} \cap \{\blacksquare\} = \emptyset$$

olduğundan $\blacksquare$, A nın bir limit noktası değildir.

b) $\bigstar$ yi içeren açık kümeler $X, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $A\setminus\{\bigstar\} = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\}$ dir.

$$(A\setminus\{\bigstar\}) \cap X = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \cap X = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \neq \emptyset$$
$$(A\setminus\{\bigstar\}) \cap \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \cap \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\clubsuit, \spadesuit\} \neq \emptyset$$

olduğundan $\bigstar$, A nın bir limit noktasıdır.

c) $\blacklozenge$ yi içeren açık kümeler $X, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $A\setminus\{\blacklozenge\} = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\}$ dir.

$$(A\setminus\{\blacklozenge\}) \cap X = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \cap X = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \neq \emptyset$$
$$(A\setminus\{\blacklozenge\}) \cap \{\blacklozenge, \clubsuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \cap \{\blacklozenge, \clubsuit\} = \{\clubsuit\} \neq \emptyset$$
$$(A\setminus\{\blacklozenge\}) \cap \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \cap \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit\} \neq \emptyset$$
$$(A\setminus\{\blacklozenge\}) \cap \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit\} \cap \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\clubsuit, \spadesuit\} \neq \emptyset$$

olduğundan $\blacklozenge$, A nın bir limit noktasıdır.

d) $\clubsuit$ yi içeren açık kümeler $X, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $A\setminus\{\clubsuit\} = \{\blacksquare, \spadesuit\}$ dir.

$$(A\setminus\{\clubsuit\}) \cap \{\blacklozenge, \clubsuit\} = \{\blacksquare, \spadesuit\} \cap \{\blacklozenge, \clubsuit\} = \emptyset$$

olduğundan $\clubsuit$, A nın bir limit noktası değildir.

e) $\spadesuit$ yi içeren açık kümeler $X, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $A\setminus\{\spadesuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit\}$ dir.

$$(A\setminus\{\spadesuit\}) \cap X = \{\blacksquare, \clubsuit\} \cap X = \{\blacksquare, \clubsuit\} \neq \emptyset$$
$$(A\setminus\{\spadesuit\}) \cap \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\blacksquare, \clubsuit\} \cap \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\} = \{\clubsuit\} \neq \emptyset$$

olduğundan $\spadesuit$, A nın bir limit noktasıdır.

Bu durumda $\widetilde{A} = \{\bigstar, \blacklozenge, \spadesuit\}$ olur. O halde $\blacksquare, \clubsuit$ noktaları A ya ait olmalarına rağmen A nın limit noktaları değildir. Diğer yandan $\bigstar$ noktası A ya ait olmamasına rağmen A nın bir limit noktasıdır.✍

Teorem 5.5. ▷

A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi, $x \in X$ ve $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x in yerel bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) x, A kümesinin bir limit noktasıdır.

b) Her $B \in \mathcal{B}_x$ kümesi x noktasından başka A nın bir elemanını içerir. Yani her $B \in \mathcal{B}_x$ için $(A\setminus\{x\}) \cap B \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). $B \in \mathcal{B}_x$ olsun. Bu durumda, yerel taban tanımı gereğince $B \in \mathcal{T}$ ve $x \in B$ dir. O halde limit noktasının tanımı gereğince $(A\setminus\{x\}) \cap B \neq \emptyset$ dur.

b)⇒ a). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı olduğundan $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}_x$ vardır. Böylece (b) gereğince $(A\setminus\{x\}) \cap B \neq \emptyset$ olduğundan $(A\setminus\{x\}) \cap U \neq \emptyset$ olur. O halde x noktası A nın bir limit noktasıdır.✔

Örnek 4.65 gereğince herhangi bir (X, d) metrik uzayında $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğundan Teorem 5.5 gereğince metrik uzaylar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 5.6. ▷ A, (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

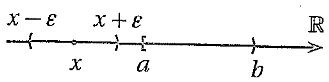
a) x, A kümesinin bir limit noktasıdır.

b) Her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon)$ kümesi x noktasından başka A nın bir elemanını içerir. Yani her $\varepsilon > 0$ için $(A\setminus\{x\}) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ dur.

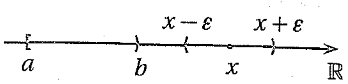
ÖRNEK 5.7. ▷

$\mathbb{R}$ standar uzayında $A = [a, b)$ ve $A = [a, \infty)$ kümelerinin limit noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM:



Şekil 5.1



Şekil 5.2

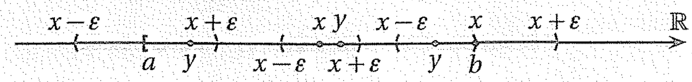
a) Önce $A = [a, b)$ kümesinin limit noktalarını bulalım. $x \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $x < a$ ise $0 < \varepsilon < |x - a|$ olmak üzere $(A\setminus\{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$ olduğundan x noktası A nın bir limit noktası değildir. (Şekil 5.1 ya bakınız.) Benzer şekilde $x > b$ ise $0 < \varepsilon < |x - b|$ olmak üzere $(A\setminus\{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$ olduğundan x noktası A nın bir limit noktası değildir. (Şekil 5.2 ye bakınız.)

ii) $a \leq x \leq b$ ise her $\varepsilon > 0$ için $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$ olacak şekilde bir $y \neq x$ vardır. Böylece her $\varepsilon > 0$ için için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. Sonuç 5.6 gereğince x

noktası A nın bir limit noktasıdır. (Şekil 5.3 ye bakınız.)

Şekil 5.3

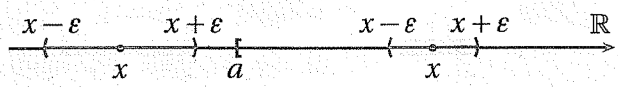


(i) ve (ii) gereğince $A = [a,b)$ kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{A} = [a,b]$ kapalı aralığıdır.

b) Şimdi $A = [a,\infty)$ aralığının limit noktalarını bulalım. $x \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $x < a$ olsun. Bu durumda $0 < \varepsilon < |x-a|$ özelliğinde bir ε seçelim. Bu durumda $x+\varepsilon < a$ dır. Böylece $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ dur. Sonuç 5.6 gereğince x noktası A nın bir limit noktası değildir. (Şekil 5.4 ye bakınız.)

Şekil 5.4

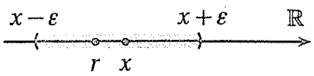


ii) $x \geq a$ ise her $\varepsilon > 0$ için $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap A$ olacak şekilde bir $y \neq x$ vardır. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dur. Sonuç 5.6 gereğince x noktası A nın bir limit noktasıdır. (Şekil 5.4 ye bakınız.)

(i) ve (ii) gereğince $A = [a,\infty)$ aralığının limit noktalarının kümesi $\widetilde{A} = [a,\infty)$ dur. Benzer şekilde (a,b), $(a,b]$ ve $[a,b]$ aralıklarının limit noktalarının kümesinin $[a,b]$ aralığı, $A = (a,\infty)$ aralığının limit noktalarının kümesinin $\widetilde{A} = [a,\infty)$ ve $B = (-\infty, a]$, $B = (-\infty, a)$ aralıklarının limit noktalarının kümesinin $\widetilde{B} = (-\infty, a]$ aralığı olduğu gösterilir.✍

ÖRNEK 5.8. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümelerinin limit noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM:



Şekil 5.5

a) Önce $\mathbb{Q}$ nun limit noktalarını bulalım. $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Farklı iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı olduğundan $r \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ve $r \neq x$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $r \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap (\mathbb{Q} \setminus \{x\})$ olur. Yani $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dur. O halde $x \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ dür. Böylece $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{Q}}$ olur. (Şekil 5.5 ye bakınız.)

b) Şimdi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nun limit noktalarını bulalım. $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Farklı iki reel sayı arasında bir irrasyonel sayı olduğundan $r \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ve $r \neq x$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda

$$r \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{x\})$$

olur. Yani

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $x \in \widetilde{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ dür. Böylece $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ olur.

Benzer şekilde $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ olmak üzere $\widetilde{A} = \mathbb{R}^n$ ve $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olmak üzere $\widetilde{B} = \mathbb{R}^n$ olduğu gösterilir.✍

ÖRNEK 5.9. ▷
$(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzay uzayında X in bir A alt kümesinin hiç bir limit noktası olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x \in X$ için $\mathscr{B}_x = \{\{x\}\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır.

$$(A \setminus \{x\}) \cap \{x\} = \emptyset$$

olduğundan x noktası Teorem 5.5 gereğince A nın bir limit noktası değildir. Böylece, A nın hiçbir limit noktası yoktur. Burada $A = X$ alınırsa X in hiç bir limit noktasının olmadığı görülür.✍

ÖRNEK 5.10. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir kaba uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. A nın limit noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM:

a) A en az iki elemana sahip olan bir alt küme ve $x \in X$ olsun. $\mathscr{B}_x = \{X\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır. Böylece, A nın en az iki elemanı olduğundan $X \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ olur. Teorem 5.5 gereğince x noktası A nın bir limit noktasıdır. O halde X in her noktası A nın bir limit noktasıdır. Diğer bir deyişle $\widetilde{A} = X$ dir.
b) A nın tek bir elemanı olsun. $A = \{x\}$ diyelim. Bu durumda $X \cap (A \setminus \{x\}) = X \cap \emptyset = \emptyset$ olacağından Teorem 5.5 gereğince x noktası A nın bir limit noktası değildir. $y \neq x$ olsun. Bu durumda $x \in X \cap (A \setminus \{y\}) = X \cap A$ olacağından Teorem 5.5 gereğince y noktası A nın bir limit noktasıdır. Böylece, $\widetilde{A} = \widetilde{\{x\}} = X \setminus \{x\}$ dir.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayında herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$\widetilde{A} = \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \\ X \setminus \{x\}, & A = \{x\} \\ X, & A \text{ nın birden fazla elemanı varsa} \end{cases}$$

dir.✍

ÖRNEK 5.11. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayı verilsin ve $A \subseteq X$ olsun. A nın limit noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM: $a \in A$ veya $a \notin A$ dır.

a) $a \in A$ olsun. Bu durumda $\{a\}$ kümesi açık, $a \in \{a\}$ ve $\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$ olduğundan a noktası A nın bir limit noktası değildir. $x \neq a$ olsun. $x \in U, U \in \mathcal{T}(a)$ özelliğindeki her U kümesi için $a \in U$ olacağından $a \in U \cap (A \setminus \{x\})$ dir. Böylece $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ olur. O halde x noktası A kümesinin bir limit noktasıdır. Bu durumda X in a dan farklı her noktası A nın bir limit noktasıdır. Yani A nın limit noktalarının kümesi $\widetilde{A} = X \setminus \{a\}$ dır.
Özel olarak, $A = \{a\}$ alınırsa X in a dan farklı her noktası $\{a\}$ nın bir limit noktası olur. Yani $\widetilde{\{a\}} = X \setminus \{a\}$ olur.
b) $a \notin A$ olsun. Bu durumda $\{a\}$ kümesi açık, $a \in \{a\}$ ve $\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$ olduğundan

a noktası A nın bir limit noktası değildir. $x \neq a$ olsun. Bu durumda $\{a,x\} \in \mathcal{T}(a)$ ve $\{a,x\} \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olduğundan x noktası A nın bir limit noktası değildir. Böylece A nin hiç bir limit noktası yoktur. Diğer bir deyişle A nın limit noktalarının kümesi $\tilde{A} = \emptyset$ kümesidir.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayında herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$\tilde{A} = \begin{cases} X \setminus \{a\}, & a \in A \\ \emptyset, & a \notin A \end{cases}$$

olur.✍

ÖRNEK 5.12. ▷
$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ tek-çift uzayı ve $A = \{3,4,5,6\}$ olsun. A nın limit noktalarının kümesini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ nin tanımı gereğince $\mathscr{P} = \{\{2k-1, 2k\} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ nin bir tabanıdır. Böylece,

$$\mathscr{B}_1 = \{\{1,2\}\}, \quad \mathscr{B}_2 = \{\{1,2\}\}, \quad \mathscr{B}_3 = \{\{3,4\}\},$$
$$\mathscr{B}_4 = \{\{3,4\}\}, \quad \mathscr{B}_5 = \{\{5,6\}\}, \quad \mathscr{B}_6 = \{\{5,6\}\}$$

ve daha genel olarak

$$n \geq 7 \text{ ve } n \text{ tek ise } \mathscr{B}_n = \{\{n, n+1\}\},$$
$$n \geq 8 \text{ ve } n \text{ çift ise } \mathscr{B}_n = \{\{n-1, n\}\}$$

dir. Böylece

$$\{1,2\} \cap (A \setminus \{1\}) = \{1,2\} \cap \{3,4,5,6\} = \emptyset, \quad \{1,2\} \cap (A \setminus \{2\}) = \{1,2\} \cap \{3,4,5,6\} = \emptyset$$

olduğundan $1,2 \notin \tilde{A}$ dır.

$$\{3,4\} \cap (A \setminus \{3\}) = \{3,4\} \cap \{4,5,6\} = \{4\} \neq \emptyset, \quad \{3,4\} \cap (A \setminus \{4\}) = \{3,4\} \cap \{3,5,6\} = \{3\} \neq \emptyset,$$
$$\{5,6\} \cap (A \setminus \{5\}) = \{5,6\} \cap \{3,4,6\} = \{6\} \neq \emptyset, \quad \{5,6\} \cap (A \setminus \{6\}) = \{5,6\} \cap \{3,4,5\} = \{5\} \neq \emptyset$$

olduğundan $3,4,5,6 \in \tilde{A}$ dır.

$$\{7,8\} \cap (A \setminus \{7\}) = \{7,8\} \cap \{3,4,5,6\} = \emptyset$$

olduğundan $7 \notin \tilde{A}$ dir. $n \geq 8$ için

$$\{n, n+1\} \cap (A \setminus \{n\}) = \{n, n+1\} \cap \{3,4,5,6\} = \emptyset$$

ve

$$\{n-1, n\} \cap (A \setminus \{n\}) = \{n-1, n\} \cap \{3,4,5,6\} = \emptyset$$

olduğundan $n \notin \tilde{A}$ dır. Böylece, $\tilde{A} = \{3,4,5,6\}$ olur. Bu durumda $\tilde{A} = A$ dır. ✍

ÖRNEK 5.13. ▷
$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$

uzayı verilsin ve $A = \{a, b, d\}$ olsun. A nın limit noktalarının kümesini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}, \quad \mathscr{B}_b = \{\{b, c, d, e, f\}\}, \quad \mathscr{B}_c = \{\{c, d\}\},$$
$$\mathscr{B}_d = \{\{c, d\}\}, \quad \mathscr{B}_e = \{\{b, c, d, e, f\}\}, \quad \mathscr{B}_f = \{\{b, c, e, d, f\}\}$$

kolleksiyonları sırasıyla a, b, c, d, e, f noktalarının yerel tabanlarıdır.

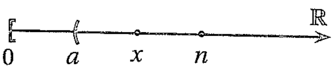
a) $\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \{a\} \cap \{b, d\} = \emptyset$ olduğundan $a \notin \widetilde{A}$ dır.
b) $\{b, c, d, e, f\} \cap (A \setminus \{b\}) = \{b, c, d, e, f\} \cap \{a, d\} = \{d\} \neq \emptyset$ olduğundan $b \in \widetilde{A}$ dır.
c) $\{c, d\} \cap (A \setminus \{c\}) = \{c, d\} \cap \{a, b, d\} = \{d\} \neq \emptyset$ olduğundan $c \in \widetilde{A}$ dır.
d) $\{c, d\} \cap (A \setminus \{d\}) = \{c, d\} \cap \{a, b\} = \emptyset$ olduğundan $d \notin \widetilde{A}$ dır.
e) $\{b, c, d, e, f\} \cap (A \setminus \{e\}) = \{b, c, d, e, f\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \neq \emptyset$ olduğundan $e \in \widetilde{A}$ dır.
f) $\{b, c, d, e, f\} \cap (A \setminus \{f\}) = \{b, c, d, e, f\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \neq \emptyset$ olduğundan $f \in \widetilde{A}$ dır.

Bu durumda $\widetilde{A} = \{b, c, e, f\}$ olur.✍

ÖRNEK 5.14. ▶
$X = [0, \infty)$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{(a, \infty) \mid a \geq 0\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin.

a) $\mathbb{N}$ kümesinin limit noktalarını bulalım.
b) $A = [0, 1)$ kümesinin limit noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM:



Şekil 5.6

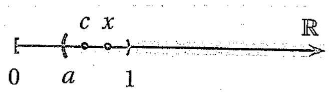
a) $x \in X$ olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ ise ya $U = X$ ya da $U = (a, \infty)$ olacak şekilde bir $a \geq 0$ sayısı vardır. Böylece $U = X$ ise

$$U \cap (\mathbb{N} \setminus \{x\}) = \mathbb{N} \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

dur. Diğer yandan $U = (a, \infty)$ ise $n > x$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in U \cap (\mathbb{N} \setminus \{x\})$ olduğundan

$$U \cap (\mathbb{N} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

dur. (Şekil 5.6 e bakınız.) Dolayısıyla, $x \in \widetilde{\mathbb{N}}$ dür. O halde $\widetilde{\mathbb{N}} = X$ dir.

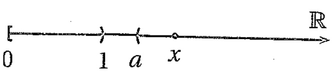


Şekil 5.7

b) $x \in X$ olsun.

i) $x = 0$ olsun. $0 \in U, U \in \mathcal{T}$ ise $U = X$ olur. Böylece $X \cap (A \setminus \{0\}) = (0, 1) \neq \emptyset$ olduğundan $0 \in \widetilde{A}$ dır.

ii) $0 < x \leq 1$ olsun. $x \in U, U \in \mathcal{T}$ ise $U = X$ ya da $U = (a, \infty)$ olacak şekilde bir $a \geq 0$ sayısı vardır. $U = X$ ise $X \cap (A \setminus \{x\}) = A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ dur. $U = (a, \infty)$ olsun. Bu durumda $x \in (a, \infty)$ olduğundan $a < x$ dir. Böylece $a < c < x$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. (Şekil 5.7 ya bakınız.) Bu durumda $c \in U \cap (A \setminus \{x\})$ dir. O halde $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dur. Böylece $x \in \widetilde{A}$ dır.



Şekil 5.8

iii) $x > 1$ olsun. Bu durmda $1 < a < x$ olacak şekilde bir a reel sayısı vardır. (Şekil 5.8 ye bakınız.) Üstelik $x \in (a, \infty)$ ve $(a, \infty) \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan

$$(a, \infty) \cap (A \setminus \{x\}) = (a, \infty) \cap A = (a, \infty) \cap [0, 1) = \emptyset$$

dur. O halde $x \notin \widetilde{A}$ dır.

(i), (ii) ve (iii) gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayında $\widetilde{A} = [0, 1]$ dir.✍

ÖRNEK 5.15. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. A nın limit noktalarının kümesini bulalım.

ÇÖZÜM:

a) X sonlu ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olur. Bu durumda Örnek 5.9 gereğince A nın hiç bir limit noktası yoktur. Yani $\widetilde{A} = \emptyset$ dur.

b) X sonsuz ve $x \in X$ olsun. Bu durumda A sonlu veya sonsuzdur.

i) A sonlu ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda $x \in X \setminus A$ ve $X \setminus A \in \mathcal{T}$ dur. Diğeryandan

$$(X \setminus A) \bigcap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

dur. Böylece x, A nın limit noktası değildir. $x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in X \setminus (A \setminus \{x\})$ ve $X \setminus (A \setminus \{x\}) \in \mathcal{T}$ dur.

$$(X \setminus (A \setminus \{x\})) \bigcap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

olduğundan x, A nın limit noktası değildir. O halde A sonlu ise A nın hiç bir limit noktası yoktur. Yani $\widetilde{A} = \emptyset$ dur.

ii) A sonsuz olsun. $x \in U$ özelliğindeki bir $U \in \mathcal{T}$ için $U \bigcap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A \setminus \{x\} \subseteq X \setminus U$ dur. Üstelik, $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ dir. $U \in \mathcal{T}$ olduğundan $X \setminus U$ sonludur. Böylece $A \setminus \{x\}$ sonludur. Bu ise A nın sonsuz olması ile çelişir. O halde $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $U \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dur. Böylece x, A nın limit noktasıdır. Bu durumda A sonsuz bir küme ise X in her noktası A nın bir limit noktasıdır. Yani $\widetilde{A} = X$ dir.

(i) ve (ii) gereğince $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayında

$$\widetilde{A} = \begin{cases} \emptyset, & A \text{ sonlu} \\ X, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

olur.✍

Aşağıdaki önerme bir kümenin kapalı olup olmadığını tespit etmek için kullanışlıdır.

Teorem 5.16. ▷
A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalıdır.

b) A nın bütün limit noktaları A ya aitdir. (Yani $\widetilde{A} \subseteq A$ dır.)

İSPAT:

a)⇒ b). x noktası A nın bir limit noktası olsun. $x \notin A$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in X \setminus A$ ve A kapalı olduğundan $X \setminus A$ açıktır. Diğer yandan $x \notin A$ olduğundan $A \setminus \{x\} = A$ dır. O halde $(X \setminus A) \bigcap A = \emptyset$ olduğundan $(X \setminus A) \bigcap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ dur. Böylece x noktası A nın bir limit noktası olamaz. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$x \in A$ dır. Bu her $x \in \widetilde{A}$ için doğru olduğundan A nın bütün limit noktaları A ya aittir. (Yani $\widetilde{A} \subseteq A$ dır.)

b)⇒ a). $x \in X \setminus A$ olsun. Bu durumda $x \notin A$ dır. (b) gereğince x noktası A nın bir limit noktası değildir. Böylece $x \in U_x$, $U_x \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir U_x açık kümesi vardır. Diğer yandan $x \notin A$ olduğundan $A \setminus \{x\} = A$ ve böylece $U_x \cap A = \emptyset$ olur. Buradan $U_x \subseteq X \setminus A$ elde edilir. Bu her $x \in X \setminus A$ için doğru olduğundan her $x \in X \setminus A$ için $x \in U_x$ ve $U_x \subseteq X \setminus A$ olacak şekilde bir U_x açık kümesi vardır. Sonuç 3.44 gereğince $X \setminus A$ kümesi açıktır. Dolayısıyla bu kümenin tümleyeni olan A kümesi kapalıdır.✔

ÖRNEK 5.17. ▷
Teorem 5.16 ü kullanarak

a) $[a,b)$ b) $[a,b]$ c) (a,b) d) $[a,\infty)$
e) $(-\infty,a]$ f) (a,∞) g) $(-\infty,a)$

kümelerinin kapalı olup olmadıklarını belirleyelim.

ÇÖZÜM:

a) Örnek 5.7 gereğince b noktası $[a,b)$ aralığının bir limit noktasıdır. b noktası $[a,b)$ aralığına ait olmadığından Teorem 5.16 gereğince $[a,b)$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.
b) Örnek 5.7 gereğince $[a,b]$ nin limit noktalarının kümesi $[a,b]$ aralığıdır. Teorem 5.16 gereğince $[a,b]$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalıdır.
c) Örnek 5.7 gereğince (a,b) nin limit noktalarının kümesi $[a,b]$ aralığıdır. $a,b \notin (a,b)$ olduğundan Teorem 5.16 gereğince (a,b) aralığı $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.
d) Örnek 5.7 gereğince $[a,\infty)$ aralığının limit noktalarının kümesi kendisidir. Teorem 5.16 gereğince $[a,\infty)$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalıdır.
e) Örnek 5.7 gereğince $(-\infty,a]$ aralığının limit noktalarının kümesi $(-\infty,a]$ dir. Teorem 5.16 gereğince $(-\infty,a]$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalıdır.
f) Örnek 5.7 gereğince (a,∞) aralığının limit noktalarının kümesi $[a,\infty)$ dur. Teorem 5.16 gereğince (a,∞) aralığı $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.
g) Örnek 5.7 gereğince $(-\infty,a)$ aralığının limit noktalarının kümesi $(-\infty,a]$ dır. Teorem 5.16 gereğince $(-\infty,a)$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.✍

Teorem 5.18. ▷

A bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $\widetilde{A}$ kümesi A nın limit noktalarının kümesi olsun. Bu durumda $A \cup \widetilde{A}$ kümesi kapalıdır.

İSPAT: $x \in X \setminus (A \cup \widetilde{A})$ olsun. Bu durumda $x \notin A \cup \widetilde{A}$ dır. Böylece $x \notin A$ ve $x \notin \widetilde{A}$ dır. $x \notin \widetilde{A}$ olduğundan $x \in U$ ve $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. $x \notin A$ olduğundan $A \setminus \{x\} = A$ ve böylece

$$U \cap A = \emptyset \tag{5.1}$$

olur. Şimdi $U \cap \widetilde{A} = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $U \cap \widetilde{A} \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $y \in U \cap \widetilde{A}$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. O halde $y \in \widetilde{A}$ ve $y \in U$ dur. Böylece $U \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ dur. O halde $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Bu ise $U \cap A = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylece

$$\widetilde{A} \cap U = \emptyset \tag{5.2}$$

dur. Bu durumda (5.1) ve (5.2) gereğince

$$U \cap (A \cup \widetilde{A}) = (U \cap A) \cup (U \cap \widetilde{A}) = \emptyset$$

olur. Dolayısıyla $U \subseteq X \setminus (A \cup \widetilde{A})$ olur. Bu durumda her $x \in X \setminus (A \cup \widetilde{A})$ için $x \in U$ ve $U \subseteq X \setminus (A \cup \widetilde{A})$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Sonuç 3.44 gereğince $X \setminus (A \cup \widetilde{A})$ kümesi açık olacağından $A \cup \widetilde{A}$ kapalı olur. ✔

5.2. Bir Kümenin Kapanışı

TANIM 5.19. ▷ **Bir kümenin kapanışı ve dışı**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, A, X in bir alt kümesi ve $\widetilde{A}$, A nın limit noktalarının kümesi olsun.

a) $A \cup \widetilde{A}$ kümesine A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

b) $X \setminus \overline{A}$ kümesine A kümesinin dışı denir ve dış(A) ile gösterilir. dış(A) kümesinin elemanlarınada A kümesinin dış noktaları denir.

Not

Tanım 5.19 dan açıkça görüldüğü gibi herhangi bir $A \subseteq X$ için $A \subseteq \overline{A}$ dır. Diğer yandan $A, B \subseteq X$ ve $A \subseteq B$ ise $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ dır. Ayrıca $\overline{X} = X$ ve $\overline{\emptyset} = \emptyset$ dur.

ÖRNEK 5.20. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. A nın kapanışını ve dışını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.15 gereğince

$$\overline{A} = A \cup \widetilde{A} = A \cup \begin{cases} \emptyset, & A \text{ sonlu} \\ X, & A \text{ sonsuz} \end{cases} = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu} \\ X, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

ve

$$\text{dış}(A) = \begin{cases} X \setminus A, & A \text{ sonlu} \\ \emptyset, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

olur.✍

ÖRNEK 5.21. ▷
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın kapanışını ve dışını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.10 gereğince

$$\overline{A} = A \cup \widetilde{A} = A \cup \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \\ X \setminus \{x\}, & A = \{x\} \\ X, & A \text{ nın birden fazla elemanı varsa} \end{cases} = \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \\ X, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

ve

$$\text{dış}(A) = \begin{cases} X, & A = \emptyset \\ \emptyset, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

olur.✍

ÖRNEK 5.22. ▷
$X = \{■, ★, ♦, ♣, ♠\}$ ve

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{■\}, \{♦, ♣\}, \{■, ♦, ♣\}, \{★, ♦, ♣, ♠\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı ve $A = \{■, ♣, ♠\}$ olsun. A nın kapanışını ve dışını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.4 gereğince

$$\overline{A} = A \cup \widetilde{A} = \{■, ♣, ♠\} \cup \{★, ♦, ♠\} = \{■, ♣, ♦, ♠, ★\} = X$$

olur.✍

ÖRNEK 5.23. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ uzayında $A \subseteq X$ kümesinin kapanışını ve dışını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.11 gereğince

$$\overline{A} = A \cup \widetilde{A} = A \cup \begin{cases} X\setminus\{a\}, & a \in A \\ \emptyset, & a \notin A \end{cases} = \begin{cases} X, & a \in A \\ A, & a \notin A \end{cases}$$

ve

$$\text{dış}(A) = \begin{cases} \emptyset, & a \in A \\ X\setminus A, & a \notin A \end{cases}$$

olur.✍

ÖRNEK 5.24. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümlerinin kapanış ve dışlarını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.8 gereğince $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ve $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğundan

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

olur. Bu durumda

$$\text{dış}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset \quad \text{ve} \quad \text{dış}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$$

olur. Yine Örnek 5.8 gereğince $n \geq 2$ için $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ olmak üzere $\widetilde{A} = \mathbb{R}^n$ ve $B = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \times \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olmak üzere $\widetilde{B} = \mathbb{R}^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}} &= \mathbb{R}^n \quad \text{ve} \quad \text{dış}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}) = \emptyset, \\ \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \times \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} &= \mathbb{R}^n \quad \text{ve} \quad \text{dış}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \times \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset \end{aligned}$$

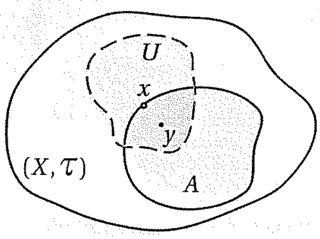
olur.✍

ÖRNEK 5.25. ▷
$X = [0,\infty)$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \bigcup \{(a,\infty) | a \geq 0\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = [0,1)$ ve $\mathbb{N}$ alt kümelerinin kapanış ve dışlarını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.14 gereğince $\widetilde{A} = [0,1]$ ve $\widetilde{\mathbb{N}} = X$ olduğundan $\overline{A} = [0,1]$ ve $\overline{\mathbb{N}} = X$ dir. Bu durumda dış$(A) = (1,\infty)$ ve dış$(\mathbb{N}) = \emptyset$ olur.

Teorem 5.26. ▷
A bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \overline{A}$ dır. **b)** $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $U \bigcap A \neq \emptyset$ dur.



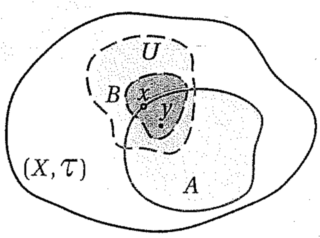
Şekil 5.9

İSPAT:

a)⇒ b). $x \in \overline{A}$ olduğundan $x \in A$ veya $x \notin A$ dır. $x \in A$ ise $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $x \in U \bigcap A$ olacağından $U \bigcap A \neq \emptyset$ olur. $x \notin A$ ise $x \in \widetilde{A}$ olacağından $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $U \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ olur. (Şekil 5.9 e bakınız.) Diğer yandan $x \notin A$ olduğundan $A \setminus \{x\} = A$ olur. Bu durumda $U \bigcap A \neq \emptyset$ dur.
b)⇒ a). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. $x \in X$ olduğundan $x \in A$ ya da $x \notin A$ dır. $x \in A$ ise $x \in \overline{A}$ olur. $x \notin A$ olsun. Bu durumda $A = A \setminus \{x\}$ dır. Böylece $U \bigcap A \neq \emptyset$ olduğundan $U \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ olur. O halde $x \in \widetilde{A}$ dır. Bu durumda $x \in \overline{A}$ olur. (Şekil 5.9 e bakınız.)✔

SONUÇ 5.27. ▷ A bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi, $x \in X$ ve $\mathscr{B}_x$ de x in yerel bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \overline{A}$ dır. **b)** Her $B \in \mathscr{B}_x$ için $B \bigcap A \neq \emptyset$ dır.



Şekil 5.10

İSPAT:

a)⇒ b). $B \in \mathscr{B}_x$ olsun. Tanım 3.36 gereğince $B \in \mathcal{T}$ ve $x \in B$ olur. Teorem 5.26 gereğince $B \bigcap A \neq \emptyset$ dur.
b)⇒ a). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Tanım 3.36 gereğince $B \subseteq U$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. (b) gereğince $B \bigcap A \neq \emptyset$ olduğundan $U \bigcap A \neq \emptyset$ olur. Teorem 5.26 gereğince $x \in \overline{A}$ dır. (Şekil 5.10 ya bakınız.)✔

Örnek 4.65 gereğince herhangi bir (X,d) metrik uzayında

$$\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

kolleksiyonu $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğundan Sonuç 5.27 gereğince metrik uzaylar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 5.28. ▷ A, (X,d) metrik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \overline{A}$ dır. **b)** Her $\varepsilon > 0$ için $A \bigcap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ dur.

Teorem 5.29. ▷

A bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kapalıdır. b) $A=\overline{A}$ dır.

İSPAT:

a)⇒ b). A kapalı olduğundan Teorem 5.16 gereğince $\widetilde{A}\subseteq A$ olur. Bu durumda $\overline{A}=\widetilde{A}\cup A\subseteq A$ olur. $A\subseteq\overline{A}$ olduğundan $\overline{A}=A$ elde edilir.

b)⇒ a). $\overline{A}=A$ ise $\widetilde{A}\subseteq A$ olacağından Teorem 5.16 gereğince A kapalıdır.✔

Teorem 5.30. ▷

A bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve

$$\mathcal{K}=\{K\subseteq X \mid K \text{ kapalı ve } A\subseteq K\}$$

olsun. Bu durumda

$$\overline{A}=\bigcap_{K\in\mathcal{K}}K$$

dır.

İSPAT: Teorem 5.18 gereğince $\overline{A}$ kapalı ve $A\subseteq\overline{A}$ olduğundan $\overline{A}\in\mathcal{K}$ dır. O halde

$$\bigcap_{K\in\mathcal{K}}K\subseteq\overline{A} \tag{5.3}$$

olur. $K\in\mathcal{K}$ olsun. Bu durumda $A\subseteq K$ ve K kapalıdır. Not 5.2 gereğince $\overline{A}\subseteq\overline{K}$ ve Teorem 5.29 gereğince $K=\overline{K}$ olduğundan $\overline{A}\subseteq K$ olur. Bu her $K\in\mathcal{K}$ için doğru yani her $K\in\mathcal{K}$ için $\overline{A}\subseteq K$ dır. Bu durumda

$$\overline{A}\subseteq\bigcap_{K\in\mathcal{K}}K \tag{5.4}$$

olur. (5.3) ve (5.4) gereğince $\overline{A}=\bigcap_{K\in\mathcal{K}}K$ elde edilir.✔

Not

Teorem 5.30 gereğince $\overline{A}$ kümesi A yı kapsayan kapalı kümelerin arakesitine eşittir. Diğer bir deyişle $\overline{A}$ kümesi A yı kapsayan en dar kapalı kümedir. Böylece bir A kümenin kapanışını bulmak için A kümesini kapsayan bütün kapalı kümeleri bulup bunların en küçüğünü seçmeli, yada bu kapalı kümelerin kesişimlerini bulmalıyız.

ÖRNEK 5.31. ▷

$X=\{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ olsun.

a) $\overline{\{b\}}=\{b,e\}$ b) $\overline{\{a,c\}}=X$

c) $\overline{\{b,d\}}=\{b,c,d,e\}$ d) $\overline{\{a,c,d,e\}}=X\overline{\{b,d,e\}}=\{b,c,d,e\}$

e) $\overline{\{a,c,e\}}=X$

olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Önce, $(X,\mathcal{T})$ uzayının bütün kapalı kümelerini yazalım. Kapalı kümeler açık kümelerin tümleyenleri olduğundan bu uzayın kapalı kümeleri

$$\emptyset, X, \{b,c,d,e\},\ \{a,b,e\},\ \{b,e\}, \{a\}$$

kümeleridir.

a) $\{b\}$ yi kapsayan en küçük kapalı küme $\{b, e\}$ olduğundan $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$ dir.

b) $\{a, c\}$ yi kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{\{a, c\}} = X$ dir.

c) $\{b, d\}$ yi kapsayan en küçük kapalı küme $\{b, c, d, e\}$ olduğundan $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$ dir.

d) $\{a, c, d, e\}$ yi kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{\{a, c, d, e\}} = X$ dir.

e) $\{b, d, e\}$ yi kapsayan en küçük kapalı küme $\{b, c, d, e\}$ olduğundan $\overline{\{b, d, e\}} = \{b, c, d, e\}$ dir.

f) $\{a, c, e\}$ yi kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{\{a, c, e\}} = X$ dir.✍

ÖRNEK 5.32. ▷
$X = \{\blacksquare, \bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{\blacksquare\}, \{\blacklozenge, \clubsuit\}, \{\blacksquare, \blacklozenge, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = \{\clubsuit, \spadesuit\}$, $B = \{\blacklozenge, \spadesuit, \clubsuit\}$, $C = \{\bigstar\}$ kümelerinin kapanışlarını bulalım.

ÇÖZÜM: Bu uzayın kapalı kümeleri

$$X, \emptyset, \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}, \{\blacksquare, \bigstar, \spadesuit\}, \{\bigstar, \spadesuit\}, \{\blacksquare\}$$

dir. Buna göre

a) $A = \{\clubsuit, \spadesuit\}$ yı kapsayan en küçük kapalı küme $\{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ olduğundan $\overline{A} = \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ dir.

b) $B = \{\blacklozenge, \spadesuit, \clubsuit\}$ yı kapsayan en küçük kapalı küme $\{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ olduğundan $\overline{B} = \{\bigstar, \blacklozenge, \clubsuit, \spadesuit\}$ dir.

c) $C = \{\bigstar\}$ yı kapsayan en küçük kapalı küme $\{\bigstar, \spadesuit\}$ olduğundan $\overline{C} = \{\bigstar, \spadesuit\}$ dir.✍

5.3. Bir Kümenin İçi

TANIM 5.33. ▷ Bir kümenin içi
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir. Yani

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in X \mid x \in U \subseteq A \text{ özelliğinde en az bir } U \in \mathcal{T} \text{ vardır}\}$$

dır.

NOT 5.34. $x \in \overset{\circ}{A}$ ise $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi olduğundan $x \in A$ dır. Bu durumda $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ olur. O halde her $A \subseteq X$ için $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ dır. Böylece $x \notin A$ ise $x \notin \overset{\circ}{A}$ olur. Diğer yandan $x \in \overset{\circ}{A}$ ise $x \in U$ ve $U \subseteq A$ olacak şekilde açık bir U kümesi olduğundan $A \subseteq B$ ise $U \subseteq B$ olacağından $x \in \overset{\circ}{B}$ olur. O halde $A \subseteq B$ ise $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ olur. Açıkça $\overset{\circ}{X} = X$ ve $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$ dur.✍

ÖRNEK 5.35. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uza-

yında $A = \{a, b, c\}$ kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$a \in \{a\}, \quad \{a\} \in \mathcal{T}_{4n} \quad \text{ve} \quad \{a\} \subseteq A$$
$$b \in \{b\}, \quad \{b\} \in \mathcal{T}_{4n} \quad \text{ve} \quad \{b\} \subseteq A$$
$$c \in \{a, c\}, \quad \{a, c\} \in \mathcal{T}_{4n} \quad \text{ve} \quad \{a, c\} \subseteq A$$

olduğundan $a, b, c \in \overset{\circ}{A}$ dir. Böylece, $\overset{\circ}{A} = \{a, b, c\} = A$ dir.✍

ÖRNEK 5.36. ▷
$X = \{■, ★, ♦, ♣, ♠\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{■\}, \{♦, ♣\}, \{■, ♦, ♣\}, \{★, ♦, ♣, ♠\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = \{■, ♠, ★\}$ kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM:

a) ■ noktasını içeren açık kümeler $X, \{■\}, \{■, ♦, ♣\}$ dir. Bu durumda $U = \{■\}$ olmak üzere $U \subseteq A$ olduğundan $■ \in \overset{\circ}{A}$ dir.

b) ♠ noktasını içeren açık kümeler $X, \{★, ♦, ♣, ♠\}$ dir. Bu durumda $\{★, ♦, ♣, ♠\} \nsubseteq A$ ve $X \nsubseteq A$ olduğundan $♠ \notin \overset{\circ}{A}$ dir.

c) ★ noktasını içeren açık kümeler $X, \{★, ♦, ♣, ♠\}$ dir. Bu durumda $\{★, ♦, ♣, ♠\} \nsubseteq A$ ve $X \nsubseteq A$ olduğundan $★ \notin \overset{\circ}{A}$ dir.

Buna göre $\overset{\circ}{A} = \{■\}$ dır.✍

ÖRNEK 5.37. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir kaba uzay ve $A \neq \emptyset$ ve $A \neq X$ olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM: $x \in A$ olsun. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ ise $U = X$ dir. Böylece $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde hiç bir $U \in \mathcal{T}$ kümesi yoktur. Yani $x \notin \overset{\circ}{A}$ dır. Bu her $x \in A$ için doğru olduğundan $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ dur. O halde X in herhangi bir A alt kümesi için

$$\overset{\circ}{A} = \begin{cases} \emptyset, & A \neq X \\ X, & A = X \end{cases}$$

olur.✍

ÖRNEK 5.38. ▷
$(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı ve $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM: $x \in A$ olsun. Bu durumda $\{x\} \subseteq A$, $x \in \{x\}$ ve $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ dir. O halde $x \in \overset{\circ}{A}$ dir. Dolayısıyla $A \subseteq \overset{\circ}{A}$ yani $A = \overset{\circ}{A}$ dir. Böylece X in herhangi bir A alt kümesi için $\overset{\circ}{A} = A$ dır.✍

Teorem 5.39. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \overset{\circ}{A}$ dır. **b)** $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır.

İSPAT:

a)⇒b). $x \in \overset{\circ}{A}$ olduğundan $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. Tanım 4.61 gereğince $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. O halde $B \subseteq A$ dır. Yani $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır.

b)⇒ a). (b) gereğince $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. Tanım 4.61 gereğince $x \in B$ ve $B \in \mathcal{T}$ olduğundan $x \in \overset{\circ}{A}$ olur.✔

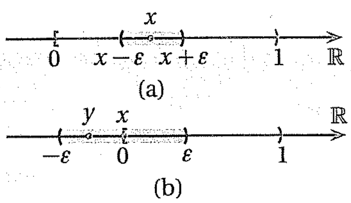
Örnek 4.65 gereğince herhangi bir (X,d) metrik uzayında $\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğundan Teorem 5.39 gereğince metrik uzaylar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 5.40. ▷ A, (X,d) metrik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \overset{\circ}{A}$ dır. **b)** $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

ÖRNEK 5.41. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının $A = [0,1)$ alt kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM:



Şekil 5.11

a) $x \in (0,1)$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$ olmak üzere $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ dır. (Şekil 5.11(a) ya bakınız.) Sonuç 5.40 gereğince $x \in \overset{\circ}{A}$ dir.

b) $x = 0$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $y \in (-\varepsilon, 0)$ olacak şekilde bir y sayısı vardır. (Şekil 5.11(b) ya bakınız.) Böylece $(-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde hiç bir $\varepsilon > 0$ sayısı yoktur. Sonuç 5.40 gereğince $0 \notin \overset{\circ}{A}$ dir. (a) ve (b) gereğince $\overset{\circ}{A} = (0,1)$ olur.

✍

ÖRNEK 5.42. ▷
$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ tek-çift uzayı ve $A = \{3,4,5,6,7\}$ olsun. A nın içini bulalım.

ÇÖZÜM: $\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ nin tanımı gereğince $\mathscr{P} = \{\{2k-1, 2k\} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ nin bir tabanıdır. Böylece, 3, 4, 5, 6, 7 noktalarının yerel tabanları sırasıyla

$$\mathscr{B}_3 = \{\{3,4\}\}, \quad \mathscr{B}_4 = \{\{3,4\}\}, \quad \mathscr{B}_5 = \{\{5,6\}\} \quad \mathscr{B}_6 = \{\{5,6\}\} \quad \mathscr{B}_7 = \{\{7,8\}\}$$

olur. Teorem 5.39 gereğince $\{7,8\} \nsubseteq A$ olduğundan $7 \notin \overset{\circ}{A}$ ve

$$\{3,4\} \subseteq A, \quad \{5,6\} \subseteq A$$

olduğundan $3,4,5,6 \in \overset{\circ}{A}$ dir. Böylece, $\overset{\circ}{A} = \{3,4,5,6\}$ olur.✍

ÖRNEK 5.43. ▹
$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayı verilsin. $A = \{a,b,d,e\}$ kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}, \quad \mathcal{B}_b = \{\{b,c,d,e,f\}\}, \quad \mathcal{B}_d = \{\{c,d\}\}, \quad \mathcal{B}_e = \{\{b,c,d,e,f\}\}$$

kolleksiyonları sırasıyla a,b,d,e noktalarının yerel tabanlarıdır.

$$\{a\} \subseteq A, \quad \{b,c,d,e,f\} \nsubseteq A, \quad \{c,d\} \nsubseteq A$$

olduğundan Teorem 5.39 gereğince $a \in \overset{\circ}{A}$ ve $b,d,e \notin \overset{\circ}{A}$ dir. Böylece $\overset{\circ}{A} = \{a\}$ dır.✍

Teorem 5.44. ▹
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere $A \subseteq X$ ve $\mathscr{A} = \{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq A\}$ olsun. Bu durumda $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U$ dur.

İSPAT: $x \in \overset{\circ}{A}$ olsun. Tanım gereğince $x \in V \subseteq A$ olacak şekilde bir V açık kümesi vardır. $\mathscr{A}$ nın tanımı gereğince $V \in \mathscr{A}$ olur. Bu durumda $x \in \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U$ dur. O halde

$$\overset{\circ}{A} \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U \tag{5.5}$$

dur. $x \in \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U$ olsun. Bu durumda en az bir $V \in \mathscr{A}$ için $x \in V$ dir. Diğer yandan $V \in \mathscr{A}$ olduğundan $V \subseteq A$ ve $V \in \mathcal{T}$ dur. O halde $x \in \overset{\circ}{A}$ dir. Böylece

$$\bigcup_{U \in \mathscr{A}} U \subseteq \overset{\circ}{A} \tag{5.6}$$

olur. (5.5) ve (5.6) gereğince $\bigcup_{U \in \mathscr{A}} U = \overset{\circ}{A}$ elde edilir.✔

Not
$\overset{\circ}{A}$ kümesi A nın alt kümesi olan bütün açık kümelerin birleşimine eşittir. Yani, $\overset{\circ}{A}$ kümesi A nın kapsadığı en geniş açık kümedir. Böylece bir A kümesinin içini bulmak için A nın kapsadığı en geniş açık kümeyi bulmalıyız veya A nın alt kümesi olan bütün açık kümelerin birleşimini bulmalıyız.

Açık kümelerin keyfi bir birleşimi açık olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz

SONUÇ 5.45. ▹ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\overset{\circ}{A}$ kümesi açıktır.

SONUÇ 5.46. ▹ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\overset{\circ}{A}$ kümesi A nın kapsadığı en geniş açık kümedir.

İSPAT: V kümesi açık ve $V \subseteq A$ olsun. Bu durumda $V \in \mathscr{A}$ ve dolayısıyla $V \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U$ olur. Teorem 5.44 gereğince $\bigcup_{U \in \mathscr{A}} U = \overset{\circ}{A}$ olduğundan $V \subseteq \overset{\circ}{A}$ olur.✔

ÖRNEK 5.47. ▷
$X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ olsun.
a) $\{b\}^\circ = \emptyset$ b) $\{a,c\}^\circ = \{a\}$ c) $\{b,d\}^\circ = \emptyset$
d) $\{a,c,d,e\}^\circ = \{a,c,d\}$ e) $\{b,d,e\}^\circ = \emptyset$ f) $\{a,c,e\}^\circ = \{a\}$

olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\{b\}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\emptyset$ olduğundan $\{b\}^\circ = \emptyset$ dur.
b) $\{a,c\}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\{a\}$ olduğundan $\{a,c\}^\circ = \{a\}$ dir.
c) $\{b,d\}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\emptyset$ olduğundan $\{b,d\}^\circ = \emptyset$ dur.
d) $\{a,c,d,e\}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\{a,c,d\}$ olduğundan $\{a,c,d,e\}^\circ = \{a,c,d\}$ dır.
e) $\{b,d,e\}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\emptyset$ olduğundan $\{b,d,e\}^\circ = \emptyset$ dur.
f) $\{a,c,e\}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\{a\}$ olduğundan $\{a,c,e\}^\circ = \{a\}$ dir.✍

Teorem 5.48. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

a) A kümesi açıktır. b) $\mathring{A} = A$ dır.

İSPAT:

a)⇒ b). A kümesi açık ve $A \subseteq A$ olduğundan Sonuç 5.46 gereğince $A \subseteq \mathring{A}$ olur. $\mathring{A} \subseteq A$ olduğundan $A = \mathring{A}$ olur.
b)⇒ a). $\mathring{A} = A$ ise Sonuç 5.45 gereğince $\mathring{A}$ açık olduğundan A açıktır.✔

ÖRNEK 5.49. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayı verilsin ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin içini bulalım.

ÇÖZÜM: $a \in A$ ya da $a \notin A$ dır. $a \in A$ ise $A \in \mathcal{T}(a)$ olduğundan $\mathring{A} = A$ dır. $a \notin A$ ise boş olmayan her U açık kümesi için $a \in U$ olacağından $U \nsubseteq A$ olur. O halde A nın hiç bir iç noktası yoktur. Böylece $\mathring{A} = \emptyset$ dur. O halde

$$\mathring{A} = \begin{cases} \emptyset, & a \notin A \\ A, & a \in A \end{cases}$$

dır.✍

Teorem 5.50. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\mathring{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ dır.

İSPAT: $x \in \mathring{A}$ olsun. Bu durumda $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. Böylece $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$ dur. Teorem 5.26 gereğince $x \notin \overline{(X \setminus A)}$ olacağından $x \in X \setminus \overline{(X \setminus A)}$

olur. Dolayısıyla

$$\overset{\circ}{A} \subseteq X \setminus \overline{(X \setminus A)} \tag{5.7}$$

dır. $x \in X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $x \notin \overline{X \setminus A}$ dır. Teorem 5.26 gereğince $x \in U$ ve $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. Böylece $U \subseteq A$ olacağından $x \in \overset{\circ}{A}$ olur. Bu durumda

$$X \setminus \overline{(X \setminus A)} \subseteq \overset{\circ}{A} \tag{5.8}$$

olur. (5.7) ve (5.8) gereğince $X \setminus \overline{(X \setminus A)} = \overset{\circ}{A}$ elde edilir.✔

SONUÇ 5.51. ▶ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^{\circ}$ dır.

İSPAT: Teorem 5.50 gereğince $(X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \overline{(X \setminus (X \setminus A))} = X \setminus \overline{A}$ olduğundan $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^{\circ}$ dır.✔

Teorem 5.50 gereğince dış$(X \setminus A) = \overset{\circ}{A}$ ve Sonuç 5.51 gereğince dış$(A) = (X \setminus A)^{\circ}$ olur.

5.4. Bir Kümenin İzole Noktaları

TANIM 5.52. ▶ **Bir kümenin izole noktaları**
A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in A$ olsun. x noktasını içeren bir U açık kümesi x noktasından başka A nın hiç bir elemanını içermeyecek şekilde varsa x noktasına A nın bir izole noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki en az bir $U \in \mathcal{T}$ için

$$U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \quad \text{veya} \quad U \cap A = \{x\}$$

oluyorsa x noktasına A kümesinin bir izole noktası denir.

ÖRNEK 5.53. ▶
$(X, \mathcal{P}(X))$ bir ayrık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın izole noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM: $x \in A$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ açık kümesi x i içerip A nın x den farklı hiçbir noktasını içermediğinden (yani $A \cap \{x\} = \{x\}$ olduğundan) x noktası A nın bir izole noktasıdır. Böylece A nın her noktası A nın bir izole noktasıdır. Özel olarak, X in her noktası X in bir izole noktasıdır.✍

ÖRNEK 5.54. ▶
$(X, \mathcal{T})$ bir kaba uzay, A da X in birden fazla elemanı olan bir alt kümesi olsun. A nın izole noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM: $x \in A$ olsun. Bu durumda x in tek bir X komşuluğu vardır. $A \subseteq X$ olduğundan $A = A \cap X \neq \{x\}$ dir. Böylece x noktası A nın bir izole noktası değildir. O halde A nın hiç bir izole noktası yoktur. Özel olarak, X in hiç bir izole noktası yoktur.✍

Teorem 5.55. ▶
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu $x \in A$ noktasının yerel bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) x noktası A kümesinin bir izole noktasıdır.
b) $B \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ (veya $B \cap A = \{x\}$) olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır.

İSPAT:

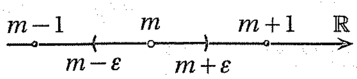
a)⇒ b). x noktası A kümesinin bir izole noktası olduğundan $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ ve $x \in U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı olduğundan Tanım 4.61 gereğince $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. Bu durumda $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olduğundan $B \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olur.
b)⇒ a). Bir $B \in \mathscr{B}_x$ için $B \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olsun. $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı olduğundan Tanım 4.61 gereğince $x \in B$ ve $B \in \mathcal{T}$ dur. $B \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olduğundan x noktası A nın bir izole noktasıdır.✔

Örnek 4.65 gereğince herhangi bir (X,d) metrik uzayında $\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğundan Teorem 5.55 gereğince metrik uzaylar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 5.56. ▷ A, (X,d) metrik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $x \in A$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) x noktası A kümesinin bir izole noktasıdır.
b) $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ (veya $B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$) olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

ÖRNEK 5.57. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Z}$ nin izole noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM: $m \in \mathbb{Z}$ ve $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda



Şekil 5.12

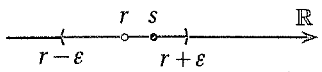
$$(m-\varepsilon, m+\varepsilon) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{m\}) = \emptyset$$

olur. (Şekil 5.12 ya bakınız.) Sonuç 5.56 gereğince m noktası $\mathbb{Z}$ kümesinin bir izole noktasıdır. $m \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\mathbb{Z}$ nin her noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktasıdır.✍

ÖRNEK 5.58. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Q}$ nun izole noktasının olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $r \in \mathbb{Q}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda farklı iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı olduğundan $s \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ ve $r \neq s$ olacak şekilde bir $s \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda

$$s \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{r\})$$



Şekil 5.13

olduğundan

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{r\}) \neq \emptyset$$

olur. (Şekil 5.13 ya bakınız.) Sonuç 5.56 gereğince r noktası $\mathbb{Q}$ kümesinin bir izole noktası değildir. $r \in \mathbb{Q}$ keyfi olduğundan $\mathbb{Q}$ nun hiç bir izole noktası yoktur.

Benzer şekilde $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesininde hiç bir izole noktası olmadığı gösterilebirir.✍

5.5. Bir Kümenin Sınırı

TANIM 5.59. ▷ **Bir kümenin sınırı**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun.

a) $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesinin A ve $X\setminus A$ kümelerinin her ikisi ile de arakesiti boş değilse x noktasına A nın bir sınır noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için

$$U \cap A \neq \emptyset \text{ ve } U \cap (X\setminus A) \neq \emptyset$$

ise x noktasına A nın bir sınır noktası denir.

b) A kümesinin bütün sınır noktalarının kümesine A nın sınırı denir ve ∂A ile gösterilir. Yani

$$\partial A = \{x \in X \mid x \in U \text{ özelliğindeki her } U \in \mathcal{T} \text{ için } U \cap A \neq \emptyset \text{ ve } U \cap (X\setminus A) \neq \emptyset\}$$

dur.

NOT 5.60. Tanım gereğince her $A \subseteq X$ için

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\setminus A}$$

dır. Böylece $\overline{A}$ ve $\overline{X\setminus A}$ kümeleri kapalı olduğundan ∂A kapalı bir kümedir. Üstelik,

$$\partial A \subseteq \overline{A} \text{ ve } \partial A \subseteq \overline{X\setminus A}$$

dır. Diğer yandan

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{X\setminus X} = X \cap \emptyset = \emptyset \text{ ve } \partial\emptyset = \overline{\emptyset} \cap \overline{X\setminus\emptyset} = \emptyset \cap X = \emptyset$$

olur.

Teorem 5.61 ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \partial A$ dır.
b) $x \in B$ özelliğindeki her $B \in \mathcal{B}$ için $B \cap A \neq \emptyset$ ve $B \cap (X\setminus A) \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). $x \in B$ ve $B \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ve $x \in \partial A$ olduğundan $B \cap A \neq \emptyset$ ve $B \cap (X\setminus A) \neq \emptyset$ dur.

b)⇒ a). $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. (b) gereğince $B \cap A \neq \emptyset$ ve $B \cap (X\setminus A) \neq \emptyset$ olduğundan $U \cap A \neq \emptyset$ ve

$$U \cap (X\setminus A) \neq \emptyset$$

olur.✓

SONUÇ 5.62. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının yerel bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

Teorem 5.63. ▷

a) $x \in \partial A$ dır. b) Her $B \in \mathscr{B}_x$ için $B \bigcap A \neq \emptyset$ ve $B \bigcap (X \setminus A) \neq \emptyset$ dur.

Örnek 4.65 gereğince herhangi bir (X,d) metrik uzayında $\mathscr{B}_x = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğundan Sonuç 5.62 gereğince metrik uzaylar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 5.64. ▷ A, (X,d) metrik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \partial A$ dır.
b) Her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \bigcap A \neq \emptyset$ ve $B(x,\varepsilon) \bigcap (X \setminus A) \neq \emptyset$ dur.

ÖRNEK 5.65. ▷
Örnek 3.4 de tanımlanan $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayı ve $A = \{a,c,d\}$ kümesi verilsin. A nın sınırını bulalım.

ÇÖZÜM: $\overline{A} = \{a,c,d\}$ ve $\overline{X \setminus A} = \{b,d\}$ dir. O halde

$$\partial A = \{a,c,d\} \bigcap \{b,d\} = \{d\}$$

olur.✍

ÖRNEK 5.66. ▷
$X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayı verilsin.

a) $\{b\}$ b) $\{a,c\}$ c) $\{b,d\}$ d) $\{a,c,d,e\}$

kümelerinin sınırlarını bulalım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.31 gereğince

a). $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$, b). $\overline{\{a,c\}} = X$, c). $\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$,
d). $\overline{\{a,c,d,e\}} = X$, e). $\overline{\{b,d,e\}} = \{b,c,d,e\}$, f). $\overline{\{a,c,e\}} = X$

olduğunundan

a) $\partial\{b\} = \overline{\{b\}} \bigcap \overline{\{a,c,d,e\}} = \{b,e\} \bigcap X = \{b,e\}$ olur.
b) $\partial\{a,c\} = \overline{\{a,c\}} \bigcap \overline{\{b,d,e\}} = X \bigcap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$ olur.
c) $\partial\{b,d\} = \overline{\{b,d\}} \bigcap \overline{\{a,c,e\}} = \{b,c,d,e\} \bigcap X = \{b,c,d,e\}$ olur.
d) $\partial\{a,c,d,e\} = \overline{\{a,c,d,e\}} \bigcap \overline{\{b\}} = X \bigcap \{b,e\} = \{b,e\}$ olur.✍

ÖRNEK 5.67. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayında

a) $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ b) $B = (0,1)$

kümelerinin sınırlarını bulalım.

ÇÖZÜM:

a) $\overline{A}=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ ve $\overline{\mathbb{R}\setminus A}=\mathbb{R}$ olduğundan

$$\partial A=\overline{A}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus A}=\left(\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\right)\cap\mathbb{R}=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$$

elde edilir.

b) Alıştırma 17(e) gereğince

$$\overline{B}=[0,1] \text{ ve } \overline{\mathbb{R}\setminus B}=\overline{(-\infty,0]\cup[1,\infty)}=(-\infty,0]\cup[1,\infty)$$

olduğundan

$$\partial B=\overline{B}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus B}=[0,1]\cap((-\infty,0]\cup[1,\infty))=\{0,1\}$$

elde edilir.✍

Teorem 5.68 ▶

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Bu durumda $\overline{A}=\overset{\circ}{A}\cup\partial A$ dır.

İSPAT: $\overset{\circ}{A}\subseteq A\subseteq\overline{A}$ ve $\partial A\subseteq\overline{A}$ olduğundan

$$\overset{\circ}{A}\cup\partial A\subseteq\overline{A} \tag{5.9}$$

olur. $x\in\overline{A}$ olsun. Bu durumda $x\in\overset{\circ}{A}$ veya $x\notin\overset{\circ}{A}$ olur.

a) $x\in\overset{\circ}{A}$ ise $x\in\overset{\circ}{A}\cup\partial A$ olur.

b) $x\notin\overset{\circ}{A}$ ise Teorem 5.50 gereğince $x\notin X\setminus(\overline{X\setminus A})$ dır. O halde $x\in\overline{X\setminus A}$ dır. Bu durumda $x\in\overline{X\setminus A}\cap\overline{A}=\partial A$ olacağından $x\in\overset{\circ}{A}\cup\partial A$ olur.

O halde (a) ve (b) gereğince

$$\overline{A}\subseteq\overset{\circ}{A}\cup\partial A \tag{5.10}$$

olur. (5.9) ve (5.10) gereğince $\overline{A}=\overset{\circ}{A}\cup\partial A$ elde edilir.✔

Teorem 5.69 ▶

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $(A,\mathcal{T}_A)$ bu uzayın bir alt uzayı olmak üzere $B\subseteq A$ olsun. $\overline{B_A}$ kümesi B nin $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayındaki kapanışını, $\overset{\circ}{B_A}$ kümesi B nın $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayındaki içini, $\partial_A B$ kümesi B nın $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayındaki sınırını göstersin. Bu durumda

a) $\overline{B_A}=A\cap\overline{B}$ **b)** $A\cap\overset{\circ}{B}\subseteq\overset{\circ}{B_A}$ **c)** $\partial_A B\subseteq A\cap\partial B$

dır.

İSPAT:

a) $x\in\overline{B_A}$ olsun. $\overline{B_A}\subseteq A$ olduğundan $x\in A$ dır. $x\notin\overline{B}$ olduğunu varsayalım. Teorem 5.26 gereğince $x\in U$ ve $U\cap B=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ vardır. Böylece $(U\cap A)\cap B=\emptyset$ ve $U\cap A\in\mathcal{T}_A$ olduğundan Teorem 5.26 gereğince $x\notin\overline{B_A}$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x \in \overline{B}$ dır. Böylece $x \in A \cap \overline{B}$ olur. O halde

$$\overline{B_A} \subseteq A \cap \overline{B} \tag{5.11}$$

dır. Şimdi, $x \in A \cap \overline{B}$ olsun. Bu durumda $x \in A$ ve $x \in \overline{B}$ dır. $x \notin \overline{B_A}$ olduğunu varsayalım. Teorem 5.26 gereğince $x \in U$ ve $U \cap B = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_A$ vardır. $U \in \mathcal{T}_A$ olduğundan $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $(V \cap A) \cap B = \emptyset$ ve dolayısıyla $V \cap (A \cap B) = \emptyset$ olur. $B \subseteq A$ olduğundan $V \cap B = \emptyset$ dur. $x \in V$ ve $V \in \mathcal{T}$ olduğundan Teorem 5.26 gereğince $x \notin \overline{B}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x \in \overline{B_A}$ olur. Böylece

$$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{B_A} \tag{5.12}$$

olur. (5.11) ve (5.12) gereğince $A \cap \overline{B} = \overline{B_A}$ elde edilir.

b) $x \in A \cap \overset{\circ}{B}$ olsun. Bu durumda $x \in A$ ve $x \in \overset{\circ}{B}$ dir. Tanım 5.33 gereğince $x \in U$ ve $U \subseteq B$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. O halde, $x \in U \cap A$ ve $U \cap A \subseteq A \cap B = B$ olur. $U \cap A \in \mathcal{T}_A$ olduğundan $x \in \overset{\circ}{B}_A$ dır. Böylece $A \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{B}_A$ olur.

c) $x \in \partial_A B$ olsun. Bu durumda $x \in \overline{B_A} \cap \overline{(A \setminus B)_A}$ dır. Böylece $x \in \overline{B_A}$ ve $x \in \overline{(A \setminus B)_A}$ olur. O halde (a) gereğince $x \in A \cap \overline{B}$ ve $x \in A \cap \overline{(A \setminus B)}$ dır. Buradan da $x \in A, x \in \overline{B}$ ve $x \in \overline{(A \setminus B)}$ elde edilir. $\overline{(A \setminus B)} \subseteq \overline{(X \setminus B)}$ olduğundan $x \in A, x \in \overline{B}$ ve $x \in \overline{(X \setminus B)}$ olur. Böylece $x \in \overline{B} \cap \overline{(X \setminus B)}$ yani $x \in \partial B$ dir. $x \in A$ olduğundan $x \in A \cap \partial B$ elde edilir. O halde $\partial_A B \subseteq A \cap \partial B$ dir.✓

Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında $\overset{\circ}{B}_A \neq A \cap \overset{\circ}{B}$ ve $\partial_A B \neq A \cap \partial B$ olabilir.

ÖRNEK 5.70. ▷
$X = \mathbb{R}^2$ standart uzayı ve $A = \mathbb{R} \times \{0\} = B$ olsun.

a) $\overset{\circ}{B}_A \neq \overset{\circ}{B} \cap A$ **b)** $\partial_A B \neq A \cap \partial B$

olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\overset{\circ}{B}_A = B$ ve $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ dur. O halde $\overset{\circ}{B} \cap A = \emptyset$ dur. Böylece $\overset{\circ}{B}_A \neq \overset{\circ}{B} \cap A$ olur.

b) $\partial_A B = \emptyset$ ve

$$\begin{aligned} A \cap \partial B &= A \cap \left(\overline{\mathbb{R} \times \{0\}} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})} \right) \right) = A \cap \left((\mathbb{R} \times \{0\}) \cap \mathbb{R}^2 \right) \\ &= A \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = A \cap B = B \end{aligned}$$

olduğundan $\partial_A B \neq A \cap \partial B$ olur.✍

5.6. Yoğun Kümeler

TANIM 5.71. ▷ Yoğun küme
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\overline{A} = X$ ise A ya $(X,\mathcal{T})$ uzayının yoğun bir alt kümesi denir.

ÖRNEK 5.72. ▷
$(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının boş olmayan her A alt kümesinin yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 5.10 gereğince herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının boş olmayan her A alt kümesi için $\overline{A} = X$ olduğundan A bu uzayda yoğundur.✍

Not
$\overline{X} = X$ olduğundan X in kendisi X uzayında yoğundur. $A \neq X$ ve A kapalıysa $\overline{A} = A \neq X$ olduğundan A kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında yoğun olamaz. Böylece herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı ve yoğun olan tek alt kümesi sadece X kümesinin kendisidir.

ÖRNEK 5.73. ▷
$\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ de yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 5.24 gereğince $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur. ✍

ÖRNEK 5.74. ▷
$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ de yoğun, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ kümelerinin $\mathbb{R}^n$ de yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 5.24 gereğince $\overline{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^2$ olduğundan $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ de yoğundur. Daha genel olarak $n \geq 1$ için $\overline{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^n$ ve $\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^n$ olduğundan

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q} \text{ ve } \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

kümeleri $\mathbb{R}^n$ de yoğundur.✍

ÖRNEK 5.75. ▷
Örnek 5.14 de verilen $(X,\mathcal{T})$ uzayında $\mathbb{N}$ kümesinin yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 5.14 de verilen $(X,\mathcal{T})$ uzayında $\overline{\mathbb{N}} = X$ dir. Böylece bu uzayda $\mathbb{N}$ kümesi yoğundur.✍

ÖRNEK 5.76. ▷
Örnek 5.13 de verilen $(X,\mathcal{T})$ uzayında $A = \{a,b,d\}$ kümesinin yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 5.13 de verilen $(X,\mathcal{T})$ uzayında $A = \{a,b,d\}$ kümesi için $\overline{A} = X$ dir. Böylece bu uzayda A kümesi yoğundur.✍

ÖRNEK 5.77. ▷
A nın $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayında yoğun olması için gerek ve yeter şartın $A = X$ olması gerektiğini gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı verilsin. A kümesi bu uzayda yoğun olsun. Bu durumda $\overline{A} = X$ dir. A bu uzayda kapalı olduğundan Teorem 5.29 gereğince $\overline{A} = A$ dır. O halde

$A = X$ dir. Böylece $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayının X den başka yoğun alt kümesi yoktur. Yani A nın $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayında yoğun olması için gerek ve yeter şart $A = X$ olmasıdır.

Teorem 5.78. ▷

A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında yoğundur.

b) $(X, \mathcal{T})$ uzayının boş kümeden farklı her açık kümesi ile A nın arakesiti boş kümeden farklıdır. Yani $U \in \mathcal{T}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $A \cap U \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). U, $(X, \mathcal{T})$ uzayında boş olmayan açık bir kümesi olsun. Bu durumda $x \in U$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. A kümesi yoğun olduğundan $x \in \overline{A}$ olur. Teorem 5.26 gereğince $U \cap A \neq \emptyset$ dur.

b)⇒ a). $x \in X$ olsun. $x \in U$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda (b) gereğince $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.26 gereğince $x \in \overline{A}$ dır. Bu her $x \in X$ için doğru olduğundan $X \subseteq \overline{A}$ olur. Buradan $\overline{A} = X$ olur. Bu durumda A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında yoğundur.✔

SONUÇ 5.79. ▷ A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $\mathscr{B}$ de $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi yoğundur.

b) $\mathscr{B}$ nin boş kümeden farklı her elemanı ile A kümesinin arakesiti boş kümeden farklıdır. Yani $B \in \mathscr{B}$ ve $B \neq \emptyset$ ise $A \cap B \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). $B \neq \emptyset$ ve $B \in \mathscr{B}$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $B \in \mathcal{T}$ dur. Teorem 5.78 gereğince $A \cap B \neq \emptyset$ dur.

b)⇒ a). $U \neq \emptyset$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $x \in U$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. U kümesi açık ve $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan Teorem 4.9 gereğince $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}$ vardır. (b) gereğince $B \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.78 gereğince A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında yoğundur.✔

Herhangi bir (X, d) metrik uzayında bütün açık yuvarların kolleksiyonu bir taban olduğundan Sonuç 5.79 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 5.80. ▷ A bir (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi yoğundur.

b) Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ dur.

ÖRNEK 5.81. ▷

Sonuç 5.80 yı kullanarak $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ de yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda farklı iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı olduğundan $c \in B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda

$c \in \mathbb{Q} \cap B(x,\varepsilon)$ olur. Yani her $x \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\mathbb{Q} \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ olur. Bu durumda Sonuç 5.80 gereğince $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur.✍

Teorem 5.82. ▶

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi yoğundur.

b) $F \subseteq X$ kapalı ve $A \subseteq F$ ise $F = X$ dir. **c)** $\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}} = \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). F kümesi kapalı ve $A \subseteq F$ olsun. Bu durumda F kümesi kapalı olduğundan Teorem 5.29 gereğince $\overline{F} = F$ dir. Böylece $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$ dir. Kabulümüz gereğince $\overline{A} = X$ olduğundan $X = F$ olur.

b)⇒ c). $\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}} \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in \overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Tanım 5.33 gereğince $x \in U \subseteq X\setminus A$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $A \subseteq X\setminus U$ olur. $X\setminus U$ kümesi kapalı olduğundan (b) gereğince $X\setminus U = X$ olur. Buradan $U = \emptyset$ elde edilir. Bu ise $x \in U$ olması ile çelişir. O halde $\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}} = \emptyset$ dur.

c)⇒ a). A kümesinin yoğun olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\overline{A} \neq X$ dir. Böylece $x \in X\setminus\overline{A}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Teorem 5.50 gereğince

$$\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}} = X\setminus\overline{(X\setminus(X\setminus A))} = X\setminus\overline{A}$$

olduğundan $x \in \overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}}$ olur. Bu ise $\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}} = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde A kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında yoğundur.✔

ÖRNEK 5.83. ▶

$(X,\mathcal{T}(a))$ topolojik uzayı verilsin ve $a \in A$ olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. A nın yoğun olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzaydaki boş kümeden farklı her U açık kümesi için $a \in U$ olduğundan $a \in U \cap A$ dir. Diğer bir deyişle boş kümeden farklı her U açık kümesi için $U \cap A \neq \emptyset$ dur. O halde Teorem 5.78 gereğince A kümesi bu uzayda yoğundur. Yani $\overline{A} = X$ dir.✍

ÖRNEK 5.84. ▶

Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının yoğun bir alt kümesinin olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X kümesi sonlu olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğundan Örnek 5.77 gereğince bu uzayın X kümesinden başka yoğun alt kümesi yoktur.

b) X kümesi sonsuz olsun. Bu durumda A sonlu veya A sonsuz olur.

i) A kümesi X in sonsuz bir alt kümesi olsun. $U \neq \emptyset$ ve $U \in \mathcal{T}$ olmak üzere $U \cap A = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durmda $A \subseteq X\setminus U$ dur. $U \in \mathcal{T}$ olduğundan $X\setminus U$

sonludur. Böylece A kümesi sonlu olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $U \neq \emptyset$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ kümesi için $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.78 gereğince A kümesi bu uzayda yoğundur. Böylece X kümesinin sonlu olmayan her A alt kümesi bu uzayda yoğundur.

ii) A kümesi X in sonlu bir alt kümesi olsun. Bu durumda A kümesi bu uzayda kapalı ve $A \neq X$ dir. Bu durumda $\overline{A} = A \neq X$ olur. O halde A kümesi bu uzayda yoğun olamaz.✍

Teorem 5.85. ▷

Herhangi bir topolojik uzayda yoğun alt kümelerin herhangi bir birleşimi yoğundur.

Not

Herhangi bir topolojik uzayda yoğun kümelerin kesişimi yoğun olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümeleri $\mathbb{R}$ standart uzayında yoğun olmalarına rağmen bunların kesişimi olan boş küme $\mathbb{R}$ de yoğun değildir.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $i \in I$ için A_i kümeleri yoğun olsun. Bu durumda herhangi bir $i_0 \in I$ için $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğundan

$$X = \overline{A_{i_0}} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

dır. Böylece $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = X$ dir. Yani $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi yoğundur.✔

5.7. Hiç Bir Yerde Yoğun Olmayan Kümeler

TANIM 5.86. ▷ **Hiç bir yerde yoğun olmayan küme**

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ ise A kümesine hiç bir yerde yoğun olmayan küme denir.

ÖRNEK 5.87. ▷

Herhangi bir uzayda $A \subseteq X$ hiç bir yerde yoğun olmayan bir küme ve $B \subseteq A$ olsun. B kümesininde hiç bir yerde yoğun olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $B \subseteq A$ olduğundan $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ dır. Böylece $\overset{\circ}{\overline{B}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$ dir. $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ olduğundan $\overset{\circ}{\overline{B}} = \emptyset$ olur. Yani B kümeside hiç bir yerde yoğun olmayan bir kümedir.✍

ÖRNEK 5.88. ▷

Herhangi bir uzayda $\emptyset$ kümesinin hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\overset{\circ}{\overline{\emptyset}} = \overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ kümesi hiçbir yerde yoğun olmayan bir kümedir.✍

ÖRNEK 5.89. ▷

Herhangi bir $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayıda sadece $\emptyset$ alt kümesinin hiç bir yerde yoğun olmayan küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $A \neq \emptyset$ ise $\overset{\circ}{\overline{A}} = A \neq \emptyset$ olduğundan bu uzayın sadece $\emptyset$ alt kümesi hiç bir yerde yoğun olmayan kümedir.✍

ÖRNEK 5.90. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayında sadece $\emptyset$ alt kümesinin hiç bir yerde yoğun olmayan küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $A \neq \emptyset$ ise $\mathring{\overline{A}} = \mathring{X} = X$ olduğundan bu uzayın sadece $\emptyset$ alt kümesi hiç bir yerde yoğun olmayan kümedir.✍

Teorem 5.91 ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) A kümesi hiç bir yerde yoğun değildir. b) dış$(A) = X\setminus\overline{A}$ kümesi yoğundur.

İSPAT:

a)⇒ b). (a) gereğince $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ ve Teorem 5.50 gereğince $\mathring{\overline{A}} = X\setminus\overline{(X\setminus\overline{A})}$ olduğundan $X\setminus\overline{(X\setminus\overline{A})} = \emptyset$ olur. Böylece $\overline{(X\setminus\overline{A})} = X$ dir. O halde dış$(A) = X\setminus\overline{A}$ kümesi yoğundur.
b)⇒ a). $X\setminus\overline{A}$ kümesi yoğun olduğundan $\overline{(X\setminus\overline{A})} = X$ dir. Böylece $X\setminus\overline{(X\setminus\overline{A})} = \emptyset$ olur. Teorem 5.50 gereğince $\mathring{\overline{A}} = X\setminus\overline{(X\setminus\overline{A})}$ olduğundan $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ dur. O halde A kümesi hiç bir yerde yoğun olmayan bir kümedir.✓

SONUÇ 5.92. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi hiç bir yerde yoğun değilse $X\setminus A$ kümesi yoğundur.

İSPAT: A kümesi hiç bir yerde yoğun olmadığından Teorem 5.91 gereğince $\overline{X\setminus\overline{A}} = X$ dir. Diğer yandan $X\setminus\overline{A} \subseteq X\setminus A$ olduğundan $\overline{X\setminus\overline{A}} \subseteq \overline{X\setminus A}$ olur. Buradan $\overline{X\setminus A} = X$ elde edilir. O halde $X\setminus A$ kümesi yoğundur.✓

Not
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ uzayında $X\setminus A$ kümesi yoğunsa A hiç bir yerde yoğun olmayan küme olmak zorunda değildir.

ÖRNEK 5.93. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin yoğun fakat $\mathbb{Q}$ nun hiç bir yerde yoğun olmayan bir küme olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin yoğun olduğunu biliyoruz. Diğeryandan $\mathring{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{Q}$ hiç bir yerde yoğun olmayan bir küme değildir.✍

5.8. Alıştırmalar

1. Örnek 3.4 de tanımlanan $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayı ve X in $A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{a,d\}$ alt kümeleri verilsin.
a) A_1 ve A_2 kümelerinin limit noktalarını bulunuz.
b) A_1 ve A_2 kümelerinin kapanışlarını bulunuz.
c) A_1 ve A_2 kümelerinin içlerini bulunuz.
d) A_1 ve A_2 kümelerinin sınırlarını bulunuz.
e) A_1 ve A_2 kümelerinin dışlarını bulunuz.
f) A_1 ve A_2 kümelerinin izole noktalarını bulunuz.
g) A_1 ve A_2 kümelerinin kapanışlarını Teorem 5.30 ü kullanarak bulunuz.

2. Örnek 3.5 tanımlanan $(X,\mathcal{T})$ uzayı ve X in $A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{a,d\}$ alt kümeleri verilsin.

a) A_1 ve A_2 kümelerinin limit noktalarını bulunuz.
b) A_1 ve A_2 kümelerinin kapanışlarını bulunuz.
c) A_1 ve A_2 kümelerinin içlerini bulunuz.
d) A_1 ve A_2 kümelerinin sınırlarını bulunuz.
e) A_1 ve A_2 kümelerinin dışlarını bulunuz.
f) A_1 ve A_2 kümelerinin izole noktalarını bulunuz.
g) A_1 ve A_2 kümelerinin kapanışlarını Teorem 5.30 ü kullanarak bulunuz.

3. $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı verilsin. $A = \{a\}$, $B = \{b,c\}$, $C = \{a,c,d\}$, $D = \{b,d,e\}$ kümelerinin

a) Limit noktalarını b) Kapanışlarını
c) İçlerini d) Sınırlarını
e) Dışlarını f) İzolenoktalarını

bulunuz.

4. $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı verilsin.

a) $A = \{a\}$ b) $B = \{b,c\}$
c) $C = \{a,c,d\}$ d) $D = \{b,d,e\}$

kümelerin kapanışlarını Teorem 5.30 ü kullanarak bulunuz.

5. $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı verilsin.

a) $A = \{a\}$ b) $B = \{b,c\}$
c) $C = \{a,c,d\}$ d) $D = \{b,d,e\}$

kümelerin kapanışlarını Teorem 5.30 ü kullanarak bulunuz.

6. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X,\emptyset,\{a\},\{f\},\{a,f\},\{b,f\},\{a,b,f\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı verilsin. $A = \{a\}$, $B = \{b,c\}$, $C = \{a,c,d\}$, $D = \{b,d,e\}$ kümelerinin

a) Limit noktalarını b) Kapanışlarını
c) İçlerini d) Sınırlarını
e) Dışlarını f) İzolenoktalarını

bulunuz.

7. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X,\emptyset,\{a\},\{f\},\{a,f\},\{b,f\},\{a,b,f\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı verilsin.

a) $A = \{a\}$ b) $B = \{b,c\}$
c) $C = \{a,c,d\}$ d) $D = \{b,d,e\}$

kümelerin kapanışlarını Teorem 5.30 ü kullanarak bulunuz.

8. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve

$$\mathcal{T}_2 = \{X,\emptyset,\{a,b\},\{a,b,f\},\{a,b,d\},\{a,b,d,f\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı verilsin.

a) $A = \{a\}$ b) $B = \{b,c\}$
c) $C = \{a,c,d\}$ d) $D = \{b,d,e\}$

kümelerin kapanışlarını Teorem 5.30 ü kullanarak bulunuz.

9. $(\mathbb{N},\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayında

a) $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$ b) $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
c) $C = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$

kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

10. Alıştırmalar 11 da tanımlanan $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayında

a) $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$ b) $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
c) $C = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$

kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

11. Alıştırmalar 11 da tanımlanan $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayında

a) $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$ b) $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
c) $C = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$

kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

12. $\mathbb{R}$ standart uzayında aşağıdaki kümelerin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

a) (a,b) b) $[a,b]$ c) $[a,b)$
d) $(a,b]$ e) $[a,\infty)$ f) (a,∞)
g) $(-\infty,a]$ h) $(-\infty,a)$ i) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$
j) $\mathbb{Z}$ k) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ l) $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

13. $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x,\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ topolojisine göre aşağıdaki kümelerin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

a) (a,b) b) $[a,b]$ c) $[a,b)$
d) $[a,\infty)$ e) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ f) $\mathbb{Z}$
g) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ h) $\{2n | n \in \mathbb{Z}\}$

14. $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ topolojisine göre aşağıdaki kümelerin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

a) (a,b) b) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ c) $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

15. $\mathbb{R}$ üzerinde Örnek 4.23 de tanımlanan $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ topolojisine göre aşağıdaki kümelerin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarını bulunuz.

a) (a,b) b) $[a,b]$
c) $[a,\infty)$ d) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ e) $\mathbb{Z}$
f) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ g) $\{2n | n \in \mathbb{Z}\}$

16. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(X,\mathcal{T}_2)$ topolojik uzayları verilsin ve $x \in X$, $A \subseteq X$ olsun.

a) x noktası $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası ise x noktasının $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası olduğunu gösteriniz.
b) x noktası $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası olduğu halde x noktası $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası olmayacak şekilde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ özelliğine sahip $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayları örneği veriniz.
c) x noktası $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir iç noktası ise x noktasının $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir iç noktası olduğunu gösteriniz.
d) x noktasının $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir sınır noktası ise x noktasının $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir sınır noktası olduğunu gösteriniz.

17. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A, B \subseteq X$ ve I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $A_i \subseteq X$ olsun. Aşağıdakilerin doğru olduğunu gösteriniz.

a) $\widetilde{A \cap B} \subseteq \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ b) $\widetilde{A \cup B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$
c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ d) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$
e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ f) $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$
g) $\overline{A}\backslash\overline{B} \subseteq \overline{A\backslash B}$ h) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$
i) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = (A \cap B)^\circ$ j) $\bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$

18.

a) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq (A \cup B)^\circ$ olacak şekilde bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı ve A, B alt kümelerini bulunuz.
b) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ olacak şekilde bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı ve A, B alt kümelerini bulunuz.

19. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.

a) $\partial A \subseteq A$ olması için gerek ve yeter şart A nın kapalı olmasıdır.
b) $\partial A \cap A = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart A nın açık olmasıdır.
c) $\partial A = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart A nın hem açık hem kapalı olmasıdır.
d) $\partial\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq \partial A$ dir.
e) $\partial\left(\overset{\circ}{A}\right) \neq \partial A$ olacak şekilde bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı ve bir A alt kümesi bulunuz.

20. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve A kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olsun. $\overline{A \cup \text{dış}A} = X$ olduğunu gösteriniz.

21. $\mathbb{R}$ standart uzayının bir A alt kümesi verilsin.

a) A sonlu ise $\partial A = A$ olduğunu gösteriniz.
b) A sonlu ise A nın her bir noktasının A nın bir izole noktası olduğunu gösteriniz.

22. $\mathbb{R}^2$ standart uzayının aşağıdaki alt kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını ve dışlarını bulunuz.

a) $A = \{(x,y) : y = 0\}$
b) $B = \{(x,y) : x > 0, y \neq 0\}$
c) $C = A \cup B$
d) $D = \{(x,y) : x = 0\} \cup \{(x,y) : y = 0\}$
e) $E = \{(x,y) : x \text{ rasyonel}\}$
f) $F = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
g) $G = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$
h) $H = \{(x,y) : x \neq 0, y = 1/x\}$
i) $I = \{(x,y) : 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\}$
j) $J = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$
k) $K = \{(m,n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$
l) $L = \{(1/m, 1/n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$

23. A kümesi $\mathbb{R}^n$ standart uzayında açık ve B de $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir alt kümesi olsun.

a) $A+B=\{x+y\in\mathbb{R}^n : x\in A, y\in B\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

b) $C=\{x\in\mathbb{R}^n : d_2(x,B)<\varepsilon\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

24. (X,d) bir metrik uzay, $x_0\in X$ ve $A\subseteq X$ olsun.

a) $x_0\in\overline{A}$ olması için gerek ve yeter şartın $d(x_0,A)=0$ olması gerektiğini gösteriniz.

b) Her $\varepsilon>0$ için $D(x_0,\varepsilon)^\circ=B(x_0,\varepsilon)$ olup olmadığını araştırınız.

c) Her $\varepsilon>0$ için $D(x_0,\varepsilon)=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$ olup olmadığını araştırınız.

25. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Aşağıdakilerin doğru olduğunu gösteriniz.

a) dış$(A\cup B)$ =dış$(A)\cap$dış(B) **b)** dış$(A)\cap A=\emptyset$

c) dış$(\emptyset)=X$ **d)** dış$(X\setminus$dış$(A))$ =dış(A)

26. S ve T kümeleri $S\subseteq T$ özelliğine sahip olmak üzere bir X topolojik uzayının iki alt kümesi olsun.

a) S, X de yoğun ise T nin de X de yoğun olduğunu gösteriniz.

b) (a) yı kullanarak $\mathbb{R}$ nin sayılamaz çoklukta yoğun alt kümesi olduğunu gösteriniz.

c) (a) yı kullanarak $\mathbb{R}$ nin sayılamaz çoklukta farklı sayılabilir yoğun alt kümesinin olduğunu gösteriniz.

27. A bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının yoğun bir alt kümesi olsun. X in her U açık alt kümesi için

$$\overline{A\cap U}=\overline{U}$$

olduğunu gösteriniz.

28. A ve B bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının yoğun iki alt kümesi olsun. B açıksa Alıştırma 27 u kullanarak $A\cap B$ nin X de yoğun olduğunu gösteriniz.

29. $\mathbb{R}$ standart uzayında $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin hiç bir yerde yoğun olmadığını gösteriniz.

30. Alıştırmalar 11 da tanımlanan $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzaylarının yoğun alt kümelerini bulunuz.

31. $(X,\mathcal{T}_1)$, $(X,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ olsun. A kümesi $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayında yoğun ise A nın $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında da yoğun olduğunu gösteriniz.

32. $\mathbb{Q}$ nun $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ ve $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzaylarında yoğun olduğunu gösteriniz.

33. $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ nun $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sağ}})$ ve $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzaylarında yoğun olduğunu gösteriniz.

34. $(X,\mathcal{T}_a)$ uzayında $\emptyset\neq A\subseteq X$ ise

$$\overline{A}=\begin{cases} A\cup\{a\}, & a\notin A\\ A, & a\in A\end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

35. $A\neq\overset{\circ}{\overline{A}}$ olacak şekilde bir $(X,\mathcal{T})$ uzayı ve bir $A\subseteq X$ kümesi bulunuz.

36. Alıştırmalar 8 de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayları verilsin ve $A=[0,\infty)$ olsun. $B=(1,2)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{1_A})$ uzayındaki kapanışını, içini ve sınırını bulunuz.

37. Alıştırmalar 8 de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin ve $A=[0,\infty)$ olsun. $B=(1,2)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{2_A})$ uzayındaki kapanışını, içini ve sınırını bulunuz.

38. Alıştırmalar 8 de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayları verilsin ve $A=[0,\infty)$ olsun. $B=(1,2)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{3_A})$ uzayındaki kapanışını, içini ve sınırını bulunuz.

39. Alıştırmalar 8 de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_4)$ uzayları verilsin ve $A=[0,\infty)$ olsun. $B=(1,2)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{4_A})$ uzayındaki kapanışını, içini ve sınırını bulunuz.

40. Alıştırmalar 8 de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_5)$ uzayları verilsin ve $A=[0,\infty)$ olsun. $B=(1,2)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{5_A})$ uzayındaki kapanışını, içini ve sınırını bulunuz.

41. Örnek 4.23 de tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı verilsin ve $A=(0,\infty)$ olsun. $B=(1,\infty)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{\text{sağ}_A})$ uzayındaki kapanışını bulunuz.

42. Örnek 4.23 de tanımlanan $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayı verilsin ve $A=(0,\infty)$ olsun. $B=(1,\infty)$ kümesinin $(A,\mathcal{T}_{\text{sol}_A})$ uzayındaki kapanışını bulunuz.

43. $\mathbb{R}$ standart uzayının $A=(0,1]$ alt uzayı verilsin.

a) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin A alt uzayında açık veya kapalı olup olmadığını araştırınız.

b) A alt uzayında

i) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ **ii)** $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ **iii)** $\left(\frac{1}{2},1\right]$

iv) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ **v)** $\left(\frac{1}{2},1\right)$ **vi)** $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

kümelerin kapanışlarını, içlerini ve sınırlarını bulunuz.

44. $\mathbb{R}$ standart uzayının $A=(0,1)\cup\{2\}$ alt uzayı verilsin. A alt uzayında $B=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\{2\}$ kümesinin

a) Kapanışını **b)** İçini **c)** Sınırını

bulunuz.

45. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(A, \mathcal{T}_A)$ nın ayrık bir uzay olması için gerek ve yeter şartın A nın her bir noktasının A nın bir izole noktası olması gerektiğini gösteriniz.

5.9. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

$X = \{a,b,c,d\}$ ve $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olduğundan

a noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_a = \{X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$,

b noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_b = \{X, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$,

c noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_c = \{X, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$,

d noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_d = \{X\}$ dır.

Diğeryandan $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_{4n} = \{\emptyset, X, \{d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

dır. Buna göre:

a) i) **A_1 kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $(A_1 \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{b,c\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası A_1 kümesinin limit noktası değildir.

$\{b\} \in \mathcal{N}_b$ ve $(A_1 \setminus \{b\}) \cap \{b\} = \{a,c\} \cap \{b\} = \emptyset$ olduğundan b noktası A_1 kümesinin limit noktası değildir.

$U \in \mathcal{N}_c$ için $(A_1 \setminus \{c\}) \cap U = \{a,b\} \cap U = \{a,b\}$ veya $(A_1 \setminus \{c\}) \cap U = \{a,b\} \cap U = \{a\}$ veya $(A_1 \setminus \{c\}) \cap U = \{a,b\} \cap U = \{a,b\}$ olduğundan c noktası A_1 kümesinin limit noktası dır.

$X \in \mathcal{N}_d$ ve $(A_1 \setminus \{d\}) \cap X = \{a,b,c\} \cap X = \{a,b,c\}$ olduğundan d noktası A_1 kümesinin limit noktası dır.

Böylece A_1 kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{A}_1 = \{c,d\}$ dir.

ii) **A_2 kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $(A_2 \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{d\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası A_2 kümesinin limit noktası değildir.

$\{b\} \in \mathcal{N}_b$ ve $(A_2 \setminus \{b\}) \cap \{b\} = \{a,d\} \cap \{b\} = \emptyset$ olduğundan b noktası A_2 kümesinin limit noktası değildir.

$U \in \mathcal{N}_c$ için $(A_2 \setminus \{c\}) \cap U = \{a,d\} \cap U = \{a\}$ veya $(A_2 \setminus \{c\}) \cap U = \{a,d\} \cap U = \{a,d\}$ olduğundan c noktası A_2 kümesinin limit noktası dır.

$X \in \mathcal{N}_d$ ve $(A_2 \setminus \{d\}) \cap X = \{a\} \cap X = \{a\}$ olduğundan d noktası A_2 kümesinin limit noktası dır.

Böylece A_2 kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{A}_2 = \{c,d\}$ dir.

b) i) **A_1 kümesinin kapanışı:**

$$\overline{A_1} = A_1 \cup \widetilde{A}_1 = \{a,b,c\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\} = X$$

dir.

ii) **A_2 kümesinin kapanışı:**

$$\overline{A_2} = A_2 \cup \widetilde{A}_2 = \{a,d\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\}$$

dir.

c) i) **A_1 kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $\{a\} \subseteq A_1$ olduğundan a noktası A_1 in bir iç noktası dır.

$\{b\} \in \mathcal{N}_b$ ve $\{b\} \subseteq A_1$ olduğundan b noktası A_1 kümesinin bir iç noktası dır.

$\{a,c\} \in \mathcal{N}_c$ ve $\{a,c\} \subseteq A_1$ olduğundan c noktası A_1 kümesinin bir iç noktası dır.

Böylece A_1 kümesinin içi $\overset{\circ}{A_1} = \{a,b,c\}$ dir. (A_1 açık olduğu için içi kendisine eşittir.)

ii) **A_2 kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $\{a\} \subseteq A_2$ olduğundan a noktası A_2 kümesinin bir iç noktası dır.

$U \in \mathcal{N}_d$ ise $U = X$ ve $X \not\subseteq A_2$ olduğundan d noktası A_2 kümesinin bir iç noktası değildir.

Böylece A_2 kümesinin içi $\overset{\circ}{A_2} = \{a\}$ dır.

d) i) **A_1 kümesinin sınırı:** $X \setminus A_1 = \{d\}$ kümesi kapalı olduğundan $\overline{X \setminus A_1} = \{d\}$ dir. Böylece

$$\partial A_1 = \overline{A_1} \cap (\overline{X \setminus A_1}) = X \cap \{d\} = \{d\}$$

dir.

ii) **A_2 kümesinin sınırı:** $X \setminus A_2 = \{b,c\}$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d\}$ olduğundan $\overline{X \setminus A_2} = \{b,c,d\}$ dir. Böylece

$$\partial A_2 = \overline{A_2} \cap (\overline{X \setminus A_2}) = \{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$$

dir.

e) i) **A_1 kümesinin dışı:** dış$(A_1) = X \setminus \overline{A_1} = X \setminus X = \emptyset$ dir.

ii) **A_2 kümesinin dışı:** dış$(A_2) = X \setminus \overline{A_2} = X \setminus \{a,c,d\} = \{b\}$ dir.

f) i) **A_1 kümesinin izole noktaları:** $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_{4n}$ ve $A_1 \cap \{a\} = \{a\}$ ve $A_1 \cap \{b\} = \{b\}$ olduğundan a ve b

noktaları A_1 in izole noktalarıdır. $U \in \mathcal{N}_c$ için $A_1 \cap U \neq \{c\}$ olduğundan c noktası A_1 kümesinin bir izole noktası değildir. Böylece A_1 in izole noktalarının kümesi $\{a, b\}$ dir.

ii) A_2 **kümesinin izole noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{T}_{4n}$ ve $A_2 \cap \{a\} = \{a\}$ olduğundan a noktası A_2 nin bir izole noktası dır. $U \in \mathcal{N}_d$ ise $U = X$ ve $X \cap A_2 \neq \{d\}$ olduğundan d noktası A_2 kümesinin bir izole noktası değildir. Böylece A_2 nin izole noktalarının kümesi $\{a\}$ dır.

g) i) A_1 kümesini kapsayan kapalı kümelerin en küçüğü X dir. O halde $\overline{A_1} = X$ dir.

ii) A_2 kümesini kapsayan kapalı kümelerin en küçüğü $\{a, c, d\}$ dir. O halde $\overline{A_2} = \{a, c, d\}$ dir.

ÇÖZÜM 2

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

olduğundan

a noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_a = \{X, \{a\}, \{a, c, d\}\}$,

b noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_b = \{X, \{b, c, d, e, f\}\}$,

c noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_c = \{X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$,

d noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_d = \{X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$,

e noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_e = \{X, \{b, c, d, e, f\}\}$ dir.

f noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_e = \{X, \{b, c, d, e, f\}\}$ dir.

Diğeryandan $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

dir. Buna göre:

a) i) A_1 **kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $(A_1 \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası A_1 kümesinin limit noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $(A_1 \setminus \{b\}) \cap U = \{a, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan b noktası A_1 kümesinin limit noktası dır.

$\{c, d\} \in \mathcal{N}_c$ için $(A_1 \setminus \{c\}) \cap \{c, d\} = \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ olduğundan c noktası A_1 kümesinin limit noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(A_1 \setminus \{d\}) \cap U = \{a, b, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası A_1 kümesinin limit noktası dır.

Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(A_1 \setminus \{e\}) \cap U = \{a, b, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası A_1 kümesinin limit noktası dır.

Her $U \in \mathcal{N}_f$ için $(A_1 \setminus \{f\}) \cap U = \{a, b, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan f noktası A_1 kümesinin limit noktası dır.

Böylece A_1 kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{A}_1 = \{b, d, e, f\}$ dir.

ii) A_2 **kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $(A_2 \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{d\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası A_2 kümesinin limit noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $(A_2 \setminus \{b\}) \cap U = \{a, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan b noktası A_2 kümesinin limit noktası dır.

Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(A_2 \setminus \{c\}) \cap U = \{a, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası A_2 kümesinin bir limit noktası dır.

$\{c, d\} \in \mathcal{N}_d$ için $(A_2 \setminus \{d\}) \cap \{c, d\} = \{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ olduğundan d noktası A_2 kümesinin bir limit noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(A_2 \setminus \{e\}) \cap U = \{a, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası A_2 kümesinin limit noktası dır.

Her $U \in \mathcal{N}_f$ için $(A_2 \setminus \{f\}) \cap U = \{a, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan f noktası A_2 kümesinin limit noktası dır.

Böylece A_2 kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{A}_2 = \{b, c, e, f\}$ dir.

b) i) A_1 **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{A_1} = A_1 \cup \widetilde{A}_1 = \{a, b, c\} \cup \{b, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\} = X$$

dir.

ii) A_2 **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{A_2} = A_2 \cup \widetilde{A}_2 = \{a, d\} \cup \{b, c, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\} = X$$

dir.

c) i) A_1 **kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $\{a\} \subseteq A_1$ olduğundan a noktası A_1 kümesinin bir iç noktası dır.

Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $U \nsubseteq A_1$ olduğundan b noktası A_1 kümesinin bir iç noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $U \nsubseteq A_1$ olduğundan c noktası A_1 kümesinin bir iç noktası değildir.

Böylece A_1 kümesinin içi $\overset{\circ}{A_1} = \{a\}$ dır.

ii) A_2 **kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $\{a\} \subseteq A_2$ olduğundan a noktası A_2 kümesinin bir iç noktası dır.

Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $U \nsubseteq A_2$ olduğundan d noktası A_2 kümesinin bir iç noktası değildir.

Böylece A_2 kümesinin içi $\overset{\circ}{A_2} = \{a\}$ dir.

d) i) A_1 kümesinin sınırı: $\overline{X \setminus A_1} = \{b, c, e, d, f\}$ olduğundan

$$\partial A_1 = \overline{A_1} \cap (\overline{X \setminus A_1}) = X \cap \{b, c, d, e, f\} = \{b, c, d, e, f\}$$

dir.

ii) A_2 kümesinin sınırı: $\overline{X \setminus A_2} = \{b, c, d, e, f\}$ olduğundan

$$\partial A_2 = \overline{A_2} \cap (\overline{X \setminus A_2}) = X \cap \{b, c, d, e, f\} = \{b, c, d, e, f\}$$

dir.

e) i) A_1 kümesinin dışı: dış$(A_1) = X \setminus \overline{A_1} = X \setminus X = \emptyset$ dur.

ii) A_2 kümesinin dışı: dış$(A_2) = X \setminus \overline{A_2} = X \setminus X = \emptyset$ dur.

f) i) A_1 kümesinin izole noktaları: $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $A_1 \cap \{a\} = \{a\}$ olduğundan a noktası A_1 in izole noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $A_1 \cap U \neq \{b\}$ olduğundan b noktası A_1 kümesinin bir izole noktası değildir.
Her $\{c, d\} \in \mathcal{N}_c$ için $A_1 \cap \{c, d\} = \{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$ olduğundan c noktası A_1 kümesinin bir izole noktası dır.
Böylece A_1 in izole noktalarının kümesi $\{a, c\}$ dır.

ii) A_2 kümesinin izole noktaları: $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $A_2 \cap \{a\} = \{a\}$ olduğundan a noktası A_2 kümesinin izole noktası dır.
$\{c, d\} \in \mathcal{N}_d$ ve $A_2 \cap \{c, d\} = \{d\}$ olduğundan d noktası A_2 kümesinin bir izole noktası dır.
Böylece A_2 in izole noktalarının kümesi $\{a, d\}$ dir.

g) i) A_1 kümesini kapsayan kapalı kümelerin en küçüğü X dir. O halde $\overline{A_1} = X$ dir.

ii) A_2 kümesini kapsayan kapalı kümelerin en küçüğü X dir. O halde $\overline{A_2} = X$ dir.✔

ÇÖZÜM 3

$X = \{a, b, c, d, e\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

olduğundan $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında

a noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_a = \{X, \{a\}, \{a, c, d\}\}$,

b noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_b = \{X, \{b, c, d, e\}\}$,

c noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_c = \{X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$,

d noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_d = \{X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$,

e noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_e = \{X, \{b, c, d, e\}\}$ dir.

Diğeryandan $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d, e\}\}$$

dir.

a) i) $A = \{a\}$ kümesinin limit noktaları: $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için

$$(A \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \emptyset$$

olduğundan a noktası A kümesinin limit noktası değildir.
$\{b, c, d, e\} \in \mathcal{N}_b$ için

$$(A \setminus \{b\}) \cap \{b, c, d, e\} = \{a\} \cap \{b, c, d, e\} = \emptyset$$

olduğundan b noktası A kümesinin limit noktası değildir.
$\{c, d\} \in \mathcal{N}_c$ için

$$(A \setminus \{c\}) \cap \{c, d\} = \{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset$$

olduğundan c noktası A kümesinin limit noktası değildir.
$\{c, d\} \in \mathcal{N}_d$ için

$$(A \setminus \{d\}) \cap \{c, d\} = \{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset$$

olduğundan d noktası A kümesinin limit noktası değildir.
$\{b, c, d, e\} \in \mathcal{N}_e$ için

$$(A \setminus \{e\}) \cap \{b, c, d, e\} = \{a\} \cap \{b, c, d, e\} = \emptyset$$

olduğundan e noktası A kümesinin limit noktası değildir.
O halde A nın limit noktalarının kümesi $\tilde{A} = \emptyset$ dur.

ii) $B = \{b, c\}$ kümesinin limit noktaları: $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için

$$(B \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$$

olduğundan a noktası B kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $(B \setminus \{b\}) \cap U = \{c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan b noktası B kümesinin limit noktası dır.
$\{c, d\} \in \mathcal{N}_c$ için $(B \setminus \{c\}) \cap \{c, d\} = \{b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ olduğundan c noktası B kümesinin limit noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(B\setminus\{d\}) \cap U = \{b,c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası B kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(B\setminus\{e\}) \cap U = \{b,c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası B kümesinin limit noktası dır.
O halde B nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{B} = \{b,d,e\}$ dir.

iii) **$C = \{a,c,d\}$ kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için

$$(C\setminus\{a\}) \cap \{a\} = \{c,d\} \cap \{a\} = \emptyset$$

olduğundan a noktası C kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $(C\setminus\{b\}) \cap U = \{a,c,d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan b noktası C kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(C\setminus\{c\}) \cap U = \{a,d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası C kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(C\setminus\{d\}) \cap U = \{a,c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası C kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(C\setminus\{e\}) \cap U = \{a,c,d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası C kümesinin limit noktası dır.
O halde C nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{C} = \{b,c,d,e\}$ dir.

iv) **$D = \{b,d,e\}$ kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $(D\setminus\{a\}) \cap \{a\} = \{b,d,e\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası D kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $(D\setminus\{b\}) \cap U = \{d,e\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan b noktası D kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(D\setminus\{c\}) \cap U = \{b,d,e\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası D kümesinin limit noktası dır.
$\{c,d\} \in \mathcal{N}_d$ için $(D\setminus\{d\}) \cap \{c,d\} = \{b,e\} \cap \{c,d\} = \emptyset$ olduğundan d noktası D kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(D\setminus\{e\}) \cap U = \{b,d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası D kümesinin limit noktası dır.
O halde D nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{D} = \{b,c,e\}$ dir.

b) **i)** **A kümesinin kapanışı:**

$$\overline{A} = A \cup \widetilde{A} = \{a\} \cup \emptyset = A$$

dır.

ii) **B kümesinin kapanışı:**

$$\overline{B} = B \cup \widetilde{B} = \{b,c\} \cup \{b,d,e\} = \{b,c,d,e\}$$

dır.

iii) **C kümesinin kapanışı:**

$$\overline{C} = C \cup \widetilde{C} = \{a,c,d\} \cup \{b,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\} = X$$

dır.

iv) **D kümesinin kapanışı:**

$$\overline{D} = D \cup \widetilde{D} = \{b,d,e\} \cup \{b,c,e\} = \{b,c,d,e\}$$

dir.

c) **i)** **$A = \{a\}$ kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $\{a\} \subseteq A$ olduğundan a noktası A kümesinin bir iç noktası dır. Böylece $\overset{\circ}{A} = \{a\}$ dır.

ii) **$B = \{b,c\}$ kümesinin içi:** Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $U \not\subseteq B$ olduğundan b noktası B kümesinin bir iç noktası değildir. Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $U \not\subseteq B$ olduğundan c noktası B kümesinin bir iç noktası değildir. O halde $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ dur.

iii) **$C = \{a,c,d\}$ kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $\{a\} \subseteq C$ olduğundan a noktası C kümesinin bir iç noktası dır. $\{c,d\} \in \mathcal{N}_c$ için $\{c,d\} \subseteq C$ olduğundan c noktası C kümesinin bir iç noktası dır. $\{c,d\} \in \mathcal{N}_d$ için $\{c,d\} \subseteq C$ olduğundan d noktası C kümesinin bir iç noktası dır.
Böylece $\overset{\circ}{C} = \{a,c,d\} = C$ dir.

iv) **$D = \{b,d,e\}$ kümesinin içi:** Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $U \not\subseteq D$ olduğundan b noktası D kümesinin bir iç noktası değildir. Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $U \not\subseteq D$ olduğundan b noktası D kümesinin bir iç noktası değildir. Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $U \not\subseteq D$ olduğundan b noktası D kümesinin bir iç noktası değildir.
Böylece $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ dur.

d) Önce $X\setminus A, X\setminus B, X\setminus C$ ve $X\setminus D$ kümelerinin kapanışlarını bulalım. $X\setminus A$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{X\setminus A} = \{b,c,d,e\}$ dir. $X\setminus B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{X\setminus B} = X$ dir. $X\setminus C$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,e\}$ olduğundan $\overline{X\setminus C} = \{b,e\}$ dir. $X\setminus D$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{X\setminus D} = X$ dir. Buna göre

i) **A kümesinin sınırı:**

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = A \cap \{b,c,d,e\} = \emptyset$$

dır.

ii) **B kümesinin sınırı:**

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{X\setminus B} = \{b,c,d,e\} \cap X = \{b,c,d,e\}$$

dır.

iii) **C kümesinin sınırı:**

$$\partial C = \overline{C} \cap \overline{X\setminus C} = X \cap \{b,e\} = \{b,e\}$$

dır.

iv) D **kümesinin sınırı:**

$$\partial D = \overline{D} \cap \overline{X \setminus D} = \{b,c,d,e\} \cap X = \{b,c,d,e\}$$

dır.

e) **i)** A **kümesinin dışı:** dış$(A) = X \setminus \overline{A} = \{b,c,e,d\}$ dır.

ii) B **kümesinin dışı:** dış$(B) = X \setminus \overline{B} = \{a\}$ dır.

iii) C **kümesinin dışı:** dış$(C) = X \setminus X = \emptyset$ dır.

iv) D **kümesinin dışı:** dış$(D) = X \setminus \overline{D} = \{a\}$ dır.

f) **i)** $A = \{a\}$ **kümesinin izole noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için

$$\{a\} \cap A = \{a\} \cap \{a\} = \{a\}$$

olduğundan a noktası A kümesinin bir izole noktası dır. Böylece A kümesinin izole noktalarının kümesi $\{a\}$ dır.

ii) $B = \{b,c\}$ **kümesinin izole noktaları:** Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $U \cap B = U \cap \{b,c\} \neq \{b\}$ olduğundan b noktası B kümesinin bir izole noktası değildir. $\{c,d\} \in \mathcal{N}_c$ için

$$\{c,d\} \cap B = \{c,d\} \cap \{b,c\} = \{c\}$$

olduğundan c noktası B kümesinin bir izole noktası dır. Böylece B kümesinin izole noktalarının kümesi $\{c\}$ dır.

iii) $C = \{a,c,d\}$ **kümesinin izole noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için

$$\{a\} \cap C = \{a\} \cap \{a,c,d\} = \{a\}$$

olduğundan a noktası C kümesinin bir izole noktası dır. Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $U \cup C = U \cup \{a,c,d\} \neq \{c\}$ olduğundan c noktası C kümesinin bir izole noktası değildir. Her $U \in \mathcal{N}_d$ için

$$U \cup C = U \cup \{a,c,d\} \neq \{d\}$$

olduğundan d noktası C kümesinin bir izole noktası değildir.
Böylece C kümesinin izole noktalarının kümesi $\{a\}$ dır.

iv) $D = \{b,d,e\}$ **kümesinin izole noktaları:** Her $U \in \mathcal{N}_b$ için

$$U \cap D = U \cap \{b,d,e\} \neq \{b\}$$

olduğundar b noktası D kümesinin bir izole noktası değildir. $\{c,d\} \in \mathcal{N}_d$ için

$$\{c,d\} \cap D = \{c,d\} \cap \{b,d,e\} = \{d\}$$

olduğundan d noktası D kümesinin bir izole noktası dır. Her $U \in \mathcal{N}_e$ için

$$U \cup D \neq \{e\}$$

olduğundan e noktası D kümesinin bir izole noktası değildir. Böylece D kümesinin izole noktalarının kümesi $\{d\}$ dır.

ÇÖZÜM 4

$(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,e\}, \{a,b,e\}, \{b,c,d,e\}\}$$

dir. Buna göre

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{a\}$ olduğundan $\overline{A} = \{a\}$ dır.

b) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında B kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{B} = \{b,c,d,e\}$ dir.

c) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında C kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{C} = X$ dir.

d) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında D kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{D} = \{b,c,d,e\}$ dir.✔

ÇÖZÜM 5

$(X, \mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_2 = \{\emptyset, X, \{b,e\}, \{a,b,e\}, \{b,c,d,e\}\}$$

dir. Buna göre

a) $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayınında A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{a,b,e\}$ olduğundan $\overline{A} = \{a,b,e\}$ dır.

b) $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayınında B kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{B} = \{b,c,d,e\}$ dir.

c) $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayınında C kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{C} = X$ dır.

d) $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayınında D kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{D} = \{b,c,d,e\}$ dir.✔

ÇÖZÜM 6

$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{b,f\}, \{a,b,f\}\}$$

dir. Buna göre $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında

a noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_a = \{X, \{a\}, \{a,f\}, \{a,b,f\}\}$,

b noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_b = \{X, \{b,f\}, \{a,b,f\}\}$,

c noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_c = \{X\}$,

d noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_d = \{X\}$,

e noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_e = \{X\}$ dir.

f noktasını içeren açık kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{N}_f = \{X, \{f\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$ dir.

a) i) $A = \{a\}$ **kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $(A \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \emptyset \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası A kümesinin limit noktası değildir.
$\{b, f\} \in \mathcal{N}_b$ için $(A \setminus \{b\}) \cap \{b, f\} = \{a\} \cap \{b, f\} = \emptyset$ olduğundan b noktası A kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(A \setminus \{c\}) \cap U = \{a\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası A kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(A \setminus \{d\}) \cap U = \{a\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası A kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(A \setminus \{e\}) \cap U = \{a\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası A kümesinin limit noktası dır.
$\{f\} \in \mathcal{N}_f$ için $(A \setminus \{e\}) \cap \{f\} = \{a\} \cap \{f\} = \emptyset$ olduğundan f noktası A kümesinin limit noktası değildir.
Böylece $\widetilde{A} = \{c, d, e\}$ dir.

ii) $B = \{b, c\}$ **kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için

$$(B \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$$

olduğundan a noktası B kümesinin limit noktası değildir.
$\{b, f\} \in \mathcal{N}_b$ için $(B \setminus \{b\}) \cap \{b, f\} = \{c\} \cap \{b, f\} = \emptyset$ olduğundan b noktası B kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(B \setminus \{c\}) \cap U = \{b\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası B kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(B \setminus \{d\}) \cap U = \{b, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası B kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(B \setminus \{e\}) \cap U = \{b, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası B kümesinin limit noktası dır.
$\{f\} \in \mathcal{N}_f$ için $(B \setminus \{e\}) \cap \{f\} = \{b, c\} \cap \{f\} = \emptyset$ olduğundan f noktası B kümesinin limit noktası değildir.
O halde B nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{B} = \{c, d, e\}$ dir.

iii) $C = \{a, c, d\}$ **kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $(C \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{c, d\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası C kümesinin limit noktası değildir.
$\{b, f\} \in \mathcal{N}_b$ için $(C \setminus \{b\}) \cap \{b, f\} = \{a, c, d\} \cap \{b, f\} = \emptyset$ olduğundan b noktası C kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(C \setminus \{c\}) \cap U = \{a, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası C kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(C \setminus \{d\}) \cap U = \{a, c\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası C kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(C \setminus \{e\}) \cap U = \{a, c, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası C kümesinin limit noktası dır.
$\{f\} \in \mathcal{N}_f$ için $(C \setminus \{e\}) \cap \{f\} = \{a, c, d\} \cap \{f\} = \emptyset$ olduğundan f noktası C kümesinin limit noktası değildir.
O halde C nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{C} = \{c, d, e\}$ dir.

iv) $D = \{b, d, e\}$ **kümesinin limit noktaları:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $(D \setminus \{a\}) \cap \{a\} = \{b, d, e\} \cap \{a\} = \emptyset$ olduğundan a noktası D kümesinin limit noktası değildir.
$\{b, f\} \in \mathcal{N}_b$ için $(D \setminus \{b\}) \cap \{b, f\} = \{d, e\} \cap \{b, f\} = \emptyset$ olduğundan b noktası D kümesinin limit noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $(D \setminus \{c\}) \cap U = \{b, d, e\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan c noktası D kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $(D \setminus \{d\}) \cap U = \{b, e\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan d noktası D kümesinin limit noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $(D \setminus \{e\}) \cap U = \{b, d\} \cap U \neq \emptyset$ olduğundan e noktası D kümesinin limit noktası dır.
$\{f\} \in \mathcal{N}_f$ için $(D \setminus \{e\}) \cap \{f\} = \{b, d\} \cap \{f\} = \emptyset$ olduğundan f noktası D kümesinin limit noktası değildir.
O halde D nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{D} = \{c, d, e\}$ dir.

b) i) A **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{A} = A \cup \widetilde{A} = \{a\} \cup \{c, d, e\} = \{a, c, d, e\}$$

dır.

ii) B **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{B} = B \cup \widetilde{B} = \{b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{b, c, d, e\}$$

dır.

iii) C **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{C} = C \cup \widetilde{C} = \{a, c, d\} \cup \{c, d, e\} = \{a, c, d, e\}$$

dır.

iv) D **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{D} = D \cup \widetilde{D} = \{b, d, e\} \cup \{c, d, e\} = \{b, c, d, e\}$$

dir.

c) i) $A = \{a\}$ **kümesinin içi:** $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ ve $\{a\} \subseteq A$ olduğundan a noktası A kümesinin bir iç noktası dır. Böylece $\overset{\circ}{A} = \{a\}$ dır.

ii) $B = \{b, c\}$ **kümesinin içi:**
Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $U \nsubseteq B$ olduğundan b noktası B kümesinin bir iç noktası değildir.

Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $U \not\subseteq B$ olduğundan c noktası B kümesinin bir iç noktası değildir. O halde $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ dur.

iii) $C = \{a, c, d\}$ **kümesinin içi:**
$\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $\{a\} \subseteq C$ olduğundan a noktası C kümesinin bir iç noktası dır.
$U \in \mathcal{N}_c$ için $U \not\subseteq C$ olduğundan c noktası C kümesinin bir iç noktası değildir.
Her. $U \in \mathcal{N}_d$ için $U \not\subseteq C$ olduğundan d noktası C kümesinin bir iç noktası değildir.
Böylece $\overset{\circ}{C} = \{a\}$ dir.

iv) $D = \{b, d, e\}$ **kümesinin içi:** Her $U \in \mathcal{N}_b$ için $U \not\subseteq D$ olduğundan b noktası D kümesinin bir iç noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $U \not\subseteq D$ olduğundan b noktası D kümesinin bir iç noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $U \not\subseteq D$ olduğundan b noktası D kümesinin bir iç noktası değildir.
Böylece $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ dur.

d) Önce $X\setminus A, X\setminus B, X\setminus C$ ve $X\setminus D$ kümelerinin kapanışlarını bulalım. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, X, \{c,d,e\}, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,c,d,e\}\}$$

dir. Böylece

$$\overline{X\setminus A} = \overline{\{b,c,d,e,f\}} = \{b,c,d,e,f\}, \quad \overline{X\setminus B} = \overline{\{a,d,e,f\}} = X,$$
$$\overline{X\setminus C} = \overline{\{b,e,f\}} = \{b,c,d,e,f\} \text{ ve } \overline{X\setminus D} = \overline{\{a,c,f\}} = X$$

dir. Bu durumda

i) A **kümesinin sınırı:**

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = \{a,c,d,e\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \{c,d,e\}$$

dır.

ii) B **kümesinin sınırı:**

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{X\setminus B} = \{b,c,d,e\} \cap X = \{b,c,d,e\}$$

dır.

iii) C **kümesinin sınırı:**

$$\partial C = \overline{C} \cap \overline{X\setminus C} = \{a,c,d,e\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \{c,d,e\}$$

dır.

iv) D **kümesinin sınırı:**

$$\partial D = \overline{D} \cap \overline{X\setminus D} = \{b,c,d,e\} \cap X = \{b,c,d,e\}$$

dır.

e) **i)** A **kümesinin dışı:** $\text{dış}(A) = X\setminus\overline{A} = \{b, f\}$ dir.
ii) B **kümesinin dışı:** $\text{dış}(B) = X\setminus\overline{B} = \{a, f\}$ dir.
iii) C **kümesinin dışı:** $\text{dış}(C) = X\setminus\overline{C} = \{b, f\}$ dir.
iv) D **kümesinin dışı:** $\text{dış}(D) = X\setminus\overline{D} = \{a, f\}$ dir.

f) $A = \{a\}$ **kümesinin izole noktaları:**

i) $\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $\{a\} \cap A = \{a\}$ olduğundan a noktası A kümesinin bir izole noktası dır. Böylece A kümesinin izole noktalarının kümesi $\{a\}$ dır.

ii) $B = \{b, c\}$ **kümesinin izole noktaları:**
$\{b, f\} \in \mathcal{N}_b$ için $\{b, f\} \cap B = \{b\}$ olduğundan b noktası B kümesinin bir izole noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $U \cup B \neq \{c\}$ olduğundan c noktası B kümesinin bir izole noktası değildir.
Böylece B kümesinin izole noktalarının kümesi $\{b\}$ dır.

iii) $C = \{a, c, d\}$ **kümesinin izole noktaları:**
$\{a\} \in \mathcal{N}_a$ için $\{a\} \cap C = \{a\}$ olduğundan a noktası C kümesinin bir izole noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_c$ için $U \cup C \neq \{c\}$ olduğundan c noktası C kümesinin bir izole noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $U \cup C \neq \{d\}$ olduğundan d noktası C kümesinin bir izole noktası değildir.
Böylece C kümesinin izole noktalarının kümesi $\{a\}$ dır.

iv) $D = \{b, d, e\}$ **kümesinin izole noktaları:**
$\{b, f\} \in \mathcal{N}_b$ için $\{b, f\} \cap D = \{b\}$ olduğundan b noktası D kümesinin bir izole noktası dır.
Her $U \in \mathcal{N}_d$ için $U \cap D \neq \{d\}$ olduğundan d noktası D kümesinin bir izole noktası değildir.
Her $U \in \mathcal{N}_e$ için $U \cup D \neq \{e\}$ olduğundan e noktası D kümesinin bir izole noktası değildir.
Böylece D kümesinin izole noktalarının kümesi $\{b\}$ dur.

ÇÖZÜM 7

$(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, X, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,c,d,e\}, \{c,d,e\}\}$$

dir. Buna göre

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{a,c,d,e\}$ olduğundan

$$\overline{A}=\{a,c,d,e\}$$

dır.

b) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayınında B kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{B}=\{b,c,d,e\}$ dır.

c) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayınında C kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{a,c,d,e\}$ olduğundan

$$\overline{C}=\{a,c,d,e\}$$

dır.

d) D kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d,e\}$ olduğundan $\overline{D}=\{b,c,d,e\}$ dir.✔

Çözüm 8

$(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_2=\{\emptyset,X,\{c,d,e,f\},\{c,d,e\},\{c,e,f\},\{c,e\}\}$$

dir. Buna göre

a) $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayınında A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{A}=X$ dır.

b) $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayınında B kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{B}=X$ dır.

c) $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayınında C kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{C}=X$ dır.

d) $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayınında D kümesini kapsayan en küçük kapalı küme X olduğundan $\overline{D}=X$ dır.✔

Çözüm 9

$\mathcal{T}=\{U\subseteq\mathbb{N}\mid\mathbb{N}\setminus U \text{ sonlu}\}\cup\{\emptyset\}$ olmak üzere $(\mathbb{N},\mathcal{T})$ uzaylarında A,B,C kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarınıaraştıralım.

a) **i)** **A nın limit noktaları:** $U=\{1,11,12,13,\cdots\}$ kümesi açıktır. Üstelik $1\in U$, $U\in\mathcal{T}$ ve

$$U\cap(A\setminus\{1\})=\{1,11,12,13,\cdots\}\cap\{2,3,\cdots,10\}=\emptyset$$

dur. O halde $1\in\mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası değildir. $U=\{2,11,12,13,\cdots\}$ kümesi açıktır. Üstelik $2\in U$, $U\in\mathcal{T}$ ve

$$U\cap(A\setminus\{2\})=\{2,11,12,13,\cdots\}\cap\{1,3,\cdots,10\}=\emptyset$$

dur. O halde $2\in\mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası değildir. Benzer şekilde

$$3,4,5,6,7,8,9$$

noktalarının A nın limit noktası olmadığı gösterilir. $U=\{10,11,12,13,\cdots\}$ kümesi açıktır. Üstelik $10\in U$, $U\in\mathcal{T}$ ve

$$U\cap(A\setminus\{10\})=\{10,11,12,13,\cdots\}\cap\{1,2,3,\cdots,9\}=\emptyset$$

dur. O halde $10\in\mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası değildir. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $n\geq 11$ olsun. Bu durumda $U=\{n,n+1,n+2,\cdots\}$ kümesi açıktır. Üstelik $n\in U$, $U\in\mathcal{T}$ ve

$$U\cap(A\setminus\{n\})=\{n,n+1,n+2,\cdots\}\cap\{1,2,3,\cdots,10\}=\emptyset$$

dur. O halde $n\in\mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası değildir. Bu durumda $\tilde{A}=\emptyset$ dur.

ii) **A kümesinin kapanışı:** A kümesi sonlu olduğundan kapalıdır. Bu durumda $\overline{A}=A=\{1,2,3,\cdots,10\}$ olur. Veya

$$\overline{A}=A\cup\tilde{A}=\{1,2,3,\cdots,10\}\cup\emptyset=\{1,2,3,\cdots,10\}$$

dur.

iii) **A kümesinin içi:** $n\in A$ olsun. $n\in\mathring{A}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $n\in U\subseteq A$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ vardır. Bu durumda

$$\mathbb{N}\setminus A=\{11,12,\cdots\}\subseteq\mathbb{N}\setminus U$$

dur. Diğer taraftan U boş olmayan açık bir küme olduğundan $\mathbb{N}\setminus U$ sonludur. Böylece $\mathbb{N}\setminus A$ sonludur. Bu ise $\mathbb{N}\setminus A$ nın sonsuz olmasıile çelişir. O halde $n\notin\mathring{A}$ dir. Böylece $\mathring{A}=\emptyset$ olur.

iv) **A kümesinin sınırı:** Bunun için önce $\mathbb{N}\setminus A$ nın kapanışınıbulalım. Örnek 5.20 gereğince $\overline{\mathbb{N}\setminus A}=\mathbb{N}$ dir. Böylece

$$\partial A=\overline{A}\cap\overline{\mathbb{N}\setminus A}=\{1,2,\cdots,10\}\cap\mathbb{N}=\{1,2,\cdots,10\}$$

dur.

v) **A kümesinin dışı:** $\text{dış}(A)=\mathbb{N}\setminus\overline{A}=\{11,12,\cdots\}$ dır.

vi) **A kümesinin izole noktaları:** $U=\{1,11,12,\cdots\}$ kümesi açık, $1\in U$ ve $U\cap A=\{1\}$ dir. O halde 1 noktası A nın bir izole noktası dır. $U=\{2,11,12,\cdots\}$ kümesi açık $2\in U$ ve $U\cap A=\{2\}$ dir. O halde 2 noktası A nın bir izole noktası dır. Benzer şekilde $3,4,5,6,7,8,9$ noktalarının A nın birer izole noktası olduğu gösterilir. $U=\{10,11,12,\cdots\}$

kümesi açık $10 \in U$ ve $U \cap A = \{10\}$ dir. O halde 10 noktası A nın bir izole noktası dır. Daha genel olarak $a \in A$ ise $U = \{a, 11, 12, \cdots\}$ kümesi açık, $a \in U$ ve $U \cap A = \{a\}$ olduğundan a noktası A nın bir izole noktası dır. Yani A nın her noktası A nın bir izole noktası dır.

b) i) B **kümesinin limit noktaları:** Örnek 5.15 gereğince B nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{B} = \mathbb{N}$ dir. Böylece B nin kapanı şı $\overline{B} = B \cup \widetilde{B} = \mathbb{N}$ dir.

ii) B **kümesinin içi:** $n \in B$ olsun. $n \in \overset{\circ}{B}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $n \in U \subseteq B$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $\mathbb{N} \backslash B \subseteq \mathbb{N} \backslash U$ dur. Diğer taraftan U boş olmayan açık bir küme olduğundan $\mathbb{N} \backslash U$ sonludur. Böylece $\mathbb{N} \backslash B$ sonludur. Bu ise $\mathbb{N} \backslash B = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ kümesinin sonsuz olmasıile çelişir. O halde $n \notin \overset{\circ}{B}$ dir. Böylece $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ dur.

iii) B **kümesinin sınırı:** Örnek 5.20 gereğince

$$\overline{\mathbb{N} \backslash B} = \overline{\{1, 3, 5, 7, \cdots\}} = \mathbb{N}$$

olduğundan

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{\mathbb{N} \backslash B} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

olur.

iv) B **kümesinin dışı:** $\text{dış}(B) = \mathbb{N} \backslash \overline{B} = \mathbb{N} \backslash \mathbb{N} = \emptyset$ dur.

v) B **kümesinin izole noktaları:** $2m \in B$ olsun. $2m$ nin B nin bir izole noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda $2m \in U$ ve $U \cap (B \backslash \{2m\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $B \backslash \{2m\} \subseteq \mathbb{N} \backslash U$ dur. $\mathbb{N} \backslash U$ sonlu olduğundan $B \backslash \{2m\}$ sonludur. Bu ise $B \backslash \{2m\}$ nin sonsuz olmasıile çelişir. Böylece B nin izole noktası yoktur.

c) i) C **kümesinin limit noktaları:** Örnek 5.15 gereğince C kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{C} = \mathbb{N}$ dir.

ii) C **kümesinin kapanışı:** $\overline{C} = C \cup \widetilde{C} = \mathbb{N}$ dir.

iii) C **kümesinin içi:** $3n \in C$ olsun. $3n \in \overset{\circ}{C}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $3n \in U \subseteq C$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $\mathbb{N} \backslash C \subseteq \mathbb{N} \backslash U$ dur. Diğer taraftan U açık olduğundan $\mathbb{N} \backslash U$ sonludur. Böylece $\mathbb{N} \backslash C$ sonludur. Bu ise $\mathbb{N} \backslash C$ kümesinin sonsuz olmasıile çelişir. O halde $3n \notin \overset{\circ}{C}$ dir. Böylece $\overset{\circ}{C} = \emptyset$ dur.

iv) C **kümesinin sınırı:** Örnek 5.20 gereğince

$$\overline{\mathbb{N} \backslash C} = \overline{\{3, 6, 9, \cdots\}} = \mathbb{N}$$

olduğundan

$$\partial C = \overline{C} \cap \overline{\mathbb{N} \backslash C} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

olur.

v) C **kümesinin dışı:** dış

$$(C) = \mathbb{N} \backslash \overline{C} = \mathbb{N} \backslash \mathbb{N} = \emptyset$$

dur.

vi) C **kümesinin izole noktaları:** $3m \in C$ olsun. $3m$ nin C nin bir izole noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda $3m \in U$ ve $U \cap (C \backslash \{3m\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece

$$C \backslash \{3m\} \subseteq \mathbb{N} \backslash U$$

dur. $\mathbb{N} \backslash U$ sonlu olduğundan $C \backslash \{3m\}$ sonludur. Bu ise $C \backslash \{3m\}$ nin sonsuz olmasıile çelişir. Böylece C nin izole noktası yoktur.✔

ÇÖZÜM 10

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \cdots, n\} | n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ uzayında A, B, C kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarınıaraştıralım.

a) i) A **kümesinin limit noktaları:** $U = \{1\}$ kümesi açıktır. Üstelik $1 \in U$ ve

$$U \cap (A \backslash \{1\}) = \{1\} \cap \{2, 3, \cdots, 10\} = \emptyset$$

dur. O halde $1 \in \mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası değildir. $2 \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $\{1, 2\} \subseteq U$ dur. Böylece $1 \in U \cap (A \backslash \{2\})$ olduğundan

$$U \cap (A \backslash \{2\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $2 \in \mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası dır. Daha genel olarak $n \in A$ ve $n \neq 1$ ve $n \in U$ özelliğindeki $U \in \mathcal{T}_1$ için $\{1, 2, 3, \cdots, n\} \subseteq U$ olduğundan

$$\{1, 2, 3, \cdots, n-1\} \subseteq U \cap (A \backslash \{n\})$$

olur. Bu durumda

$$U \cap (A \backslash \{n\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde n noktası A nın bir limit noktası dır. $n \geq 11$ ve $n \in U, U \in \mathcal{T}_1$ ise $\{1, 2, \cdots, n\} \subseteq U$ dur. Böylece

$$\{1, 2, 3, \cdots, n-1\} \subseteq U \cap (A \backslash \{n\})$$

olduğundan
$$U\cap(A\setminus\{n\})\neq\emptyset$$
dur. Bu durumda n noktası A nın bir limit noktası dır. O halde A nın limit noktalarının kümesi $\widetilde{A}=\{1,2,3,4,\cdots\}=\mathbb{N}$ dir.

ii) **A kümesinin kapanışı:** $\overline{A}=A\cup\widetilde{A}=\mathbb{N}$ dir.

iii) **A kümesinin içi:** $n\in A$ olsun. $n\in U=\{1,2,\cdots,n\}$ olsun. Bu durumda $U\in\mathcal{T}_1$ ve $U\subseteq A$ dır. O halde $n\in\overset{\circ}{A}$ dir. Böylece $\overset{\circ}{A}=A$ dır.

iv) **A kümesinin sınırı:** Bunun için önce $N\setminus A$ nın kapanışınıbulalım. $\mathbb{N}\setminus A=\{11,12,13,\cdots\}$ kümesi kapalıdır. O halde $\overline{\mathbb{N}\setminus A}=\mathbb{N}\setminus A$ dır. Böylece
$$\partial A=\overline{A}\cap\overline{\mathbb{N}\setminus A}=\mathbb{N}\cap(\mathbb{N}\setminus A)=\mathbb{N}\setminus A$$
dır.

v) **A kümesinin dışı:** dış$(A)=\mathbb{N}\setminus\overline{A}=\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}=\emptyset$ dur.

vi) **A kümesinin izole noktaları:** $U=\{1\}$ kümesi açık, $1\in U$ ve $U\cap A=\{1\}$ dir. O halde 1 noktası A nın bir izole noktası dır. $n\geq 2$ olmak üzere $n\in U$ ve $U\in\mathcal{T}_1$ ise $\{1,2\}\subseteq U$ dur. Böylece $U\cap A\neq\{n\}$ olduğundan $n\geq 2$ noktası A nın izole noktası değildir.

b) **i)** **B kümesinin limit noktaları:** $U=\{1\}$ olsun. U kümesi açık $1\in U$ ve $U\cap(B\setminus\{1\})=\emptyset$ dur. Böylece 1 noktası B nin limit noktası değildir.
$U=\{1,2\}$ olsun. U kümesi açık $2\in U$ ve $U\cap(B\setminus\{2\})=\emptyset$ dur. Böylece 2 noktası B nin limit noktası değildir.
U kümesi açık ve $3\in U$ ise $\{1,2,3\}\subseteq U$ olur. Bu durumda $2\in\{1,2,3\}\cap(B\setminus\{3\})\subseteq U\cap(B\setminus\{3\})$ olduğundan $U\cap(B\setminus\{3\})\neq\emptyset$ olur. Böylece 3 noktası B nin limit noktası dır.
U kümesi açık ve $4\in U$ olsun. Bu durumda $\{1,2,3,4\}\subseteq U$ dur. Böylece $2\in U\cap(B\setminus\{4\})\neq\emptyset$ dur. O halde 4 noktası B nin limit noktası dır. Daha genel olarak $n\geq 5$ ve $n\in U$ olsun. Bu durumda $\{1,2,3,4,\cdots,n\}\subseteq U$ dur. Böylece $2\in U\cap(B\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. O halde n noktası B nin limit noktası dır. Bu durumda B kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{B}=\{3,4,5,\cdots\}$ dir.

ii) **B kümesinin kapanışı:** $\overline{B}=B\cup\widetilde{B}=\{2,3,4,5,\cdots\}$ dir.

iii) **B kümesinin içi:** $2n\in B$ olsun. $2n\in\overset{\circ}{B}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $2n\in U\subseteq B$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}_1$ vardır. Diğer yandan $2n$ yi içeren en küçük açık küme $\{1,2,\cdots,2n\}$ dir. Böylece $\{1,2,\cdots,2n\}\subseteq B$ dir. Yani $1\in B$ dir. Bu ise $B=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$ olduğundan bir çelişkidir. Böylece $2n\notin\overset{\circ}{B}$ dir. Bu durumda $\overset{\circ}{B}=\emptyset$ olur.

iv) **B kümesinin sınırı:** Bunun için önce $\mathbb{N}\setminus B$ nin kapanışını bulalım. $\mathbb{N}\setminus B=\{1,3,5,7,\cdots\}$ dir. $U=\{1\}$ olsun. U kümesi açık $1\in U$ ve
$$U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{1\})=\{1\}\cap\{3,5,7,\cdots\}=\emptyset$$
dur. Böylece 1 noktası $\mathbb{N}\setminus B$ nin limit noktası değildir. U kümesi açık ve $2\in U$ olsun. Bu durumda $\{1,2\}\subseteq U$ dur. Yani $1\in U$ dur. Diğer yandan $1\in(\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{2\}$ dir. Böylece $1\in U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{2\})$ dir. O halde $U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{2\})\neq\emptyset$ dur. Böylece 2 noktası $\mathbb{N}\setminus B$ nin limit noktası dır. Daha genel olarak $n\geq 2$ olmak üzere U kümesi açık ve $n\in U$ olsun. Bu durumda $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq U$ dur. Yani $1\in U$ dur. Diğer yandan $1\in(\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{n\}$ ve böylece $1\in U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{n\})$ dir. O halde $U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. Böylece n noktası $\mathbb{N}\setminus B$ nin limit noktası dır. Bu durumda $N\setminus B$ nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{N}\setminus B}=\{2,3,4,\cdots\}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{N}\setminus B}=(\mathbb{N}\setminus B)\cup\widetilde{\mathbb{N}\setminus B}=\{1,2,3,4,\cdots\}=\mathbb{N}$ dir. Bu durumda
$$\partial B=\overline{B}\cap\overline{\mathbb{N}\setminus B}=\{2,3,4,5,\cdots\}\cap\{1,2,3,4,\cdots\}=\{2,3,4,\cdots\}$$
olur.

v) **B kümesinin dışı:** dış$(B)=\mathbb{N}\setminus\overline{B}=\mathbb{N}\setminus\{2,3,4,5,\cdots\}=\{1\}$ dur.

vi) **B kümesinin izole noktaları:** $U=\{1,2\}$ olsun. Bu durumda $2\in U$ ve U açıktır. Diğer yandan $U\cap B=\{2\}$ dir. Böylece 2 noktası B nin bir izole noktası dır. $4\in U$ ve U açık olsun. Bu durumda $\{1,2,3,4\}\subseteq U$ dur. Böylece $U\cap B=\{2,4\}$ dür. O halde 4 noktası B nin bir izole noktası değildir. Daha genel olarak $2n\geq 4$ olmak üzere $2n\in U$ ve U açık olsun. Bu durumda $\{1,2,3,4,\cdots,2n\}\subseteq U$ dur. Bu durumda $\{2,4\}\subseteq U\cap B$ olacağından $U\cap B\neq\{2n\}$ dir. O halde $2n$ noktası B nin bir izole noktası değildir.

c) **i)** **C kümesinin limit noktaları:** $U=\{1\}$ olsun. $1\in U$ ve U açıktır. Üstelik
$$U\cap(C\setminus\{1\})=\emptyset$$
olduğundan 1 noktası C nin limit noktası değildir. $U=\{1,2\}$ olsun. Bu durumda $2\in U$ ve U açıktır. Üstelik $U\cap(C\setminus\{2\})=\emptyset$ olduğundan 2 noktası C nin limit noktası değildir. $U=\{1,2,3\}$ olsun. Bu durumda $3\in U$ ve U açıktır. Üstelik
$$U\cap(C\setminus\{3\})=\emptyset$$

olduğundan 3 noktası C nin limit noktası değildir. $n \geq 4$ olsun. Bu durumda U kümesi açık ve $n \in U$ ise $\{1,2,3,\cdots,n\} \subseteq U$ dur. Bu durumda $3 \in U \cap (C \setminus \{n\})$ dir. Böylece

$$U \cap (C \setminus \{n\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde n noktası C nin limit noktası dır. Böylece

$$\widetilde{C} = \{4,5,6,\cdots\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 4\}$$

dür.

ii) C **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{C} = C \cup \widetilde{C} = \{3,4,5,6,\cdots\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 3\}$$

dür.

iii) C **kümesinin içi:** $3n \in C$ olsun. $3n \in \overset{\circ}{C}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $3n \in U \subseteq C$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır. Böylece

$$\{1,2,3,\cdots,3n\} \subseteq U \subseteq C$$

dir. Bu ise $1 \notin C$ olduğundan çelişkidir. Bu durumda $3n \notin \overset{\circ}{C}$ dir. O halde $\overset{\circ}{C} = \emptyset$ dur.

iv) C **kümesinin sınırı:** Bunun için önce $N \setminus C$ nin kapanışını bulalım.

$$\mathbb{N} \setminus C = \{1,2,4,5,7,8,10,11,\cdots\}$$

dir. $U = \{1\}$ kümesi açık ve $1 \in U$ dur. Üstelik

$$U \cap ((\mathbb{N} \setminus C) \setminus \{1\}) = \emptyset$$

dur. Böylece 1 noktası $\mathbb{N} \setminus C$ nin limit noktası değildir. $n \geq 2$ olsun. Bu durumda $n \in U$ ve U açık ise $\{1,2,\cdots,n\} \subseteq U$ dur. Yani $1 \in U$ dur. Diğer taraftan $1 \in (\mathbb{N} \setminus C) \setminus \{n\}$ dir. O halde

$$U \cap ((\mathbb{N} \setminus C) \setminus \{n\}) \neq \emptyset$$

dur. Böylece n noktası $\mathbb{N} \setminus C$ nin limit noktası dır. O halde

$$\widetilde{\mathbb{N} \setminus C} = \{2,3,4,\cdots\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{N} \setminus C} &= (\mathbb{N} \setminus C) \cup (\widetilde{\mathbb{N} \setminus C}) \\ &= \{1,2,4,5,7,8,10,11,\cdots\} \cup \{2,3,4,\cdots\} \\ &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\partial C = \overline{C} \cap \overline{\mathbb{N} \setminus C} = \{3,4,5,6,\cdots\} \cap \mathbb{N} = \{3,4,5,6,\cdots\}$$

dir.

v) C **kümesinin dışı:** dış

$$(C) = \mathbb{N} \setminus \overline{C} = \{1,2\}$$

dir.

vi) C **kümesinin izole noktaları:** $3m \in C$ olsun. $3m \in U$ ve U açıksa

$$U = \mathbb{N} \quad \text{veya} \quad \{1,2,\cdots,3m\} \subseteq U$$

dur. Yani $1 \in U$ dur. $1 \notin C$ olduğundan $U \not\subseteq C$ dir. O halde C nin izole noktası yoktur.✓

ÇÖZÜM 11

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} | n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ uzayında A, B, C kümelerinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarınıaraştıralım.

a) i) A **kümesinin limit noktaları:** $1 \in U$ ve U kümesi açıksa $U = \mathbb{N}$ olur. Böylece

$$U \cap (A \setminus \{1\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $1 \in \mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası dır. $2 \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $\{2,3,\cdots\} \subseteq U$ dur. Böylece $10 \in U \cap (A \setminus \{2\})$ olduğundan

$$U \cap (A \setminus \{2\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $2 \in \mathbb{N}$ noktası A nın limit noktası dır. Daha genel olarak $n \in A$ ve $n < 10$ ve $n \in U, U \in \mathcal{T}_2$ ise $\{n, n+1, \cdots, 10, 11, \cdots\} \subseteq U$ dur. Böylece $10 \in U \cap (A \setminus \{n\})$ olduğundan

$$U \cap (A \setminus \{n\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde n noktası A nın bir limit noktası dır. $n = 10$ olsun. Bu durumda $10 \in \{10,11,12,\cdots\}$ ve $\{10,11,12,\cdots\} \in \mathcal{T}_2$ dir.

$$U \cap (A \setminus \{10\}) = \emptyset$$

olduğundan n noktası A nın bir limit noktası değildir. Daha genel olarak $n \geq 10$ ise $n \in \{n, n+1, \cdots\}$ ve $\{n, n+1, \cdots\} \in \mathcal{T}_2$ dir.

$$U \cap (A \setminus \{10\}) = \emptyset$$

olduğundan n noktası A nın bir limit noktası değildir. Böylece A nın limit noktalarının kümesi $\widetilde{A} = \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ dur.

ii) A **kümesinin kapanışı:** $\overline{A} = A\cup\widetilde{A} = \{1,2,3,4,6,7,8,9,10\} = A$ dır.

iii) A **kümesinin içi.** $1\in U$ ve $U\in\mathcal{T}_2$ ise $U=\mathbb{N}$ olur. Böylece $U\not\subseteq A$ olduğundan $1\notin\overset{\circ}{A}$ dir. Daha genel olarak $n\in A$ ve $n\in U$ ve $U\in\mathcal{T}_2$ ise $U=\mathbb{N}$ veya $U=\{n,n+1,\cdots\}$ olacağından $U\not\subseteq A$ olur. Bu durumda $n\notin\overset{\circ}{A}$ olur. O halde $\overset{\circ}{A}=\emptyset$ dur.

iv) A **kümesinin sınırı:** Bunun için $\mathbb{N}\setminus A$ nın kapanışını bulalım.

$$\mathbb{N}\setminus A=\{11,12,13,\cdots\}$$

dır. $1\in U$ ve U açıksa $U=\mathbb{N}$ dir. Böylece $U\cap((\mathbb{N}\setminus A)\setminus\{1\})\neq\emptyset$ dur. O halde 1 noktası A nın bir limit noktası dır. Daha genel olarak her $n\in\mathbb{N}$ için $n\in U$ ve U açıksa $U=\mathbb{N}$ veya $\{n,n+1,\cdots\}\subseteq U$ dur. Bu durumda $U\cap((\mathbb{N}\setminus A)\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. O halde n noktası A nın bir limit noktası dır. Böylece $\mathbb{N}\setminus A$ kümesinin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{N}\setminus A}=\mathbb{N}$ olur. Buradan $\overline{\mathbb{N}\setminus A}=\mathbb{N}$ elde edilir. O halde

$$\partial A=\overline{A}\cap\overline{\mathbb{N}\setminus A}=A\cap\mathbb{N}=A$$

dır.

v) A **kümesinin dışı:** dış$(A)=\mathbb{N}\setminus\overline{A}=\{11,12,13,\cdots\}$ dır.

vi) A **kümesinin izole noktaları:** $n=1,2,\cdots,9$ olmak üzere $n\in A$ olsun. $n\in U$ ve U açıksa $\{n,n+1,\cdots\}\subseteq U$ dur. Yani $10\in U$ dur. Bu durumda $10\in U\cap A$ olduğundan $U\cap A\neq\{n\}$ dir. O halde n noktası A nın bir izole noktası değildir. $n=10$ olsun. Bu durumda $U=\{10,11,12,\cdots\}$ kümesi açık ve $10\in U$ dur. $U\cap A=\{10\}$ olduğundan 10 noktası A nın bir izole noktası dır.

b) i) B **kümesinin limit noktaları:** $n\in\mathbb{N}$ ve U kümesi açık ise $U=\mathbb{N}$ veya $U=\{n,n+1,\cdots\}$ dır. Bu durumda $2n\in U\cap(B\setminus\{n\})$ olduğundan $U\cap(A\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. O halde n noktası B nin bir limit noktası dır. O halde B nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{B}=\mathbb{N}$ dir.

ii) B **kümesinin kapanışı:** $\overline{B}=B\cup\widetilde{B}=\mathbb{N}$ dir.

iii) B **kümesinin içi:** $2n\in B$ olsun. $2n\in\overset{\circ}{B}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $2n\in U\subseteq B$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}_2$ vardır. Diğer yandan $2n$ yi içeren en küçük açık küme $\{2n,2n+1,2n+2,\cdots\}$ olduğundan $\{2n,2n+1,2n+2,\cdots\}\subseteq B$ dir. Yani $2n+1\in B$ dir. Bu ise $B=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$ olduğundan bir çelişkidir. O halde $2n\notin\overset{\circ}{B}$ dir. Bu durumda $\overset{\circ}{B}=\emptyset$ dur.

iv) B **kümesinin sınırı:** Bunu bulmak için önce $\mathbb{N}\setminus B$ nin kapanışını bulalım. $\mathbb{N}\setminus B=\{1,3,5,7,\cdots\}$ dir. $n\in U$ ve U kümesi açık ise $U=\mathbb{N}$ veya $U=\{n,n+1,\cdots\}$ dir. Bu durumda $2n+1\in U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{n\})$ olduğundan $U\cap((\mathbb{N}\setminus B)\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. O halde n noktası $\mathbb{N}\setminus B$ nin bir limit noktası dır. Böylece $\mathbb{N}\setminus B$ nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{N}\setminus B}=\mathbb{N}$ dir. O halde $\overline{\mathbb{N}\setminus B}=\mathbb{N}$. dir. Bu durumda $\partial B=\overline{B}\cap\overline{\mathbb{N}\setminus B}=\mathbb{N}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ olur.

v) B **kümesinin dışı:** dış$(B)=\mathbb{N}\setminus\overline{B}=\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}=\emptyset$ dur.

vi) B **kümesinin izole noktaları:** $2n\in B$ olsun. $2n\in U$ ve U kümesi açık ise $U=\mathbb{N}$ veya $\{2n,2n+1,\cdots\}\subseteq U$ dur. Bu durumda $2n+1\in U$ olduğundan $U\not\subseteq B$ dir. O halde $2n$ noktası B nin bir izole noktası değildir. Yani B nin izole noktası yoktur.

c) i) C **kümesinin limit noktaları:** $n\in\mathbb{N}$ ve U kümesi açık ise $U=\mathbb{N}$ veya $U=\{n,n+1,\cdots\}$ dır. Bu durumda $3n\in U\cap(C\setminus\{n\})$ olduğundan $U\cap(C\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. O halde n noktası C nin bir limit noktası dır. Böylece C nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{C}=\mathbb{N}$ dir.

ii) C **kümesinin kapanışı:** $\overline{C}=C\cup\widetilde{C}=\mathbb{N}$ dir.

iii) C **kümesinin içi:** $3n\in C$ olsun. $3n\in\overset{\circ}{C}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $3n\in U\subseteq C$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}_2$ vardır. Böylece $\{3n,3n+1,,\cdots\}\subseteq U\subseteq C$ dir. Bu ise $3n+1\notin C$ olduğundan çelişkidir. O halde $3n\notin\overset{\circ}{C}$ dir. Böylece $\overset{\circ}{C}=\emptyset$ dur.

iv) C **kümesinin sınırı:** Bunu bulmak için $\mathbb{N}\setminus C$ nin kapanışını bulalım. $\mathbb{N}\setminus C=\{1,2,4,5,7,8,10,\cdots\}$ dir. $n\in U$ ve U kümesi açık ise $U=\mathbb{N}$ veya $\{n,n+1,\cdots\}\subseteq U$ dur. Bu durumda $3n+1\in U\cap((\mathbb{N}\setminus C)\setminus\{n\})$ olduğundan $U\cap((\mathbb{N}\setminus C)\setminus\{n\})\neq\emptyset$ dur. O halde n noktası $\mathbb{N}\setminus C$ nin bir limit noktası dır. Böylece $\mathbb{N}\setminus C$ nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{N}\setminus C}=\mathbb{N}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{N}\setminus C}=\mathbb{N}$ olur.

v) C **kümesinin sınırı:**

$$\partial C=\overline{C}\cap\overline{\mathbb{N}\setminus C}=\mathbb{N}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$$

dir.

vi) C **kümesinin dışı:** dış$(C)=\mathbb{N}\setminus\overline{C}=\emptyset$ dur.

vii) C **kümesinin izole noktaları:** $3n\in C$ olsun. $3n\in U$ ve U kümesi açık ise $U=\mathbb{N}$ veya $\{3n,3n+1,3n+3,\cdots\}\subseteq U$

dur. Bu durumda $3(n+1) \in U \cap C$ olduğundan $U \cap C \neq \{3n\}$ dir. O halde $3n$ noktası C nin bir izole noktası değildir. Yani C nin izole noktası yoktur.✓

ÇÖZÜM 12

Örnek 4.66 gereğince $\mathscr{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayında $x \in \mathbb{R}$ noktasının yerel tabanı dır.

a) i) **(a,b) aralığının limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x < a$ ise $0 < \varepsilon < |x-a|/2$ olmak üzere

$$((a,b)\setminus\{x\}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset$$

olduğundan x noktası (a,b) nın bir limit noktası değildir. Benzer şekilde $x > b$ ise x noktasının A nın bir limit noktası olmadığıgösterilir.
$a \leq x \leq b$ ise her $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ için $y \neq x$ olacak şekilde bir

$$y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (a,b)$$

vardır. Böylece her $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ için

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap ((a,b)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası (a,b) nın bir limit noktası dır.
Bu durumda $\widehat{(a,b)} = [a,b]$ dir.

ii) **(a,b) aralığının kapanışı:** $\overline{(a,b)} = (a,b) \cup \widehat{(a,b)} = [a,b]$ dir.

iii) **(a,b) aralığının içi:** (a,b) aralığıaçık bir küme olduğundan Teorem 5.48 gereğince içi kendisine eşittir. Yani $\overset{\circ}{(a,b)} = (a,b)$ dir.

iv) **(a,b) aralığının sınırı:** (a,b) açık bir küme olduğundan $\mathbb{R}\setminus(a,b)$ kapalıdır. Böylece Teorem 5.29 gereğince $\overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \mathbb{R}\setminus(a,b)$ dir. O halde

$$\partial(a,b) = \overline{(a,b)} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = [a,b] \cap (\mathbb{R}\setminus(a,b)) = \{a,b\}$$

dir.

v) **(a,b) aralığının dışı:** dış$((a,b)) = \mathbb{R}\setminus\overline{(a,b)} = \mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ dur.

vi) **(a,b) aralığının izole noktaları:** $x \in (a,b)$ ve $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $c = \max\{a, x-\varepsilon\}$ ve $d = \min\{b, x+\varepsilon\}$ olmak üzere

$$(a,b) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (c,d) \neq \{x\}$$

olduğundan x noktası (a,b) nin bir izole noktası değildir. O halde (a,b) aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

b) i) **$[a,b]$ aralığının limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x < a$ ise $0 < \varepsilon < |x-a|/2$ olmak üzere

$$([a,b]\setminus\{x\}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset$$

olduğundan x noktası $[a,b]$ nın bir limit noktası değildir. Benzer şekilde $x > b$ ise x noktasının A nın bir limit noktası olmadığıgösterilir.
$a \leq x \leq b$ ise her $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ için $y \neq x$ olacak şekilde bir

$$y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [a,b]$$

vardır. Böylece her $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ için

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap ([a,b]\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası $[a,b]$ nın bir limit noktası dır.
Bu durumda $\widehat{[a,b]} = [a,b]$ dir.

ii) **$[a,b]$ aralığının kapanışı:** $[a,b]$ aralığıkapalı olduğundan kapanışı kendisine eşittir. Yani $\overline{[a,b]} = [a,b]$ dir.

iii) **$[a,b]$ aralığının içi:** $x \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\}$ olmak üzere $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [a,b]$ dir. Böylece x noktası $[a,b]$ aralığının bir iç noktası dır.
$x = a$ ve $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x-\varepsilon \neq a$ dır. O halde $x-\varepsilon < r < a$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $r \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ve $r \notin [a,b]$ dir. O halde $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq [a,b]$ dir. Böylece a noktası $[a,b]$ nin bir iç noktası değildir. Benzer şekilde b noktası nın $[a,b]$ nin bir iç noktası olmadığıgösterilir. Böylece $\overset{\circ}{[a,b]} = (a,b)$ dir.

iv) **$[a,b]$ aralığının sınırı:** $\overline{\mathbb{R}\setminus[a,b]} = \overline{(-\infty,a) \cup (b,\infty)} = (-\infty,a] \cup [b,\infty) = \mathbb{R}\setminus(a,b)$ dir. O halde $\partial[a,b] = \overline{[a,b]} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus[a,b]} = [a,b] \cap (\mathbb{R}\setminus(a,b)) = \{a,b\}$ dir.

v) **$[a,b]$ aralığının dışı :** dış$([a,b]) = \mathbb{R}\setminus\overline{[a,b]} = \mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ dur.

vi) **$[a,b]$ aralığının izole noktaları:** $x \in [a,b]$ ve $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $c = \max\{a, x-\varepsilon\}$ ve $d = \min\{b, x+\varepsilon\}$ olmak üzere

$$(c,d) \subseteq [a,b] \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (c,d)$$

olduğundan $[a,b] \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \{x\}$ dir. Bu durumda x noktası $[a,b]$ nin bir izole noktası değildir. O halde $[a,b]$ aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

c) (a) ve (b) ye benzer şekilde yapılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur.

i) $[a,b)$ **aralığının limit noktaları:** $\widetilde{[a,b)} = [a,b]$ dir.

ii) $[a,b)$ **aralığının kapanışı:** $\overline{[a,b)} = [a,b]$ dir.

iii) $[a,b)$ **aralığının içi:** $\mathring{[a,b)} = (a,b)$ dir.

iv) $[a,b)$ **aralığının sınırı:** $\partial[a,b) = \{a,b\}$ dir.

v) $[a,b)$ **aralığının dışı :** $\text{dış}([a,b)) = \mathbb{R}\backslash\overline{[a,b)} = \mathbb{R}\backslash[a,b] = (-\infty,a)\bigcup(b,\infty)$ dur.

vi) $[a,b)$ **aralığının izole noktaları:** $[a,b)$ aralığının izole noktası yoktur.

d) (a) ve (b) ye benzer şekilde yapılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur.

i) $(a,b]$ **aralığının limit noktaları:** $\widetilde{(a,b]} = [a,b]$ dir.

ii) $(a,b]$ **aralığının kapanışı:** $\overline{(a,b]} = [a,b]$ dir.

iii) $(a,b]$ **aralığının içi:** $\mathring{(a,b]} = (a,b)$ dir.

iv) $(a,b]$ **aralığının sınırı:** $\partial(a,b] = \{a,b\}$ dir.

v) $(a,b]$ **aralığının dışı :** $\text{dış}((a,b]) = \mathbb{R}\backslash\overline{(a,b]} = \mathbb{R}\backslash[a,b] = (-\infty,a)\bigcup(b,\infty)$ dur.

vi) $(a,b]$ **aralığının izole noktaları:** $(a,b]$ aralığının izole noktası yoktur.

e) i) $[a,\infty)$ **aralığının limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x<a$ ise $0<\varepsilon<|x-a|/2$ olmak üzere

$$([a,\infty)\backslash\{x\})\bigcap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan x noktası $[a,\infty)$ nın bir limit noktası değildir.

$a\le x$ ise her $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ için $x<x+\varepsilon$ olduğundan $x<r<x+\varepsilon$ olacak şekilde bir $r\in\mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $a<r$ olduğundan

$$r\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\bigcap[a,\infty)$$

dur. Böylece her $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ için

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\bigcap([a,\infty)\backslash\{x\})\neq\emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası $[a,\infty)$ nın bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{[a,\infty)} = [a,\infty)$ dur.

ii) $[a,\infty)$ **aralığının kapanışı:** $[a,\infty)$ aralığıkapalı olduğundan Teorem 5.29 gereğince kapanışı kendisine eşittir. Yani $\overline{[a,\infty)} = [a,\infty)$ dir.

iii) $[a,\infty)$ **aralığının içi:** $x\in(a,\infty)$ olsun. Bu durumda $\varepsilon=\dfrac{|x-a|}{2}$ olmak üzere $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq[a,\infty)$ dur. Böylece x noktası $[a,\infty)$ aralığının bir iç noktası dır. $x=a$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x-\varepsilon\neq a$ dır. O halde $x-\varepsilon<r<a$ olacak şekilde bir $r\in\mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $r\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ ve $r\notin[a,\infty)$ dir. O halde $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\nsubseteq[a,\infty)$ dır. Böylece a noktası $[a,\infty)$ nin bir iç noktası değildir. Böylece $\mathring{[a,\infty)} = (a,\infty)$ dur.

iv) $[a,\infty)$ **aralığının sınırı:** $\overline{\mathbb{R}\backslash[a,\infty)} = \overline{(-\infty,a)} = (-\infty,a]$ olduğu gösterilebilir. O halde

$$\partial[a,\infty) = \overline{[a,\infty)}\bigcap\overline{\mathbb{R}\backslash[a,\infty)} = [a,\infty)\bigcap(-\infty,a] = \{a\}$$

dır.

v) $[a,\infty)$ **aralığının dışı:** $\text{dış}([a,\infty)) = \mathbb{R}\backslash\overline{[a,\infty)} = \mathbb{R}\backslash[a,\infty) = (-\infty,a)$ dır.

vi) $[a,\infty)$ **aralığının izole noktaları:** $x\in[a,\infty)$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $c=\max\{a,x-\varepsilon\}$ olmak üzere

$$(c,x+\varepsilon)\subseteq[a,\infty)\bigcap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$$

olduğundan $[a,\infty)\bigcap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\neq\{x\}$ olur. Bu durumda x noktası $[a,\infty)$ nin bir izole noktası değildir. O halde $[a,\infty)$ aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

f) (e) ye benzer şekilde yapılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur.

i) (a,∞) **aralığının limit noktaları:** $\widetilde{(a,\infty)} = [a,\infty)$ dur.

ii) (a,∞) **aralığının kapanışı:** $\overline{(a,\infty)} = [a,\infty)$ dur.

iii) (a,∞) **aralığının içi:** $\mathring{(a,\infty)} = (a,\infty)$ dur.

iv) (a,∞) **aralığının sınırı:** $\partial(a,\infty) = \{a\}$ dır.

v) (a,∞) **aralığının dışı:** $\text{dış}((a,\infty)) = \mathbb{R}\backslash\overline{(a,\infty)} = \mathbb{R}\backslash[a,\infty) = (-\infty,a)$ dır.

vi) (a,∞) **aralığının izole noktaları:** (a,∞) aralığının izole noktası yoktur.

g) (e) ye benzer şekilde yapılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur.

i) $(-\infty,a]$ **aralığının limit noktaları:** $\widetilde{(-\infty,a]} = (-\infty,a]$ dır.

ii) $(-\infty,a]$ **aralığının kapanışı:** $\overline{(-\infty,a]} = (-\infty,a]$ dır.

iii) $(-\infty,a]$ **aralığının içi:** $\mathring{(-\infty,a]} = (-\infty,a)$ dır.

iv) $(-\infty,a]$ **aralığının sınırı:** $\partial(-\infty,a] = \{a\}$ dır.

v) $(-\infty,a]$ **aralığının dışı:** $\text{dış}((-\infty,a]) = \mathbb{R}\backslash\overline{(-\infty,a]} = \mathbb{R}\backslash(-\infty,a] = (a,\infty)$ dur.

vi) $(-\infty,a]$ **aralığının izole noktaları:** $(-\infty,a)$ aralığının izole noktası yoktur.

h) (e) ye benzer şekilde yapılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur.

i) $(-\infty,a)$ **aralığının limit noktaları:** $\widetilde{(-\infty,a)} = (-\infty,a]$ dır.

ii) $(-\infty,a)$ **aralığının kapanışı:** $\overline{(-\infty,a)} = (-\infty,a]$ dır.

iii) $(-\infty,a)$ **aralığının içi:** $\overset{\circ}{(-\infty,a)} = (-\infty,a)$ dır.

iv) $(-\infty,a)$ **aralığının sınırı:** $\partial(-\infty,a) = \{a\}$ dır.

v) $(-\infty,a)$ **aralığının dışı:** $\text{dış}((-\infty,a)) = \mathbb{R}\setminus\overline{(-\infty,a)} = \mathbb{R}\setminus(-\infty,a] = (a,\infty)$ dur.

vi) $(-\infty,a)$ **aralığının izole noktaları:** $(-\infty,a)$ aralığının izole noktası yoktur.

i) $S = \left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

i) S **kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ olsun.

$x<0$ ise $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ olmak üzere

$$(S\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan x noktası S nın bir limit noktası değildir. Benzer şekilde $x>1$ ise x noktasının S nın bir limit noktası olmadığıgösterilir.

$x=1$ ise $\varepsilon=\frac{1}{3}$ olmak üzere

$$(S\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan x noktası S nın bir limit noktası değildir. $m\neq 1$ olmak üzere $x=\frac{1}{m}\in S$ ise $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1}{2m(m+1)}$ olmak üzere

$$(S\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan x noktası S nın bir limit noktası değildir. $0<x<1$ ve $x\notin S$ ise $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\left\{\left|x-\frac{1}{m}\right|\,\middle|\, m\in\mathbb{N}\right\}$ olmak üzere

$$(S\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan x noktası S nın bir limit noktası değildir. $x=0$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{m}<\varepsilon$ olacak şekilde bir $m\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\frac{1}{m}\in(S\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$$

yani

$$(S\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\neq\emptyset$$

dur. O halde $x=0$ noktası S nın bir limit noktası dır. Bu durumda S nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{S}=\{0\}$ dır.

ii) S **kümesinin kapanışı:** $\overline{S}=S\cup\widetilde{S}=S\cup\{0\}$ dır.

iii) S **kümesinin içi:** $x\in S$ olsun. Bu durumda her $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ için $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ kümesi sayılamaz ve S kümesi sayılabilir olduğundan $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\not\subseteq S$ dir. O halde Teorem 5.39 gereğince x noktası S nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{S}=\emptyset$ dir.

iv) S **kümesinin sınırı:**

$$\mathbb{R}\setminus S=(-\infty,0]\cup(1,\infty)\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)\right)$$

dir. $x\in\mathbb{R}$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y\neq x$, $y\neq\frac{1}{m}$ $(m\in\mathbb{N})$ özelliğinde bir $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(\mathbb{R}\setminus S)$ vardır. Böylece

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(\mathbb{R}\setminus S)\neq\emptyset$$

dur. Böylece Sonuç 5.27 gereğince $x\in\overline{\mathbb{R}\setminus S}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{R}\setminus S}=\mathbb{R}$ olur. O halde

$$\partial S=\overline{S}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus S}=(S\cup\{0\})\cap\mathbb{R}=S\cup\{0\}$$

dir.

v) S **kümesinin dışı:** $\text{dış}(S)=\mathbb{R}\setminus\overline{S}=\mathbb{R}\setminus(S\cup\{0\})=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\neq 0, x\neq\frac{1}{m}, m\in\mathbb{N}\right\}$ dır.

vi) S **kümesinin izole noktaları :** $\frac{1}{m}\in S$ ve $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$ olsun. Bu durumda $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ ve $S\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\{x\}$ olduğundan x noktası S nin bir izole noktası dır. Böylece S nin her bir noktası S nin bir izole noktası dır. Yani S nin izole noktalarının kümesi S dir.

j) i) $\mathbb{Z}$ **kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x\notin\mathbb{Z}$ ise x e en yakın tam sayı n olmak üzere $\varepsilon=\frac{|x-n|}{3}$ ve $x\in\mathbb{Z}$ ise $\varepsilon=\frac{1}{3}$ olsun. Bu durumda $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ ve

$$(\mathbb{Z}\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan Teorem 5.5 gereğince x noktası $\mathbb{Z}$ nın bir limit noktası değildir. Böylece $\mathbb{Z}$ nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{Z}}=\emptyset$ dur.

ii) $\mathbb{Z}$ **kümesinin kapanışı:** $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\widetilde{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\emptyset=\mathbb{Z}$ dir.

iii) $\mathbb{Z}$ **kümesinin içi:** $n\in\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda her $(n-\varepsilon,n+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ için $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ kümesi sayılamaz ve $\mathbb{Z}$ kümesi sayılabilir olduğundan $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\not\subseteq\mathbb{Z}$ dir. O halde Teorem 5.39 gereğince n noktası $\mathbb{Z}$ nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}=\emptyset$ dur.

iv) $\mathbb{Z}$ **kümesinin sınırı:**

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \cdots\cup(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)$$

$$\cup(1,2)\cup(2,3)\cup\cdots$$

dır. $x\in\mathbb{R}$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y\neq x, y\neq m$ $(m\in\mathbb{Z})$ özelliğinde bir $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ vardır. Böylece $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus\{x\})$ dir. O halde

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus\{x\})\neq\emptyset$$

ve dolayısıyla $x\in\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$ dir. O halde $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ ve böylece

$$\partial\mathbb{Z}=\overline{\mathbb{Z}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}=\mathbb{Z}$$

olur.

v) $\mathbb{Z}$ **kümesinin dışı:** $\text{dış}(\mathbb{Z})=\mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ dir.

vi) $\mathbb{Z}$ **kümesinin izole noktaları:** $m\in\mathbb{Z}$ ve $\varepsilon=\frac{1}{3}$ olsun. Bu durumda $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ ve $\mathbb{Z}\cap(m-\varepsilon,m+\varepsilon)=\{m\}$ olduğundan m noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası dır. Böylece $\mathbb{Z}$ nin her bir noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası dır. Yani $\mathbb{Z}$ nin izole noktalarının kümesi $\mathbb{Z}$ dir.

k) i) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x-\varepsilon\neq x$ olduğundan $x-\varepsilon<y<x$ olacak şekilde bir $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $y\in((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ dir. Böylece

$$((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\neq\emptyset$$

dır. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nın bir limit noktası dır. Böylece $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nun limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ dir.

ii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **kümesinin kapanışı:** $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$ dir.

iii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **kümesinin içi:** $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda her $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ için $r\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ olacak şekilde bir $r\in\mathbb{Q}$ elemanıvardır. Böylece $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\nsubseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dur. O halde Teorem 5.39 gereğince x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nun bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\emptyset$ dur.

iv) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **kümesinin sınırı:** Örnek 5.73 gereğince $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ dir. O halde

$$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

dir.

v) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **kümesinin dışı:** $\text{dış}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$ dur.

vi) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **kümesinin izole noktaları:** $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ olacak şekilde bir $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vardır. Böylece $y\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ olduğundan $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\neq\{x\}$ dir. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin bir izole noktası değildir. Böylece $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin hiç bir izole noktası yoktur.

l) $K=\{2n|n\in\mathbb{Z}\}$ olsun.

i) K **kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x\in\mathbb{Z}$ ise $\varepsilon=\frac{1}{4}$ ve $x\notin\mathbb{Z}$ ise x e enyakın tam sayı n olmak üzere $\varepsilon=\frac{|x-n|}{4}$ olsun. Bu durumda $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ ve

$$(K\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan Teorem 5.5 gereğince x noktası K nın bir limit noktası değildir. Böylece K nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{K}=\emptyset$ dur.

ii) K **kümesinin kapanışı:** $\overline{K}=K\cup\widetilde{K}=K\cup\emptyset=K$ dır.

iii) K **kümesinin içi:** $2n\in K$ olsun. Bu durumda her $(2n-\varepsilon,2n+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ için $(2n-\varepsilon,2n+\varepsilon)$ kümesi sayılamaz ve K kümesi sayılabilir olduğundan $(2n-\varepsilon,2n+\varepsilon)\nsubseteq K$ dır. O halde Teorem 5.39 gereğince $2n$ noktası K nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{K}=\emptyset$ dur.

iv) K **kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus K=\{2n-1|n\in\mathbb{Z}\}$ dır. $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x\in\mathbb{Z}$ ise $\varepsilon=\frac{1}{4}$ ve $x\notin\mathbb{Z}$ ise x e enyakın tam sayı n olmak üzere $\varepsilon=\frac{|x-n|}{4}$ olsun. Bu durumda $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\mathscr{B}_x$ ve

$$((\mathbb{R}\setminus K)\setminus\{x\})\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$$

olduğundan x noktası $\mathbb{R}\setminus K$ nın bir limit noktası değildir. Böylece $\mathbb{R}\setminus K$ nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{R}\setminus K}=\emptyset$ ve dolayısıyla $\overline{\mathbb{R}\setminus K}=\mathbb{R}\setminus K$ dır. O halde

$$\partial(\mathbb{R}\setminus K)=\overline{\mathbb{R}\setminus K}\cap\overline{K}=(\mathbb{R}\setminus K)\cap K=\emptyset$$

dur.

v) K **kümesinin dışı:** $\text{dış}(K)=\mathbb{R}\setminus\overline{K}=\mathbb{R}\setminus K$ dır.

vi) K **kümesinin izole noktaları :** $2m\in K$ olsun. Bu durumda $(2m-1,2m+1)\in\mathscr{B}_{2m}$ ve $K\cap(2m-1,2m+1)=\{2m\}$ olduğundan $2m$ noktası K nın bir izole noktası dır. Böylece K nın her bir noktası K nın bir izole noktası dır. Yani K nın izole noktalarının kümesi K dır.✓

ÇÖZÜM 13

$\mathcal{T}_1=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(x,\infty)\mid x\in\mathbb{R}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında verilen kümelerin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarınıbulalım.

a) Bu uzayda bir $x\in\mathbb{R}$ noktasınıyerel tabanı $\mathscr{B}_x=\{(y,\infty)|y\leq x, y\in\mathbb{R}\}$ dir.

i) (a,b) aralığının limit noktaları: $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x > b$ olsun. $b < y < x$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $x \in (y,\infty)$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ dir. Diğer yandan

$$((a,b)\setminus\{x\}) \cap (y,\infty) = \emptyset$$

dur. Böylece Teorem 5.5 gereğince x noktası (a,b) nın bir limit noktası değildir. $x \le b$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y < x \le b$ dir. Böylece $c = \max\{y,a\}$ olmak üzere $(y,\infty) \cap (a,b) = (c,b)$ dir. O halde

$$(y,\infty) \cap ((a,b)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası (a,b) nın bir limit noktası dır. Böylece $\widetilde{(a,b)} = (-\infty,b]$ dir.

ii) (a,b) aralığının kapanışı: $\overline{(a,b)} = (a,b) \cup \widetilde{(a,b)} = (-\infty,b]$ dir.

iii) (a,b) aralığının içi: $x \in (a,b)$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda (a,b) aralığısınırlıve (y,∞) aralığısınırsız olduğundan $(y,\infty) \not\subseteq (a,b)$ dir. Böylece Teorem 5.39 gereğince $x \notin \overset{\circ}{(a,b)}$ dir. Yani $\overset{\circ}{(a,b)} = \emptyset$ dur.

iv) (a,b) aralığının sınırı: $\mathbb{R}\setminus(a,b) = (-\infty,a] \cup [b,\infty)$ dur. $x \in \mathbb{R}$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x \ge b$ ise $(y,\infty) \cap (\mathbb{R}\setminus(a,b) = (y,\infty)$ veya $(y,\infty) \cap (\mathbb{R}\setminus(a,b) \supseteq [b,\infty)$ dur. Böylece

$$(y,\infty) \cap ((\mathbb{R}\setminus(a,b))\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus(a,b)$ nin bir limit noktası dır.$x < b$ ise

$$(y,\infty) \cap (\mathbb{R}\setminus(a,b) \supseteq [b,\infty)$$

dur. Böylece

$$(y,\infty) \cap ((\mathbb{R}\setminus(a,b))\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $\widetilde{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \mathbb{R}$ dir. Yani $\overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \mathbb{R}$ dir. O halde

$$\partial(a,b) = \overline{(a,b)} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = (-\infty,b] \cap \mathbb{R} = (-\infty,b]$$

dir.

v) (a,b) aralığının dışı: $\text{dış}((a,b)) = \mathbb{R}\setminus\overline{(a,b)} = \mathbb{R}\setminus(-\infty,b] = (b,\infty)$ dur.

vi) (a,b) aralığının izole noktaları: $x \in (a,b)$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $c = \max\{a,y\}$ olmak üzere $(a,b) \cap (y,\infty) = (c,b) \neq \{x\}$ olduğundan x noktası (a,b) nin bir izole noktası değildir. O halde (a,b) aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

b) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $[a,b]$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) $[a,b]$ aralığının limit noktaları: $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x > b$ olsun Bu durumda $b < y < x$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $x \in (y,\infty)$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ dir. Diğer yandan

$$([a,b]\setminus\{x\}) \cap (y,\infty) = \emptyset$$

dur. Böylece x noktası $[a,b]$ nın bir limit noktası değildir. $x \le b$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y < x \le b$ dir. Böylece $\max\{y,a\} < r < x \le b$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $r \in (y,\infty)$ ve $r \in [a,b]\setminus\{x\}$ dir. Böylece

$$y \in (y,\infty) \cap ([a,b]\setminus\{x\})$$

ve dolayısıyla

$$(y,\infty) \cap ([a,b]\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası $[a,b]$ nın bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{[a,b]} = (-\infty,b]$ dir.

ii) $[a,b]$ aralığının kapanışı: $\overline{[a,b]} = [a,b] \cup \widetilde{[a,b]} = (-\infty,b]$ dir.

iii) $[a,b]$ aralığının içi: $x \in [a,b]$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığısınırlıve (y,∞) aralığısınırsız olduğundan $(y,\infty) \not\subseteq [a,b]$ dir. Böylece $x \notin [a,b]$ dir. Yani $\overset{\circ}{[a,b]} = \emptyset$ dur.

iv) $[a,b]$ aralığının sınırı: $\mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ dur. $x \in \mathbb{R}$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x \ge b$ ise

$$(b,\infty) \subseteq (\mathbb{R}\setminus[a,b]) \cap (y,\infty)$$

veya

$$(y,\infty) = (\mathbb{R}\setminus[a,b]) \cap (y,\infty)$$

dur. O halde $x \in \widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,b]}$ dur. $x < b$ ise $(b,\infty) \subseteq (\mathbb{R}\setminus[a,b]) \cap (y,\infty)$ dur. Bu durumda $x \in \widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,b]}$ dur. O halde $\widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,b]} = \mathbb{R}$ dir. Yani $\overline{\mathbb{R}\setminus[a,b]} = \mathbb{R}$ dir. O halde

$$\partial[a,b] = \overline{[a,b]} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus[a,b]} = (-\infty,b] \cap \mathbb{R} = (-\infty,b]$$

dir.

v) $[a,b]$ aralığının dışı: $\text{dış}([a,b]) = \mathbb{R}\setminus\overline{[a,b]} = \mathbb{R}\setminus(-\infty,b] = (b,\infty)$ dur.

vi) $[a,b]$ aralığının izole noktaları: $x \in [a,b]$ ve $(y,\infty) \in$

$\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda

$$[a,b]\cap(y,\infty)=(y,b] \text{ veya } [a,b]\cap(y,\infty)=[a,b]$$

olacağından $[a,b]\cap(y,\infty)\neq\{x\}$ olur. Böylece x noktası $[a,b]$ nin bir izole noktası değildir. O halde $[a,b]$ aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

c) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $[a,b)$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **$[a,b)$ aralığının limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x>b$ olsun Bu durumda $b<y<x$ olacak şekilde bir $y\in\mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $x\in(y,\infty)$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ dir. Diğer yandan

$$([a,b)\setminus\{x\})\cap(y,\infty)=\emptyset$$

dur. Böylece x noktası $[a,b)$ nın bir limit noktası değildir. $x\le b$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y<x\le b$ dir. Böylece $\max\{y,a\}<r<x\le b$ olacak şekilde bir $r\in\mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $r\in(y,\infty)$ ve $r\in[a,b)\setminus\{x\}$ dir. Böylece

$$y\in(y,\infty)\cap([a,b)\setminus\{x\})$$

ve dolayısıyla

$$(y,\infty)\cap([a,b)\setminus\{x\})\neq\emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası $[a,b)$ nın bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{[a,b)}=(-\infty,b]$ dir.

ii) **$[a,b)$ aralığının kapanışı:** $\overline{[a,b)}=[a,b)\cup\widetilde{[a,b)}=(-\infty,b]$ dir.

iii) **$[a,b)$ aralığının içi:** $x\in[a,b)$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $[a,b)$ aralığısınırlıve (y,∞) aralığısınırsız olduğundan $(y,\infty)\nsubseteq[a,b)$ dir. Böylece $x\notin\mathring{[a,b)}$ dir. Yani $\mathring{[a,b)}=\emptyset$ dur.

iv) **$[a,b)$ aralığının sınırı:** $\mathbb{R}\setminus[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,\infty)$ dur. $x\in\mathbb{R}\setminus[a,b)$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(y,\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus[a,b))=(y,\infty)$ veya $(y,\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus[a,b))\supseteq[b,\infty)$ dur. Böylece

$$(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus[a,b))\setminus\{x\})\neq\emptyset$$

dur. Bu durumda $x\in\widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,b)}$ dir. Yani $\overline{\mathbb{R}\setminus[a,b)}=\mathbb{R}$ dir. O halde

$$\partial[a,b)=\overline{[a,b)}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus[a,b)}=(-\infty,b]\cap\mathbb{R}=(-\infty,b]$$

dir.

v) **$[a,b)$ aralığının dışı :** $\text{dış}([a,b))=\mathbb{R}\setminus\overline{[a,b)}=\mathbb{R}\setminus(-\infty,b]=(b,\infty)$ dur.

vi) **$[a,b)$ aralığının izole noktaları:** $x\in[a,b)$, $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $c=\max\{a,y\}$ olmak üzere $(c,b)\subseteq[a,b)\cap(y,\infty)\neq\{x\}$ olduğundan x noktası $[a,b)$ nin bir izole noktası değildir. O halde $[a,b)$ aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

d) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $[a,\infty)$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **$[a,\infty)$ aralığının limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda

$$(y,\infty)\cap[a,\infty)=[a,\infty) \text{ veya } (y,\infty)\cap[a,\infty)=(y,\infty)$$

dur. Böylece

$$([a,\infty)\setminus\{x\})\cap(y,\infty)\neq\emptyset$$

dur. Böylece x noktası $[a,\infty)$ nın bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{[a,\infty)}=\mathbb{R}$ dir.

ii) **$[a,\infty)$ aralığının kapanışı:** $\overline{[a,\infty)}=[a,\infty)\cup\widetilde{[a,\infty)}=\mathbb{R}$ dir.

iii) **$[a,\infty)$ aralığının içi:** $x\in(a,\infty)$ ve $a<y<x$ olsun. Bu durumda $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ dir. Bu durumda $(y,\infty)\subseteq[a,\infty)$ dur. O halde x noktası $[a,\infty)$ nin bir iç noktası dır. $x=a$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y<z<a$ olacak şekilde bir $z\in\mathbb{R}$ vardır. Böylece $(y,\infty)\nsubseteq[a,\infty)$ dur. O halde y noktası $[a,\infty)$ nin bir iç noktası değildir. Böylece $\mathring{[a,\infty)}=(a,\infty)$ dur.

iv) **$[a,\infty)$ aralığının sınırı:** $\mathbb{R}\setminus[a,\infty)=(-\infty,a)$ dır. $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x>a$ olsun. Bu durumda $a<y<x$ olmak üzere $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ dir.

$$(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus[a,\infty))\setminus\{x\})=\emptyset$$

dur. Böylece x noktası $\mathbb{R}\setminus[a,\infty)$ nin limit noktası değildir. $x\le a$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(y,\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus[a,\infty))=(y,a)$ dır. Böylece

$$(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus[a,\infty)\setminus\{x\}))\neq\emptyset$$

dur. O halde $x\in\widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,\infty)}$ ve dolayısıyla $\widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,\infty)}=(-\infty,a]$ dır. Bu durumda $\overline{\mathbb{R}\setminus[a,\infty)}=\mathbb{R}$ dir. Böylece

$$\partial[a,\infty)=\overline{[a,\infty)}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus[a,\infty)}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

dir.

v) **$[a,\infty)$ aralığının dışı:** $\text{dış}([a,\infty))=\mathbb{R}\setminus\overline{[a,\infty)}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$

dur.

vi) **$[a,\infty)$ aralığının izole noktaları:** $x \in [a,\infty)$, $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $c = \max\{a,y\}$ olmak üzere $(c,\infty) \subseteq [a,\infty) \cap (y,\infty)$ ve dolayısıyla

$$[a,\infty)\cap(y,\infty) \neq \{x\}$$

olduğundan x noktası $[a,\infty)$ nin bir izole noktası değildir. O halde $[a,\infty)$ aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

e) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $S = \left\{\frac{1}{n} \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **S kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$, $x>1$ olsun. Bu durumda $(1,\infty)\in\mathscr{B}_x$ dir. Böylece

$$(1,\infty)\cap(S\setminus\{x\})=\emptyset$$

dur. O halde $x\notin \widetilde{S}$ dür. $x=1$ olsun. Bu durumda $\left(\frac{1}{2},\infty\right)\in\mathscr{B}_x$ ve

$$(\frac{1}{2},\infty)\cap(S\setminus\{1\})=\emptyset$$

dur. O halde $1\notin\widetilde{S}$ dir. $x<1$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y<x<1$ dir. Böylece $1\in(y,\infty)\cap(S\setminus\{x\})$ olduğundan $x\in\widetilde{S}$ dür. O halde $\widetilde{S}=(-\infty,1)$ dir.

ii) **S kümesinin kapanışı:** $\overline{S} = S\cup\widetilde{S}=(-\infty,1]$ dir.

iii) **S kümesinin içi:** $x\in S$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda S sayılabilir ve (y,∞) sayılamaz olduğundan $(y,\infty)\not\subseteq S$ dir. O halde x noktası S nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{S}=\emptyset$ dur.

iv) **S kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus S=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\neq\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}$ dir. $x\in\mathbb{R}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x>1$ ise $x+1\in(y,\infty)$ ve $x+1\in(\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\}$ dir. O halde $(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\})\neq\emptyset$ dur. Böylece $x\in\widetilde{\mathbb{R}\setminus S}$ dir. $x\le 1$ olsun. Bu durumda $2\in(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\})$ dir. Böylece $(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\})\neq\emptyset$ ve dolayısıyla $x\in\widetilde{\mathbb{R}\setminus S}$ dir. O halde $\widetilde{\mathbb{R}\setminus S}=\mathbb{R}$ dir. Böylece $\overline{\mathbb{R}\setminus S}=\mathbb{R}$ dir. Bu durumda

$$\partial S=\overline{S}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus S}=(-\infty,1]\cap\mathbb{R}=(-\infty,1]$$

dir.

v) **S kümesinin dışı:** dış$(S)=\mathbb{R}\setminus\overline{S}=\mathbb{R}\setminus(-\infty,1]=(1,\infty)$ dur.

vi) **S kümesinin izole noktaları:** $\left(\frac{1}{2},\infty\right)\in\mathscr{B}_1$ ve $\left(\frac{1}{2},\infty\right)\cap S=\{1\}$ olduğundan 1 noktası S nin bir izole noktası dır. $m>1$ olmak üzere $\frac{1}{m}\in S$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_{\frac{1}{m}}$ olsun. Bu durumda $y<1$ dir. Böylece $1\in(y,\infty)\cap S$ ve dolayısıyla $(y,\infty)\cap S\neq\left\{\frac{1}{m}\right\}$ dir. O halde $\frac{1}{m}$ noktası noktası S nin bir izole noktası değildir.

f) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $\mathbb{Z}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **$\mathbb{Z}$ kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $z>x$ olacak şekilde bir $z\in\mathbb{Z}$ vardır. O halde $z\in(y,\infty)\cap(\mathbb{Z}\setminus\{x\})$ ve böylece $(y,\infty)\cap(\mathbb{Z}\setminus\{x\})\neq\emptyset$ dur. O halde $x\in\widetilde{\mathbb{Z}}$ dür. O halde $\widetilde{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ dir.

ii) **$\mathbb{Z}$ kümesinin kapanışı:** $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\widetilde{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ dir.

iii) **$\mathbb{Z}$ kümesinin içi:** $x\in\mathbb{Z}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}$ sayılabilir ve (y,∞) sayılamaz olduğundan $(y,\infty)\not\subseteq\mathbb{Z}$ dir. O halde x noktası $\mathbb{Z}$ nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}=\emptyset$ dur.

iv) **$\mathbb{Z}$ kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{R}|x\neq n, n\in\mathbb{Z}\}$ dir. $x\in\mathbb{R}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x>y$ dir. Diğeryandan $z>x$ olacak şekilde bir $z\notin\mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $z\in(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus\{x\})$ dir. Böylece x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ nin limit noktası dır. Böylece $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ dır. O halde $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ ve böylece

$$\partial\mathbb{Z}=\overline{\mathbb{Z}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

dir.

v) **$\mathbb{Z}$ kümesinin dışı:** dış$(\mathbb{Z})=\mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$ dur.

vi) **$\mathbb{Z}$ kümesinin izole noktaları:** $n\in\mathbb{Z}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_n$ olsun. $(y,\infty)\cap\mathbb{Z}$ kümesinin sonsuz sayıda elemanıolduğundan n noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası değildir. O halde $\mathbb{Z}$ nin hiç bir izole noktası yoktur.

g) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $z>x$ olacak şekilde bir bir $z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $z\in(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\})$ ve böylece

$$(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\})\neq\emptyset$$

dur. O halde $x\in\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ dür. Böylece $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ dir.

ii) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin kapanışı:** $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ dir.

iii) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin içi:** $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $(y,\infty)\in\mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $y<r<x$ olacak şekilde bir $r\in\mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $r\in(y,\infty)$ ve $r\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dur. Böylece $(y,\infty)\not\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dır. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin bir iç noktası değildir.

Böylece $\overset{\circ}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \emptyset$ dur.

iv) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ dur. $x \in \mathbb{R}$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $z > x$ olacak şekilde bir $z \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $z \in (y,\infty)\cap(\mathbb{Q}\setminus\{x\})$ ve böylece

$$(y,\infty)\cap(\mathbb{Q}\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $x \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ ve böylece $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. O halde $\overline{\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir.

$$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

dir.

v) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin dışı:** dış$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ dur.

vi) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin izole noktaları:** $q \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_q$ olsun. $(y,\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ kümesinin sonsuz sayıda elemanıolduğundan q noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin bir izole noktası değildir. O halde $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin hiç bir izole noktası yoktur.

h) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $K = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **K kümesinin limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $2n > x$ olacak şekilde bir $2n \in K$ vardır. Bu durumda $2n \in (y,\infty)\cap(K\setminus\{x\})$ ve böylece $(y,\infty)\cap(K\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. O halde $x \in \widetilde{K}$ ve böylece $\widetilde{K} = \mathbb{R}$ dir.

ii) **K kümesinin kapanışı:** $\overline{K} = K\cup\widetilde{K} = \mathbb{R}$ dir.

iii) **K kümesinin içi:** $2n \in K$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_{2n}$ olsun. Bu durumda K sayılabilir ve (y,∞) sayılamadığından $(y,\infty) \nsubseteq K$ dır. O halde $2n$ noktası K nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{K} = \emptyset$ dur.

iv) **K kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus K = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dir. $x \in \mathbb{R}$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $z > x$ olacak şekilde bir $z \in \mathbb{R}\setminus K$ vardır. Bu durumda $z \in (y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus K)\setminus\{x\})$ ve böylece

$$(y,\infty)\cap((\mathbb{R}\setminus K)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $x \in \widetilde{\mathbb{R}\setminus K}$ ve böylece $\widetilde{\mathbb{R}\setminus K} = \mathbb{R}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{R}\setminus K} = \mathbb{R}$ ve böylece

$$\partial K = \overline{K}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus K} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

dir.

v) **K kümesinin dışı:** dış$(K) = \mathbb{R}\setminus\overline{K} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ dur.

vi) **K kümesinin izole noktaları:** $2n \in K$ ve $(y,\infty) \in \mathscr{B}_{2n}$ olsun. $(y,\infty)\cap K$ kümesinin sonsuz sayıda elemanıolduğundan $2n$ noktası K nin bir izole noktası değildir. O halde K nin hiç bir izole noktası yoktur.✓

ÇÖZÜM 14

$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayında verilen kümelerin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını, dışlarını ve izole noktalarınıbulalım. Bu uzayda bir $x \in \mathbb{R}$ noktasınıyerel tabanı $\mathscr{B}_x = \{(-n_0,n_0) \mid |x| < n_0$ özelliğindeki en küçük doğal sayıdır$\}$.

a) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayında (a,b) kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım. $a \geq 0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer durumlarıiçin çözüm benzer şekilde yapılır.

i) **(a,b) aralığının limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq a < 1$ olsun. Bu durumda $(-n_0,n_0) \in \mathscr{B}_x$ ise $a < 1 < n_0$ dir. Böylece $(-n_0,n_0)\cap(a,b) = (a,n_0)$ veya $(-n_0,n_0)\cap(a,b) = (a,b)$ dir. Böylece

$$((a,b)\setminus\{x\})\cap(-n_0,n_0) \neq \emptyset$$

dur. Böylece x noktası (a,b) nın bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{(a,b)} = \mathbb{R}$ dir.
$a \geq 1$ olsun. Bu durumda $a-1 < k \leq a$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. (Yani k doğal sayısı a dan küçük veya eşit olan en büyük doğal sayıdır.) $x \in (-k,k)$ yani $|x| < k$ olsun. Bu durumda $(-n_0,n_0) \subseteq (-k,k)$ ve böylece

$$((a,b)\setminus\{x\})\cap(-n_0,n_0) = \emptyset$$

dur. O halde $x \notin \widetilde{(a,b)}$ dir. $|x| \geq k$ olsun. Bu durumda $n_0 > a \geq k$ dir. Böylece

$$((a,b)\setminus\{x\})\cap(-n_0,n_0) \neq \emptyset$$

dur. Böylece x noktası (a,b) nin bir limit noktası dır. O halde

$$\widetilde{(a,b)} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq k\} = (-\infty,-k]\cup[k,\infty)$$

dur. Böylece $a = k$ yani $a \in \mathbb{N}$ ise $\widetilde{(a,b)} = (-\infty,-a]\cup[a,\infty)$ dır.

ii) **(a,b) aralığının kapanışı:** $0 < a < 1$ ise $\overline{(a,b)} = (a,b)\cup\mathbb{R} = \mathbb{R}$ ve $a \geq 1$ ise

$$\overline{(a,b)} = (a,b)\cup(-\infty,-k]\cup[k,\infty)$$

dur. Böylece $k = a$ ise

$$\overline{(a,b)} = (a,b)\cup(-\infty,-a]\cup[a,\infty) = \mathbb{R}$$

dir.

iii) **(a,b) aralığının içi:** $x \in (a,b)$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $a \geq 0$ olduğundan (a,b) ye ait negatif hiç bir reel sayıyoktur. Diğer yandan $(-n,n)$ aralığında negatif sayılar vardır. Böylece $(-n,n) \not\subseteq (a,b)$ dir. O halde $x \notin \overset{\circ}{(a,b)}$ dir. Bu durumda $\overset{\circ}{(a,b)} = \emptyset$ dur.

iv) **(a,b) aralığının sınırı:** $\mathbb{R}\setminus(a,b) = (-\infty,a]\bigcup[b,\infty)$ dur. $x \in \mathbb{R}$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(-n,n)\bigcap(\mathbb{R}\setminus(a,b)) \supseteq (0,n)$ veya $(-n,n)\bigcap(\mathbb{R}\setminus(a,b)) \supseteq (0,a)$ dir. Böylece

$$(-n,n)\bigcap((\mathbb{R}\setminus(a,b))\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. o halde $x \in \widetilde{\mathbb{R}\setminus(a,b)}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \mathbb{R}$ dir. O halde $0 \leq a < 1$ ise

$$\partial(a,b) = \overline{(a,b)}\bigcap\overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \mathbb{R}\bigcap\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

dir. $a \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}\partial(a,b) &= \overline{(a,b)}\bigcap\overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)}\\ &= ((a,b)\bigcup(-\infty,-k]\bigcup[k,\infty))\bigcap\mathbb{R}\\ &= (a,b)\bigcup(-\infty,-k]\bigcup[k,\infty)\end{aligned}$$

dir. Böylece $a = k$ ise $\partial(a,b) = \mathbb{R}\bigcap\mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

v) **(a,b) aralığının dışı:** $0 \leq a < 1$ ise

$$\text{dış}((a,b)) = \mathbb{R}\setminus\overline{(a,b)} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$$

dur. $a \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}\text{dış}((a,b)) &= \mathbb{R}\setminus\overline{(a,b)} = \mathbb{R}\setminus((a,b)\bigcup(-\infty,-k]\bigcup[k,\infty))\\ &= (-\infty,a]\bigcap[b,\infty)\bigcap(-k,k)\end{aligned}$$

dır. Böylece $a = k$ ise

$$\text{dış}((a,b)) = (-\infty,a]\bigcap[b,\infty)\bigcap(-a,a) = \emptyset$$

dur.

vi) **(a,b) aralığının izole noktaları:** $x \in (a,b)$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda

$$(a,b)\bigcap(-n,n) = \emptyset \text{ veya } (a,n)$$

dir. Böylece $(a,b)\bigcap(-n,n) \neq \{x\}$ dir. O halde x noktası (a,b) nin bir izole noktası değildir. Böylece (a,b) aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

b) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayında $S = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **S kümesinin limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ ve $(-k,k) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $k \geq 1$ olduğundan $\frac{1}{2},\frac{1}{3} \in (-k,k)\bigcap S$ dir. Böylece $(-k,k)\bigcap(S\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. O halde $\widetilde{S} = \mathbb{R}$ dir.

ii) **S kümesinin kapanışı:** $\overline{S} = S\bigcup\mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

iii) **S kümesinin içi:** $x \in S$ ve $(-k,k) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(-k,k)$ kümesi sayılamaz ve S sayılabilir olduğundan $(-k,k) \not\subseteq S$ dir. O halde $x \notin \overset{\circ}{S}$ dir. Böylece $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ dir.

iv) **S kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus S = \left\{x \in \mathbb{R}\middle| x \neq \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\right\}$ dır. $x \in \mathbb{R}$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ dir. Böylece $0.6, 0.7 \in (-n,n)\bigcap(\mathbb{R}\setminus S)$ yani

$$(-n,n)\bigcap((\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Böylece $x \in \widetilde{\mathbb{R}\setminus S}$ ve dolayısıyla $\widetilde{\mathbb{R}\setminus S} = \mathbb{R}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{R}\setminus S} = \mathbb{R}$ dir. Böylece $\partial S = \overline{S}\bigcap\overline{\mathbb{R}\setminus S} = \mathbb{R}\bigcap\mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

v) **S kümesinin dışı:** $\text{dış}(S) = \mathbb{R}\setminus\overline{S} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ dur.

vi) **S kümesinin izole noktaları:** $x \in S$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ dir. O halde $S\bigcap(-n,n) = S$ veya $S\bigcap(-n,n) = S\setminus\{1\}$ dir. Böylece $S\bigcap(-n,n) \neq \{x\}$ dir. O halde x noktası S nin bir izole noktası değildir. Böylece S kümesinin hiç bir izole noktası yoktur.

c) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_3)$ uzayında $\mathbb{Z}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **$\mathbb{Z}$ kümesinin limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x = 0$ ise $(-1,1) \in \mathscr{B}_x$ ve

$$(-1,1)\bigcap(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) = \emptyset$$

dur. O halde 0 noktası $\mathbb{Z}$ nin limit noktası değildir. $x \neq 0$ ve $(-k,k) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $0 \in (-k,k)$ ve $x \neq 0$ olduğundan $0 \in \mathbb{Z}\setminus\{x\}$ dir. Böylece $(-k,k)\bigcap(\mathbb{Z}\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. Böylece $\widetilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dır.

ii) **$\mathbb{Z}$ kümesinin kapanışı:** $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\bigcup(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}$ dir.

iii) **$\mathbb{Z}$ kümesinin içi:** $x \in \mathbb{Z}$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(-n,n)$ kümesi sayılamaz ve $\mathbb{Z}$ sayılabilir olduğundan $(-n,n) \not\subseteq \mathbb{Z}$ dir. O halde $x \notin \overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ dir. Bu durumda $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ dir.

iv) **$\mathbb{Z}$ kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq m,\ m \in \mathbb{Z}\}$ dır. $x \in \mathbb{R}$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ dir. Böylece $0.6, 0.7 \in (-n,n) \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$ yani

$$(-n,n) \cap ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Bu durumda $x \in \widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$ ve dolayısıyla $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ dir. O halde $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ dir. Böylece $\partial\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

v) **$\mathbb{Z}$ kümesinin dışı:** $\text{dış}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ dur.

vi) **$\mathbb{Z}$ kümesinin izole noktaları:** $x \in \mathbb{Z}$ olsun. $x = 0$ ise $(-1,1) \in \mathscr{B}_0$ dır. Üstelik $\mathbb{Z} \cap (-1,1) = \{0\}$ dır. Böylece 0 noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası dır. $x \neq 0$ ve $(-k,k) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $k \geq 2$ dir. O halde $-1, 0, 1 \in \mathbb{Z} \cap (-k,k)$ dır. Böylece $\mathbb{Z} \cap (-k,k) \neq \{x\}$ dir. O halde x noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası değildir. Böylece $\mathbb{Z}$ kümesinin izole noktalarının kümesi $\{0\}$ dır.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayında $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını, dışını ve izole noktalarınıbulalım.

i) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ ve $(-k,k) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(-k,k)$ aralığında sonsuz sayıda irrasyonel sayıvardır. Böylece

$$(-k,k) \cap ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{0\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin limit noktası dır. O halde $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir.

ii) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin kapanışı:** $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

iii) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin içi:** $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(-n,n)$ kümesine sonsuz sayıda rasyonel sayıvardır. Böylece $(-n,n) \not\subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dur. O halde $x \notin \overset{\circ}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ dir. Bu durumda $\overset{\circ}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \emptyset$ dur.

iv) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ dur. $x \in \mathbb{R}$ ve $(-n,n) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $(-n,n)$ aralığında sonsuz sayıda rasyonel sayıvardır. Böylece

$$(-n,n) \cap (\mathbb{Q}\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $x \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ ve dolayısıyla $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. O halde $\overline{\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. Böylece $\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

v) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin dışı:** $\text{dış}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ dur.

vi) **$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin izole noktaları:** $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $(-k,k) \in \mathscr{B}_x$ olsun. $(-k,k)$ aralığında sonsuz sayıda rasyonel sayıvardır. Böylece $((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\}) \cap (-k,k) \neq \emptyset$ dur. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin bir izole noktası değildir. Böylece $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin hiç bir izole noktası yoktur.✓

ÇÖZÜM 15

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktası nın yerel tabanı $\mathscr{B}^x_{\text{sağ}} = \{[x,y) | x < y, y \in \mathbb{R}\}$ ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}$ noktası nın yerel tabanı $\mathscr{B}^x_{\text{sol}} = \{(y,x] | y < x, y \in \mathbb{R}\}$ dir.

a) **i)** **(a,b) aralığının limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x \geq b$ olsun. Bu durumda $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$((a,b)\setminus\{x\}) \cap [x,c) = \emptyset$$

dur. Böylece x noktası (a,b) nın bir limit noktası değildir. $x < a$ ise $x < r < a$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır. Böylece $[x,r) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$[x,r) \cap (a,b) = \emptyset$$

olduğundan x noktası (a,b) nın bir limit noktası değildir. $a \leq x < b$ olsun. Bu durumda $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ise $x < c$ dir. O halde $d = \min\{c, b\}$ olmak üzere

$$[x,c) \cap (a,b) = (a,d) \text{ veya } [x,c) \cap (a,b) = [x,d)$$

dir. Böylece

$$[x,c) \cap ((a,b)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Böylece x noktası (a,b) nin bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{(a,b)} = [a,b)$ dir.

ii) **(a,b) aralığının kapanışı:** $\overline{(a,b)} = (a,b) \cup \widetilde{(a,b)} = [a,b)$ dir.

iii) **(a,b) aralığının içi:** (a,b) aralığıaçık bir küme olduğundan Teorem 5.48 gereğince içi kendisine eşittir. Yani $\overset{\circ}{(a,b)} = (a,b)$ dir.

iv) **(a,b) aralığının sınırı:** (a,b) açık bir küme olduğundan $\mathbb{R}\setminus(a,b)$ kapalıdır. Böylece Teorem 5.29 gereğince $\overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \mathbb{R}\setminus(a,b)$ dir. O halde

$$\partial(a,b) = \overline{(a,b)} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus(a,b)} = [a,b) \cap (\mathbb{R}\setminus(a,b)) = \{a\}$$

dir.

v) **(a,b) aralığının dışı:** $\text{dış}((a,b)) = \mathbb{R}\setminus\overline{(a,b)} = \mathbb{R}\setminus[a,b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ dur.

vi) **(a,b) aralığının izole noktaları:** $x \in (a,b)$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $d = \min\{b, c\}$ olmak üzere

$$(a,b) \cap [x,c) = [x,d)$$

dir. Böylece

$$(a,b) \cap [x,c) \neq \{x\}$$

olduğundan x noktası (a,b) nin bir izole noktası değildir. O halde (a,b) aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

b) i) $[a,b]$ **aralığının limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x \geq b$ olsun. Bu durumda $[x,c) \in \mathscr{B}_x$ ve

$$([a,b]\setminus\{x\}) \cap [x,c) = \emptyset$$

dur. Böylece x noktası $[a,b]$ nın bir limit noktası değildir. $x < a$ ise $x < r < a$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır. Böylece $[x,r) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$[x,r) \cap [a,b] = \emptyset$$

olduğundan x noktası $[a,b]$ nın bir limit noktası değildir. $a \leq x < b$ olsun. Bu durumda $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ise $x < c$ dir. O halde $d = \min\{c,b\}$ olmak üzere

$$[x,c) \cap [a,b] = [a,d) \text{ veya } [x,c) \cap [a,b] = [x,d)$$

ve dolayısıyla

$$[x,c) \cap ([a,b]\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Böylece x noktası $[a,b]$ nin bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{[a,b]} = [a,b)$ dir.

ii) $[a,b]$ **aralığının kapanışı:** $\overline{[a,b]} = [a,b] \cup \widetilde{[a,b]} = [a,b]$ dir.

iii) $[a,b]$ **aralığının içi:** $x \in [a,b)$ olsun. Bu durumda $[a,b) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve $[a,b) \subseteq [a,b]$ dir. Böylece $x \in \overset{\circ}{[a,b]}$ dir. $x = b$ ise $[b,c) \in \mathscr{B}^b_{\text{sağ}}$ dir. Bu durumda $b < r < c$ olacak şekilde $r \in \mathbb{Q}$ vardır. Böylece $r \in [b,c)$ ve $r \notin [a,b]$ dir. O halde $[b,c) \nsubseteq [a,b]$ dir. Dolayısıyla b noktası $[a,b]$ kümesinin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{[a,b]} = [a,b)$ dir.

iv) $[a,b]$ **aralığının sınırı:** $\mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ dur. $x \in \mathbb{R}$ olsun.
$x < a$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $d = \min\{a,c\}$ olmak üzere

$$[x,c) \cap (\mathbb{R}\setminus[a,b]) \supseteq [x,d)$$

dir. O halde $[x,c) \cap ((\mathbb{R}\setminus[a,b])\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ ve dolayısıyla x noktası $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ nin bir limit noktası dır.
$a \leq x < b$ olsun ve $x < r < b$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ noktası seçelim. Bu durumda $[x,r) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve $[x,r) \cap (\mathbb{R}\setminus[a,b]) = \emptyset$ dur. Böylece x noktası $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ nin bir limit noktası değildir.
$x \geq b$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda

$$[x,c) \cap (\mathbb{R}\setminus[a,b]) = [x,c) \text{ veya } [x,c) \cap (\mathbb{R}\setminus[a,b]) = (b,c)$$

dir. Böylece $[x,c) \cap ((\mathbb{R}\setminus[a,b])\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ olacağından x noktası $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ nin bir limit noktası dır. Böylece $\widetilde{\mathbb{R}\setminus[a,b]} = (-\infty,a) \cup [b,\infty)$ dur. O halde

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}\setminus[a,b]} &= (-\infty,a) \cup (b,\infty) \cup (-\infty,a) \cup [b,\infty) \\ &= (-\infty,a) \cup [b,\infty) \end{aligned}$$

dur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \partial[a,b] &= \overline{[a,b]} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus[a,b]} \\ &= [a,b] \cap ((-\infty,a) \cup [b,\infty)) \\ &= \{b\} \end{aligned}$$

dir.

v) $[a,b]$ **aralığının dışı :** $\text{dış}([a,b]) = \mathbb{R}\setminus\overline{[a,b]} = \mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ dur.

vi) $[a,b]$ **aralığının izole noktaları:** $x \in [a,b)$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $d = \min\{b,c\}$ olmak üzere

$$[a,b] \cap [x,c) = [x,d)$$

dir. Böylece

$$[a,b] \cap [x,c) \neq \{x\}$$

olduğundan x noktası $[a,b]$ nin bir izole noktası değildir. $x = b$ ve $[b,c) \in \mathscr{B}_b$ ise

$$[a,b] \cap [b,c) = \{b\}$$

dir. O halde b noktası $[a,b]$ nin bir izole noktası dır. O halde $[a,b]$ nin izole noktalarının kümesi $\{b\}$ dir.

c) i) $[a,\infty)$ **aralığının limit noktaları:** $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x < a$ ise $\varepsilon = \dfrac{|x-a|}{2}$ olmak üzere

$$([a,\infty)\setminus\{x\}) \cap [x,x+\varepsilon) = \emptyset$$

olduğundan x noktası $[a,\infty)$ nın bir limit noktası değildir.

ii) $a \leq x$ ise her $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ için

$$[x,c) \cap [a,\infty) = [x,c)$$

olduğundan

$$[x,c)\cap([a,\infty)\setminus\{x\})\neq\emptyset$$

dur. Bu durumda Teorem 5.5 gereğince x noktası $[a,\infty)$ nın bir limit noktası dır.
Bu durumda $\widetilde{[a,\infty)}=[a,\infty)$ olur.

iii) **$[a,\infty)$ aralığının kapanışı:** $\overline{[a,\infty)}=[a,\infty)\cup\widetilde{[a,\infty)}=[a,\infty)\cup[a,\infty)=[a,\infty)$ dur.

iv) **$[a,\infty)$ aralığının içi:** $x\in[a,\infty)$ olsun. Bu durumda $[x,c)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve $[x,c)\subseteq[a,\infty)$ olduğundan $x\in\overset{\circ}{[a,\infty)}$ ve böylece $\overset{\circ}{[a,\infty)}=[a,\infty$ dir. Veya $[a,\infty)$ açık olduğundan içi kendisine eşittir.

v) **$[a,\infty)$ aralığının sınırı:** $\mathbb{R}\setminus[a,\infty)=(-\infty,a)$ kapalı olduğundan $\overline{\mathbb{R}\setminus[a,\infty)}=\overline{(-\infty,a)}=(-\infty,a)$ dır. O halde

$$\partial[a,\infty)=\overline{[a,\infty)}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus[a,\infty)}=[a,\infty)\cap(-\infty,a)=\emptyset$$

dur.

vi) **$[a,\infty)$ aralığının dışı:** $\text{dış}([a,\infty))=\mathbb{R}\setminus\overline{[a,\infty)}=\mathbb{R}\setminus[a,\infty)=(-\infty,a)$ dır.

vii) **$[a,\infty)$ aralığının izole noktaları:** $x\in[a,\infty)$ olsun. Bu durumda $[x,c)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$[a,\infty)\cap[x,c)=[x,c)\neq\{x\}$$

olduğundan x noktası $[a,\infty)$ nin bir izole noktası değildir. O halde $[a,\infty)$ aralığının hiç bir izole noktası yoktur.

d) i) **$S=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin limit noktaları:** $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x<0$ ise $[x,0)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$(S\setminus\{x\})\cap[x,0)=\emptyset$$

olduğundan x noktası S nın bir limit noktası değildir.
$x\geq 1$ ve $[x,x+1)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ise

$$(S\setminus\{x\})\cap[x,x+1)=\emptyset$$

olduğundan x noktası nın S nın bir limit noktası değildir.
Bazı $m\in\mathbb{N}$ $(m\neq 1)$ için $x=\frac{1}{m}$ ise $\left[\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}\right)\in\mathscr{B}^{\frac{1}{m}}_{\text{sağ}}$ ve

$$\left(S\setminus\left\{\frac{1}{m}\right\}\right)\cap\left[\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}\right)=\emptyset$$

olduğundan $\frac{1}{m}$ noktası nın S nın bir limit noktası değildir.
$0<x<1$ ve $x\notin S$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{m+1}<x<\frac{1}{m}$ olacak şekilde bir $m\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\left[x,\frac{1}{m}\right)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$(S\setminus\{x\})\cap\left[x,\frac{1}{m}\right)=\emptyset$$

olduğundan x noktası nın S nın bir limit noktası değildir.
$x=0$ ve $[0,c)\in\mathscr{B}^0_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $m>\frac{1}{c}$ özelliğindeki her $m\in\mathbb{N}$ için $\frac{1}{m}\in[0,c)$ dir. O halde

$$(S\setminus\{x\})\cap[0,c)\neq\emptyset$$

dur. Böylece 0 noktası S nın bir limit noktası dır.
Bu durumda $\widetilde{S}=\{0\}$ olur.

ii) **S kümesinin kapanışı:** $\overline{S}=S\cup\widetilde{S}=S\cup\{0\}$ dır.

iii) **S kümesinin içi:** $x\in S$ olsun. Bu durumda her $[x,c)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ için $[x,c)$ kümesi sayılamaz ve S kümesi sayılabilir olduğundan $[x,c)\not\subseteq S$ dir. O halde x noktası S nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{S}=\emptyset$ dur.

iv) **S kümesinin sınırı:**

$$\mathbb{R}\setminus S=(-\infty,0]\cup\{0\}\cup(1,\infty)\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)\right)$$

dir. $x\in\mathbb{R}$ ve $[x,c)\in\mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $y\neq x$ ve $y\neq\frac{1}{m}$ $(m\in\mathbb{N})$ özelliğinde bir $y\in[x,c)\cap((\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\})$ vardır. Böylece

$$[x,c)\cap((\mathbb{R}\setminus S)\setminus\{x\})\neq\emptyset$$

dur. Böylece $x\in\overline{\mathbb{R}\setminus S}$ ve dolayısıyla $\overline{\mathbb{R}\setminus S}=\mathbb{R}$ dir. O halde $\partial S=\overline{S}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus S}=(S\cup\{0\})\cap\mathbb{R}=S\cup\{0\}$ dır.

v) **S kümesinin dışı:** $\text{dış}(S)=\mathbb{R}\setminus\overline{S}=\mathbb{R}\setminus(S\cup\{0\})=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq 0,x\neq\frac{1}{m},m\in\mathbb{N}\right\}$ dır.

vi) **S kümesinin izole noktaları:** $m\neq 1$ olmak üzere $\frac{1}{m}\in S$ ve $\frac{1}{m}<r<\frac{1}{m-1}$ özelliğinde bir $r\in\mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda $\left[\frac{1}{m},r\right)\in\mathscr{B}^{\frac{1}{m}}_{\text{sağ}}$ ve $S\cap\left[\frac{1}{m},r\right)=\left\{\frac{1}{m}\right\}$ olduğundan $\frac{1}{m}$ noktası S nin bir izole noktası dır. $[1,2)\in\mathscr{B}^1_{\text{sağ}}$ ve

$$S\cap[1,2)=\{1\}$$

olduğundan 1 noktası S nin bir izole noktası dır. Böylece

S nin her bir noktası S nin bir izole noktası dır. Yani S nin izole noktalarının kümesi S dir.

e) i) $\mathbb{Z}$ kümesinin limit noktaları: $x \in \mathbb{R}$ ve x den büyük en küçük tam sayı m olsun. Bu durumda $[x,m) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$(\mathbb{Z}\setminus\{x\}) \cap [x,m) = \emptyset$$

olduğundan x noktası $\mathbb{Z}$ nın bir limit noktası değildir. Böylece $\mathbb{Z}$ nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{Z}} = \emptyset$ dur.

ii) $\mathbb{Z}$ kümesinin kapanışı: $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \widetilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \emptyset = \mathbb{Z}$ dir.

iii) $\mathbb{Z}$ kümesinin içi: $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda her $[n,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ için $[n,c)$ kümesi sayılamaz ve $\mathbb{Z}$ kümesi sayılabilir olduğundan $[n,c) \not\subseteq \mathbb{Z}$ dir. O halde n noktası $\mathbb{Z}$ nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ dur.

iv) $\mathbb{Z}$ kümesinin sınırı: $x \in \mathbb{R}$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $y \neq x, y \neq m$ $(m \in \mathbb{Z})$ özelliğinde bir $y \in [x,c)$ vardır. Böylece $y \in [x,c) \cap ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus\{x\})$ dir. O halde

$$[x,c) \cap ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

ve dolayısıyla $x \in \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$ dir. Bu durumda $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ dir. O halde $\partial\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ dir.

v) $\mathbb{Z}$ kümesinin dışı: $\text{dış}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ dir.

vi) $\mathbb{Z}$ kümesinin izole noktaları: $m \in \mathbb{Z}$ olsun. $\left[m, m+\frac{1}{3}\right) \in \mathscr{B}^m_{\text{sağ}}$ ve

$$\mathbb{Z} \cap \left[m, m+\frac{1}{3}\right) = \{m\}$$

olduğundan m noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası dır. Böylece $\mathbb{Z}$ nin her bir noktası $\mathbb{Z}$ nin bir izole noktası dır. Yani $\mathbb{Z}$ nin izole noktalarının kümesi $\mathbb{Z}$ dir.

f) i) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin limit noktaları: $x \in \mathbb{R}$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $x \neq c$ olduğundan $x < y < c$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vardır. Böylece $y \in ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\}) \cap [x,c)$ ve dolayısıyla

$$((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\}) \cap [x,c) \neq \emptyset$$

dır. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nun bir limit noktası dır. Böylece $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nun limit noktalarının kümesi $\widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir.

ii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin kapanışı: $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \widetilde{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ dir.

iii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin içi: $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda her $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ için $r \in [x,c)$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ elemanıvardır. Böylece $[x,c) \not\subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dur. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \emptyset$ dur.

iv) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin sınırı: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

dir.

v) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin dışı: $\text{dış}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ dur.

vi) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin izole noktaları: $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $y \in [x,c)$ ve $y \neq x$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vardır. Böylece $y \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [x,c)$ olduğundan $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [x,c) \neq \{x\}$ dir. O halde x noktası $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin bir izole noktası değildir. Böylece $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nin hiç bir izole noktası yoktur.

g) i) $K = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin limit noktaları: $x \in \mathbb{R}$ ve x den büyük en küçük tam sayı m olsun. Bu durumda $[x,m) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ ve

$$(K\setminus\{x\}) \cap [x,m) = \emptyset$$

olduğundan x noktası K nın bir limit noktası değildir. Böylece K nin limit noktalarının kümesi $\widetilde{K} = \emptyset$ dur.

ii) K kümesinin kapanışı: $\overline{K} = K \cup \widetilde{K} = K \cup \emptyset = K$ dir.

iii) K kümesinin içi: $2n \in K$ olsun. Bu durumda her $[2n,c) \in \mathscr{B}^{2n}_{\text{sağ}}$ için $[2n,c)$ kümesi sayılamaz ve K kümesi sayılabilir olduğundan $[2n,c) \not\subseteq K$ dir. O halde $2n$ noktası K nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{K} = \emptyset$ dur.

iv) K kümesinin sınırı: $x \in \mathbb{R}$ ve $[x,c) \in \mathscr{B}^x_{\text{sağ}}$ olsun. Bu durumda $y \neq x, y \neq 2m$ $(m \in K)$ özelliğinde bir $y \in [x,c)$ vardır. Böylece $y \in [x,c) \cap ((\mathbb{R}\setminus K)\setminus\{x\})$ dir. O halde

$$[x,c) \cap ((\mathbb{R}\setminus K)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$$

ve dolayısıyla $x \in \overline{\mathbb{R}\setminus K}$ dır. Böylece $\overline{\mathbb{R}\setminus K} = \mathbb{R}$ dir. O halde $\partial K = \overline{K} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus K} = K \cap \mathbb{R} = K$ dir.

v) K kümesinin dışı: $\text{dış}(K) = \mathbb{R}\setminus\overline{K} = \mathbb{R}\setminus K$ dır.

vi) K kümesinin izole noktaları: $2m \in K$. Bu durumda $[2m, 2m+1) \in \mathscr{B}^{2m}_{\text{sağ}}$ ve $K \cap [2m, 2m+1) = \{2m\}$ olduğundan m noktası K nin bir izole noktası dır. Böylece K nin her bir noktası K nin bir izole noktası dır. Yani K nin izole noktalarının kümesi K dir.✓

ÇÖZÜM 16

a) x noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası olsun. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. $U \in \mathcal{T}_2$ ve x noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası olduğundan

$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dur. Böylece x noktası $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası dır.

b) $X = \{a, b, c\}$ ve $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ ve $A = \{b\}$ olsun. Bu durumda $a \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ ise $U = X$ dir. $X \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ olduğundan a noktası $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası dır. Diğer yandan $a \in \{a\}$ ve $\{a\} \in \mathcal{T}_2$ dir. Üstelik $\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$ dur. O halde a noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası değildir.

c) x noktası $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir iç noktası olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $U \subseteq A$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_2$ ve $x \in U \subseteq A$ dır. O halde x noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir iç noktası dır.

d) x noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir sınır noktası olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında $x \in \overline{A}$ ve $x \in \overline{X \setminus A}$ dır. Böylece $x \in A$ veya x noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası dır ve $x \in X \setminus A$ veya x noktası $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında $X \setminus A$ kümesinin bir limit noktası dır. Böylece (a) gereğince $x \in A$ veya x noktası $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir limit noktası dır ve $x \in X \setminus A$ veya x noktası $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında $X \setminus A$ kümesinin bir limit noktası dır. O halde $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında $x \in \overline{A}$ ve $x \in \overline{X \setminus A}$ dır. Böylece x noktası $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında A kümesinin bir sınır noktası dır.✓

ÇÖZÜM 17

a) $\widetilde{(A \cap B)} \subseteq \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ olduğunu gösterelim. $x \in \widetilde{(A \cap B)}$ olsun. $x \notin \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \notin \widetilde{A}$ veya $x \notin \widetilde{B}$ dir. Böylece $x \in U$ ve $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ veya $x \in V$ ve $V \cap (B \setminus \{x\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $x \in U \cap V$ ve $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan

$$(U \cap V) \cap ((A \cap B) \setminus \{x\}) = (U \cap (A \setminus \{x\})) \cap (V \cap (B \setminus \{x\})) = \emptyset$$

dur. Bu ise $x \in \widetilde{(A \cap B)}$ olmasıile çelişir. O halde $x \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ dür.

b) $\widetilde{(A \cup B)} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ olduğunu gösterelim.

i) $x \in \widetilde{(A \cup B)}$ olsun. $x \notin \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \notin \widetilde{A}$ ve $x \notin \widetilde{B}$ dir. Böylece $x \in U$ ve $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in V$ ve $V \cap (B \setminus \{x\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $x \in U \cap V$ ve $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}(U \cap V) \cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) &= (U \cap V) \cap ((A \setminus \{x\}) \cup (B \setminus \{x\})) \\ &= (U \cap V) \cap (A \setminus \{x\}) \cup (U \cap V) \cap (B \setminus \{x\}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

dur. Bu ise $x \in \widetilde{(A \cup B)}$ olmasıile çelişir. O halde $x \in \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ dür. Böylece

$$\widetilde{(A \cup B)} \subseteq \widetilde{A} \cup \widetilde{B} \qquad (5.13)$$

dır.

ii) $x \in \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ olsun. $x \notin \widetilde{(A \cup B)}$ olduğunu kabul edelim. $x \in U$ ve

$$U \cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ ve $U \cap (B \setminus \{x\}) = \emptyset$ dur. Yani $x \notin \widetilde{A}$ ve $x \notin \widetilde{B}$ dir. Bu ise $x \in \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ olmasıile çelişir. O halde $x \in \widetilde{(A \cup B)}$ dir. Dolayısıyla

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \subseteq \widetilde{(A \cup B)} \qquad (5.14)$$

dır.

(5.13) ve (5.14) gereğince $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \widetilde{(A \cup B)}$ dür.

c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ olduğunu gösterelim. $A \cap B \subseteq A$ olduğundan $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ dır. Benzer şekilde $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$ dir. Böylece $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ dir.

d) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ olduğunu gösterelim. Her $j \in I$ için $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j$ dir. Böylece her $j \in I$ için $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \overline{A_j}$ ve dolayısıyla $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ dir.

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ olduğunu gösterelim.

i) $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ ve $\overline{A} \cup \overline{B}$ kümesi kapalı olduğundan Teorem 5.29 gereğince

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (5.15)$$

dır.

ii) $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ olsun. $x \notin \overline{A \cup B}$ olduğunu varsayalım. Teorem 5.26 gereğince $x \in U$ ve $U \cap (A \cup B) = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece

$$U \cap (A \cup B) = (U \cap A) \cup (U \cap B) = \emptyset$$

dur. O halde $U \cap A = \emptyset$ ve $U \cap B = \emptyset$ dur. Teorem 5.26

gereğince $x \notin \overline{A}$ ve $x \notin \overline{B}$ dir. Bu ise $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ olmasıile çelişir. O halde $x \in \overline{A\cup B}$ dir. Bu durumda

$$\overline{A}\cup\overline{B} \subseteq \overline{A\cup B} \qquad (5.16)$$

dir.

Böylece (5.15) ve (5.16) gereğince $\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cup B}$ dir.

f) Her $j\in I$ için $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğundan $\overline{A_j}\subseteq \overline{\bigcup_{i\in I}A_i}$ ve böylece

$$\bigcup_{i\in I}\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I}A_i} \qquad (5.17)$$

dir.

g) $\overline{A}\setminus\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus B}$ olduğunu gösterelim. $x\in \overline{A}\setminus\overline{B}$ olsun. Bu durumda $x\in\overline{A}$ ve $x\notin\overline{B}$ dır. Böylece $x\in V$ ve $V\cap B=\emptyset$ olacak şekilde bir $V\in\mathcal{T}$ vardır. $x\notin \overline{A\setminus B}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x\in U$ ve $U\cap(A\setminus B)=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ vardır. $W=U\cap V$ diyelim. Bu durumda $x\in W$ ve $W\in\mathcal{T}$ dur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} A\cap W &= ((A\setminus B)\cup(A\cap B))\cap W \\ &= ((A\setminus B)\cap W)\cup(A\cap B\cap W) \\ &\subseteq (U\cap(A\setminus B))\cup(V\cap B) \\ &= \emptyset\cup\emptyset=\emptyset \end{aligned}$$

dur. Bu ise $x\in\overline{A}$ olmasıile çelişir. O halde $x\in\overline{A\setminus B}$ dir. Bu durumda $\overline{A}\setminus\overline{B}\subseteq\overline{A\setminus B}$ dir.

h) $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subseteq (A\cup B)^\circ$ olduğunu gösterelim. $A\subseteq A\cup B$ ve $B\subseteq A\cup B$ olduğundan $\mathring{A}\subseteq (A\cup B)^\circ$ ve $\mathring{B}\subseteq(A\cup B)^\circ$ dir. Böylece $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subseteq(A\cup B)^\circ$ dir.

ı) $\mathring{A}\cap\mathring{B}=(A\cap B)^\circ$ olduğunu gösterelim. $A\cap B\subseteq A$ ve $A\cap B\subseteq B$ dir. Böylece

$$(A\cap B)^\circ\subseteq\mathring{A} \text{ ve } (A\cap B)^\circ\subseteq\mathring{B}$$

dir. O halde

$$(A\cap B)^\circ\subseteq \mathring{A}\cap\mathring{B} \qquad (5.18)$$

dir. $x\in\mathring{A}\cap\mathring{B}$ olsun. Bu durumda $x\in U$ ve $U\subseteq A$ ve $x\in V$ ve $V\subseteq B$ olacak şekilde $U,V\in\mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $x\in U\cap V$ ve $U\cap V\in\mathcal{T}$ dur. Üstelik $U\cap V\subseteq A\cap B$ dir. Böylece $x\in(A\cap B)^\circ$ dir. Bu durumda

$$\mathring{A}\cap\mathring{B}\subseteq(A\cap B)^\circ \qquad (5.19)$$

dir. Böylece (5.18) ve (5.19) gereğince $\mathring{A}\cap\mathring{B}=(A\cap B)^\circ$ dir.

j) $\bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i \subseteq (\bigcup_{i\in I}A_i)^\circ$ olduğunu gösterelim. Her $j\in I$ için $A_j\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ dir. Böylece her $j\in I$ için $\mathring{A}_j\subseteq(\bigcup_{i\in I}A_i)^\circ$ dir. O halde $\bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i\subseteq(\bigcup_{i\in I}A_i)^\circ$ dir.✔

ÇÖZÜM 18

a) i) $X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{T}=\{\emptyset,X,\{a,b\}\}$ ve $A=\{a\},B=\{b\}$ olsun. Bu durumda $\mathring{A}=\emptyset$ ve $\mathring{B}=\emptyset$ ve dolayısıyla $\mathring{A}\cup\mathring{B}=\emptyset$ dur. $A\cup B=\{a,b\}$ olup $(A\cup B)^\circ=\{a,b\}$ dir. Böylece $(A\cup B)^\circ\neq\mathring{A}\cup\mathring{B}$ dir.

ii) $\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathring{\mathbb{Q}}=\emptyset$ ve $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ=\emptyset$ ve böylece $\mathring{\mathbb{Q}}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ=\emptyset$ dur.

$$\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$$

olup $\mathbb{R}^\circ=\mathbb{R}$ dir. Böylece

$$(\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))^\circ\neq\mathring{\mathbb{Q}}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ$$

dir.

b) i) $X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{T}=\{\emptyset,X,\{a,b\}\}$ ve $A=\{a\},B=\{b\}$ olsun. Bu durumda $\overline{A}=X$ ve $\overline{B}=X$ ve dolayısıyla $\overline{A}\cap\overline{B}=X$ dir. $A\cap B=\emptyset$ olup $\overline{(A\cap B)}=\emptyset$ dir. Böylece $\overline{(A\cup B)}\neq\overline{A}\cup\overline{B}$ dır.

ii) $\mathbb{R}$ standart uzayında $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ ve $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ ve böylece $\overline{\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ dir. $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\emptyset$ olup $\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}=\emptyset$ dur. Böylece

$$\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}\neq\overline{\mathbb{Q}}\cup\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

dır.✔

ÇÖZÜM 19

a) ⇒). $\partial A\subseteq A$ olsun. Teorem 5.68 gereğince $\overline{A}=\mathring{A}\cup\partial A\subseteq A\cup\partial A\subseteq A\cup A=A$ dır. O halde $\overline{A}=A$ ve dolayısıyla A kapalıdır.

⇐). A kapalı olsun. Bu durumda $\overline{A}=A$ ve böylece $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}=A\cap\overline{X\setminus A}\subseteq A$ dır.

b) ⇒). $\partial A\cap A=\emptyset$ olsun. Bu durumda

$$\emptyset=\partial A\cap A=(\overline{A}\cap\overline{X\setminus A})\cap A=A\cap\overline{X\setminus A}$$

dır. Diğer yandan

$$X=A\cup(X\setminus A)\subseteq A\cup\overline{X\setminus A}$$

olduğundan $A\cup\overline{X\setminus A}=X$ dir. Böylece $X\setminus A=\overline{X\setminus A}$ dir.

Teorem 5.29 gereğince $X\setminus A$ kümesi kapalıdır. O halde A açıktır.

$\Leftarrow$). A açık olsun. Bu durumda $X\setminus A$ kapalıdır. O halde $\overline{X\setminus A} = X\setminus A$ dır. Böylece

$$\partial A \cap A = (\overline{A} \cap \overline{X\setminus A}) \cap A = \overline{A} \cap (X\setminus A) \cap A = \overline{A} \cap \emptyset = \emptyset$$

dur.

c) $\Rightarrow$). $\partial A = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = \emptyset$ dır. Bu durumda $\overline{A} \cap (X\setminus A) = \emptyset$ ve $\overline{A} \cup (X\setminus A) = X$ dir. O halde $\overline{A} = X\setminus(X\setminus A) = A$ olur. Teorem 5.29 gereğince A kapalıdır. Benzer şekilde $A \cap \overline{X\setminus A} = \emptyset$ dur. Diğeryandan $X = A \cup \overline{X\setminus A}$ olduğundan $\overline{X\setminus A} = X\setminus A$ olur. O halde $X\setminus A$ kapalıdır. Böylece A açıktır. O halde A hem açık hem de kapalıdır.

$\Leftarrow$). A hem açık hem de kapalı olsun. Bu durumda A kapalı olduğundan $\overline{A} = A$ dır. Diğer yandan A açık olduğundan $X\setminus A$ kapalı ve dolayıdıyla $\overline{X\setminus A} = X\setminus A$ dır. Böylece

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = A \cap (X\setminus A) = \emptyset$$

dur.

d) Teorem 5.50 gereğince $X\setminus\overset{\circ}{A} = \overline{X\setminus A}$ ve böylece $\overline{X\setminus\overset{\circ}{A}} = \overline{X\setminus A}$ dır. O halde

$$\partial(\overset{\circ}{A}) = \overline{\overset{\circ}{A}} \cap \overline{(X\setminus\overset{\circ}{A})} \subseteq \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = \partial A$$

dır.

e) $\mathbb{R}$ standart uzayının $A = (0,1) \cup \{2\}$ alt kümesi verilsin. Bu durumda $\overset{\circ}{A} = (0,1)$ dir. Böylece

$$\partial(\overset{\circ}{A}) = \{0,1\} \quad \text{ve} \quad \partial A = \{0,1,2\}$$

dir. O halde

$$\partial(\overset{\circ}{A}) \neq \partial A$$

dır.✔

ÇÖZÜM 20

Teorem 5.68 gereğince $A \subseteq X$ için

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$$

dır. Böylece

$$\overline{A \cup \text{dış}A} = \overline{A} \cup \overline{\text{dış}A} = \overline{A} \cup \overline{X\setminus\overline{A}} \supseteq \overline{A} \cup X\setminus\overline{A} = X$$

dir. O halde

$$\overline{A \cup \text{dış}A} = X$$

dir.✔

ÇÖZÜM 21

a) A sonlu olsun. Bu durumda A kapalıdır. Böylece $\overline{A} = A$ dır. Diğer yandan $\overline{\mathbb{R}\setminus A} = \mathbb{R}$ dir. Böylece

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = A \cap \mathbb{R} = A$$

dır.

b) $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ olsun.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|a_i - a_j| \,|\, i \neq j\}$$

olsun. Bu durumda her i için

$$(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$$

kümesi açık ve

$$(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \cap A = \{a_i\}$$

olduğundan a_i noktası A kümesinin bir izole noktasıdır. O halde A nın her bir noktası A nın bir izole noktası dır.✔

ÇÖZÜM 22

$\mathbb{R}^2$ de bir (x_0, y_0) noktası nın yerel tabanı, $\varepsilon > 0$ için

$$B((x_0,y_0),\varepsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

olmak üzere,

$$\mathscr{B}_{(x_0,y_0)} = \{B((x_0,y_0),\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$

dır.

a) $A = \{(x,y) | y = 0\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını ve dışlarını bulalım.

i) **A kümesinin limit noktaları:** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(x_0, y_0) \in A$ ve $B((x_0,y_0),\varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. Bu durumda $y_0 = 0$ dır.

$$x_0 < r < x_0 + \varepsilon$$

özelliğinde bir $r \in \mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda

$$(r,0) \in B((x_0,y_0),\varepsilon) \cap (A\setminus\{(x_0,y_0)\})$$

dur. Böylece

$$B((x_0,y_0),\varepsilon) \cap (A\setminus\{(x_0,y_0)\}) \neq \emptyset$$

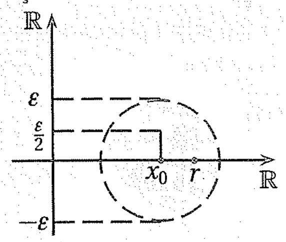
dur. (Şekil 5.14 ya bakınız.) O halde (x_0, y_0) noktası A kümesinin bir limit noktası dır.

$(x_0, y_0) \notin A$ olsun. Bu durumda $y_0 \neq 0$ dır. $0 < \varepsilon < |y_0|$ şeklinde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. Bu durumda $(x_0, y_0) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ dır. Üstelik

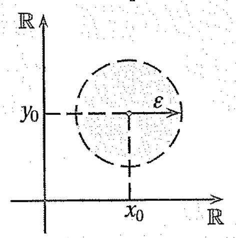
$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \bigcap (A \setminus \{(x_0, y_0)\}) = \emptyset$$

dur. (Şekil 5.14 ye bakınız.) Böylece (x_0, y_0) noktası A nın bir limit noktası değildir. Böylece $\widetilde{A} = A$ dır.

Şekil 5.14



Şekil 5.15



ii) A **kümesinin kapanışı:** $\overline{A} = A \bigcup \widetilde{A} = A$ dır.

iii) A **kümesinin içi:** $(x_0, 0) \in A$ ve $B((x_0, 0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,0)}$ olsun. Bu durumda $y_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ olmak üzere $(x_0, y_0) \in B((x_0, 0), \varepsilon)$ ve $(x_0, y_0) \notin A$ dır. Böylece

$$B((x_0, 0), \varepsilon) \nsubseteq A$$

dır. O halde $(x_0, 0)$ noktası A kümesinin bir iç noktası değildir. Böylece A kümesinin hiç bir iç noktası yoktur. Yani $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ dur. (Şekil 5.16 ye bakınız.)

iv) A **kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x, y) | y \neq 0\}$ dır. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(x_0, y_0) \in A$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda $y_0 = 0$ dır.

$$B((x_0, 0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,0)}$$

olsun. Bu durumda

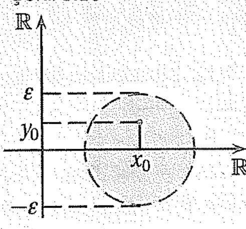
$$(x_0, \varepsilon/2) \in B((x_0, 0), \varepsilon) \bigcap ((\mathbb{R}^2 \setminus A) \setminus \{(x_0, 0)\})$$

dır. Böylece

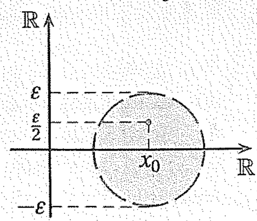
$$B((x_0, 0), \varepsilon) \bigcap ((\mathbb{R}^2 \setminus A) \setminus \{(x_0, 0)\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde $(x_0, 0)$ noktası A kümesinin bir limit noktası dır. (Şekil 5.19 (a) ya bakınız.)

Şekil 5.16



Şekil 5.17



$(x_0, y_0) \notin A$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda $y_0 \neq 0$ dır. $y_1 = y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Bu durumda $(x_0, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ dur. Üstelik

$$(x_0, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \bigcap ((\mathbb{R}^2 \setminus A) \setminus \{(x_0, y_0)\})$$

dır. O halde

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \bigcap ((\mathbb{R}^2 \setminus A) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \neq \emptyset$$

dur. Böylece (x_0, y_0) noktası $\mathbb{R}^2 \setminus A$ nın bir limit noktası dır. Böylece $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus A} = \mathbb{R}^2$ dır. (Şekil 5.19 ya bakınız.) Dolayısıyla $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus A} = \mathbb{R}^2$ dır. Buradan $\partial A = \overline{A} \bigcap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus A} = A \bigcap \mathbb{R}^2 = A$ elde edilir.

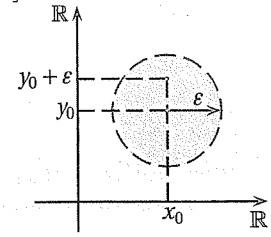
v) A **kümesinin dışı:** $\text{dış}A = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x, y) | y \neq 0\}$ dır.

b) $B = \{(x, y) | x > 0, y \neq 0\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını ve dışlarını bulalım.

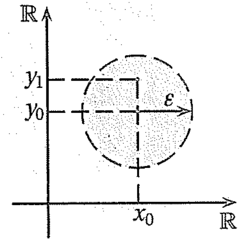
i) B **kümesinin limit noktaları:** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

ii) $(x_0, y_0) \in B$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda $y_0 \neq 0$ ve $x_0 > 0$ dır. $y_0 > 0$ olduğunu kabul edelim. ($y_0 < 0$ hali benzer şekilde yapılır.) $y_1 = y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Bu durumda $(x_0, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \bigcap (B \setminus \{(x_0, y_0)\})$ ve böylece $B((x_0, y_0), \varepsilon) \bigcap (B \setminus \{(x_0, y_0)\}) \neq \emptyset$ dur. O halde (x_0, y_0) noktası B kümesinin bir limit noktası dır. (Şekil 5.18 ya bakınız.)

Şekil 5.18



Şekil 5.19



$x_0 \geq 0$ olmak üzere $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ve $B((x_0, 0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,0)}$ olsun. Bu durumda

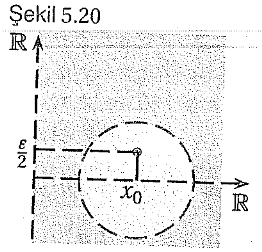
$$(x_0, \varepsilon/2) \in B((x_0, 0), \varepsilon) \bigcap (B \setminus \{(x_0, 0)\})$$

ve böylece

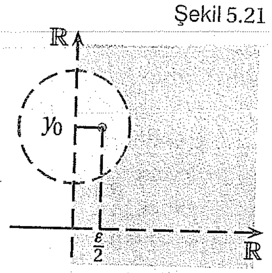
$$B((x_0,0),\varepsilon)\cap(B\setminus\{(x_0,0)\})\neq\emptyset$$

dur. O halde $(x_0,0)$ noktası B kümesinin bir limit noktası dır. (Şekil 5.22 ya bakınız.)
$y_0\neq 0$ ve $x_0=0$ olmak üzere $(x_0,y_0)=(0,y_0)$ noktalarınında B kümesinin bir limit noktası olduğu benzer şekilde gösterilir. O halde $\widetilde{B}=\{(x,y)|x\geq 0\}$ dır. (Şekil 5.22 ya bakınız.)

Şekil 5.20



Şekil 5.21



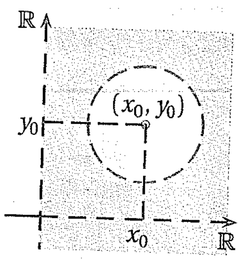
iii) B **kümesinin kapanışı:** $\overline{B}=B\cup\widetilde{B}=\{(x,y)|x\geq 0\}$ dır.

iv) B **kümesinin içi:** $(x_0,y_0)\in B$ olsun. Bu durumda $x_0>0$ ve $y_0<0$ veya $y_0>0$ dır. $y_0>0$ olduğunu kabul edelim. ($y_0<0$ olmasıhali benzer şekilde yapılır.) $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{x_0,y_0\}$ olsun. Bu durumda

$$B((x_0,y_0),\varepsilon)\in\mathscr{B}_{(x_0,y_0)} \quad \text{ve} \quad B((x_0,y_0),\varepsilon)\subseteq B$$

dir. (Şekil 5.22 ye bakınız.) O halde (x_0,y_0) noktası B kümesinin bir iç noktası dır. O halde $\overset{\circ}{B}=B$ dir. Bu durumda B kümesi açıktır. ($B=\{(x,y)|x>0\}\cap\{(x,y)|y\neq 0\}$ olduğundan açıktır. O halde içi kendisine eşittir.)

Şekil 5.22



v) B **kümesinin sınırı:** B kümesi açık olduğundan $\mathbb{R}^2\setminus B$ kümesi kapalıdır. Böylece $\overline{\mathbb{R}^2\setminus B}=\mathbb{R}^2\setminus B$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}\partial B &= \overline{B}\cap\overline{\mathbb{R}^2\setminus B}\\ &= \{(x,y)|x\geq 0\}\cap(\{(x,y)|x\leq 0\}\cup\{(x,y)|y=0\})\\ &= \{(x,y)|x=0\}\cup\{(x,y)|y=0,x\geq 0\}\end{aligned}$$

dır.

vi) B **kümesinin dışı:**

$$\text{dış}B=\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)|x\geq 0\}=\{(x,y)|x<0\}$$

dır.

c) $C=A\cup B=\{(x,y)|x>0 \text{ veya } y=0\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını ve dışlarını bulalım.

i) C **kümesinin limit noktaları:** $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ olsun. Alıştırma 17 (b) gereğince

$$\widetilde{C}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\{(x,y)|y=0 \text{ veya } x\geq 0\}$$

dır.

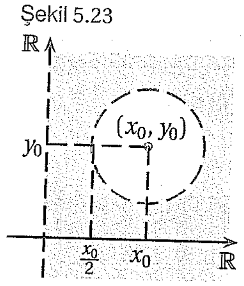
ii) C **kümesinin kapanışı.**

$$\overline{C}=C\cup\widetilde{C}=\{(x,y)|x\geq 0 \text{ veya } y=0\}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

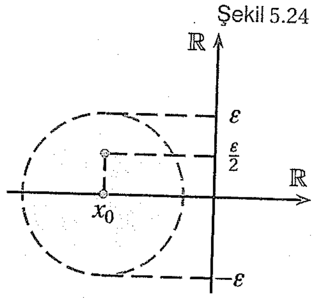
dir.

iii) C **kümesinin içi:** $(x_0,y_0)\in C$ olsun. Bu durumda $x_0>0$ veya $y_0=0$ ve $x_0\leq 0$ dır. $x_0>0$ olsun. Bu durumda $\varepsilon=\frac{x_0}{2}$ olmak üzere $B((x_0,y_0),\varepsilon)\in\mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ ve $B((x_0,y_0),\varepsilon)\subseteq C$ dir. O halde (x_0,y_0) noktası C kümesinin bir iç noktası dır. (Şekil 5.23 ya bakınız.) $y_0=0$ ve $x_0\leq 0$ olmak üzere $B((x_0,y_0),\varepsilon)\in\mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. $\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ ve $\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\notin C$ dir. O halde $B((x_0,y_0),\varepsilon)\nsubseteq C$ dir. Yani (x_0,y_0) noktası C nin bir iç noktası değildir. Böylece $\overset{\circ}{C}=\{(x,y)|x>0\}$ dır. (Şekil 5.24 ye bakınız.)

Şekil 5.23



Şekil 5.24



iv) C **kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}^2\setminus C=\{(x,y)|x\leq 0, y\neq 0\}$ dır. (b) dekine benzer şekilde $\overline{\mathbb{R}^2\setminus C}=\{(x,y)|x\leq 0\}$ olduğu gösterilir. Böylece

$$\begin{aligned}\partial C &= \overline{C} \cap \overline{\mathbb{R}^2\setminus C}\\ &= \{(x,y)|x \geq 0 \text{ veya } y=0\} \cap \{(x,y)|x \leq 0\}\\ &= \{(x,y)|x=0\} \cup \{(x,y)|x \leq 0, y=0\}\end{aligned}$$

dır.

v) C **kümesinin dışı:** dış$C = \mathbb{R}^2\setminus\overline{C} = \{(x,y)|x<0, y \neq 0\}$ dır.

d) $D = \{(x,y)|x=0\} \cup \{(x,y)|y=0\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırınıve dışınıyazalım.

i) D **kümesinin limit noktaları:** $\widetilde{\{(x,y)|x=0\}} = \{(x,y)|x=0\}$ ve

$$\widetilde{\{(x,y)|y=0\}} = \{(x,y)|y=0\}$$

olduğundan D nin herbir noktası D nin bir limit noktası dır. Yani

$$\widetilde{D} = \widetilde{\{(x,y)|x=0\}} \cup \widetilde{\{(x,y)|y=0\}} = D$$

dir.

ii) D **kümesinin kapanışı:** $\overline{D} = D \cup \widetilde{D} = D$ dir.

iii) D **kümesinin içi:** $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ dur.

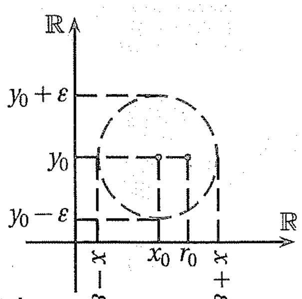
iv) D **kümesinin sınırı:** $\partial D = D$ dir.

v) D **kümesinin dışı:** dış$D = \mathbb{R}^2\setminus\overline{D} = \{(x,y)|x \neq 0, y \neq 0\}$ dır.

e) $E = \{(x,y)|x \text{ rasyonel}\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını ve dışını bulalım.

i) E **kümesinin limit noktaları:** $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $B((x_0,y_0),\varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. $x_0 < r_0 < x_0+\varepsilon$ özelliğinde $r_0 \in \mathbb{Q}$ sayısıseçelim. Bu durumda $(r_0,y_0) \in B((x_0,y_0),\varepsilon) \cap (E\setminus\{(x_0,y_0)\})$

Şekil 5.25



ve böylece

$$B((x_0,y_0),\varepsilon) \cap (E\setminus\{(x_0,y_0)\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde (x_0,y_0) noktası E kümesinin bir limit noktası dır. O halde $\widetilde{E} = \mathbb{R}^2$ dir. (Şekil 5.25 ye bakınız.)

ii) E **kümesinin kapanışı:**

$$\overline{E} = E \cup \widetilde{E} = \mathbb{R}^2$$

dir.

iii) E **kümesinin içi:** $(x_0,y_0) \in E$ ve $B((x_0,y_0),\varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. Bu durumda

$$x_0 < r_0 < x_0+\varepsilon$$

özelliğinde $r_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ seçersek

$$(r_0,y_0) \in B((x_0,y_0),\varepsilon) \quad \text{ve} \quad (r_0,y_0) \notin E$$

olur. Böylece

$$B((x_0,y_0),\varepsilon) \nsubseteq E$$

dir. O halde E kümesinin hiç bir iç noktası yoktur. (Şekil ?? (c) ye bakınız.)

iv) E **kümesinin sınırı:**

$$\mathbb{R}^2\setminus E = \{(x,y)|x \text{irrasyonel}\}$$

dir. E nin kapanışına benzer şekilde $\overline{\mathbb{R}^2\setminus E} = \mathbb{R}^2$ olduğu gösterilir. Böylece

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^2\setminus E} = \mathbb{R}^2$$

dir.

v) E **kümesinin dışı:**

$$\text{dış}E = \mathbb{R}^2\setminus\overline{E} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2 = \emptyset$$

dur.

f) $F = \{(x,y)|0 < x^2+y^2 < 1\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını ve dışınıbulalım.

i) F **kümesinin limit noktaları:** $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(x_0,y_0) = (0,0)$ ve $B((0,0),\varepsilon) \in \mathscr{B}_{(0,0)}$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{\varepsilon}{2},0\right) \in B((0,0),\varepsilon) \cap (E\setminus\{(0,0)\})$$

ve böylece $B((0,0),\varepsilon) \cap (E\setminus\{(0,0)\}) \neq \emptyset$ dur. O halde $(0,0)$ noktası F kümesinin bir limit noktası dır.

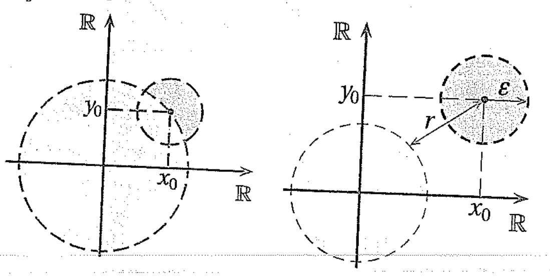
$(x_0,y_0) \in F$ özelliğindeki noktaların F kümesinin bir limit noktası olduğu açıktır.

(x_0,y_0) noktası $x^2+y^2 = 1$ özelliğini sağlasın. $B((x_0,y_0),\varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right) \in B((x_0,y_0),\varepsilon) \cap (F\setminus\{(x_0,y_0)\})$$

dır. O halde (x_0, y_0) noktası F kümesinin bir limit noktası dır. (Şekil 5.26 (a) ya bakınız.)

Şekil 5.26



(x_0, y_0) noktası $x^2 + y^2 > 1$ özelliğini sağlasın ve (x_0, y_0) noktasının F ye uzaklığı r olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{r}{2}$ olmak üzere

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (F \setminus \{(x_0, y_0)\}) = \emptyset$$

dur. O halde (x_0, y_0) noktası F nin bir limit noktası değidir. (Şekil 5.26 (b) ye bakınız.)

Böylece $\widetilde{F} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ dir.

ii) F kümesinin kapanışı: $\overline{F} = F \cup \widetilde{F} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ dir.

iii) F kümesinin içi: F kümesi açık olduğundan içi kendisine eşittir.

iv) F kümesinin sınırı:

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

dır. F açık olduğundan $\mathbb{R}^2 \setminus F$ kapalıdır. Böylece

$$\overline{\mathbb{R}^2 \setminus E} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

dır. Böylece

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus E} = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

dır.

v) F kümesinin dışı:

$$\text{dış}F = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{F} = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$$

dir.

g)

$$G = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

kümesinin limit noktaları, kapanışı, içi, sınırıve dışı aşağıdaki şekilde bulunur.

i) G kümesinin limit noktaları:

$$\widetilde{G} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

dir.

ii) G kümesinin kapanışı:

$$\overline{G} = G \cup \widetilde{G} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

dir.

iii) G kümesinin içi: $\overset{\circ}{G} = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ dir.

iv) G kümesinin sınırı: $\mathbb{R}^2 \setminus G = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$ ve

$$\overline{\mathbb{R}^2 \setminus G} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

dır. Böylece

$$\partial G = \overline{G} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus G} = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

dır.

v) G kümesinin dışı: $\text{dış}G = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G} = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$ dir.

h) $H = \{(x, y) | x \neq 0, y = 1/x\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını ve dışlarını bulalım.

i) H kümesinin limit noktaları: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(x_0, y_0) \in H$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda Şekil 5.27 da görüldüğü gibi

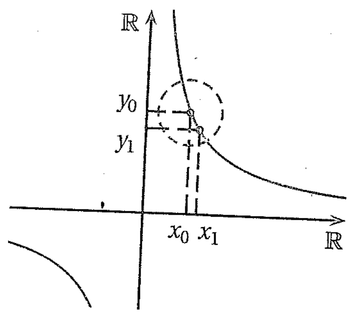
$$(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (H \setminus \{(x_0, y_0)\})$$

olacak şekilde $(x_1, y_1) \in H$ noktası vardır. Böylece

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (H \setminus \{(x_0, y_0)\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde (x_0, y_0) noktası H kümesinin bir limit noktası dır.

Şekil 5.27

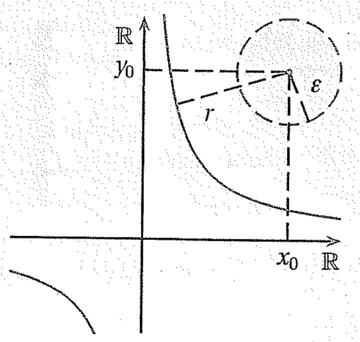


$(x_0, y_0) \notin H$ olsun. Bu durumda $x_0 \neq 0$ dır. (x_0, y_0) noktası nın H a uzaklığı r olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{r}{2}$ olmak üzere $(x_0, y_0) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ dır. Üstelik

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (H \setminus \{(x_0, y_0)\}) = \emptyset$$

dur. Bu durumda (x_0, y_0) noktası H nın bir limit noktası değildir. Böylece $\widetilde{H} = H$ dır. (Şekil 5.28 ye bakınız.)

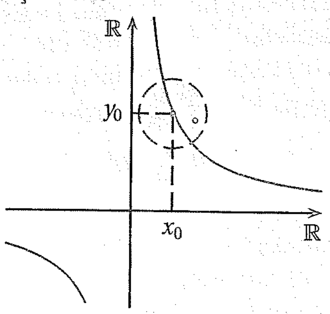
Şekil 5.28



ii) H **kümesinin kapanışı:** $\overline{H} = H \cup \widetilde{H} = H$ dır.

iii) H **kümesinin içi.** $(x_0, y_0) \in H$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda $y_1 = y_0 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ olmak üzere $(x_0, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ ve $(x_0, y_1) \notin H$ dır. Böylece $B((x_0, y_0), \varepsilon) \not\subseteq H$ dır. O halde (x_0, y_0) noktası H kümesinin bir iç noktası değildir. Böylece H kümesinin hiç bir iç noktası yoktur. Yani $\overset{\circ}{H} = \emptyset$ dur. (Şekil 5.29 ye bakınız.)

Şekil 5.29



iv) H **kümesinin sınırı:**

$$\mathbb{R}^2 \setminus H = \{(x, y) \mid y \neq 1/x\}$$

dır.

$(x_0, y_0) \notin \mathbb{R}^2 \setminus H$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda Şekil 5.29 de görüldüğü gibi

$$(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap ((\mathbb{R}^2 \setminus H) \setminus \{(x_0, y_0)\})$$

olacak şekilde $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus H$ noktası vardır. Böylece

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap ((\mathbb{R}^2 \setminus H) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde (x_0, y_0) noktası $\mathbb{R}^2 \setminus H$ kümesinin bir limit noktası dır.

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus H$ ise açıkça (x_0, y_0) noktası $\mathbb{R}^2 \setminus H$ nın bir limit noktası dır.

Böylece

$$\widetilde{\mathbb{R}^2 \setminus H} = \mathbb{R}^2$$

dır. Dolayısıyla

$$\overline{\mathbb{R}^2 \setminus H} = \mathbb{R}^2$$

dır. Böylece

$$\partial H = \overline{H} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus H} = H \cap \mathbb{R}^2 = H$$

dır.

v) H **kümesinin dışı:**

$$\text{dış}H = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H} = \mathbb{R}^2 \setminus H = \{(x, y) \mid y \neq 1/x\}$$

dir.

i)

$$I = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\}$$

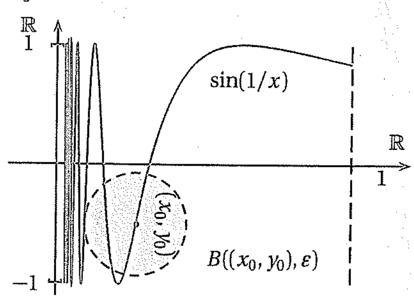
kümesinin limit noktalarını, kapanışlarını, içlerini, sınırlarını ve dışlarını bulalım.

i) I **kümesinin limit noktaları:** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(x_0, y_0) \in I$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$ olsun. Bu durumda Şekil 5.30 de görüldüğü gibi

$$(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (I \setminus \{(x_0, y_0)\})$$

olacak şekilde $(x_1, y_1) \in I$ noktası vardır. Böylece

Şekil 5.30



$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (I \setminus \{(x_0, y_0)\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde (x_0, y_0) noktası I kümesinin bir limit noktası dır.

$-1 \leq y_0 \leq 1$ olmak üzere $(x_0, y_0) = (0, y_0)$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. Bu durumda Şekil 5.31 de görüldüğü gibi

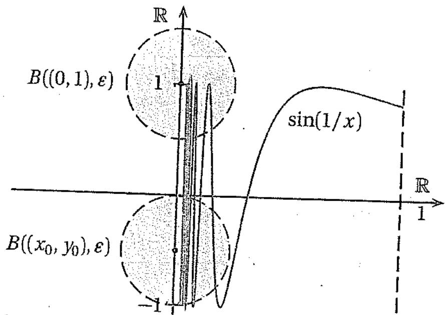
$$(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (I \setminus \{(x_0, y_0)\})$$

olacak şekilde $(x_1, y_1) \in I$ noktası vardır. Böylece

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (I \setminus \{(x_0, y_0)\}) \neq \emptyset$$

dur. O halde (x_0, y_0) noktası I kümesinin bir limit noktası dır.

Şekil 5.31



$(x_0, y_0) \notin I$ ve $-1 \leq y_0 \leq 1$ olmak üzere $(x_0, y_0) \neq (0, y_0)$ olsun. Şekil 5.32 da görüldüğü gibi

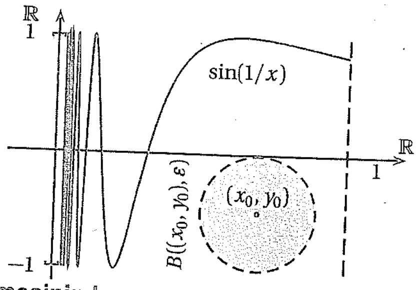
$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (I \setminus \{(x_0, y_0)\}) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece bu şekildeki (x_0, y_0) noktalarıI nın bir limit noktası değildir. Böylece

$$\tilde{I} = \{(x,y) | 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(0,y) | 0 \leq y \leq 1\}$$

dir.

Şekil 5.32



ii) *I* **kümesinin kapanışı:**

$$\begin{aligned}\overline{I} &= I \cup \tilde{I} \\ &= \{(x,y) | 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(0,y) | 0 \leq y \leq 1\}\end{aligned}$$

dır.

iii) *I* **kümesinin içi:** $(x_0, y_0) \in I$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(x_0,y_0)}$ olsun. Bu durumda Şekil 5.31 de görüldüğü gibi $(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ ve $(x_1, y_1) \notin I$ olacak şekilde bir (x_1, y_1) noktası vardır. Böylece

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \nsubseteq I$$

dır. O halde (x_0, y_0) noktası I kümesinin bir iç noktası değildir. Böylece I kümesinin hiç bir iç noktası yoktur. Yani $\overset{\circ}{I} = \emptyset$ dur.

iv) *I* **kümesinin sınırı:** Benzer şekilde $\mathbb{R}^2 \setminus I$ kümesinin kapanışının $\mathbb{R}^2$ olduğu gösterilir. O halde

$$\begin{aligned}\partial I &= \overline{I} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus I} = \overline{I} \cap \mathbb{R}^2 \\ &= \{(x,y) | 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(0,y) | 0 \leq y \leq 1\}\end{aligned}$$

dır.

v) *I* **kümesinin dışı:**

$$\begin{aligned}\text{dış}(I) &= \mathbb{R}^2 \setminus \overline{I} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) | 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \\ &\quad \cup \{(0,y) | 0 \leq y \leq 1\}\end{aligned}$$

dır.

j) $J = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{Q}\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını ve dışını bulalım.

i) *J* **kümesinin limit noktaları:** **(e)** şıkkına benzer şekilde yapılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir. $\tilde{J} = \mathbb{R}^2$ dir.

ii) *J* **kümesinin kapanışı:** $\overline{J} = J \cup \tilde{J} = \mathbb{R}^2$ dir.

iii) *J* **kümesinin içi:** J kümesinin hiç bir iç noktası yoktur.

iv) *J* **kümesinin sınırı:** $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus J} = \mathbb{R}^2$ ve böylece

$$\partial J = \overline{J} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus J} = \mathbb{R}^2$$

dir.

v) *J* **kümesinin dışı:** dış$J = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{J} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2 = \emptyset$ dur.

k) $K = \{(m,n) | m, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını ve dışını bulalım.

i) *K* **kümesinin limit noktaları:** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

ii) $(x_0, y_0) = (m,n) \in K$ olsun. Şekil 5.33 da görüldüğü gibi $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (K \setminus \{(m,n)\}) = \emptyset$$

olduğu görülür. O halde $(x_0, y_0) \in K$ ise (x_0, y_0) noktası

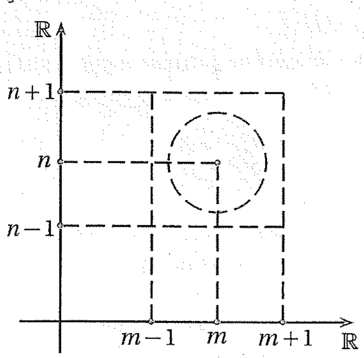
K nın bir limit noktası değildir.

$(x_0, y_0) \notin K$ olsun. Bu durumda ya $x_0, y_0 \notin \mathbb{Z}$ ya $x_0 \notin \mathbb{Z}$ ve $y_0 \in \mathbb{Z}$ ya da $y_0 \notin \mathbb{Z}$ ve $x_0 \in \mathbb{Z}$ dir. $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ olduğunu kabul edelim. Diğer durumlar benzer şekilde yapılır. Bu durumda

$$n < x_0 < n+1 \quad \text{ve } m < y_0 < m+1$$

olacak şekilde $n, m \in \mathbb{Z}$ vardır.

Şekil 5.33



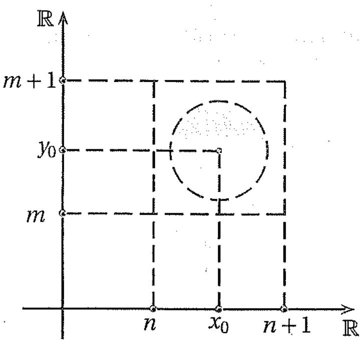
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x_0 - n|, |x_0 - (n+1)|, |y_0 - m|, |y_0 - (y+1)|\}$$

olmak üzere

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (K \setminus \{(x_0, y_0)\}) = \emptyset$$

dur. Böylece (x_0, y_0) noktası K nın bir limit noktası değildir. (Şekil 5.34 (b) ye bakınız.)

Şekil 5.34



O halde K nın hiç bir limit noktası yoktur.

iii) K **kümesinin kapanışı:** $\overline{K} = K \cup \widetilde{K} = K$ dır.

iv) K **kümesinin içi:** $(m, n) \in K$ ve $B((m, n), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(m,n)}$ olsun. Bu durumda $B((m, n), \varepsilon)$ kümesi sayılamaz ve K sayılabilir olduğundan

$$B((m, n), \varepsilon) \not\subseteq K$$

dır. O halde K kümesinin hiç bir iç noktası yoktur.

v) K **kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}^2 \setminus K$ kümesinin kapanışının $\mathbb{R}^2$ olduğu kolayca gösterilir. Böylece

$$\partial K = \overline{K} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus K} = K \cap \mathbb{R}^2 = K$$

dır.

vi) K **kümesinin dışı:** dış$K = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K} = \mathbb{R}^2 \setminus K$ dır.

l) $L = \{(1/m, 1/n) | m, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin limit noktalarını, kapanışını, içini, sınırını ve dışını bulalım.

i) L **kümesinin limit noktaları:** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $(x_0, y_0) = (1/m, 1/n) \in L$ olsun. Şekil 5.35 de görüldüğü gibi

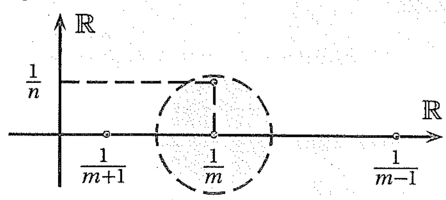
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right|, \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right|\right\}$$

alınırsa

$$B((1/m, 1/n), \varepsilon) \cap (L \setminus \{(1/m, 1/n)\}) = \emptyset$$

olduğu görülür. O halde $(1/m, 1/n)$ noktası noktası H ın bir limit noktası değildir.

Şekil 5.35

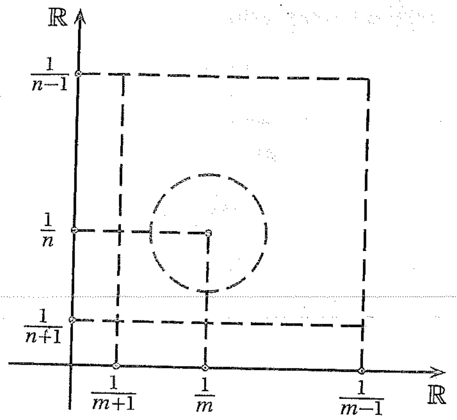


$x_0 = 1/m$ ve $y_0 = 0$ olmak üzere $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ve $B((x_0, y_0), \varepsilon)$
$\in \mathscr{B}_{(x_0, y_0)}$
olsun. Bu durumda $|1/n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece

$$(1/m, 1/n) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap L \setminus \{(x_0, y_0)\}$$

dir. O halde (x_0, y_0) noktası L nin bir limit noktası dır. Benzer şekilde $y_0 = 1/n$ ve $x_0 = 0$ olmak üzere $(x_0, y_0) = (0, 1/n)$ şeklindeki noktalarda L nin bir limit noktası dır. (Şekil 5.36 ye bakınız.)

Şekil 5.36



$x_0 \neq 1/m$ ve $y_0 \neq 1/n$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{m+1} < x_0 < \frac{1}{m} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{n+1} < y_0 < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$ seçelim.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}\min\{|x_0 - 1/(m+1)|, |x_0 - 1/m|, \\ &\quad |y_0 - 1/(n+1)|, |y_0 - 1/n|\} \end{aligned}$$

olmak üzere $B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap L \setminus \{(x_0, y_0)\} = \emptyset$ olur. Bu durumda (x_0, y_0) noktası L nin bir limit noktası değildir. O halde

$$\widetilde{L} = \{(1/m, 0) | m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, 1/n) | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,0)\}$$

dır.

ii) *L* **kümesinin kapanışı:**

$$\begin{aligned} \overline{L} &= L \cup \widetilde{L} \\ &= \{(1/m, 1/n) | m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1/m, 0) | m \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{(0, 1/n) | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,0)\} \end{aligned}$$

dır.

iii) *L* **kümesinin içi:** $(1/m, 1/n) \in L$ ve $B((1/m, 1/n), \varepsilon) \in \mathscr{B}_{(1/m, 1/n)}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{n+1} < r_0 < \frac{1}{n-1}$$

özelliğinde $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sayısıseçersek

$$(1/m, r_0) \in B((1/m, 1/n), \varepsilon) \text{ ve } (1/m, r_0) \notin L$$

olur. Böylece $B((1/m, 1/n), \varepsilon) \nsubseteq L$ dir. O halde L kümesinin hiç bir iç noktası yoktur.

iv) *L* **kümesinin sınırı:** $\mathbb{R}^2 \setminus L$ kümesinin kapanışının $\mathbb{R}^2$ olduğu kolayca gösterilir. Böylece

$$\begin{aligned} \partial L &= \overline{L} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus L} \\ &= \{(1/m, 1/n) | m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1/m, 0) | m \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{(0, 1/n) | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,0)\} \end{aligned}$$

dır.

v) *L* **kümesinin dışı:**

$$\begin{aligned} \text{dış}L &= \mathbb{R}^2 \setminus \overline{L} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(1/m, 1/n) | m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1/m, 0) | m \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{(0, 1/n) | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,0)\} \end{aligned}$$

dır.✔

ÇÖZÜM 23

a) $z_0 = x_0 + y_0 \in A + B$ olsun. $x_0 \in A$ ve A kümesi açık olduğundan $B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır.

$$B(x_0 + y_0, \varepsilon) \subseteq A + B$$

olduğunu gösterelim. $z \in B(x_0 + y_0, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$d_2(z, x_0 + y_0) = d_2(z - y_0, x_0) < \varepsilon$$

dur. O halde

$$z - y_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$$

dır. Böylece $z - y_0 = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Bu durumda $z = a + y_0$ dır. Böylece $z \in A + B$ dir. Dolayısıyla

$$B(x_0 + y_0, \varepsilon) \subseteq A + B$$

dir. O halde Teorem 5.48 gereğince $A + B$ açıktır.

b) $x \in C$ olsun.Bu durumda

$$d_2(x, B) < \varepsilon$$

dur. Böylece

$$d_2(x, b) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. $\delta = \varepsilon - d_2(x, b)$ olsun. $B(x, \delta) \subseteq C$ olduğunu gösterelim. $y \in B(x, \delta)$ olsun. Bu durumda

$$d_2(x, y) < \delta = \varepsilon - d_2(x, b)$$

dir. Böylece

$$d_2(y, b) \leq d_2(x, y) + d_2(x, b) < \varepsilon$$

dur. O halde
$$d_2(y,B) \leq d_2(y,b) < \varepsilon$$
dur. Böylece $y \in C$ dir. Bu durumda Teorem 5.48 gereğince C açıktır.✔

ÇÖZÜM 24

a) $x_0 \in \overline{A}$ olsun. $x_0 \in A$ ise $d(x_0, A) = 0$ dır. $x_0 \notin A$ ise x_0 noktası a nın bir limit noktası dır. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $B(x_0,\varepsilon) \bigcap A \neq \emptyset$ dur. Böylece $x \in B(x_0,\varepsilon) \bigcap A$ olacak şekilde bir x vardır. Yani $d(x_0, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır.
$$d(x,A) = \in f\{d(x_0,x) | x \in A\} < \varepsilon$$
dur. O halde $d(x_0, A) = 0$ dır. Tersine $d(x_0, A) = 0$ olsun. Bu durumda $x_0 \in A$ veya her $\varepsilon > 0$ için $d(x_0, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. $x_0 \in A$ ise $x_0 \in \overline{A}$ dır. Diğer durumda $x \in B(x_0,\varepsilon)$ ve böylece
$$x \in B(x_0,\varepsilon) \bigcap A$$
dır. O halde $x \in \overline{A}$ dır.

b) (X, d) ayrık metrik uzay, $x_0 \in A$ ve $\varepsilon = 1$ olsun. Bu durumda
$$D(x_0, 1) = X$$
ve böylece
$$D(x_0, 1)^\circ = X$$
dir. Diğeryandan $B(x_0, 1) = \{x_0\}$ dır. O halde X in birden fazla elemanıvarsa
$$D(x_0,\varepsilon)^\circ \neq B(x_0,\varepsilon)$$
dur. Böylece herhangi bir metrik uzayda her $\varepsilon > 0$ için
$$D(x_0,\varepsilon)^\circ = B(x_0,\varepsilon)$$
olmayabilir.

c) (X, d) ayrık metrik uzay, $x_0 \in A$ ve $\varepsilon = 1$ olsun. Bu durumda $D(x_0, 1) = X$ dir. Diğer yandan
$$B(x_0, 1) = \{x_0\}$$
ve böylece
$$\overline{B(x_0, 1)} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$$
dır. O halde X in birden fazla elemanıvarsa
$$D(x_0,\varepsilon) \neq \overline{B(x_0,\varepsilon)}$$
dur. Böylece herhangi bir metrik uzayda her $\varepsilon > 0$ için
$$D(x_0,\varepsilon) = \overline{B(x_0,\varepsilon)}$$
olmayabilir.✔

ÇÖZÜM 25

a)
$$\begin{aligned} \text{dış}(A \cup B) &= X \backslash \overline{A \cup B} \\ &= X \backslash \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= (X \backslash \overline{A}) \bigcap (X \backslash \overline{B}) \\ &= \text{dış}(A) \bigcap \text{dış}(B) \end{aligned}$$
dir.

b) Her $A \subseteq X$ için $(X \backslash \overline{A}) \bigcap \overline{A} = \emptyset$ ve böylece $(X \backslash \overline{A}) \bigcap A = \emptyset$ dur. O halde
$$\text{dış}(A) \bigcap A = X \backslash \overline{A} \bigcap A = \emptyset$$
dur.

c)
$$\text{dış}(\emptyset) = X \backslash \overline{\emptyset} = X \backslash \emptyset = X$$
dir.

d)
$$\begin{aligned} \text{dış}(X \backslash \text{dış}(A)) &= \text{dış}(X \backslash (X \backslash \overline{A})) = \text{dış}(\overline{A}) \\ &= X \backslash \overline{\overline{A}} = X \backslash \overline{A} = \text{dış}(A) \end{aligned}$$
dır.✔

ÇÖZÜM 26

a) $S \subseteq T$ olduğundan $\overline{S} \subseteq \overline{T}$ dır. S yoğun olduğundan $\overline{S} = X$ dir. Böylece $\overline{T} = X$ dir. O halde T kümesi yoğundur.

b) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur. $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ olsun.
$$T_x = \mathbb{Q} \bigcup \{x\}$$
olsun. (a) gereğince T_x yoğundur. Üstelik $y \neq x$ özelliğindeki $x, y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ için $T_x \neq T_y$ dir. Böylece $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ kümesi sayılamaz olduğundan
$$\{T_x | x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$$
kolleksiyonu sayılamazdır.

c) $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan her bir
$$T_x = \mathbb{Q} \bigcup \{x\}$$

kümesi sayılabilirdir. (a) gereğince her bir T_x kümesi yoğundur. Üstelik $y \neq x$ özelliğindeki $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ için $T_x \neq T_y$ dir. Böylece $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ kümesi sayılamaz olduğundan

$$\{T_x | x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$$

kolleksiyonu sayılamazdır.✔

ÇÖZÜM 27

Açıkça $U = \emptyset$ ise $\overline{A \cap \emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ dur. $U \neq \emptyset$ olsun. $x \in \overline{A \cap U}$ olsun. $x \notin \overline{U}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in V$ ve

$$U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $x \in U \cap V$ ve $U \cap V \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan

$$(V \cap U) \cap A = V \cap (U \cap A) = \emptyset$$

dur. Bu ise $x \in \overline{A \cap U}$ olmasıile çelişir. Böylece $x \in \overline{U}$ dur. O halde

$$\overline{A \cap U} \subseteq \overline{U} \tag{5.20}$$

dur. $x \in \overline{U}$ olsun. $x \notin \overline{A \cap U}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in V$ ve

$$V \cap (A \cap U) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece

$$A \cap (V \cap U) = \emptyset$$

dur. A yoğun olduğundan Teorem 5.46 gereğince

$$V \cap U = \emptyset$$

dur. Bu ise $x \in \overline{U}$ olmasıile çelişir. O halde $x \in \overline{A \cap U}$ dir. Böylece

$$\overline{U} \subseteq \overline{A \cap U} \tag{5.21}$$

dir. O halde (5.20) ve (5.21) gereğince $\overline{U} = \overline{A \cap U}$ dir.✔

ÇÖZÜM 28

Alıştırma 27 gereğince $\overline{A \cap B} = \overline{B} = X$ dir. O halde $A \cap B$ kümesi yoğundur.✔

ÇÖZÜM 29

Alıştırma 12 gereğince $\overline{A} = \{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ dır. $x \in \overline{A}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığıirrasyonel sayılar içerir. Böylece

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subseteq \overline{A}$$

dır. O halde

$$\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$$

dur. Böylece A kümesi hiç bir yerde yoğun değildir.✔

ÇÖZÜM 30

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \cdots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \cdots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dir.

a) **$(N, \mathcal{T}_1)$ uzayının yoğun alt kümeleri.** $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $1 \in A$ olduğunu kabul edelim. $U \neq \emptyset$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $1 \in U$ dur. Böylece

$$U \cap A \neq \emptyset$$

dur. O halde Teorem 5.46 gereğince A yoğundur. $1 \notin A$ olsun. Bu durumda $U = \{1\} \in \mathcal{T}_1$ ve

$$U \cap A = \emptyset$$

dur. O halde Teorem 5.46 gereğince A kümesi yoğun değildir.

b) **$(N, \mathcal{T}_2)$ uzayı nın yoğun alt kümeleri.** $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi sonsuz (veya sınırsız) ve $\{n, n+1, \cdots\} \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda A sonsuz olduğundan $n \leq m$ olacak şekilde bir $m \in A$ vardır. Bu durumda

$$m \in A \cap \{n, n+1, \cdots\}$$

ve dolayısıyla

$$A \cap \{n, n+1, \cdots\} \neq \emptyset$$

dur. O halde Teorem 5.46 gereğince A yoğundur. A sonlu ve $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ olsun. Bu durumda $m > \max A$ olmak üzere

$$\{m, m+1, \cdots\} \in \mathcal{T}_2$$

dur. Üstelik

$$A \cap \{m, m+1, \cdots\} = \emptyset$$

dur. Böylece Teorem 5.46 gereğince A kümesi yoğun değildir.✔

ÇÖZÜM 31

$U \neq \emptyset$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{T}_2$ dir. Böylece A kümesi $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında yoğun olduğundan $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Böylece A kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında yoğundur.✔

ÇÖZÜM 32

a) $U = [x, y) \in \mathscr{B}_{\text{sağ}}$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $x < q < y$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda $q \in U \cap \mathbb{Q}$ dur. Böylece $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ dur. Sonuç 5.48 gereğince $\mathbb{Q}$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayında yoğundur.

b) $U = (x, y] \in \mathscr{B}_{\text{sol}}$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $x < q < y$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda $q \in U \cap \mathbb{Q}$ dur. Böylece $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ dur. Sonuç 5.48 gereğince $\mathbb{Q}$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayında yoğundur.✔

ÇÖZÜM 33

a) $U = [x, y) \times [z, t) \in \mathscr{B}^2_{\text{sağ}}$ olsun. $x \neq y$ ve $z \neq t$ olduğundan

$$x < q < y, \quad z < p < t$$

olacak şekilde $q, p \in \mathbb{Q}$ sayıları seçelim. Bu durumda

$$(q, p) \in U \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$$

dur. Böylece

$$U \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

dur. Sonuç 5.48 gereğince $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayında yoğundur.

b) $U = (x, y] \times (z, t] \in \mathscr{B}^2_{\text{sol}}$ olsun. $x \neq y$ ve $z \neq t$ olduğundan

$$x < q < y, \quad z < p < t$$

olacak şekilde $q, p \in \mathbb{Q}$ sayılarıseçelim. Bu durumda

$$(q, p) \in U \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$$

dur. Böylece

$$U \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

dur. Sonuç 5.48 gereğince $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzayında yoğundur.✔

ÇÖZÜM 34

$(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonı

$$\mathscr{K}_a = \{\emptyset, X\} \cup \{U \subseteq X : a \in U\}$$

dur.

a) $a \in A$ olsun. Bu durumda A kapalı dır. Böylece $\overline{A} = A$ dır.

b) $a \notin A$ olsun. Bu durumda $A \cup \{a\}$ kümesi kapalıdır ve A yıkapsayan en küçük kapalı kümedir. Böylece Not 5.2 gereğince $\overline{A} = A \cup \{a\}$ dır.✔

ÇÖZÜM 35

$\mathbb{R}$ standart uzayında $A = [0, 1)$ olsun. Bu durumda $\overline{A} = [0, 1]$ ve böylece $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$ dir. Üstelik $A \neq \overset{\circ}{A}$ dir.✔

ÇÖZÜM 36

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ olduğundan

$$\mathcal{T}_{1_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0, \infty) \cup (x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\emptyset, A\} \cup \{(x, \infty) \mid x \geq 0\}$$

dir. $\left(A, \mathcal{T}_{1_A}\right)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonı

$$\mathscr{K}_{1_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0, x] \mid x \geq 0\}$$

dır.

a) $(A, \mathcal{T}_{1_A})$ uzayında $B = (1, 2)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $[0, 2]$ dir. Böylece $\overline{B} = [0, 2]$ dir.

b) Şimdi B nin içini bulalım. $U \in \mathcal{T}_{1_A}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $U = A$ veya bazı $x \geq 0$ için $U = (x, \infty)$ dur. B kümesi sınırlıU kümesi sınırlıolmadığından $U \nsubseteq B$ dir. O halde B nin hiç bir iç noktası yoktur. Bu durumda $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ dur.

c) $A \backslash B = [0, 1] \cup [2, \infty)$ dur. Böylece $A \backslash B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A dır. O halde $\overline{A \backslash B} = A$ dır. Böylece

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{A \backslash B} = [0, 2] \cap A = [0, 2]$$

dir.✔

ÇÖZÜM 37

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2_A} &= \{\emptyset, A\} \cup \{[0, \infty) \cup (-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\emptyset, A\} \cup \{[0, x) \mid x > 0\} \end{aligned}$$

dir. $\left(A, \mathcal{T}_{2_A}\right)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonı

$$\mathscr{K}_{2_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[x, \infty) \mid x > 0\}$$

dır.

a) $(A, \mathcal{T}_{2_A})$ uzayında $B = (1, 2)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $[1, \infty)$ dur. Böylece

$$\overline{B} = [1, \infty)$$

dir.

b) Şimdi B nin içini bulalım. $U \in \mathcal{T}_{2_A}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $U = A$ veya bazı $x > 0$ için $U = [0, x)$ dir. Böylece $0 \in U$ ve $0 \notin B$ olduğundan $U \nsubseteq B$ dir. O halde B nin hiç bir iç noktası yoktur. Bu durumda

$$\overset{\circ}{B} = \emptyset$$

dur.

c) $A\setminus B = [0,1] \cup [2,\infty)$ dur. Böylece $A\setminus B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A dır. O halde

$$\overline{A\setminus B} = A$$

dır. Böylece

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{A\setminus B} = [1,\infty) \cap A = [1,\infty)$$

dur.✔

ÇÖZÜM 38

$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{3_A} &= \{\emptyset, A\} \cup \{(-n,n) \cup [0,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\emptyset, A\} \cup \{[0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

dir. $(A, \mathcal{T}_{3_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonı

$$\mathcal{K}_{3_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[n,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dır.

a) $(A, \mathcal{T}_{3_A})$ uzayında $B = (1,2)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $[1,\infty)$ dur. Böylece $\overline{B} = [1,\infty)$ dur.

b) Şimdi B nin içini bulalım. $U \in \mathcal{T}_{3_A}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $U = A$ veya bazı $n \in \mathbb{N}$ için

$$U = [0,n)$$

dir. $0 \in U$ ve $0 \notin B$ olduğundan $U \not\subseteq B$ dir. O halde B nin hiç bir iç noktası yoktur. Bu durumda $\mathring{B} = \emptyset$ dur.

c) $A\setminus B = [0,1] \cup [2,\infty)$ dur. Böylece $A\setminus B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A dır. O halde $\overline{A\setminus B} = A$ dır. Böylece

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{A\setminus B} = [1,\infty) \cap A = [1,\infty)$$

dur.✔

ÇÖZÜM 39

$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[-n,n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ olduğundan

$$\mathcal{T}_{4_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[-n,n] \cup [0,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,n] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dir. $(A, \mathcal{T}_{4_A})$ uzayının kapalı kümelerini.. kolleksiyonı

$$\mathcal{K}_{4_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{(n,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dır.

a) $(A, \mathcal{T}_{4_A})$ uzayında $B = (1,2)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $(1,\infty)$ dur. Böylece $\overline{B} = (1,\infty)$ dir.

b) Şimdi B nin içini bulalım. $U \in \mathcal{T}_{4_A}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $U = A$ veya bazı $n \in \mathbb{N}$ için

$$U = [0,n]$$

dir. $0 \in U$ ve $0 \notin B$ olduğundan $U \not\subseteq B$ dir. O halde B nin hiç bir iç noktası yoktur. Bu durumda $\mathring{B} = \emptyset$ dur.

c) $A\setminus B = [0,1] \cup [2,\infty)$ dur. Böylece $A\setminus B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A dır. O halde

$$\overline{A\setminus B} = A$$

dır. Böylece

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{A\setminus B} = (1,\infty) \cap A = (1,\infty)$$

dur.✔

ÇÖZÜM 40

$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[n,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ olduğundan

$$\mathcal{T}_{5_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[n,\infty) \cup [0,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\emptyset, A\} \cup \{[n,\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dir. $(A, \mathcal{T}_{5_A})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonı

$$\mathcal{K}_{5_A} = \{\emptyset, A\} \cup \{[0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dır.

a) $(A, \mathcal{T}_{5_A})$ uzayında $B = (1,2)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $[0,2)$ dir. Böylece $\overline{B} = [0,2)$ dir.

b) Şimdi B nin içini bulalım. $U \in \mathcal{T}_{5_A}$ ve $U \neq \emptyset$ ise $U = A$ veya bazı $n \in \mathbb{N}$ için

$$U = [n,\infty)$$

dur. U kümesi sınırsız ve B sınırlıolduğundan $U \not\subseteq B$ dir. O halde B nin hiç bir iç noktası yoktur. Bu durumda $\mathring{B} = \emptyset$ dur.

c) $A\setminus B = [0,1] \cup [2,\infty)$ dur. Böylece $A\setminus B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A dır. O halde $\overline{A\setminus B} = A$ dır. Böylece

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{A\setminus B} = [0,2) \cap A = [0,2)$$

dir.✔

ÇÖZÜM 41

Önce B nin $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayındaki kapanışını bulalım. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x < 1$ olduğunu kabul edelim. $x < r < 1$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ seçelim. Bu durumda

$$U = [x,r) \in \mathcal{T}_{\text{sağ}}$$

dır ve $U \cap B = \emptyset$ dur. O halde $x \notin \overline{B}$ dir. $x \geq 1$ ve $[x, y)$ de x in yerel tabanı na ait olsun. Bu durumda $y > 1$ dir. Böylece

$$[x, y) \cap B = (1, y)$$

veya

$$[x, y) \cap B = [x, y)$$

dir. O halde $x \in \overline{B}$ ve böylece $\overline{B} = [1, \infty)$ dur. Teorem 5.69 gereğince B nin $(A, \mathcal{T}_{\text{sağ}_A})$ uzayındaki kapanışı

$$A \cap \overline{B} = (0, \infty) \cap (1, \infty) = [1, \infty)$$

dur.✔

ÇÖZÜM 42

$y \in \mathbb{R}$ olsun. $y \leq 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(x, y]$ kümesi açıktır ve $y \in (x, y]$ dir. Diğer yandan $(x, y] \cap B = \emptyset$ dur. O halde y noktası B nin kapanışına ait değildir. $y > 1$ ve $(x, y]$ de y nin yerel tabanı na ait olsun. Bu durumda $(x, y] \cap B = (1, y]$ veya $(x, y] \cap B = (1, y](x, y]$ dir. O halde $x \in \overline{B}$ ve böylece $\overline{B} = (1, \infty)$ dur. Teorem 5.69 gereğince B nin $(A, \mathcal{T}_{\text{sol}_A})$ uzayındaki kapanışı

$$A \cap \overline{B} = (0, \infty) \cap (1, \infty) = (1, \infty)$$

dur.✔

ÇÖZÜM 43

a) $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} = A \cap U$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ de açık bir küme olmadığından A alt uzayında $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesi açık değildir. $\mathbb{R}$ uzayında $\overline{\{1/n | n \in \mathbb{N}\}} = \{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ olduğundan Teorem 5.69 gereğince A alt uzayında

$$\overline{\{1/n | n \in \mathbb{N}\}} = (\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \cap A = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$$

dır. Bu durumda $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin A alt uzayındaki kapanışı kendisine eşittir. O halde Teorem 5.54 gereğince $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesi A uzayında kapalı dır.

b) **i)** $(0, 1/2]$ kümesi A alt uzayında kapalı olduğundan kapanışı kendisine eşittir. A alt uzayında $(0, 1/2]$ kümesinin kapsadığı en büyük açık küme $(0, 1/2)$ dir. O halde $(0, 1/2]$ kümesinin içi $(0, 1/2)$ dir. A alt uzayında $A \setminus (0, 1/2] = (1/2, 1]$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $[1/2, 1]$ olduğundan $\overline{A \setminus (0, 1/2]} = [1/2, 1]$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \partial(0, 1/2] &= \overline{(0, 1/2]} \cap \overline{A \setminus (0, 1/2]} \\ &= (0, 1/2] \cap [1/2, 1] \\ &= \{1/2\} \end{aligned}$$

dir.

ii) $(0, 1/2)$ kümesi A alt uzayında açık olduğundan içi kendisine eşittir. A alt uzayında $(0, 1/2)$ kümesi kapsayan en küçük kapalı küme $(0, 1/2]$ dir. O halde $(0, 1/2)$ kümesinin kapanışı $(0, 1/2]$ dir. $A \setminus (0, 1/2) = [1/2, 1]$ kümesi A alt uzayında kapalı olduğundan kapanışı kendisine eşittir. Böylece $\overline{A \setminus [1/2, 1]} = [1/2, 1]$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \partial(0, 1/2) &= \overline{(0, 1/2)} \cap \overline{A \setminus (0, 1/2)} \\ &= (0, 1/2] \cap [1/2, 1] \\ &= \{1/2\} \end{aligned}$$

dir.

iii) $(1/2, 1]$ kümesi A alt uzayında açık olduğundan içi kendisine eşittir. A alt uzayında $(1/2, 1]$ kümesi kapsayan en küçük kapalı küme $[1/2, 1]$ dir. O halde $(1/2, 1]$ kümesinin kapanışı $[1/2, 1]$ dir. $A \setminus (1/2, 1] = (0, 1/2]$ kümesi A alt uzayında kapalı olduğundan kapanışı kendisine eşittir. Böylece $\overline{A \setminus (1/2, 1]} = (0, 1/2]$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \partial(1/2, 1] &= \overline{(1/2, 1]} \cap \overline{A \setminus (1/2, 1]} \\ &= [1/2, 1] \cap (0, 1/2] \\ &= \{1/2\} \end{aligned}$$

dir.

iv) $[1/2, 1]$ kümesi A alt uzayında kapalı olduğundan kapanışı kendisine eşittir. $[1/2, 1]$ kümesinin kapsadığı en büyük açık küme $(1/2, 1]$ olduğundan $[1/2, 1]$ nin içi $(1/2, 1]$ dir. A alt uzayında $A \setminus [1/2, 1] = (0, 1/2)$ yi kapsayan en küçük kapalı küme $(0, 1/2]$ olduğundan $\overline{A \setminus [1/2, 1]} = (0, 1/2]$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \partial[1/2, 1] &= \overline{[1/2, 1]} \cap \overline{A \setminus [1/2, 1]} \\ &= [1/2, 1] \cap (0, 1/2] \\ &= \{1/2\} \end{aligned}$$

dir.

v) $(1/2, 1)$ kümesi A alt uzayında açık olduğundan içi kendisine eşittir. $(1/2, 1)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $[1/2,1]$ olduğundan $(1/2,1)$ kümesinin kapanışı $[1/2,1]$ dir. $A\setminus(1/2,1)=(0,1/2]\cup\{1\}$ kümesi kapalı dır. O halde

$$\overline{A\setminus(1/2,1)}=(0,1/2]\cup\{1\}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\partial(1/2,1) &= \overline{(1/2,1)}\cap\overline{A\setminus(1/2,1)}\\ &= [1/2,1]\cap((0,1/2]\cup\{1\})\\ &= \{1/2,1\}\end{aligned}$$

dir.

vi) $D=\{1/n|n\in\mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ deki kapanışı $\{0\}\cup\{1/n|n\in\mathbb{N}\}$ dir. Böylece $\{1/n|n\in\mathbb{N}\}$ kümesinin A alt uzayındaki kapanışı $\overline{D}=A\cap(\{0\}\cup\{1/n|n\in\mathbb{N}\})=D$ dır. O halde D kapalı dır. D kümesi boş olmayan hiç bir açık kümeyi kapsamadığından D kümesinin içi boştur. $\overline{A\setminus D}=(0,1]=A$ dir. Böylece

$$\partial D=\overline{D}\cap\overline{A\setminus D}=D\cap A=D$$

dir.✔

ÇÖZÜM 44

a) $(0,1/2)\cup\{2\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ de ki kapanışı $[0,1/2]\cup\{2\}$ dir. Böylece $(0,1/2)\cup\{2\}$ nin A alt uzayındaki kapanışı

$$([0,1/2]\cup\{2\})\cap((0,1)\cup\{2\})=(0,1/2]\cup\{2\}$$

dir.

b) $(0,1/2)\cup\{2\}$ kümesi A alt uzayında açık iki kümenin birleşimi olduğundan açıktır. Böylece içi kendisine eşittir.

c) $A\setminus((0,1/2)\cup\{2\})=[1/2,1)$ kümesinin $\mathbb{R}$ de ki kapanışı $[1/2,1]$ dir. Böylece

$$A\setminus((0,1/2)\cup\{2\})$$

nin A alt uzayındaki kapanışı

$$[1/2,1]\cap((0,1)\cup\{2\})=[1/2,1)$$

dir. Bu durumda B nin sınırı

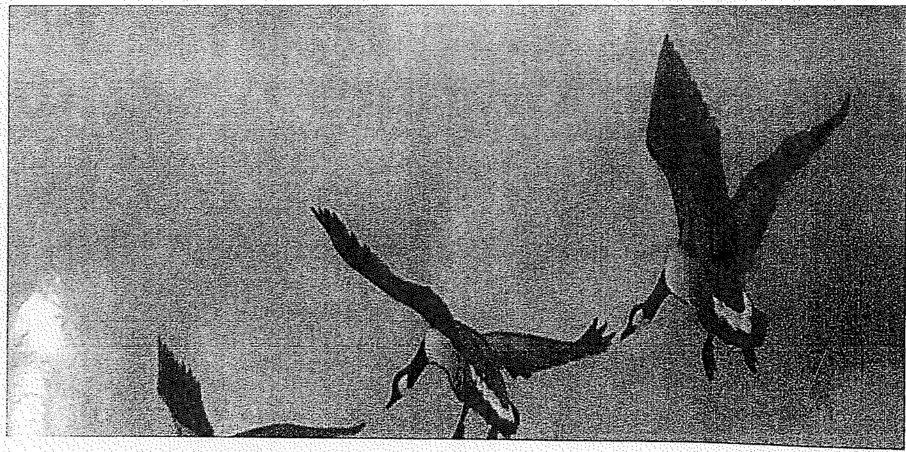
$$\partial B=((0,1/2]\cup\{2\})\cap[1/2,1)=\{1/2\}$$

dir.✔

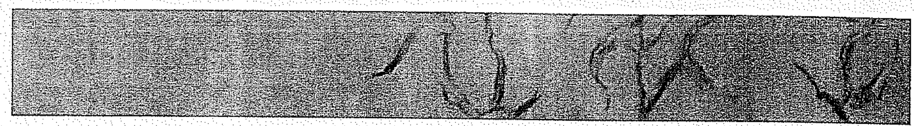
ÇÖZÜM 45

$\Rightarrow$). $(A,\mathcal{T}_A)$ ayrık bir uzay ve $a\in A$ olsun. Bu durumda $\{a\}\in\mathcal{T}_A$ dır. Böylece $\{a\}=U\cap A$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ vardır. Böylece izole nokta tanımıgereğince a noktası A kümesinin bir izole noktası dır.

$\Leftarrow$). A nın her bir noktası A nın bir izole noktası ve $a\in A$ olsun. Bu durumda izole nokta tanımıgereğince $\{a\}=U\cap A$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ vardır. Böylece $\{a\}\in\mathcal{T}_A$ dır. Teorem 3.12 gereğince $\mathcal{T}_A=\mathcal{P}(A)$ dır.✔



6. Topolojik Uzaylarda Süreklilik ve Homeomorfizmler



Teorik matematiğin bir çok dalında örneğin katogori teorisinde "objeler" ve "morfizmler" denilen konular çalışılmaktadır. Küme teorisinde objeler kümeler ve morfizmler fonksiyonlardır. Lineer cebirde objeler vektör uzayları ve morfizmler lineer dönüşümlerdir. Grup teorisinde objeler gruplar ve morfizmler homomorfizmlerdir. Topolojide objeler topolojik uzaylardır. Bu bölümde morfizmleri, "sürekli fonksiyonları" inceleyeceğiz.

6.1. Topolojik Uzaylarda Süreklilik

Teorem 2.83 gereğince bir $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ fonksiyonunun bir $x_0\in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $f(x_0)\in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $x_0\in V$ ve $f(V)\subseteq U$ olacak şekilde bir V açık kümesinin olmasıdır. Bundan faydalanarak topolojik uzaylar arasındaki fonksiyonların bir noktadaki sürekliliği aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Noktasal Süreklilik

TANIM 6.1. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $x_0\in X$ ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. $f(x_0)\in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için

$$x_0\in V \qquad \text{ve} \qquad f(V)\subseteq U$$

olacak şekilde bir V açık kümesi varsa f ye x_0 **noktasında süreklidir** denir.☜

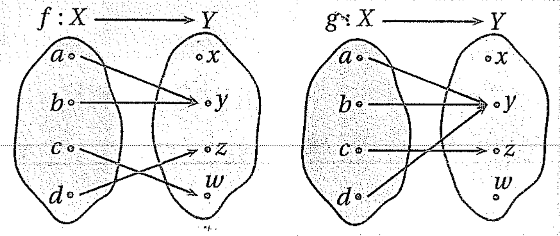
ÖRNEK 6.2. ▷
$X=\{a,b,c,d\}$, $Y=\{x,y,z,w\}$,

$$\mathcal{T}_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\},\quad \mathcal{T}_2=\{\emptyset,Y,\{y\},\{y,z,w\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayları ve Şekil ?? de tanımlanan f ve g fonksiyonları verilsin.

a) f fonksiyonunun a,b,c,d noktalarında sürekli olduğunu gösterelim.

b) g fonksiyonunun a,b,c noktalarında sürekli fakat $d \in X$ noktasında sürekli olmadığını gösterelim.



Şekil 6.1

Not

1. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğunu göstermek için $f(x_0)$ noktasını içeren her bir U açık kümesi için x_0 noktasını içeren bir V açık kümesinin $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde var olduğunun gösterilmesi gerekir.
2. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olmadığını göstermek için $f(x_0)$ noktasını içeren bir U açık kümesi için x_0 noktasını içeren bir V açık kümesinin $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bulunamadığını göstermek yeterlidir.✐

ÇÖZÜM:

a) **i)** f fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $f(a) = y \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U = Y$, $U = \{y\}$ veya $U = \{y,z,w\}$ dur. $V = \{a\}$ olsun. $a \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ dir. $f(V) = f(\{a\}) = \{y\}$ olduğundan U nun her üç hali içinde $f(V) \subseteq U$ olur. O halde, f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

ii) f fonksiyonunun $b \in X$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $f(b) = y \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U = Y$, $U = \{y\}$ veya $U = \{y,z,w\}$ dur. $V = \{a,b\}$ olsun. $b \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ dir. $f(V) = f(\{a,b\}) = \{y\}$ olduğundan U nun her üç hali içinde $f(V) \subseteq U$ olur. O halde, f fonksiyonu b noktasında süreklidir.

iii) f fonksiyonunun $c \in X$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $f(c) = w \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U = Y$ veya $U = \{y,z,w\}$ dur. $V = \{a,b,c\}$ olsun. $c \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ dir. $f(V) = f(\{a,b,c\}) = \{y,w\}$ olduğundan U nun her iki hali içinde $f(V) \subseteq U$ olur. O halde, f fonksiyonu c noktasında süreklidir.

iv) f fonksiyonunun $d \in X$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $f(d) = z \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U = Y$ veya $U = \{y,z,w\}$ dur. $V = X$ olsun. $d \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ dir. $f(V) = f(X) = \{y,z,w\}$ olduğundan U nun her iki hali içinde $f(V) \subseteq U$ olur. O halde, f fonksiyonu d noktasında süreklidir.

b) Benzer şekilde g fonksiyonunun a,b,c noktalarında sürekli olduğu gösterilir. Şimdi, g fonksiyonunun $d \in X$ noktasında sürekli olmadığını gösterelim. $U = \{y\}$ olsun. Bu durumda $g(d) = y \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ dir. Diğer yandan $d \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ ise $V = X$ dir. $g(V) = g(X) = \{y,z\}$ olduğundan $g(V) \nsubseteq U$ dur. O halde, g fonksiyonu d noktasında sürekli değildir.✍

Teorem 6.3 ▷

$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{B}_{f(x_0)}$ kolleksiyonu $f(x_0)$ nın bir yerel tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu x_0 da süreklidir.

b) Her $V \in \mathcal{B}_{f(x_0)}$ için

$$f(U) \subseteq V \quad \text{ve} \quad x_0 \in U$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $V \in \mathscr{B}_{f(x_0)}$ olsun. Bu durumda $V \in \mathcal{T}_2$ ve $f(x_0) \in V$ dir. f, x_0 da sürekli olduğundan $x_0 \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır.

b)⇒ a). $f(x_0) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_2$ olsun. $\mathscr{B}_{f(x_0)}$, $f(x_0)$ ın yerel tabanı olduğundan $f(x_0) \in W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathscr{B}_{f(x_0)}$ vardır. (b) gereğince $f(U) \subseteq W$ ve $x_0 \in U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır. Bu durumda $f(U) \subseteq V$, $x_0 \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ olur. Böylece f fonksiyonu x_0 da süreklidir.✔

Teorem 6.4. ▶

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\mathscr{B}_{f(x_0)}$ kolleksiyonu $f(x_0)$ nın bir yerel tabanı ve $\mathscr{B}_{x_0}$ kolleksiyonu da x_0 noktasının yerel tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu x_0 da süreklidir.

b) Her $V \in \mathscr{B}_{f(x_0)}$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \mathscr{B}_{x_0}$ vardır.

İSPAT:

a)⇒b). $V \in \mathscr{B}_{f(x_0)}$ olsun. Bu durumda $V \in \mathcal{T}_2$ ve $f(x_0) \in V$ dir. f, x_0 da sürekli olduğundan $x_0 \in W$ ve $f(W) \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{T}_1$ vardır. $\mathscr{B}_{x_0}$, x_0 nın bir yerel tabanı olduğundan $x_0 \in U \subseteq W$ olacak şekilde bir $U \in \mathscr{B}_{x_0}$ vardır. Böylece

$$f(x_0) \in f(U) \subseteq f(W) \subseteq V$$

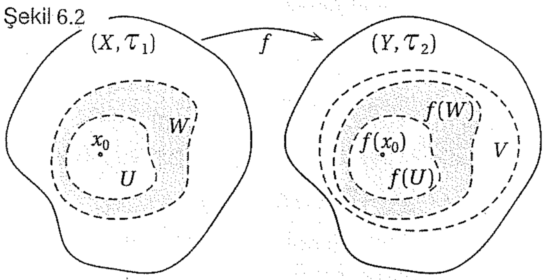
olduğundan $f(U) \subseteq V$ elde edilir. (Şekil 6.2 e bakınız)

b)⇒ a). $f(x_0) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_2$ olsun. $\mathscr{B}_{f(x_0)}$, $f(x_0)$ ın yerel tabanı olduğundan $f(x_0) \in W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathscr{B}_{f(x_0)}$ vardır. (b) gereğince $f(U) \subseteq W$ olacak şekilde bir $U \in \mathscr{B}_{x_0}$ vardır. $U \in \mathscr{B}_{x_0}$ olduğundan $x_0 \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_1$ dir. O halde

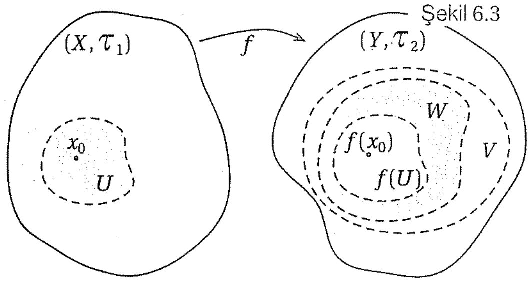
$$x_0 \in U \text{ ve } f(U) \subseteq V$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır. (Şekil 6.3 ya bakınız.) Böylece f fonksiyonu x_0 da süreklidir.✔

Şekil 6.2



Şekil 6.3



ÖRNEK 6.5. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{x, y, z, w\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$$

olsun. f fonksiyonu

$$f(a) = y,\ f(b) = z,\ f(c) = w,\ f(d) = z$$

şeklinde ve g fonksiyonuda

$$g(a) = x,\ g(b) = x,\ g(c) = z,\ g(d) = w$$

şeklinde tanımlansın. f ve g fonksiyonlarının a, b, c ve d noktalarında süreklili olup olmadıklarını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) Önce, f fonksiyonunun a, b, c ve d noktalarındaki sürekliliğini inceleyelim.

i) $f(a) = y$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_y = \{\{y\}\}$ ve a noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}$ dır.

$$f(\{a\}) = \{y\} \subseteq \{y\}$$

olduğundan f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

ii) $f(b) = z$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_z = \{\{y, z, w\}\}$ ve b noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_b = \{\{a, b\}\}$ dır.

$$f(\{a, b\}) = \{y, z\} \subseteq \{y, z, w\}$$

olduğundan f fonksiyonu b noktasında süreklidir.

iii) $f(c) = w$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_w = \{\{y, z, w\}\}$ ve c noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_c = \{\{a, b, c\}\}$ dır.

$$f(\{a, b, c\}) = \{y, z, w\} \subseteq \{y, z, w\}$$

olduğundan f fonksiyonu c noktasında süreklidir.

iv) $f(d) = z$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_z = \{\{y, z, w\}\}$ ve d noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_d = \{X\}$ dır.

$$f(X) = \{y, z, w\} \subseteq \{y, z, w\}$$

olduğundan f fonksiyonu d noktasında süreklidir.

b) Şimdi, g fonksiyonunun a, b, c ve d noktalarındaki sürekliliğini inceleyelim.

i) $g(a) = x$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_x = \{\{x\}\}$ ve a noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}$ dır.

$$g(\{a\}) = \{x\} \subseteq \{x\}$$

olduğundan g fonksiyonu a noktasında süreklidir.

ii) $g(b) = x$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_x = \{\{x\}\}$ ve b noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_b = \{\{a, b\}\}$ dır.

$$g(\{a, b\}) = \{x\} \subseteq \{x\}$$

olduğundan g fonksiyonu b noktasında süreklidir.

iii) $g(c) = z$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_z = \{\{y, z, w\}\}$ ve c noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_c = \{\{a, b, c\}\}$ dir.

$$g(\{a, b, c\}) = \{x, z\} \nsubseteq \{y, z, w\}$$

olduğundan g fonksiyonu c noktasında sürekli değildir.

iv) $g(d) = w$ noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_w = \{\{y,z,w\}\}$ ve d noktasının yerel tabanı $\mathscr{B}_d = \{\{X\}\}$ dır.

$$g(X) = \{x,z,w\} \nsubseteq \{y,z,w\}$$

olduğundan g fonksiyonu d noktasında sürekli değildir.

Süreklilik

TANIM 6.6. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve f de X den Y ye bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekliyse f ye X **üzerinde sürekli fonksiyon** veya kısaca **sürekli fonksiyon** denir. Diğer bir deyişle her bir $x \in X$ ve $f(x) \in V$ özelliğindeki her V açık kümesi için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa f ye (X **üzerinde) sürekli fonksiyon** denir.

ÖRNEK 6.7. ▷
$X = \{a,b,c,d\}$, $Y = \{x,y,z,w\}$ ve

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, Y, \{y\}, \{y,z,w\}\}$$

olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin. Şekil **??** da tanımlanan f fonksiyonu ve Şekil **??** de tanımlanan g fonksiyonlarının sürekli olup olmadıklarını araştıralım.

ÇÖZÜM: Örnek 6.2 gereğince f fonksiyonu X in her bir noktasında sürekli olduğundan f fonksiyonu X üzerinde süreklidir. Örnek 6.2 gereğince g fonksiyonu d noktasında sürekli olmadığından g fonksiyonu X üzerinde sürekli değildir.

ÖRNEK 6.8. ▷
a) Herhangi bir $f : (X, \mathscr{P}(X)) \to (Y, \mathcal{T})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.
b) Herhangi bir $g : (X,\mathcal{T}) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $x \in X$ ve $f(x) \in V$ olmak üzere $V \in \mathcal{T}$ olsun. $U = \{x\}$ diyelim. Bu durumda $x \in U$ ve $U \in \mathscr{P}(X)$ dir. Üstelik,

$$f(U) = \{f(x)\} \subseteq V$$

dir. Yani f, x noktasında süreklidir. x keyfi olduğundan f fonksiyonu (X üzerinde) süreklidir.

b) $x \in X$ ve $g(x) \in V$ olmak üzere $V \in \{\emptyset, Y\}$ olsun. Bu durumda $V = Y$ dir. $U = X$ denilirse $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olur. Üstelik, $g(U) = g(X) \subseteq Y = V$ dir. Yani g, x noktasında süreklidir. x keyfi olduğundan g fonksiyonu (X üzerinde) süreklidir.

Teorem 6.9. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) Her bir $U \in \mathcal{T}_2$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. **b)** f fonksiyonu süreklidir.

Not

Teorem 6.9 gereğince bir

$$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$$

fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $U\in\mathcal{T}_2$ için $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ olmasıdır. Buna göre f nin sürekli olmadığını göstermek için $f^{-1}(U)\notin\mathcal{T}_1$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}_2$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

İSPAT:

a)⇒ b). $x_0\in X$ ve $f(x_0)\in U$ olmak üzere $U\in\mathcal{T}_2$ olsun. (a) gereğince $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ olur. $V=f^{-1}(U)$ diyelim. (Şekil 6.4 e bakınız.) Bu durumda $x_0\in V$, $V\in\mathcal{T}_1$ ve $f(V)\subseteq U$ olur. O halde f, x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktası keyfi olduğundan f süreklidir.

b)⇒ a). $U\in\mathcal{T}_2$ olsun. $f^{-1}(U)=\emptyset$ ise açıkça $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ dir. $f^{-1}(U)\neq\emptyset$ ve $x_0\in f^{-1}(U)$ olsun. Bu durumda $f(x_0)\in U$ dur. (b) gereğince

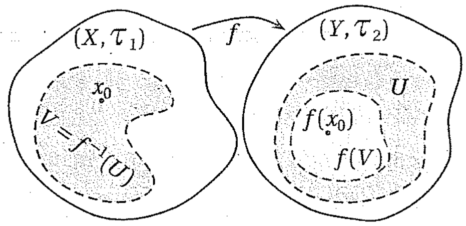
$$x_0\in V_{x_0}\quad\text{ve}\quad f(V_{x_0})\subseteq U$$

olacak şekilde bir $V_{x_0}\in\mathcal{T}_1$ vardır. (Şekil 6.5 ya bakınız.) Böylece $V_{x_0}\subseteq f^{-1}(U)$ olur. Dolayısıyla her bir $x_0\in f^{-1}(U)$ için bir $V_{x_0}\in\mathcal{T}_1$ kümesi

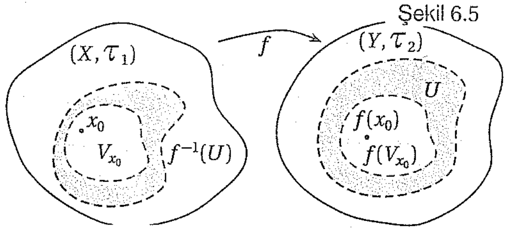
$$x_0\in V_{x_0}\subseteq f^{-1}(U)$$

olacak şekilde vardır. Sonuç 3.44 gereğince $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ olur. ($f^{-1}(U)=\bigcup_{x_0\in f^{-1}(U)}V_{x_0}$ olduğundan $f^{-1}(U)$ açıktır.) O halde her bir $U\in\mathcal{T}_2$ için $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ olur.✔

Şekil 6.4



Şekil 6.5



ÖRNEK 6.10. ▷
Örnek 6.5 de tanımlan $f,g:X\to Y$ fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonlarının sürekli olup olmadıklarını Teorem 6.9 u kullanarak araştıralım.

ÇÖZÜM: $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının açık kümeleri

$$\emptyset, Y, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,w\}$$

dur.

a)

$$f^{-1}(Y)=X,\qquad f^{-1}(\emptyset)=f^{-1}(\{x\})=\emptyset,\quad f^{-1}(\{y\})=\{a\},$$
$$f^{-1}(\{x,y\})=\{a\},\quad f^{-1}(\{y,z,w\})=X$$

dir. $\emptyset, X, \{a\}\in\mathcal{T}_1$ olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

b) $U=\{y,z,w\}\in\mathcal{T}_2$ olmasına rağmen $g^{-1}(U)=\{c,d\}\notin\mathcal{T}_1$ olduğundan g fonksiyonu sürekli değildir.✍

ÖRNEK 6.11. ▷
$\mathrm{id}(x)=x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id}:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonu verilsin.

a) id fonksiyonu süreklidir **b)** $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ dir

önermelerinin denk olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a)⇒ b). $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. id fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 6.9 gereğince $\mathrm{id}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. $U = \mathrm{id}^{-1}(U)$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_1$ olur. Bu durumda $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ olur.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. (b) gereğince $U \in \mathcal{T}_1$ dir. O halde $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$ olduğundan $\mathrm{id}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ olur. Teorem 6.9 gereğince id fonksiyonu süreklidir.✍

ÖRNEK 6.12. ▷
$c \in Y$ olmak üzere $f(x) = c$ şeklinde tanımlı $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sabit fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda

a) $c \in U$ ise açıkça $f^{-1}(U) = X$ ve **b)** $c \notin U$ ise $f^{-1}(U) = \emptyset$ olur.

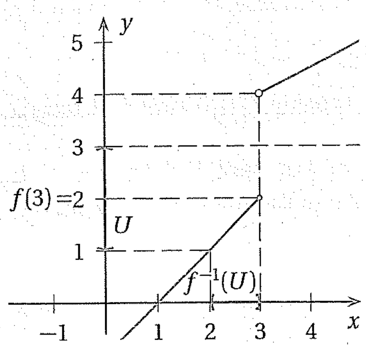
Her iki halde de $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ olur. Teorem 6.9 gereğince f fonksiyonu süreklidir.

Özel olarak, $c \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.✍

ÖRNEK 6.13. ▷
Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ \dfrac{x+5}{2}, & x > 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterelim.



Şekil 6.6

ÇÖZÜM: Teorem 6.9 gereğince f nin sürekli olmadığını göstermek için $f^{-1}(U)$ kümesi açık olmayacak şekilde bir U açık kümesinin bulunması yeterlidir. $U = (1, 3)$ açık aralığı $\mathbb{R}$ de açıktır ve

$$f^{-1}(U) = f^{-1}((1,3)) = (2,3]$$

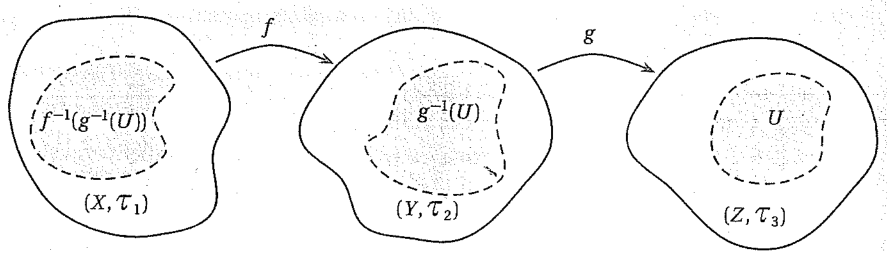
dür. (Şekil 6.6 ya bakınız.) Diğer yandan $(2,3]$ aralığı $\mathbb{R}$ de açık değildir. O halde f fonksiyonu sürekli değildir.✍

Teorem 6.14. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ ve $(Z, \mathcal{T}_3)$ topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ ve $g : (Y, \mathcal{T}_2) \to (Z, \mathcal{T}_3)$ fonksiyonları sürekli ise $gof : (X, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_3)$ fonksiyonu süreklidir.

İSPAT: $U \in \mathcal{T}_3$ olsun. Bu durumda g sürekli olduğundan $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_2$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_1$ dir. (Şekil 6.7 ye bakınız.) Diğer yandan,

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gof)^{-1}(U)$$

olduğundan $(gof)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. Böylece gof fonksiyonu süreklidir.✔



Şekil 6.7

Aşağıdaki sonuç istenirse sürekliliğin açık kümeler yerine kapalı kümeler kullanılarak da tanımlanabileceğini göstermektedir.

Teorem 6.15.

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir.

b) Y nin kapalı her S alt kümesi için $f^{-1}(S)$ kümesi X in kapalı bir alt kümesidir.

İSPAT:

a)⇒ b). S kümesi Y nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $Y \setminus S$ kümesi Y de açıktır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(Y \setminus S)$ kümesi X uzayında açıktır. Alıştırmalar 8(e) gereğince

$$f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(S)$ kümesi X uzayında açıktır. O halde $f^{-1}(S)$ kümesi X uzayında kapalıdır.

b)⇒ a). U kümesi Y nin açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda $Y \setminus U$ kümesi Y de kapalıdır. (b) gereğince $f^{-1}(Y \setminus U)$ kümesi X uzayında kapalıdır. Alıştırmalar 8(e) gereğince

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(U)$ kümesi X uzayında kapalıdır. Böylece $f^{-1}(U)$ kümesi X uzayında açıktır. O halde f fonksiyonu süreklidir.✔

Teorem 6.16.

$(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ topolojik uzaylar, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ sürekli bir fonksiyon ve A kümesi X in bir alt kümesi olsun. A üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}_A$, $f(X)$ üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{T}'_{f(X)}$ olmak üzere $g = f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ fonksiyonu f nin A ya kısıtlanmışı, yani her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ olsun. Bu durumda

a) $g : A \to Y$ fonksiyonu süreklidir.

b) $f : X \to f(X)$ fonksiyonu süreklidir.

İSPAT:

a) V kümesi $(Y, \mathcal{T}')$ uzayında açık olsun. $g^{-1}(V)$ nin $(A, \mathcal{T}_A)$ da açık olduğunu gösterelim. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır. Diğer yandan,

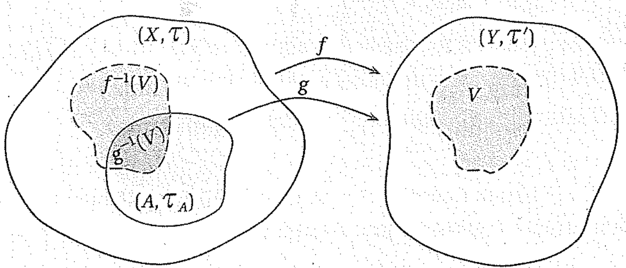
$g^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ olduğundan (Şekil 6.8 a bakınız) $g^{-1}(V)$ kümesi $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayında açıktır. O halde, g fonksiyonu süreklidir.

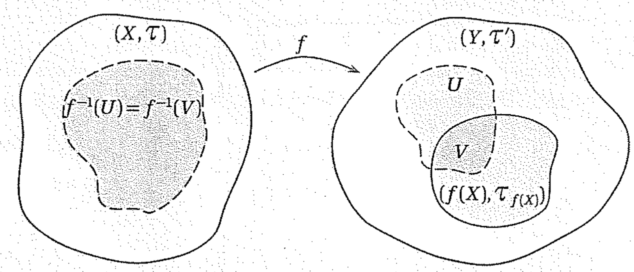
b) V kümesi $\left(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}\right)$ uzayında açık olsun. Bu durumda $V = U \cap f(X)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}'$ vardır. Diğer yandan,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U)$$

dur. (Şekil 6.9 a bakınız.) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır. Dolayısıyla, $f^{-1}(V)$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır. O halde, $f : X \to f(X)$ fonksiyonu süreklidir.✔

Şekil 6.8





Şekil 6.9

Teorem 6.17. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve A, B kümeleri $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalı (açık) olmak üzere $X = A \cup B$ olsun. $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ fonksiyonları A ve B üzerindeki alt uzay topolojilerine göre sürekli iki fonksiyon olsun. Her $x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ ise

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $h : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir.

İSPAT: S kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında kapalı olsun. Bu durumda

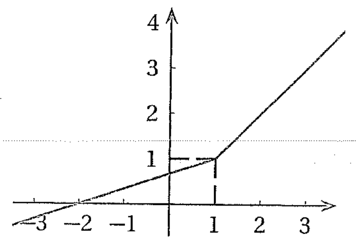
$$\begin{aligned} h^{-1}(S) &= \{x \in X \mid h(x) \in S\} = \{x \in A \cup B \mid h(x) \in S\} \\ &= \{x \in A \mid h(x) \in S\} \cup \{x \in B \mid h(x) \in S\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in S\} \cup \{x \in X \mid g(x) \in S\} \\ &= f^{-1}(S) \cup g^{-1}(S) \end{aligned}$$

dir. f sürekli olduğundan Teorem 6.15 gereğince $f^{-1}(S)$ kümesi A alt uzayında kapalıdır. Benzer şekilde, g sürekli olduğundan Teorem 6.15 gereğince $g^{-1}(S)$ kümesi B alt uzayında kapalıdır. A ve B kümeleri $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalı olduğundan $f^{-1}(S)$ ve $g^{-1}(S)$ kümeleride $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Böylece, $h^{-1}(S)$ kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Teorem 6.15 gereğince h fonksiyonu süreklidir.✔

ÖRNEK 6.18. ▷
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ \dfrac{x+2}{3}, & x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.



Şekil 6.10

ÇÖZÜM: $A = [1, \infty)$, $B = (-\infty, 1]$ kümeleri $\mathbb{R}$ standart uzayında kapalıdır. Her $x \in A$ için

$$f(x) = x$$

ve her $x \in B$ için

$$g(x) = \frac{x+2}{3}$$

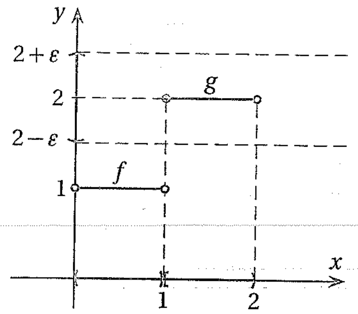
şeklinde tanımlı $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $f(1) = g(1)$ olduğundan h fonksiyonuda Teorem 6.17 gereğince süreklidir. (Şekil 6.10 e bakınız.)✍

Teorem 6.17 de A ve B kümelerinin kapalılığı (açıklığı) kaldırılamaz.

ÖRNEK 6.19. ▷
$X = (0,2)$, $A = (0,1)$, $B = [1,2)$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $x \in A$ için $f(x) = 1$ ve $x \in B$ için $g(x) = 2$ şeklinde tanımlansın.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterelim.



Şekil 6.11

ÇÖZÜM: $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$ olmak üzere

$$h^{-1}((2-\varepsilon, 2+\varepsilon)) = g^{-1}((2-\varepsilon, 2+\varepsilon)) \cup f^{-1}((2-\varepsilon, 2+\varepsilon)) = [1,2) \cup \emptyset = [1,2)$$

ve $[1,2)$ kümesi $X = A \cup B = (0,2)$ de açık olmadığından h fonksiyonu sürekli değildir. (Şekil 6.11 ye bakınız.)✍

Teorem 6.20. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay,

$$\mathscr{B} = \{B_i \mid i \in I\}$$

kolleksiyonu $\mathcal{T}_2$ nin bir tabanı (alt tabanı) ve $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir. **b)** Her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ dir.

İSPAT:

a)⇒ b). $B \in \mathscr{B}$ olsun. $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan $B \in \mathcal{T}_2$ dir. f sürekli olduğundan $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ dir.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_2$ nin bir tabanı olduğundan

$j \in J$ için $B_j \in \mathscr{B}$ olmak üzere

$$U = \bigcup_{j \in J} B_j$$

şeklinde yazılabilir. Alıştırmalar 7 gereğince

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$$

olur. Her bir $j \in J$ için $f^{-1}(B_j) \in \mathcal{T}_1$ olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ olur. O halde f fonksiyonu süreklidir.✓

ÖRNEK 6.21. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{x, y, z\}$, ve

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y\}, \{y, z\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin. $f, g : X \to Y$ fonksiyonları

$$f(a) = y, \ f(b) = z, \ f(c) = z, \ f(d) = w,$$
$$g(a) = x, \ g(b) = x, \ g(c) = z, \ g(d) = w$$

şeklinde tanımlansın. Teorem 6.20 yi kullanarak

a) f fonksiyonu sürekli olduğunu **b)** g fonksiyonu sürekli olmadığını

gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{B} = \{\{x\}, \{y\}, \{y, z\}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_2$ nin bir tabanıdır.

a)
$$f^{-1}(\{x\}) = \emptyset \in \mathcal{T}_1, \quad f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \in \mathcal{T}_1, \quad f^{-1}(\{y, z\}) = \{a, b, c\} \in \mathcal{T}_1$$
yani her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

b) $g^{-1}(\{y, z\}) = \{c\} \notin \mathcal{T}_1$ yani en az bir $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ olduğundan g fonksiyonu sürekli değildir.✍

Teorem 6.22. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

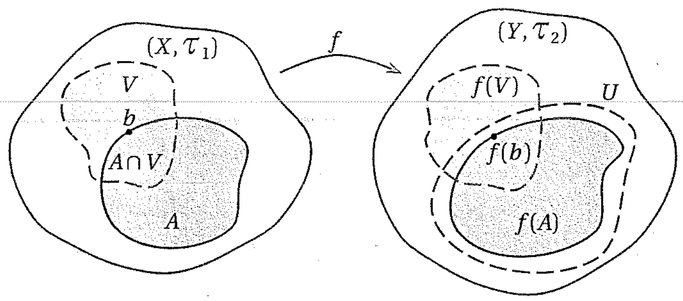
a) f fonksiyonu süreklidir.
b) Her $A \subseteq X$ için $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ dır.
c) Her $B \subseteq Y$ için $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ dır.

İSPAT:

a)⇒ b). $A \subseteq X$ ve $b \in \overline{A}$ olsun. $f(b) \in \overline{f(A)}$ olduğunu göstermeliyiz. $f(b) \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. f sürekli olduğundan $b \in V$ ve $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}_1$ vardır. (Şekil 6.12 e bakınız.) $b \in \overline{A}$ olduğundan Teorem 5.26 gereğince $V \cap A \neq \emptyset$ dur. Bu durumda $f(V \cap A) \neq \emptyset$ olur. Diğer yandan

$$f(V \cap A) = f(V) \cap f(A) \subseteq U \cap f(A)$$

olduğundan $f(A) \cap U \neq \emptyset$ olur. Teorem 5.26 gereğince $f(b) \in \overline{f(A)}$ olur. Bu her $b \in \overline{A}$ için doğru olduğundan $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ olur.



Şekil 6.12

b)⇒ c). $B \subseteq Y$ olsun. $A = f^{-1}(B)$ diyelim. (b) gereğince

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B \cap f(X)} \subseteq \overline{B}$$

ve böylece $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ olur. Buradan $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ elde edilir.

Not

f sürekli bir fonksiyon değilse her $A \subseteq X$ için $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ olmayabilir.

c)⇒ a). F kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında kapalı olsun. Teorem 5.29 gereğince $\overline{F} = F$ dir. (c) gereğince

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{F}\right) = f^{-1}(F)$$

dir. O halde $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ olur. Teorem 5.29 gereğince $f^{-1}(F)$, $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Teorem 6.15 gereğince f fonksiyonu süreklidir.✔

ÖRNEK 6.23. ▷

$\mathcal{T}$, X üzerindeki kaba topoloji olmak üzere $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathscr{P}(X))$ fonksiyonu ve $A = \{x\}$ kümesi verilsin. $\mathrm{id}\left(\overline{A}\right) \not\subseteq \overline{\mathrm{id}(A)}$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T})$ uzayında $\overline{A} = X$ ve

$$\mathrm{id}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{id}(X) = X$$

olur. Diğeryandan, $\mathrm{id}(A) = \{x\}$ ve $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayında

$$\overline{\mathrm{id}(A)} = \overline{\{x\}} = \{x\}$$

dir. O halde,

$$\mathrm{id}\left(\overline{A}\right) \not\subseteq \overline{\mathrm{id}(A)}$$

dır.✍

Teorem 6.24. ▷

$(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylar ve $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir.

b) Her $B\subseteq Y$ için $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\subseteq\left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$ dır.

İSPAT:

a)⇒ b). $B\subseteq Y$ olsun. Bu durumda $\overset{\circ}{B}\subseteq B$ olduğundan $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\subseteq f^{-1}(B)$ olur. Diğeryandan f sürekli olduğundan $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)$ kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında açıktır. Bu durumda $\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\right)^{\circ}=f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)$ olur. O halde

$$f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)=\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\right)^{\circ}\subseteq\left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$$

dir. Yani $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\subseteq(f^{-1}(B))^{\circ}$ dir.

b)⇒ a). B kümesi $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında açık bir küme olsun. Bu durumda $\overset{\circ}{B}=B$ dir. (b) gereğince $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\subseteq(f^{-1}(B))^{\circ}$ dir. Diğer yandan $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)=f^{-1}(B)$ olduğundan $f^{-1}(B)\subseteq(f^{-1}(B))^{\circ}$ olur. Böylece $f^{-1}(B)=(f^{-1}(B))^{\circ}$ olur. Teorem 5.48 gereğince $f^{-1}(B)$ kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açıktır. Böylece, f fonksiyonu süreklidir.✓

Not

f sürekli bir fonksiyon değilse her $B\subseteq Y$ için $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\subseteq(f^{-1}(B))^{\circ}$ olmayabilir.

ÖRNEK 6.25. ▷

$\mathcal{T}$, X üzerindeki kaba topoloji olmak üzere $\mathrm{id}(x)=x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id}:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathscr{P}(X))$ fonksiyonu ve $B=X\setminus\{x\}$ kümesi verilsin. $\mathrm{id}^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\not\subseteq(\mathrm{id}^{-1}(B))^{\circ}$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X,\mathscr{P}(X))$ uzayında $\overset{\circ}{B}=B=X\setminus\{x\}$ dir. O halde,

$$\mathrm{id}^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)=X\setminus\{x\}$$

dir. Diğer yandan

$$\mathrm{id}^{-1}(B)=X\setminus\{x\}$$

olduğundan $(X,\mathcal{T})$ uzayında

$$(\mathrm{id}^{-1}(B))^{\circ}=(X\setminus\{x\})^{\circ}=\emptyset$$

olur. O halde

$$\mathrm{id}^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\not\subseteq(\mathrm{id}^{-1}(B))^{\circ}$$

dir.✍

Teorem 6.26 ▷

$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bire-bir sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $A\subseteq X$ için $(f(A))^\circ\subseteq f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ dır.

İSPAT: $A\subseteq X$ olsun. $(f(A))^\circ$ açık bir küme ve $(f(A))^\circ\subseteq f(A)$ dır. Böylece

$$f^{-1}((f(A))^\circ)\subseteq f^{-1}(f(A))$$

dır. Diğer yandan f bire-bir olduğundan $f^{-1}(f(A))=A$ dır. O halde

$$f^{-1}((f(A))^\circ)\subseteq A$$

dır. Üstelik, $(f(A))^\circ$ açık ve f sürekli olduğundan $f^{-1}((f(A))^\circ)$ kümesi X uzayında açıktır. Bu durumda

$$f^{-1}((f(A))^\circ)\subseteq \overset{\circ}{A}$$

olur. Böylece $(f(A))^\circ\subseteq f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ elde edilir.✔

Teorem 6.26 de f nin sürekliliği kaldırılırsa teorem doğru olmaz.

ÖRNEK 6.27. ▷
$\mathcal{T}$, X kümesi üzerindeki kaba topoloji olmak üzere $\mathrm{id}:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathscr{P}(X))$ fonksiyonu verilsin ve $A\neq\emptyset$, $A\neq X$ olmak üzere $A\subseteq X$ olsun. $(\mathrm{id}(A))^\circ\nsubseteq\mathrm{id}\left(\overset{\circ}{A}\right)$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X,\mathcal{T})$ uzayında $\overset{\circ}{A}=\emptyset$ olur. Böylece $\mathrm{id}\left(\overset{\circ}{A}\right)=\emptyset$ dur. Diğer yandan, $\mathrm{id}(A)=A$ olduğundan $(X,\mathscr{P}(X))$ uzayında $(\mathrm{id}(A))^\circ=\overset{\circ}{A}=A\neq\emptyset$ olur. Dolayısıyla,

$$(\mathrm{id}(A))^\circ\nsubseteq\mathrm{id}\left(\overset{\circ}{A}\right)$$

dir.✍

6.2. Bazı Reel Değerli Sürekli Fonksiyonlar

$\mathscr{B}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ ve $\mathscr{S}=\{(-\infty,b)\,|\,b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ kolleksiyonları sırasıyla $\mathbb{R}$ standart uzayının tabanı ve alt tabanı olduklarından Teorem 6.20 gereğince aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

SONUÇ 6.28. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir

b) $a<b$ özelliğindeki her $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((a,b))=\{x\in X\,|\,f(x)\in(a,b)\}=\{x\in X\,|\,a<f(x)<b\}$$

kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır.

SONUÇ 6.29. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir.

b) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X \mid f(x) \in (a,\infty)\} = \{x \in X \mid a < f(x)\}$$

ve

$$f^{-1}((-\infty,b)) = \{x \in X \mid f(x) \in (-\infty,b)\} = \{x \in X \mid f(x) < b\}$$

kümeleri $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır.

ÖRNEK 6.30. ▷
Her $\alpha \geq 0$ için $h(x) = |x|^\alpha$ şeklinde tanımlı $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\alpha = 0$ ise açıkça f süreklidir. $\alpha > 0$ olsun. Her $b \in \mathbb{R}$ için $h^{-1}((-\infty, b))$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için $h^{-1}((a,\infty))$ kümelerinin $\mathbb{R}$ standart uzayında açık olduklarını gösterelim.

a) Önce $h^{-1}((-\infty, b))$ kümesinin açık olduğunu gösterelim.

i) $b < 0$ ise

$$\begin{aligned} h^{-1}((-\infty,b)) &= \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in (-\infty,b)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) < b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x|^\alpha < b\} = \emptyset \end{aligned}$$

olur.

ii) $b \geq 0$ ise

$$\begin{aligned} h^{-1}((-\infty,b)) &= \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) < b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|^\alpha < b\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| < \sqrt[\alpha]{b}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt[\alpha]{b} < x < \sqrt[\alpha]{b}\right\} = \left(-\sqrt[\alpha]{b}, \sqrt[\alpha]{b}\right) \end{aligned}$$

olur.

Böylece (i) ve (ii) gereğince $b \in \mathbb{R}$ için $h^{-1}((-\infty, b))$ kümesi açıktır.

b) Şimdi, $h^{-1}((a,\infty))$ kümesinin açık olduğunu gösterelim.

i) $a < 0$ ise

$$h^{-1}((a,\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|^\alpha > a\} = \mathbb{R}$$

olur.

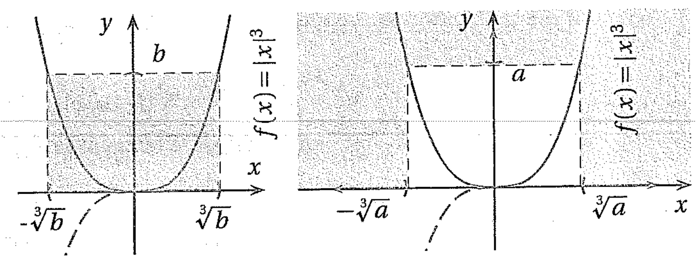
ii) $a \geq 0$ ise

$$\begin{aligned} h^{-1}((a,\infty)) &= \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|^\alpha > a\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \sqrt[\alpha]{a}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt[\alpha]{a} \text{ veya } x > \sqrt[\alpha]{a}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt[\alpha]{a}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt[\alpha]{a}\right\} \\ &= \left(-\infty, -\sqrt[\alpha]{a}\right) \cup \left(\sqrt[\alpha]{a}, \infty\right) \end{aligned}$$

olur.

Böylece (i) ve (ii) gereğince $a \in \mathbb{R}$ için $h^{-1}((a,\infty))$ kümesi açıktır.

(a) ve (b) gereğince her $a, b \in \mathbb{R}$ için $h^{-1}((-\infty,b))$ ve $h^{-1}((a,\infty))$ kümeleri açık olduğundan Sonuç 6.29 gereğince h fonksiyonu süreklidir. (Şekil 6.13 ya bakınız.)✍



Şekil 6.13

ÖRNEK 6.31. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $h : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için $(ah)(x) = ah(x)$ şeklinde tanımlı $ah : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $b, c \in \mathbb{R}$ için $(ah)^{-1}((b,c))$ kümelerinin $\mathbb{R}$ standart uzayında açık olduğunu gösterelim.

a) $a = 0$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $(ah)(x) = 0$ olduğundan ah fonksiyonu süreklidir.

b) $a > 0$ olsun.

$$(ah)^{-1}((b,c)) = \{x \in X \mid b < (ah)(x) < c\} = \left\{x \in X \,\middle|\, \frac{b}{a} < h(x) < \frac{c}{a}\right\} = h^{-1}\left(\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)\right)$$

ve h sürekli olduğundan $h^{-1}\left(\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)\right)$ kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açıktır. Böylece h süreklidir.

c) $a < 0$ olsun.

$$(ah)^{-1}((b,c)) = \{x \in X \mid b < (ah)(x) < c\} = \left\{x \in X \,\middle|\, \frac{b}{a} > h(x) > \frac{c}{a}\right\} = h^{-1}\left(\left(\frac{c}{a}, \frac{b}{a}\right)\right)$$

ve h sürekli olduğundan $h^{-1}\left(\left(\frac{c}{a}, \frac{b}{a}\right)\right)$ kümesi X uzayında açıktır. Böylece h süreklidir.✍

ÖRNEK 6.32. ▷
Her $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ için

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $b \in \mathbb{R}$ olsun.

ÇÖZÜM: $f^{-1}((-\infty,b))$ ve $f^{-1}((b,\infty))$ kümelerinin $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ uzayında açık olduklarını gösterelim.

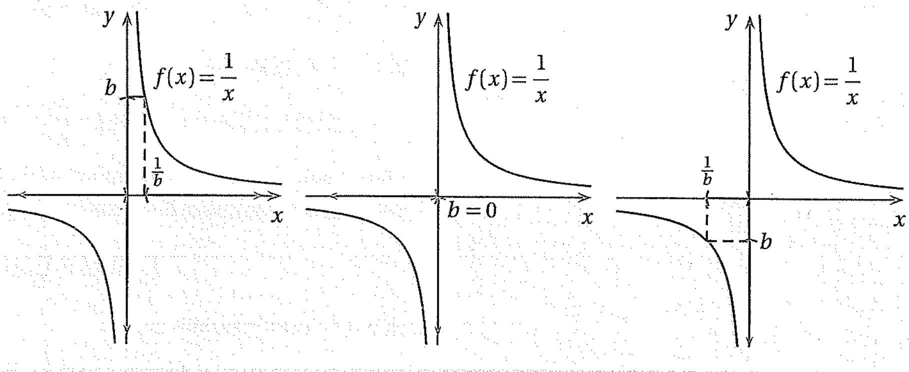
$$f^{-1}((-\infty,b)) = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \mid f(x) < b\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \,\middle|\, \frac{1}{x} < b\right\} = \begin{cases} (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{b},\infty\right), & b > 0 \\ (-\infty,0), & b = 0 \\ \left(\frac{1}{b},0\right), & b < 0 \end{cases}$$

(Şekil ?? e bakınız.) ve

$$f^{-1}((b,\infty)) = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \mid f(x) > b\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \,\middle|\, \frac{1}{x} > b\right\} = \begin{cases} \left(0,\frac{1}{b}\right), & b > 0 \\ (0,\infty), & b = 0 \\ \left(-\infty,\frac{1}{b}\right) \cup (0,\infty), & b < 0 \end{cases}$$

olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty,b))$ ve $f^{-1}((b,\infty))$ kümeleri açık olduğundan Sonuç 6.29 gereğince f fonksiyonu süreklidir.✍

Şekil 6.14



ÖRNEK 6.33. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $g : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}$$

şeklinde tanımlı $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 6.32 gereğince $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Her $x \in X$ için

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)}$$

olduğundan $h = f \circ g$ olur. Teorem 6.14 gereğince h fonksiyonu süreklidir.✍

Teorem 6.34. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $f, g : X \to \mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon, $\alpha \geq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

a) $h(x) = |f(x)|^\alpha$ şeklinde tanımlı $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

b) $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$ şeklinde tanımlı $af + bg : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

c) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ şeklinde tanımlı $fg : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

d) Her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ şeklinde tanımlı $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

İSPAT:

a) Örnek 6.30 gereğince $k(x) = |x|^\alpha$ şeklinde tanımlı $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Her $x \in X$ için
$$h(x) = (k \circ f)(x) = k(f(x)) = |f(x)|^\alpha$$
olduğundan $h = k \circ f$ olur. Teorem 6.14 gereğince h fonksiyonu süreklidir.

b) i) Önce, $f + g$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ ve $(f+g)(x_0) = y_0$ olsun.
$$\mathscr{B}_{y_0} = \{(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$
kolleksiyonu y_0 noktasının yerel bir tabanıdır. $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \in \mathscr{B}_{y_0}$ verilsin. f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğundan
$$\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathscr{B}_{f(x_0)}$$
için $x \in V_1$ olduğunda
$$f(x) \in \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \left(\text{veya } f(V_1) \subseteq \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$
olacak şekilde $x_0 \in V_1$ özelliğine sahip bir $V_1 \in \mathcal{T}$ vardır. Benzer şekilde, g fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğundan
$$\left(g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathscr{B}_{g(x_0)}$$
için $x \in V_2$ olduğunda
$$g(x) \in \left(g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \left(\text{veya } g(V_2) \subseteq \left(g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$
olacak şekilde $x_0 \in V_2$ özelliğine sahip bir $V_2 \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $x_0 \in V_1 \cap V_2$ ve $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ olur. Diğer yandan her $x \in V_1 \cap V_2$ için
$$|(f+g)(x) - y_0| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
dur. Diğer bir deyişle her $x \in V_1 \cap V_2$ için
$$(f+g)(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \quad (\text{veya } (f+g)(V_1 \cap V_2) \subseteq (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$$
olur. Teorem 6.4 gereğince $f + g$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktası keyfi olduğundan $f + g$ fonksiyonu X üzerinde süreklidir.

ii) Örnek 6.31 gereğince af ve bg fonksiyonları süreklidir. Böylece (a) gereğince $af + bg$ fonksiyonu süreklidir.

c) Her $x \in X$ için
$$(fg)(x) = \frac{1}{4}\left[|f(x) + g(x)|^2 - |f(x) - g(x)|^2\right]$$
olduğundan (a) ve (b) gereğince fg fonksiyonu süreklidir.

d) Örnek 6.32 gereğince $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ şeklinde tanımlı $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan (c) gereğince hf fonksiyonu süreklidir. Diğeryandan her $x \in X$ için $(hf)(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ olduğundan $hf = \dfrac{f}{g}$ dir. Bu durumda hf sürekli olduğundan $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu süreklidir.✔

Teorem 6.35. ▷
$m = 1, 2, \cdots, n$ için
$$\pi_m((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = x_m$$
şeklinde tanımlı $\pi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ izdüşüm (projeksiyon) fonksiyonu süreklidir.

İSPAT: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda
$$\pi_m^{-1}((a,b)) = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \underbrace{(a,b)}_{m.\text{çarpan}} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$
dir. Böylece $\pi_m^{-1}((a,b))$ kümesi $\mathbb{R}^n$ standart uzayında açıktır. Sonuç 6.28 gereğince π_m fonksiyonu süreklidir.✔

Teorem 6.36. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_m \circ f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_m"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

a) f fonksiyonu süreklidir.
b) Her $m = 1, 2, \cdots, n$ için
$$\pi_m \circ f$$
fonksiyonu süreklidir.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 6.35 gereğince her $m = 1, 2, \cdots, n$ için π_m sürekli olduğundan Teorem 6.14 gereğince $\pi_m \circ f$ fonksiyonu süreklidir.

b)⇒ a).
$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{\pi_1^{-1}((a_1,b_1)) \cap \pi_2^{-1}((a_2,b_2)) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}((a_n,b_n)) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$
kolleksiyonu $\mathbb{R}^n$ standart uzayının bir tabanıdır.
$$U = \pi_1^{-1}((a_1,b_1)) \cap \pi_2^{-1}((a_2,b_2)) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}((a_n,b_n)) \in \mathcal{B}$$
olsun. Bu durumda
$$\begin{aligned}
f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\pi_1^{-1}((a_1,b_1)) \cap \pi_2^{-1}((a_2,b_2)) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}((a_n,b_n))\right) \\
&= f^{-1}\left(\pi_1^{-1}((a_1,b_1))\right) \cap f^{-1}\left(\pi_2^{-1}((a_2,b_2))\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(\pi_n^{-1}((a_n,b_n))\right) \\
&= (\pi_1 \circ f)^{-1}((a_1,b_1)) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}((a_2,b_2)) \cap \cdots \cap (\pi_n \circ f)^{-1}((a_n,b_n))
\end{aligned}$$

olur. Her $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $m = 1,2,\cdots,n$ için

$$(\pi_m \circ f)^{-1}((a_m, b_m))$$

kümesi X de açıktır. Sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi açık olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi X de açıktır. Teorem 6.20 gereğince f fonksiyonu süreklidir.✔

6.3. Açık Fonksiyonlar ve Kapalı Fonksiyonlar

TANIM 6.37. ▷
$f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun.

a) X in açık her U alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan $f(U)$ kümesi Y nin açık bir alt kümesi ise f ye **açık fonksiyon** denir. Yani her $U \in \mathcal{T}_1$ için $f(U) \in \mathcal{T}_2$ oluyorsa f ye **açık fonksiyon** denir.

b) X in kapalı her F alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan $f(F)$ kümesi Y nin kapalı bir alt kümesi ise f ye **kapalı fonksiyon** denir.

Not: Bir f fonksiyonunun açık olduğunun gösterilmesi için açık her kümenin görüntüsünün açık olduğunun gösterilmesi gerekir. Görüntüsü açık olmayan bir açık küme varsa fonksiyon açık olamaz. Benzer şekilde bir f fonksiyonunun kapalı olduğunun gösterilmesi için kapalı her kümenin görüntüsünün kapalı olduğunun gösterilmesi gerekir. Görüntüsü kapalı olmayan bir kapalı küme varsa fonksiyon kapalı olamaz.

ÖRNEK 6.38. ▷

$$X = \{a,b,c,d\}, \quad \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

ve

$$Y = \{x,y,z,w\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, Y, \{y\}, \{y,w\}, \{y,z,w\}\}$$

olsun.

$$f(a) = f(b) = y, \quad f(c) = w, \quad f(d) = z$$

şeklinde tanımlı $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu verilsin.

a) f fonksiyonunun açık olduğunu gösterelim.
b) f fonksiyonunun kapalı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a)

$$f(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_2, \quad f(X) = \{y,z,w\} \in \mathcal{T}_2, \quad f(\{a\}) = \{y\} \in \mathcal{T}_2$$

ve

$$f(\{a,b\}) = \{y\} \in \mathcal{T}_2, \quad f(\{a,b,c\}) = \{y,w\} \in \mathcal{T}_2$$

olduğundan f fonksiyonu açıktır.

b) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{d\}\}$$

ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_2 = \{\emptyset, Y, \{x,z,w\}, \{x,z\}, \{x\}\}$$

olur. $\{d\} \in \mathcal{K}_1$ ve $f(\{d\}) = \{z\} \notin \mathcal{K}_2$ olduğundan f kapalı bir fonksiyon değildir.

ÖRNEK 6.39. ▷
$f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu açık bir fonksiyon olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $(-1,1)$ aralığı $\mathbb{R}$ standart uzayında açıktır. Diğer yandan $f((-1,1)) = [0,1)$ ve $[0,1)$ aralığı $\mathbb{R}$ standart uzayında açık değildir. O halde f fonksiyonu açık bir fonksiyon değildir.✍

Not
Sürekli bir fonksiyon açık ya da kapalı olmak zorunda değildir. Açık veya kapalı her fonksiyon da sürekli olmak zorunda değildir.✐

ÖRNEK 6.40. ▷
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 1/(1+x^2)$ şeklinde tanımlansın. f nin sürekli olmasına rağmen ne açık ve nede kapalı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: f nin sürekli olduğu açıktır. Diğer yandan $f(\mathbb{R}) = (0,1]$ dir. $\mathbb{R}$ hem açık hem kapalı olmasına rağmen $(0,1]$ ne açık ne de kapalıdır. Böylece bu fonksiyon sürekli olmasına rağmen ne açık ve nede kapalıdır.✐

ÖRNEK 6.41. ▷
$\mathcal{T}$, X üzerindeki kaba topoloji olmak üzere $\mathrm{id}(x) = x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id} : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$ birim fonksiyonu sürekli ama ne açık nede kapalı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathrm{id} : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu biliyoruz. Şimdi bu fonksiyonun ne açık nede kapalı olduğunu gösterelim. $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ ve $A \neq X$ olsun. Bu durumda A kümesi $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayında hem açık hem kapalıdır. Diğer yandan $\mathrm{id}(A) = A$ olduğundan $\mathrm{id}(A) \neq \emptyset$ ve $\mathrm{id}(A) \neq X$ dir. Bu durumda $\mathrm{id}(A)$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında ne açık ne de kapalıdır. Böylece bu fonksiyon sürekli olmasına rağmen ne açık ve nede kapalıdır.✍

ÖRNEK 6.42. ▷
Hem açık hem kapalı ama sürekli olmayan bir fonksiyon örneği verelim.

ÇÖZÜM: $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ birim fonksiyonunun açık (kapalı) olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olmasıdır. O halde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ise bu fonksiyon hem açık hem kapalıdır. Diğer yandan $U \in \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{T}_1$ ise $\mathrm{id}^{-1}(U) = U \notin \mathcal{T}_1$ olduğundan id fonksiyonu sürekli olamaz. Örneğin, $\mathcal{T}$, X üzerindeki kaba topoloji olmak üzere $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{P}(X))$ fonksiyonu hem açık hem kapalı olmasına rağmen X in birden fazla elemanı varsa bu fonksiyon sürekli değildir.✍

ÖRNEK 6.43. ▷
$A \subseteq X$ ve $i : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ fonksiyonu $i(x) = x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda i nin açık (kapalı) olması için gerek ve yeter şart A nın $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık (kapalı) olması gerektiğini gösterelim.

ÇÖZÜM: i fonksiyonunun açık olduğunu kabul edelim. A, $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayında açık olduğundan $A = i(A)$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır. Şimdi A nın $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olduğunu kabul edelim. $U \in \mathcal{T}_A$ olsun. Bu durumda $U = A \cap U$ olduğundan $i(U) = U = U \cap A$ dır. $U, A \in \mathcal{T}$ olduğundan $i(U) = U \cap A \in \mathcal{T}$ dur. O halde i açık bir fonksiyondur.✍

Not

Kapalı bir fonksiyon açık ve açık bir fonksiyonda kapalı olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(x) = c$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabit fonksiyonu kapalı olmasına rağmen açık değildir. Diğer yandan bire-bir örten fonksiyonlar için aşağıdaki teoremi yazabiliriz.✍

Teorem 6.44. $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bire-bir örten bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu açıktır. **b)** f fonksiyonu kapalıdır.

İSPAT: Alıştırma 9 gereğince her $A \subseteq X$ için $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ dır.

a)⇒ b). $A \subseteq X$ kapalı olsun. Bu durumda $X \setminus A$ açıktır. f açık bir fonksiyon ve $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ olduğundan $Y \setminus f(A)$ açıktır. Bu durumda, $f(A)$ kapalıdır. Yani f kapalıdır.

b)⇒ a). $A \subseteq X$ açık olsun. Bu durumda $X \setminus A$ kapalıdır. f kapalı bir fonksiyon ve $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ olduğundan $Y \setminus f(A)$ kapalıdır. Bu durumda, $f(A)$ açıktır.✔

Teorem 6.45. $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$, $g : (Y, \mathcal{T}_2) \to (Z, \mathcal{T}_3)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının her ikiside açık (kapalı) ise $g \circ f$ fonksiyonuda açık (kapalı) dır.

İSPAT: U, X uzayında açık (kapalı) olsun. Bu durumda f açık (kapalı) olduğundan

$f(U)$ kümesi Y uzayında açık (kapalı) dır. Böylece g açık (kapalı) olduğundan $g(f(U))$ kümesi Z uzayında açık (kapalı) dır. $(g \circ f)(U) = g(f(U))$ olduğundan $(g \circ f)(U)$ kümesi Z uzayında açık (kapalı) dır. O halde $g \circ f$ fonksiyonu açık (kapalı) dır.✔

Teorem 6.46. $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonunu verilsin. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu kapalıdır. **b)** Her $A \subseteq X$ için $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$ dır.

İSPAT:

a)⇒ b). $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq \overline{A}$ olduğundan $f(A) \subseteq f\left(\overline{A}\right)$ dır. $\overline{A}$ kapalı ve f kapalı bir fonksiyon olduğundan $f\left(\overline{A}\right)$ kapalıdır. Teorem 5.29 gereğince $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f\left(\overline{A}\right)}$ olduğundan

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f\left(\overline{A}\right)} = f\left(\overline{A}\right)$$

olur. Yani $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$ dır.

b)⇒ a). $A \subseteq X$ kapalı olsun. Teorem 5.29 gereğince $A = \overline{A}$ dır. Bu durumda

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right) = f(A)$$

olur. O halde $f(A) = \overline{f(A)}$ dır. Teorem 5.29 gereğince $f(A)$ kapalıdır.✔

Teorem 6.47.

$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonu verilsin.

a) f fonksiyonu açıktır. **b)** Her $A\subseteq X$ için $f\left(\overset{\circ}{A}\right)\subseteq(f(A))^\circ$ dır.

İSPAT:

a)⇒ b). $A\subseteq X$ olsun. $\overset{\circ}{A}\subseteq A$ olduğundan $f\left(\overset{\circ}{A}\right)\subseteq f(A)$ dır. Diğer yandan, f fonksiyonu açık olduğundan $f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ kümesi açıktır. Bu durumda

$$f\left(\overset{\circ}{A}\right)^\circ=f\left(\overset{\circ}{A}\right)\quad \text{ve}\quad f\left(\overset{\circ}{A}\right)\subseteq f(A)$$

olduğundan

$$f\left(\overset{\circ}{A}\right)=f\left(\overset{\circ}{A}\right)^\circ\subseteq(f(A))^\circ$$

olur. Yani $f\left(\overset{\circ}{A}\right)\subseteq(f(A))^\circ$ dir.

b)⇒ a). $A\subseteq X$ açık olsun. Teorem 5.48 gereğince $\overset{\circ}{A}=A$ dır. Böylece $f(A)=f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ olur. (b) gereğince

$$f\left(\overset{\circ}{A}\right)\subseteq(f(A))^\circ$$

olduğundan $f(A)\subseteq(f(A))^\circ$ olur. Buradan $f(A)=(f(A))^\circ$ elde edilir. Teorem 5.48 gereğince $f(A)$ açıktır. O halde f açık bir fonksiyondur.✔

Teorem 6.48.

$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon ve $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_1$ in bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu açıktır. **b)** Her $B\in\mathcal{B}$ için $f(B)$ açıktır.

İSPAT:

a)⇒ b). $B\in\mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_1$ in bir tabanı olduğundan $B\in\mathcal{T}_1$ dir. f açık bir fonksiyon olduğundan $f(B)$ kümesi açıktır.

b)⇒ a). $U\in\mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $i\in I$ için $B_i\in\mathcal{B}$ olmak üzere $U=\bigcup_{i\in I}B_i$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. Bu durumda

$$f(U)=f\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(B_i)$$

ve (b) gereğince her $i\in I$ için $f(B_i)\in\mathcal{T}_2$ olduğundan $f(U)\in\mathcal{T}_2$ olur. Yani f açık bir fonksiyondur.✔

Teorem 6.47 ve Teorem 6.26 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 6.49. ▷ $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bire-bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu sürekli ve açıktır. b) Her $A\subseteq X$ için $(f(A))^\circ = f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ dır.

Teorem 6.46 ve Teorem 6.22 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 6.50. ▷ $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu sürekli ve kapalıdır. b) Her $A\subseteq X$ için $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$ dır.

Teorem 6.51. ▷

$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bire-bir örten bir fonksiyon ve $g=f^{-1}$ de f nin ters fonksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir. b) $g=f^{-1}$ fonksiyonu açık (kapalı) dır.

İSPAT:

a)⇒ b). $U\in\mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(U)=g(U)$ dur. (Alıştırma 9 bakınız) f sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi açıktır. Yani $g(U)$ kümesi açıktır. O halde $g=f^{-1}$ fonksiyonu açıktır.

b)⇒ a). $U\in\mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(U)=g(U)$ dur. (Alıştırma 9 bakınız) g açık bir fonksiyon olduğundan $g(U)$ kümesi açıktır. Yani $f^{-1}(U)$ kümesi açıktır. O halde f sürekli bir fonksiyondur.✔

6.4. Homeomorfizmler

TANIM 6.52. ▷ $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bire-bir örten bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikiside sürekli ise f ye bir **homeomorfizm** denir. $(X,\mathcal{T}_1)$ ile $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara **homeomorfik uzaylar** denir ve genellikle $(X,\mathcal{T}_1)\cong(Y,\mathcal{T}_2)$ şeklinde gösterilir.

NOT 6.53. Tanım 6.52 gereğince $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olması için

H-1). f bire-bir örten, H-2). f sürekli, H-3). f^{-1} sürekli

olmalıdır. Böylece

H-1′). f bire-bir örten değil veya H-2′). f sürekli değil veya H-3′). f^{-1} sürekli değil

ise f bir homeomorfizm olamaz.

Teorem 6.54. ▷

$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ ve $g:(Y,\mathcal{T}_2)\to(Z,\mathcal{T}_3)$ iki homeomorfizm olsun. Bu durumda $gof:(X,\mathcal{T}_1)\to(Z,\mathcal{T}_3)$ fonksiyonuda bir homeomorfizmdir.

İSPAT:

H-1). gof nin bire-bir ve örten olduğu açıktır. (Alıştırma 9 bakınız.)
H-2). g ve f fonksiyonları sürekli olduğundan Teorem 6.14 gereğince gof fonksiyonuda süreklidir.
H-3). $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ve f^{-1}, g^{-1} fonksiyonlarının sürekli oldukları göz önüne alınırsa Teorem 6.14 gereğince $(gof)^{-1}$ fonksiyonu da süreklidir.

O halde gof fonksiyonu bir homeomorfizmdir. ✔

NOT 6.55. Tanımdan anlaşılacağı gibi $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu bir homeomorfizm ise $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ fonksiyonuda bir homeomorfizmdir. Diğer yandan $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayından $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayına tanımlı birim fonksiyon bir homeomorfizmdir. Böylece topolojik uzaylar arasındaki homeomorfik olma bağıntısı "$\cong$" simetrik ve yansıyandır. Teorem 6.54 gereğince "$\cong$" bağıntısı geçişken de olduğundan "$\cong$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

ÖRNEK 6.56. ▷
$X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{■, ★, ♦, ♣, ♠\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{Y, \emptyset, \{■\}, \{♦, ♣\}, \{■, ♦, ♣\}, \{★, ♦, ♣, ♠\}\}$$

olsun.

$$f(a) = ■, \quad f(b) = ★, \quad f(c) = ♦, \quad f(d) = ♣ \quad f(e) = ♠$$

şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

H-1). f bire-bir örtendir.
H-2).

$$\begin{array}{lll} f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_1, & f^{-1}(\{■\}) = \{a\} \in \mathcal{T}_1, & f^{-1}(\{■, ♦, ♣\}) = \{a, c, d\} \in \mathcal{T}_1, \\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_1, & f^{-1}(\{♦, ♣\}) = \{c, d\} \in \mathcal{T}_1, & f^{-1}(\{★, ♦, ♣, ♠\}) = \{b, c, d, e\} \in \mathcal{T}_1 \end{array}$$

olduğundan f süreklidir.
H-3). f nin ters fonksiyonu

$$f^{-1}(■) = a, \quad f^{-1}(★) = b, \quad f^{-1}(♦) = c, \quad f^{-1}(♣) = d, \quad f^{-1}(♠) = e$$

şeklinde tanımlanan $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonudur.

$$\begin{array}{ll} \left(f^{-1}\right)^{-1}(X) = Y \in \mathcal{T}_2, & \left(f^{-1}\right)^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_2, \\ \left(f^{-1}\right)^{-1}(\{a, c, d\}) = \{■, ♦, ♣\} \in \mathcal{T}_2, & \left(f^{-1}\right)^{-1}(\{c, d\}) = \{♦, ♣\} \in \mathcal{T}_2, \\ \left(f^{-1}\right)^{-1}(\{a\}) = \{■\} \in \mathcal{T}_2, & \left(f^{-1}\right)^{-1}(\{b, c, d, e\}) = \{★, ♦, ♣, ♠\} \in \mathcal{T}_2 \end{array}$$

olduğundan f^{-1} süreklidir.

Bu durumda f bir homeomorfizmdir. Böylece $(X,\mathcal{T}_1)$ ile $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfiktir.

SONUÇ 6.57. ▷ $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir homeomorfizm ve $A\subseteq X$ olsun. Bu durumda X in $X\setminus A$ alt uzayı ile Y nin $Y\setminus f(A)$ alt uzayı homeomorfiktir.

İSPAT: Her $x\in X\setminus A$ için $g(x)=f(x)$ şeklinde tanımlanan $g:X\setminus A\to Y\setminus f(A)$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğu açıktır. ✓

Not

Sonuç 6.49 gereğince bire-bir bir

$$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$$

fonksiyonunun açık ve sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A\subseteq X$ için

$$f\left(\overset{\circ}{A}\right)=f(A)^{\circ}$$

olmasıdır. Buna göre f nin bir homeomorfizm olması için gerek ve yeter şart her $A\subseteq X$ için

$$f\left(\overset{\circ}{A}\right)=f(A)^{\circ}$$

olmasıdır.

SONUÇ 6.58. ▷ $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir homeomorfizm ve $a\in X$ olsun. Bu durumda X in $X\setminus\{a\}$ alt uzayı ile Y nin $Y\setminus\{f(a)\}$ alt uzayı homeomorfiktir.

Teorem 6.59. ▷

$f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) f bir homeomorfizmdir.
b) f sürekli ve açık bir fonksiyondur.
c) f sürekli ve kapalı bir fonksiyondur.
d) Her $A\subseteq X$ için $\overline{f(A)}=f\left(\overline{A}\right)$ dır.

İSPAT:

a)⇔ b). Teorem 6.51 gereğince açıktır.
b)⇔ c). f bire-bir ve örten olduğundan Teorem 6.44 gereğince f nin açık olması için gerek ve yeter şart f nin kapalı olmasıdır.
c)⇔ d). Teorem 6.50 gereğince açıktır. ✓

TANIM 6.60. ▷
Homeomorfizmler altında korunan özelliklere **topolojiksel özellikler** denir.

NOT 6.61. Aşağıdaki örnekler $\mathbb{R}$ nin bütün açık aralıklarının homeomorfik olduklarını gösterir. Uzunluğu sonlu olan, örneğin $(0,1)$ aralığı ile uzunluğu sonlu olmayan $\mathbb{R}$ homeomorfiktir. Aslında her açık (a,b) aralığı ile $\mathbb{R}$ homeomorfiktir. Dolayısıyla, aralıkların uzunlukları topolojiksel bir özellik değildir.

ÖRNEK 6.62. ▷
$(0,1)$ ve (a,b) aralıklarının homeomorfik olduklarını gösterelim.

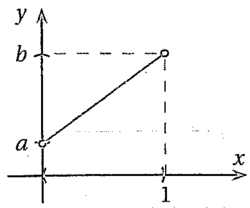
ÇÖZÜM: $f:(0,1)\to(a,b)$ fonksiyonunu

$$f(x)=a(1-x)+bx$$

şeklinde tanımlayalım. (Şekil 6.15 ya bakınız.)

H-1). f nin bire-bir ve örten olduğu açıktır.
H-2). Teorem 6.34 gereğince f fonksiyonu süreklidir.
H-3). f nin ters fonksiyonu

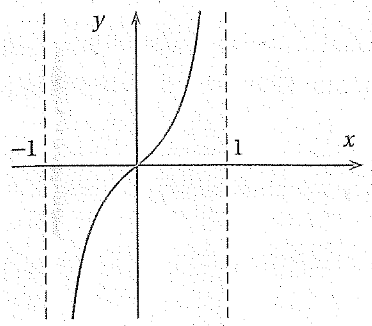
$$f^{-1}(x)=\frac{x-a}{b-a}$$



Şekil 6.15

şeklinde tanımlı $f^{-1}:(a,b)\to(0,1)$ fonksiyonudur. f^{-1} fonksiyonuda Teorem 6.34 gereğince süreklidir. Böylece, f bir homeomorfizmdir. Yani $(0,1)\cong(a,b)$ dir.

$c=a$ ve $d=b$ alınırsa $(0,1)\cong(c,d)$ olduğu görülür. Teorem 6.54 gereğince $\cong$ bağıntısı geçişken olduğundan $(a,b)\cong(c,d)$ olur. Benzer şekilde $[a,b]$ ile $[c,d]$ aralıklarının homeomorfik oldukları gösterilebilir. (Alıştırma 23 e bakınız.)✍



Şekil 6.16

ÖRNEK 6.63. ▷
$\mathbb{R}$ ile $(-1,1)$ aralığının homeomorfik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ şeklinde tanımlansın. (Şekil 6.16 ye bakınız.)

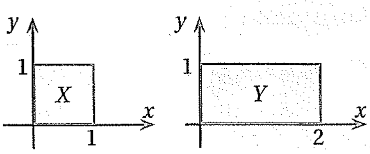
H-1). f nin bire-bir ve örten olduğu açıktır.
H-2). f fonksiyonu Örnek 6.30 ve Teorem 6.34 gereğince süreklidir.
H-3). f fonksiyonunun ters fonksiyonu

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}, & x\geq 0\\ \dfrac{x}{1-x}, & x<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlı f^{-1} fonksiyonudur. Teorem 6.17 gereğince f^{-1} fonksiyonu süreklidir.

Böylece f bir homeomorfizmdir. f bir homeomorfizm olduğundan $(-1,1)$ aralığı ile $\mathbb{R}$ uzayı homeomorfiktir.✍

Not
Örnek 6.62 ve Örnek 6.63 gereğince $a<b$ özelliğindeki her $a,b\in\mathbb{R}$ için (a,b) aralığı ile $\mathbb{R}$ homeomorfiktir.



Şekil 6.17

ÖRNEK 6.64. ▷
$\mathbb{R}^2$ standart uzayının

$$X=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\} \text{ ve } Y=\{(x,y)|0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\}$$

alt uzaylarının homeomorfik olduklarını gösterelim. (Şekil 6.17 ye bakınız.)

ÇÖZÜM: $f((x,y))=(2x,y)$ şeklinde tanımlı $f:X\to Y$ fonksiyonu göz önüne alalım.

H-1). f nin bire-bir örten olduğu açıktır.
H-2). f nin sürekli olduğunu gösterelim. Her $(x,y)\in X$ için

$$\begin{aligned}(\pi_1\circ f)((x,y)) &= \pi_1(f((x,y)))=\pi_1((2x,y))=2x=2\pi_1((x,y))\\ (\pi_2\circ f)((x,y)) &= \pi_2(f((x,y)))=\pi_2((2x,y))=y=\pi_2((x,y))\end{aligned}$$

olduğundan $\pi_1\circ f=2\pi_1$ ve $\pi_2\circ f=\pi_2$ olur. π_1 ve π_2 fonksiyonları sürekli olduklarından $\pi_1\circ f$ ve $\pi_2\circ f$ fonksiyonları süreklidir. Teorem 6.36 gereğince f süreklidir.

H-3). f nin ters fonksiyonu

$$f^{-1}(x,y)=\left(\frac{1}{2}x,y\right)$$

şeklinde tanımlı $f^{-1}:Y\to X$ fonksiyonudur. Şimdi, f^{-1} fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Her $(x,y) \in Y$ için

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ f^{-1})((x,y)) &= \pi_1(f^{-1}((x,y))) = \pi_1\left(\left(\frac{1}{2}x, y\right)\right) = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi_1((x,y)) \\ (\pi_2 \circ f^{-1})((x,y)) &= \pi_2(f^{-1}((x,y))) = \pi_2\left(\left(\frac{1}{2}x, y\right)\right) = y = \pi_2((x,y))\end{aligned}$$

olduğundan $\pi_1 \circ f^{-1} = \frac{1}{2}\pi_1$ ve $\pi_2 \circ f^{-1} = \pi_2$ olur. π_1 ve π_2 fonksiyonları sürekli olduklarından $\pi_1 \circ f^{-1}$ ve $\pi_2 \circ f^{-1}$ fonksiyonları süreklidir. Teorem 6.36 gereğince f^{-1} süreklidir.

f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli olduğundan f bir homeomorfizmdir. O halde X ve Y uzayları homeomorfiktir. Böylece alan kavramıda topolojiksel bir özellik değildir.

ÖRNEK 6.65. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ ve $x_0 = (0,0,\cdots,0)$ olmak üzere

$$f((x_1,x_2,\cdots,x_n)) = \left(\frac{x_1}{1+\|x\|_2}, \frac{x_2}{1+\|x\|_2}, \cdots, \frac{x_n}{1+\|x\|_2}\right) = \frac{1}{1+\|x\|_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R}^n \to B(x_0, 1)$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

H-1). f nin bire-bir örten olduğu gösterilebilir.

H-2). $m = 1,2,\cdots,n$ için $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\pi_m \circ f)((x_1,x_2,\cdots,x_n)) &= \pi_m(f((x_1,x_2,\cdots,x_n))) \\ &= \pi_m\left(\frac{1}{1+\|x\|_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right) \\ &= \frac{x_m}{1+\|x\|_2} = \frac{\pi_m((x_1,x_2,\cdots,x_n))}{1+\|x\|_2} \\ &= \left(\frac{\pi_m}{1+\|.\|_2}\right)((x_1,x_2,\cdots,x_n))\end{aligned}$$

olur. Yani $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ f = \frac{\pi_m}{1+\|.\|_2}$ dir. π_m fonksiyonu sürekli ve Alıştırmalar 17 gereğince $\|.\|_2$ fonksiyonu sürekli olduğundan her $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ f$ fonksiyonu süreklidir. Teorem 6.36 gereğince f süreklidir.

H-3). f nin ters fonksiyonu

$$f^{-1}((x_1,x_2,\cdots,x_n)) = \left(\frac{x_1}{1-\|x\|_2}, \frac{x_2}{1-\|x\|_2}, \cdots, \frac{x_n}{1-\|x\|_2}\right) = \frac{1}{1-\|x\|_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

şeklinde tanımlı $f^{-1} : B(x_0,1) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonudur. $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in B(x_0,1)$ olmak

Not

Örnek 6.65 gereğince

1. $n = 1$ için $\mathbb{R} \cong B(0,1) = (-1,1)$ olur.
2. $n = 2$ için
$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\cong B((0,0),1) \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}\end{aligned}$$
olur.
3. $n = 3$ için
$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\cong B((0,0,0),1) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}\end{aligned}$$
olur.

üzere her $m = 1,2,\cdots,n$ için

$$\begin{aligned}(\pi_m \circ f^{-1})((x_1,x_2,\cdots,x_n)) &= \pi_m\left(f^{-1}((x_1,x_2,\cdots,x_n))\right)\\ &= \pi_m\left(\frac{1}{1-\|x\|_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right)\\ &= \frac{x_m}{1-\|x\|_2} = \frac{\pi_m((x_1,x_2,\cdots,x_n))}{1-\|x\|_2}\\ &= \left(\frac{\pi_m}{1-\|.\|_2}\right)((x_1,x_2,\cdots,x_n))\end{aligned}$$

olur. Yani $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ f = \frac{\pi_m}{1-\|.\|_2}$ dir. π_m fonksiyonu sürekli ve Alıştırmalar 17 gereğince $\|.\|_2$ fonksiyonu sürekli olduğundan her $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ f^{-1}$ fonksiyonu süreklidir. Teorem 6.36 gereğince f^{-1} süreklidir.

Bu durumda f bir homeomorfizmdir. Yani $\mathbb{R}^n$ ve $B(x_0,1)$ uzayları homeomorfiktir.✍

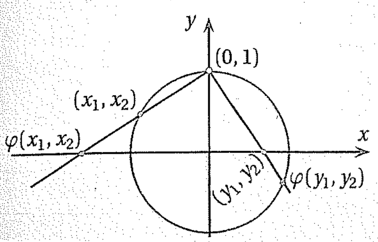
ÖRNEK 6.66. ▷ $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ olmak üzere

$$\varphi : \mathbb{S}^n \setminus \{(0,0,\cdots,1)\} \to \mathbb{R}^n$$

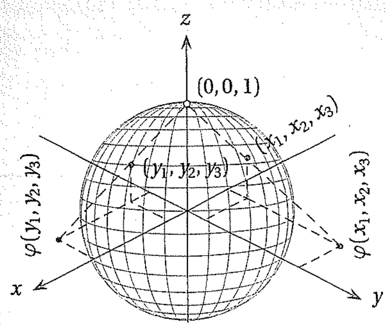
fonksiyonu

$$\varphi((x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

şeklinde tanımlansın. φ nin bir homeomorfizm olduğunu gösterelim. ($n = 1$ için φ fonksiyonu Şekil 6.18 da ve $n = 2$ için φ fonksiyonu Şekil **??** de gösterilmiştir.)



Şekil 6.18



Şekil 6.19

ÇÖZÜM:

H-1). φ fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

H-2). φ nin sürekli olduğunu gösterelim.

$$\pi'((x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

şeklinde tanımlı

$$\pi' : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu süreklidir. $m = 1,2,\cdots,n$ için $(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{(0,0,\cdots,1)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\pi_m \circ \varphi)((x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})) &= \pi_m\left(\varphi((x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}))\right)\\ &= \pi_m\left(\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)\right)\\ &= \frac{x_m}{1-x_{n+1}} = \frac{(\pi_m \circ \pi')((x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}))}{1-\pi_{n+1}((x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}))}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\pi_m \circ \pi'}{1-\pi_{n+1}}\right)((x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}))$$

olur. Yani $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ \varphi = \dfrac{\pi_m \circ \pi'}{1-\pi_{n+1}}$ dir. π_m, π_{n+1} ve π' fonksiyonları sürekli olduklarından her $m = 1,2,\cdots,n$ için $\pi_m \circ \varphi$ fonksiyonu süreklidir. Teorem 6.36 gereğince φ süreklidir.

H-3). φ nin ters fonksiyonu

$$\phi((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \frac{1}{1+\|x\|_2^2}(2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n, \|x\|_2^2 - 1)$$

şeklinde tanımlı $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \backslash \{(0,0,\cdots,1)\}$ fonksiyonudur. ϕ fonksiyonununda sürekli olduğu benzer şekilde gösterilir.

Böylece φ bir homeomorfizmdir. O halde $\mathbb{S}^n \backslash \{(0,0,\cdots,1)\}$ ve $\mathbb{R}^n$ uzayları homeomorfiktir.

Not

Örnek 6.66 gereğince

1. $n = 1$ için

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \backslash \{(0,1)\}$$

olur.

2. $n = 2$ için

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$$

olur.

ÖRNEK 6.67. ▷

$\mathbb{R}^2$ nin

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

ve

$$A = \{(x,y) | x = \pm 1, -1 \le y \le 1 \text{ veya } y = \pm 1, -1 \le x \le 1\}$$

alt uzayları verilsin. (Şekil 6.20 e bakınız.) $f : \mathbb{S}^1 \to A$ fonksiyonu

$$k((x,y)) = \max\{|x|, |y|\}$$

olmak üzere

$$f((x,y)) = \left(\frac{x}{k((x,y))}, \frac{y}{k((x,y))}\right) = \frac{1}{k((x,y))}(x,y)$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{S}^1 \to A$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

H-1). f nin bire-bir örten olduğu açıktır.

H-2). Her $(x,y) \in \mathbb{S}^1$ için

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ f)((x,y)) &= \pi_1(f((x,y))) = \pi_1\left(\left(\frac{x}{k((x,y))}, \frac{y}{k((x,y))}\right)\right) \\
&= \frac{x}{k((x,y))} = \frac{\pi_1((x,y))}{k((x,y))} = \left(\frac{\pi_1}{k}\right)(x,y), \\
(\pi_2 \circ f)((x,y)) &= \pi_2(f((x,y))) = \pi_2\left(\left(\frac{x}{k((x,y))}, \frac{y}{k((x,y))}\right)\right) \\
&= \frac{y}{k((x,y))} = \frac{\pi_2((x,y))}{k((x,y))} = \left(\frac{\pi_2}{k}\right)(x,y)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\pi_1 \circ f = \frac{\pi_1}{k} \quad \text{ve} \quad \pi_2 \circ f = \frac{\pi_2}{k}$$

dır. Alıştırma 2(c) gereğince k sürekli olduğundan

$$\pi_1 \circ f \quad \text{ve} \quad \pi_2 \circ f$$

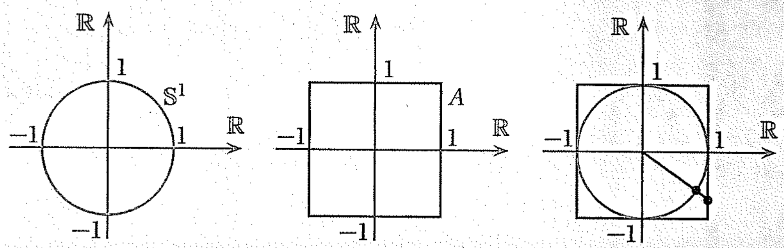
fonksiyonları sürekli olur. Teorem 6.36 gereğince f fonksiyonu süreklidir.

H-3). f nin ters fonksiyonu

$$f^{-1}((x,y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\frac{x}{\|(x,y)\|_2}, \frac{y}{\|(x,y)\|_2}\right) = \frac{1}{\|(x,y)\|_2}(x,y)$$

şeklinde tanımlı $f^{-1} : A \to \mathbb{S}^1$ fonksiyonudur. Bu fonksiyonunda sürekli olduğu gösterilebilir.

Böylece f bir homeomorfizmdir. Diğer bir deyişle $\mathbb{S}^1$ ve A uzayları homeomorfiktir.✍



Şekil 6.20

ÖRNEK 6.68. ▷
$\mathbb{R}^2$ nin

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\} \text{ ve } T = \{(x,y) \,|\, |x| + |y| = 1\}$$

alt uzayları verilsin. (Şekil 6.21 ya bakınız.)

$$f((x,y)) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right)$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{S}^1 \to T$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

H-1). f nin bire-bir örten olduğu açıktır.

H-2). f nin sürekli olduğunu gösterelim. Her $(x,y) \in \mathbb{S}^1$ için

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ f)((x,y)) &= \pi_1(f((x,y))) = \pi_1\left(\left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right)\right) = \frac{x}{|x|+|y|} \\
&= \frac{\pi_1((x,y))}{|\pi_1((x,y))| + |\pi_2((x,y))|} = \left(\frac{\pi_1}{|\pi_1| + |\pi_2|}\right)(x,y), \\
(\pi_2 \circ f)((x,y)) &= \pi_2(f((x,y))) = \pi_2\left(\left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right)\right) = \frac{y}{|x|+|y|}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi_2((x,y))}{|\pi_1((x,y))| + |\pi_2((x,y))|} = \left(\frac{\pi_2}{|\pi_1| + |\pi_2|}\right)(x,y)$$

olduğundan

$$\pi_1 \circ f = \frac{\pi_1}{|\pi_1| + |\pi_2|} \quad \text{ve} \quad \pi_2 \circ f = \frac{\pi_2}{|\pi_1| + |\pi_2|}$$

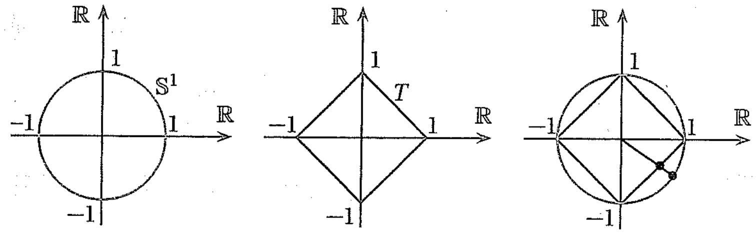
dir. Böylece $\pi_1 \circ f$ ve $\pi_2 \circ f$ fonksiyonları sürekli olur. Teorem 6.36 gereğince f fonksiyonu süreklidir.

H-3). f nin ters fonksiyonu

$$f^{-1}((x,y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\frac{x}{\|(x,y)\|_2}, \frac{y}{\|(x,y)\|_2}\right) = \frac{1}{\|(x,y)\|_2}(x,y)$$

şeklinde tanımlı $g : T \to \mathbb{S}^1$ fonksiyonudur. f^{-1} nin sürekli olduğu da gösterilebilir. Böylece f bir homeomorfizmdir. Diğer bir deyişle $\mathbb{S}^1$ ve T uzayları homeomorfiktir.

Şekil 6.21



6.5. Alıştırmalar

1. $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $a \in X$ olmak üzere $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\{a\}$ kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında açıksa f nin a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

2. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere $f, g : X \to \mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon olsun.

a) $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ kümesinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

b) $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ şeklinde tanımlı $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme:

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

olduğunu kullanınız.)

c) $k(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ şeklinde tanımlı $k : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme:

$$k(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

olduğunu kullanınız.)

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olmadığını gösteriniz.

b) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sol}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sol})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

4. $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $G \subseteq Y$ olmak üzere $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. G kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında bir G_δ-kümesi (F_σ-kümesi) ise $f^{-1}(G)$ kümesininde $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında bir G_δ-kümesi (F_σ-kümesi) olduğunu gösteriniz.

5.

a) $i = 1,2$ için $\mathcal{T}_i$ bir X kümesi üzerinde iki topoloji ve $(Y, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $i = 1,2$ için $f : (X, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T})$ fonksiyonu sürekli ise $f : (X, \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{T})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

b) I bir indis kümesi, $i \in I$ için $\mathcal{T}_i$, X üzerinde bir topoloji ve $f:(X,\mathcal{T}_i) \to (Y,\mathcal{T})$ fonksiyonu sürekli ise $f:\left(X, \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i\right) \to (Y,\mathcal{T})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

6.

a) Örnek 3.4 de tanımlanan $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayından $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayına sabit fonksiyondan farklı sürekli iki fonksiyon yazınız.

b) Örnek 3.4 de tanımlanan $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayından $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayına sürekli olmayan iki fonksiyon yazınız.

7.

a) Örnek 3.5 de tanımlanan $(X,\mathcal{T})$ uzayından $(X,\mathcal{T})$ uzayına sabit fonksiyondan farklı sürekli iki fonksiyon yazınız.

b) Örnek 3.5 de tanımlanan $(X,\mathcal{T})$ uzayından $(X,\mathcal{T})$ uzayına sürekli olmayan iki fonksiyon yazınız.

8.

$$\mathcal{T}_1 = \{(-\infty,x]\,|\,x\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{T}_2 = \{[x,\infty)\,|\,x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,\infty)\,|\,x\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$$

ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a) $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şartın f nin monoton artan olması gerektiğini gösteriniz.

b) $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şartın f nin monoton artan olması gerektiğini gösteriniz.

c) $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şartın f nin monoton azalan olması gerektiğini gösteriniz.

d) $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şartın f nin monoton azalan olması gerektiğini gösteriniz.

9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

a) Sonuç 6.1.2 yi kullanarak f nin sürekli olup olmadığını araştırınız.

b) $f^{-1}(\{1\})$ kümesini bulunuz ve Teorem 6.15 u kullanarak f nin sürekli olup olmadığını araştırınız.

10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f nin sürekli olup olmadığını araştırınız.

11. $X=[0,1]\cup[2,4]$ olmak üzere $\mathbb{R}$ nin X alt uzayı verilsin.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 2, & x\in[2,4]\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

12. $X=(-1,0)\cup(0,1]$ ve $Y=(-1,1)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ nin X ve Y alt uzayları verilsin. $f:X\to Y$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0\\ 1-x, & 0<x\le 1\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f nin sürekli bire-bir ve örten olduğunu gösteriniz.

13. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f nin sürekli olup olmadığını araştırınız.

14.

a) $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f:X\to[a,b]$ bir fonksiyon olsun. f nin sürekli olması için gerek ve yeter şartın $a<c<b$ ve $a<d<b$ özelliğindeki her $c,d\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((c,b])$ ve $f^{-1}([a,d))$ kümelerinin $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olması gerektiğini gösteriniz.

b) $f:X\to(a,b)$ bir fonksiyon olsun. f nin sürekli olması için gerek ve yeter şartın $a<c<b$ ve $a<d<b$ özelliğindeki her $c,d\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((c,b))$ ve $f^{-1}((a,d))$ kümelerinin $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olması gerektiğini gösteriniz.

15. $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olacak şekilde sürekli olmayan bir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve sürekli olmayan bir $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bulunuz.

16. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x\in\mathbb{Q}$ için $f(x)=0$ özelliğine sahip sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=0$ olduğunu gösteriniz.

17. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Her $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X)$ olduğunu gösteriniz.

18. $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve $x \in X$ noktası A nın bir limit noktası olsun. $f(x)$ noktası $f(A)$ nın bir limit noktası olmak zorunda mıdır?

19. $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ ve $(Z,\mathcal{T}_3)$ üç topolojik uzay ve $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun.

a) $g \circ f$ fonksiyonu açık (kapalı), f sürekli ve örten olsun. g fonksiyonunun açık (kapalı) olup olmadığını araştırınız.

b) $g \circ f$ fonksiyonu açık (kapalı), g sürekli ve bire-bir olsun. f fonksiyonunun açık (kapalı) olup olmadığını araştırınız.

20. $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bire-bir açık (kapalı) bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. $f(A) = B$ olmak üzere $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_{1_A}) \to (B, \mathcal{T}_{2_B})$ fonksiyonununda bire-bir açık (kapalı) bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

21. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $f(x) = x^{2n}$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli fakat açık olmadığını gösteriniz.

22. $f(x) = (b-a)x + a$ şeklinde tanımlanan $f : [0,1] \to [a,b]$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösteriniz.

23.

a) $a < b$, $c < d$ olmak üzere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun.

$$[a,b] \cong [c,d]$$

olduğunu gösteriniz.

b) a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

$$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a, \infty) \cong [b, \infty)$$

olduğunu gösteriniz.

c) a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere

$$(-\infty, a) \cong (-\infty, b) \cong (b, \infty) \cong (a, \infty) \cong (a, b)$$

olduğunu gösteriniz.

d) $c < d$ ve $e < f$ olmak üzere c, d, e, f reel sayıları verilsin.

$$[c,d) \cong [e,f) \cong (c,d] \cong (e,f]$$

olduğunu ispatlayınız.

e) $a < b$ olmak üzere her a, b reel sayıları için

$$[0,1) \cong (-\infty, a] \cong [a, \infty) \cong [a,b) \cong (a,b]$$

olduğunu gösteriniz.

24. Alıştırma 23 i kullanarak $\mathbb{R}$ deki herhangi bir aralığın

$$\{0\}, (0,1), [0,1], [0,1)$$

uzaylarından birine homeomorfik olduğu sonucunu elde ediniz.

25. $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun.

a) $(X,\mathcal{T}_1)$ in ayrık uzay olması için gerek ve yeter şartın $(Y,\mathcal{T}_2)$ nin ayrık uzay olması gerektiğini gösteriniz.

b) $(X,\mathcal{T}_1)$ in kaba uzay olması için gerek ve yeter şartın $(Y,\mathcal{T}_2)$ nin kaba uzay olması gerektiğini gösteriniz.

26. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ ayrık uzaylarının homeomorfik olduklarını gösteriniz.

27. $\mathbb{R}$ nin $X_1 = (0,1) \cup (3,4)$ ve $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$ alt uzayları verilsin. X_1 ile X_2 uzaylarının homeomorfik olup olmadıklarını araştırınız.

28. $X = (-1,0) \cup (0,1]$ ve $Y = (-1,1)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ nin X ve Y alt uzayları verilsin. $f : X \to Y$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f nin bir homeomorfizm olmadığını gösteriniz.

29. $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir homeomorfizm, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Aşağıdakileri önermeleri ispatlayınız.

a) $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının bir yerel tabanı ise $\mathscr{B}_{f(x)} = \{f(B) | B \in \mathscr{B}_x\}$ kolleksiyonu $f(x)$ in bir yerel tabanıdır.

b) x noktasının A kümesinin bir limit noktası olması için gerek ve yeter şart $f(x)$ noktasının $f(A)$ kümesinin bir limit noktası olmasıdır.

30. $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir homeomorfizm ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdakileri önermeleri ispatlayınız.

a) $f\left(\overset{\circ}{A}\right) = f(A)^\circ$ dir.

b) $f(\partial A) = \partial f(A)$ dır.

c) $\overline{A} = X$ ise $\overline{f(A)} = Y$ dir.

d) $A \cap \widetilde{A} = \emptyset$ ise $f(A) \cap \widetilde{f(A)} = \emptyset$ dur.

31. $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

a) f nin bire-bir ve örten olduğunu gösteriniz.

b) f nin bir homeomorfizm olup olmadığını araştırınız.

32. m ve c sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin

$$X = \{(x, y) \mid y = mx + c\}$$

alt uzayının $\mathbb{R}$ ile homeomorfik olduğunu gösteriniz.

33. $(X, \mathcal{T}_1)$ bir topolojik uzay olmak üzere X den X e bütün homeomorfizmlerin kümesi G olsun.

a) Fonksiyonların birleşimi işlemi altında G nin bir grup olduğunu gösteriniz.

b) $X = (0,1)$ ise G nin sonlu olmadığını gösteriniz.

c) $a \in X$ ve $G_a = \{f \in G \mid f(a) = a\}$ kümesinin G nin bir alt gurubu olduğunu gösteriniz.

34. X bir küme ve d_1, d_2 metrikleri X üzerinde Lipschitz denk iki metrik olsun. (X, d_1) ve (X, d_2) uzaylarının homeomorfik olduklarını gösteriniz.

6.6. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

$f(a) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda

$$U = \{a\} \in \mathcal{T}_1$$

ve $a \in U$ dur.

$$f(U) = \{f(a)\} \subseteq V$$

olduğundan f süreklidir.✔

ÇÖZÜM 2

a) Teorem 6.34 gereğince $h(x) = f(x) - g(x)$ şeklinde tanımlı $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. $(-\infty, 0]$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı olduğundan Teorem 6.15 gereğince $h^{-1}((-\infty,0])$ kümesi X de kapalıdır. Diğeryandan

$$\begin{aligned} h^{-1}((-\infty,0]) &= \{x \in X | h(x) \in (-\infty,0]\} \\ &= \{x \in X | f(x) - g(x) \in (-\infty,0]\} \\ &= \{x \in X | f(x) - g(x) \le 0\} \\ &= \{x \in X | f(x) \le g(x)\} \end{aligned}$$

olduğundan $\{x \in X | f(x) \le g(x)\}$ kümesi X de kapalıdır.

b) Teorem 6.34 gereğince iki sürekli fonksiyonun toplamı, farkı, sürekli bir fonksiyonun bir sabitle çarpımı ve mutlak değeri sürekli olduğundan

$$h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

şeklinde tanımlı $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Diğeryandan

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

olduğundan h süreklidir.

c) Teorem 6.34 gereğince iki sürekli fonksiyonun toplamı, farkı, sürekli bir fonksiyonun bir sabitle çarpımı ve mutlak değeri sürekli olduğundan

$$k(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

şeklinde tanımlı $k : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Diğeryandan

$$k(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

olduğundan k süreklidir.✔

ÇÖZÜM 3

a) $0 < a < 2 < b < 3$ olmak üzere (a, b) açık kümesinin ters görüntüsü olan $f^{-1}((a,b)) = (a,2]$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık olmadığından f sürekli değildir. (Şekil **??** (a) veya **??** (b) ye bakınız.)

b) $\mathcal{B}_{\text{sol}} = \{(a,b] | a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ topolojisinin tabanıdır. Böylece, Teorem 6.20 gereğince f nin sürekli olduğunu göstermek için $(a,b] \in \mathcal{B}_{\text{sol}}$ iken $f^{-1}((a,b]) \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$ olduğununun gösterilmesi yeterlidir.

i) $0 < a < 2 < b < 3$ ise $f^{-1}((a,b]) = (a,2] \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$ (Şekil 6.22 (a) veya 6.22 (b) ya bakınız.)

ii) $3 < a < b$ ise $f^{-1}((a,b]) = (a-1, b-1] \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$ (Şekil 6.22 (b) ye bakınız.)

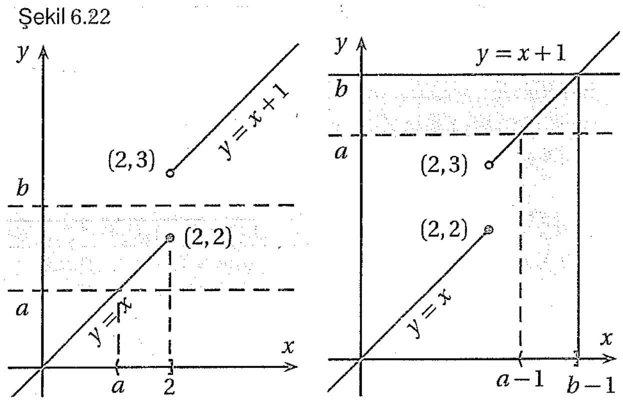
iii) $2 \le a < 3 < b$ ise $f^{-1}((a,b]) = (2, b-1] \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$

iv) $2 < a < b < 3$ ise $f^{-1}((a,b]) = \emptyset \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$ (Şekil 6.23 (b) ya bakınız.)

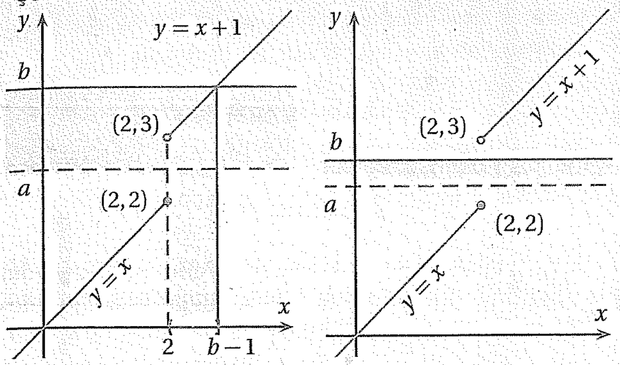
v) $a < b \le 2$ ise $f^{-1}((a,b]) = (a,b] \in \mathcal{T}_{\text{sol}}$ (Şekil 6.24 (b) ye bakınız.)

olduğundan f süreklidir.✔

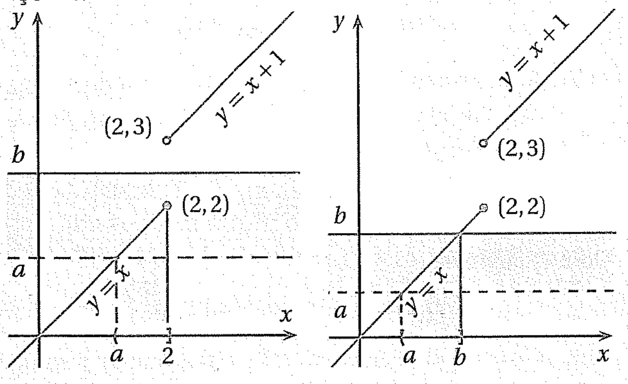
Şekil 6.22



Şekil 6.23



Şekil 6.24



ÇÖZÜM 4

G bir G_δ-kümesi (F_σ-kümesi) olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için U_n açık (kapalı) bir küme olmak üzere

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad \left(G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right)$$

şeklinde yazılabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için U_n açık (kapalı) ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U_n)$ kümesi açıktır (kapalıdır). Böylece,

$$f^{-1}(G) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(U_n) \quad \left(f^{-1}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(U_n)\right)$$

olduğndan $f^{-1}(G)$ kümesi bir G_δ-kümesidir (F_σ-kümesidir).✔

ÇÖZÜM 5

a) $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $i = 1,2$ için $f : (X, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T})$ fonksiyonları sürekli olduğundan $i = 1,2$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i$ dir. O halde $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ dir. Böylece, f süreklidir.

b) $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $i \in I$ için $f : (X, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T})$ fonksiyonları sürekli olduğundan $i \in I$ için $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i$ dir. O halde $f^{-1}(U) \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ dir. Böylece f süreklidir.✔

ÇÖZÜM 6

Örnek 3.4 de $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlanan topolji

$$\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

dir.

a)

$$f(a) = a, \quad f(b) = b, \quad f(c) = d, \quad f(d) = d,$$

ve

$$g(a) = b, \quad g(b) = a, \quad g(c) = d, \quad g(d) = d$$

şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının sürekli olduklarını gösterelim.

i)

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_{4n}, \qquad f^{-1}(X) = X \in \mathcal{T}_{4n},$$
$$f^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \mathcal{T}_{4n}, \qquad f^{-1}(\{b\}) = \{b\} \in \mathcal{T}_{4n},$$
$$f^{-1}(\{a,b\}) = \{a,b\} \in \mathcal{T}_{4n}, \qquad f^{-1}(\{a,c\}) = \{a\} \in \mathcal{T}_{4n},$$
$$f^{-1}(\{a,b,c\}) = \{a,b\} \in \mathcal{T}_{4n}$$

olduğundan f süreklidir.

ii)

$$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_{4n}, \qquad g^{-1}(X) = X \in \mathcal{T}_{4n},$$
$$g^{-1}(\{a\}) = \{b\} \in \mathcal{T}_{4n}, \qquad g^{-1}(\{b\}) = \{a\} \in \mathcal{T}_{4n},$$
$$g^{-1}(\{a,b\}) = \{a,b\} \in \mathcal{T}_{4n}, \qquad g^{-1}(\{a,c\}) = \{b\} \in \mathcal{T}_{4n},$$
$$g^{-1}(\{a,b,c\}) = \{a,b\} \in \mathcal{T}_{4n}$$

olduğundan g süreklidir.

b)

$$f(a) = a, \quad f(b) = b, \quad f(c) = d, \quad f(d) = c,$$
$$g(a) = b, \quad g(b) = a, \quad g(c) = d, \quad g(d) = c$$

şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının sürekli olmadıklarını gösterelim.

i) $\{a, c\}$ açık kümesinin f altındaki ters görüntüsü olan $f^{-1}(\{a, c\}) = \{a, d\}$ kümesi açık olmadığından f fonksiyonu sürekli değildir.

ii) $\{a, c\}$ açık kümesinin g altındaki ters görüntüsü olan $g^{-1}(\{a, c\}) = \{b, d\}$ kümesi açık olmadığından g fonksiyonu sürekli değildir.✔

ÇÖZÜM 7

Örnek 3.5 de $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi üzerinde tanımlanan topolji

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

dir.

$$\begin{array}{lll} f(a)=b, & f(b)=b, & f(c)=c, \\ f(d)=d, & f(e)=e, & f(f)=f, \\ g(a)=a, & g(b)=b, & g(c)=c, \\ g(d)=d, & g(e)=e, & g(f)=e \end{array}$$

şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının sürekli olduklarını gösterelim.

a) i)

$$\begin{array}{ll} f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{T}, & f^{-1}(X)=X\in\mathcal{T}, \\ f^{-1}(\{a\})=\emptyset\in\mathcal{T}, & f^{-1}(\{c,d\})=\{c,d\}\in\mathcal{T}, \\ f^{-1}(\{a,c,d\})=\{c,d\}\in\mathcal{T}, & f^{-1}(\{b,c,d,e,f\})=X\in\mathcal{T}, \end{array}$$

olduğundan f süreklidir.

ii)

$$\begin{array}{ll} g^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{T}, & g^{-1}(\{c,d\})=\{c,d\}\in\mathcal{T}, \\ g^{-1}(\{a\})=\{a\}\in\mathcal{T}, & g^{-1}(\{a,c,d\})=\{a,c,d\}\in\mathcal{T}, \end{array}$$

$$g^{-1}(X)=X\in\mathcal{T}, \quad g^{-1}(\{b,c,d,e,f\})=\{b,c,d,e,f\}\in\mathcal{T},$$

olduğundan g süreklidir.

b)

$$\begin{array}{lll} f(a)=a, & f(b)=a, & f(c)=c, \\ f(d)=d, & f(e)=e, & f(f)=f \\ g(a)=a, & g(b)=b, & g(c)=b, \\ g(d)=d, & g(e)=e, & g(f)=f \end{array}$$

şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının sürekli olmadıklarını gösterelim.

i) $\{a\}$ açık kümesinin f altındaki ters görüntüsü olan

$$f^{-1}(\{a\})=\{a,b\}$$

kümesi açık olmadığından f fonksiyonu sürekli değildir.

ii) $\{c,d\}$ açık kümesinin g altındaki ters görüntüsü olan

$$g^{-1}(\{c,d\})=\{d\}$$

kümesi açık olmadığından g fonksiyonu sürekli değildir.✔

ÇÖZÜM 8

a) $\Rightarrow$). f nin sürekli olduğunu kabul edelim ve f nin monoton artan olduğunu gösterelim. $x \le y$ olsun. $f(y) \in (-\infty, f(y)]$ ve $(-\infty, f(y)] \in \mathcal{T}_1$ dir. f sürekli olduğundan $y \in U$ ve $f(U) \subseteq (-\infty, f(y)]$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ vardır. $(-\infty, y]$ kümesi y yi içeren en küçük açık küme olduğundan $(-\infty, y] \subseteq U$ dur. Bu durumda

$$f((-\infty, y]) \subseteq f(U) \subseteq (-\infty, f(y)]$$

dir. $x \le y$ olduğundan $x \in (-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ ve böylece

$$f(x) \in (-\infty, f(y)]$$

olur. O halde $f(x) \le f(y)$ dir. Yani f monoton artandır.

$\Leftarrow$). Şimdi, f nin monoton artan olduğunu kabul edelim ve f nin sürekli olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ olsun. Bu durumda $(-\infty, f(x)]$ kümesi $f(x)$ i içeren en küçük açık küme olduğundan $(-\infty, f(x)] \subseteq V$ dir. Şimdi

$$f((-\infty, x]) \subseteq (-\infty, f(x)]$$

olduğunu gösterelim. $z \in (-\infty, x]$ olsun. Bu durumda $z \le x$ dir. Böylece f monoton artan olduğundan $f(z) \le f(x)$ dir. O halde

$$f(z) \in (-\infty, f(x)]$$

dir. Dolayısıyla

$$f((-\infty, x]) \subseteq (-\infty, f(x)] \subseteq V$$

dir. $x \in (-\infty, x]$ ve $(-\infty, x] \in \mathcal{T}_1$ olduğundan f fonksiyonu x noktasında süreklidir. x keyfi olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

b) $\Rightarrow$). f nin sürekli olduğunu kabul edelim ve f nin monoton artan olduğunu gösterelim. $x \le y$ olsun. $f(x) \in [f(x), \infty)$ ve $[f(x), \infty) \in \mathcal{T}_2$ dir. f sürekli olduğundan $x \in U$ ve $f(U) \subseteq [f(x), \infty)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_2$ vardır. $[x, \infty)$ kümesi x yi içeren en küçük açık küme olduğundan $[x, \infty) \subseteq U$ dur. Bu durumda $f([x,\infty)) \subseteq f(U) \subseteq [f(x), \infty)$ dir. $x \le y$ olduğundan $y \in [y, \infty) \subseteq [x, \infty)$ ve böylece $f(y) \in [f(x), \infty)$ olur. O halde $f(x) \le f(y)$ dir. Yani f monoton artandır.

$\Leftarrow$). Şimdi, f nin monoton artan olduğunu kabul edelim ve f nin sürekli olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $[f(x), \infty)$ kümesi $f(x)$ i içeren en küçük açık küme olduğundan $[f(x), \infty) \subseteq V$ dir. Şimdi

$$f([x, \infty)) \subseteq [f(x), \infty)$$

olduğunu gösterelim. $z \in [x,\infty)$ olsun. Bu durumda $x \leq z$ dir. Böylece f monoton artan olduğundan $f(x) \leq f(z)$ dir. O halde $f(z) \in [f(x),\infty)$ dir. Dolayısıyla

$$f([x,\infty)) \subseteq [f(x),\infty) \subseteq V$$

dir. $x \in [x,\infty)$ ve $[x,\infty) \in \mathcal{T}_2$ olduğundan f fonksiyonu x noktasında süreklidir. x keyfi olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

c) $\Rightarrow$). f nin sürekli olduğunu kabul edelim ve f nin monoton azalan olduğunu gösterelim. $x \leq y$ olsun. $f(y) \in [f(y),\infty)$ ve $[f(y),\infty) \in \mathcal{T}_2$ dir. f sürekli ve $(-\infty, y]$ kümesi y yi içeren en küçük açık küme olduğundan

$$f((-\infty, y]) \subseteq [f(y),\infty)$$

dur. $x \leq y$ olduğundan

$$x \in (-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$$

ve böylece $f(x) \in [f(y),\infty)$ dur. O halde $f(x) \geq f(y)$ dir. Yani f monoton azalandır.

$\Leftarrow$). Şimdi, f nin monoton azalan olduğunu kabul edelim ve f nin sürekli olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_2$ olsun. $[f(x),\infty)$ kümesi $f(x)$ i içeren en küçük açık küme olduğundan $[f(x),\infty) \subseteq V$ dir.

$$f((-\infty, x]) \subseteq [f(x),\infty)$$

olduğunu gösterelim. $z \in (-\infty, x]$ olsun. Bu durumda $z \leq x$ dir. Böylece f monoton azalan olduğundan

$$f(z) \geq f(x)$$

dir. Yani $f(z) \in [f(x),\infty)$ dur. Böylece

$$f((-\infty, x]) \subseteq [f(x),\infty) \subseteq V$$

dir. $x \in (-\infty, x]$ ve $(-\infty, x] \in \mathcal{T}_1$ olduğundan f fonksiyonu x noktasında süreklidir. x keyfi olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

d) $\Rightarrow$). f nin sürekli olduğunu kabul edelim ve f nin monoton azalan olduğunu gösterelim. $x \leq y$ olsun. $f(x) \in (-\infty, f(x)]$ ve $(-\infty, f(x)] \in \mathcal{T}_1$ dir. f sürekli ve $[x,\infty)$ kümesi x yi içeren en küçük açık küme olduğundan $f([x,\infty)) \subseteq (-\infty, f(x)]$ dir. $x \leq y$ olduğundan

$$y \in [y,\infty) \subseteq [x,\infty)$$

ve böylece

$$f(y) \in (-\infty, f(x)]$$

dir. O halde

$$f(x) \geq f(y)$$

dir. Yani f monoton azalandır.

$\Leftarrow$). Şimdi, f nin monoton azalan olduğunu kabul edelim ve f nin sürekli olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) \in V$ ve $V \in \mathcal{T}_1$ olsun. $(-\infty, f(x)]$ kümesi $f(x)$ i içeren en küçük açık küme olduğundan

$$(-\infty, f(x)] \subseteq V$$

dir.

$$f([x,\infty)) \subseteq (-\infty, f(x)]$$

olduğunu gösterelim. $z \in [x,\infty)$ olsun. Bu durumda $x \leq z$ dir. Böylece f monoton azalan olduğundan

$$f(z) \leq f(x)$$

dir. Yani $f(z) \in (-\infty, f(x)]$ dur. Böylece

$$f([x,\infty)) \subseteq (-\infty, f(x)] \subseteq V$$

dir. $x \in [x,\infty)$ ve $[x,\infty) \in \mathcal{T}_2$ olduğundan f fonksiyonu x noktasında süreklidir. x keyfi olduğundan f fonksiyonu süreklidir.✔

ÇÖZÜM 9

a) $b < -1 < a < 0$ için

$$f^{-1}((a,b)) = (-\infty, 0]$$

kümesi $\mathbb{R}$ de açık olmadığından f sürekli değildir. (Şekil 6.25 (a) ya bakınız.)

b) $\{1\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı fakat

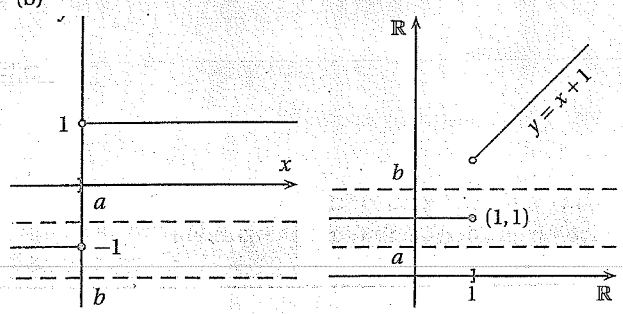
$$f^{-1}(\{1\}) = (0,\infty)$$

kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı olmadığından f sürekli değildir.✔

ÇÖZÜM 10

$0 < a < 1 < b < 2$ olmak üzere $f^{-1}((a,b)) = (-\infty, 1]$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık olmadığından f sürekli değildir. (Şekil 6.25 (b) ye bakınız.)✔

Şekil 6.25 (a)
(b)



ÇÖZÜM 11

$h(x) = 1$ ve $g(x) = 2$ şeklinde tanımlı $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ve $g : [2,4] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $[0,1]$ ve $[2,4]$ kümeleri X uzayında kapalı ve

$$[0,1] \cap [2,4] = \emptyset$$

olduğundan Teorem 6.17 gereğince f fonksiyonu X üzerinde süreklidir.✔

ÇÖZÜM 12

f nin bire-bir ve örten olduğu açıktır.

$$h(x) = x \text{ ve } g(x) = 1 - x$$

şeklinde tanımlı $h : (-1,0) \to \mathbb{R}$ ve $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir.

$$h((-1,0)) \subseteq Y, \quad g((0,1]) \subseteq Y$$

olduğundan Teorem 6.16 gereğince $h : (-1,0) \to Y$ ve $g : (0,1] \to Y$ fonksiyonları süreklidir. $(-1,0)$ ve $(0,1]$ kümeleri X uzayında kapalı ve

$$(-1,0) \cap (0,1] = \emptyset$$

olduğundan Teorem 6.17 gereğince f fonksiyonu X üzerinde süreklidir.✔

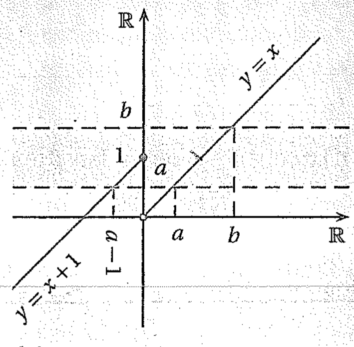
ÇÖZÜM 13

$0 < a < 1 < b$ olmak üzere

$$f^{-1}((a,b)) = (a-1,0] \cup (a,b)$$

kümesi $\mathbb{R}$ de açık olmadığından f fonksiyonu sürekli değildir. (Şekil 6.26 e bakınız.)✔

Şekil 6.26



ÇÖZÜM 14

a) $\mathscr{S} = \{(c,b], [a,d) | a < c < b, a < d < b\}$ kolleksiyonu $[a,b]$ uzayının bir alt tabanıdır. Böylece Teorem 6.20 gereğince f nin sürekli olması için gerek ve yeter şart $a < c < b$ ve $a < d < b$ özelliğindeki her $c, d \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((c,b])$ ve $f^{-1}([a,d))$ kümelerinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olmasıdır.

b) $\mathscr{S} = \{(c,b), (a,d) | a < c < b, a < d < b\}$ kolleksiyonu (a,b) uzayının bir alt tabanıdır. Böylece Teorem 6.20 gereğince f nin sürekli olması için gerek ve yeter şart $a < c < b$ ve $a < d < b$ özelliğindeki her $c, d \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((c,b))$ ve $f^{-1}((a,d))$ kümelerinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olmasıdır.✔

ÇÖZÜM 15

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f ve g fonksiyonları sürekli değildir. Diğer yandan, $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(f+g)(x) = 1$ şeklinde tanımlı olup süreklidir.✔

ÇÖZÜM 16

Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $f(x_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $0 \notin (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. (Örneğin $\varepsilon = |f(x_0)|/3$ alınabilir.) Bu durumda f sürekli olduğundan bir $\delta > 0$ sayısı $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ olduğunda

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

olacak şekilde vardır. $x \in \mathbb{Q}$ ve $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ olsun. Bu durumda $x \in \mathbb{Q}$ olduğundan $f(x) = 0$ ve $0 = f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ dur. Yani,

$$0 \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

dur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $f(x_0) = 0$ dır.✓

ÇÖZÜM 17

$x_0 \in X$ olsun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ 1, & x \neq x_0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \{x_0\}$ dır. f sürekli ve $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık olduğundan $\{x_0\}$ kümesi X de açıktır. x_0 keyfi olduğundan her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi X de açıktır. Böylece Örnek 3.12 gereğince X ayrık bir uzaydır.✓

ÇÖZÜM 18

$A = [1,2]$ ve $f(x) = 1$ şeklinde tanımlı sürekli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda 1 noktası A nın bir limit noktasıdır. Diğer yandan $f(1) = 1$ noktası $f(A) = \{1\}$ kümesinin limit noktası değildir. O halde $x \in X$ noktası A nın bir limit noktası ise $f(x)$ noktası $f(A)$ nın bir limit noktası olmak zorunda değildir.✓

ÇÖZÜM 19

a) f örten olduğundan her $A \subseteq Y$ için

$$f(f^{-1}(A)) = A$$

dır. $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. $g \circ f$ açık olduğundan $(g \circ f)(f^{-1}(U)) = g(f(f^{-1}(U))) = g(U) \in \mathcal{T}_3$ dür. O halde g açık bir fonksiyondur. $g \circ f$ fonksiyonunun kapalı olması hali benzer şekilde yapılır.

b) g bire-bir olduğundan $A \subseteq Y$ için $g^{-1}(g(A)) = A$ dır. $U \in \mathcal{T}_1$ olsun. $g \circ f$ açık olduğundan

$$(g \circ f)(U) \in \mathcal{T}_3$$

dür. O halde g sürekli olduğundan

$$g^{-1}((g \circ f)(U)) \in \mathcal{T}_2$$

dir. Diğer yandan

$$g^{-1}((g \circ f)(U)) = g^{-1}(g(f(U))) = f(U) \in \mathcal{T}_2$$

dir. O halde f açık bir fonksiyondur. $g \circ f$ fonksiyonunun kapalı olması hali benzer şekilde yapılır.✓

ÇÖZÜM 20

f bire-bir ve bire-bir bir fonksiyonun herhangi bir kısıtlanmışı bire-bir olduğundan $f_{|A}$ fonksiyonu bire bir dir. $f_{|A}(A) = B$ olduğundan $f_{|A}$ örtendir. Şimdi $f_{|A}$ fonksiyonunun açık (kapalı) olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}_{1_A}$ (U kümesi A alt uzayında kapalı) olsun. Bu durumda $U = A \cap U_1$ olacak şekilde bir $U_1 \in \mathcal{T}_1$ (X de kapalı bir U_1 kümesi) vardır. Diğer yandan $f_{|A}(U) = f(A) \cap f(U_1) = B \cap f(U_1)$ dir. $f(U_1) \in \mathcal{T}_2$ ($f(U_1)$, Y de kapalı) olduğundan

$$f_{|A}(U) = B \cap f(U_1) \in \mathcal{T}_{2_B} \quad (B \cap f(U_1)$$

kümesi B de kapalı) dir. O halde $f_{|A}(U) \in \mathcal{T}_{2_B}$ ($f_{|A}(U)$, B de kapalı) dir. Böylece $f_{|A}$ açık (kapalı) bir fonksiyondur.✓

ÇÖZÜM 21

a) Önce f nin sürekli olduğunu gösterelim. $\mathrm{id}(x) = x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ birim fonksiyonu süreklidir. Teorem 6.34 gereğince sürekli iki fonksiyonun çarpımı sürekli ve

$$(\mathrm{id}.\mathrm{id}.\cdots.\mathrm{id})(x) = x^{2n} = f(x)$$

olduğundan f süreklidir.

b) Şimdi f nin açık olmadığını gösterelim. $(-1,1)$ aralığı $\mathbb{R}$ de açık olmasına rağmen $f((-1,1)) = [0,1)$ aralığı $\mathbb{R}$ de açık değildir. Böylece f fonksiyonu açık bir fonksiyon değildir.✓

ÇÖZÜM 22

f nin bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). f nin bire-bir olduğu açıktır. $y \in [a,b]$ olsun. Bu durumda $x = \dfrac{y-a}{b-a}$ olmak üzere $f(x) = y$ dir. Böylece f örtendir.

HO-2). Şimdi f nin sürekli olduğunu gösterelim. $a < d < b$ için

$$f^{-1}([a,d)) = [0,(d-a)/(b-a))$$

kümesi ve $f^{-1}((d,b]) = ((d-a)/(b-a),1]$ kümesi $[0,1]$ de açık olduğundan Alıştırma 14 gereğince f süreklidir.

HO-3). f nin ters fonksiyonu $f^{-1}(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ şeklinde tanımlı $f^{-1} : [0,1] \to [a,b]$ fonksiyonudur. Benzer şekilde f^{-1} in sürekli olduğu gösterilir.

O halde f bir homeomorfizmdir.✓

ÇÖZÜM 23

a) $f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}x + \dfrac{cb-da}{b-a}$ şeklinde tanımlanan $f : [a,b] \to [c,d]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece $[a,b] \cong [c,d]$ dir.

b) **i)** Önce $(-\infty,a] \cong (-\infty,b]$ olduğunu gösterelim. $a,b>0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer değerleri için çözüm benzer şekilde yapılır. $f(x)=\frac{b}{a}x$ şeklinde tanımlanan $f:(-\infty,a]\to(-\infty,b]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $(-\infty,a]\cong(-\infty,b]$ dir.

ii) Şimdi $[a,\infty)\cong[b,\infty)$ olduğunu gösterelim. $a,b>0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer değerleri için çözüm benzer şekilde yapılır. $f(x)=\frac{b}{a}x$ şeklinde tanımlanan $f:[a,\infty)\to[b,\infty)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $[a,\infty)\cong[b,\infty)$ dur.

iii) Şimdi de $(-\infty,b]\cong[a,\infty)$ olduğunu gösterelim. $a,b>0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer değerleri için çözüm benzer şekilde yapılır. $f(x)=-bx+b(a+1)$ şeklinde tanımlanan $f:[a,\infty)\to(-\infty,b]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $[a,\infty)\cong(-\infty,b]$ dir.

Böylece Teorem 6.54 gereğince (b) doğrudur.

c) **i)** Önce $(-\infty,a)\cong(-\infty,b)$ olduğunu gösterelim. $a,b>0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer değerleri için çözüm benzer şekilde yapılır.

$$f(x)=\frac{b}{a}x$$

şeklinde tanımlanan $f:(-\infty,a)\to(-\infty,b)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $(-\infty,a)\cong(-\infty,b)$ dir.

ii) Şimdi de $(a,\infty)\cong(b,\infty)$ olduğunu gösterelim. $a,b>0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer değerleri için çözüm benzer şekilde yapılır. $f(x)=\frac{b}{a}x$ şeklinde tanımlanan $f:(a,\infty)\to(b,\infty)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $(a,\infty)\cong(b,\infty)$ dur.

iii) Şimdi de $(a,\infty)\cong(-\infty,b)$ olduğunu gösterelim. $a,b>0$ olduğunu kabul edelim. a ve b nin diğer değerleri için çözüm benzer şekilde yapılır. $f(x)=-bx+b(a+1)$ şeklinde tanımlanan $f:(a,\infty)\to(-\infty,b)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

Teorem 6.54 gereğince $(-\infty,a)\cong(-\infty,b)\cong(a,\infty)\cong(b,\infty)$ dur.

iv) Diğer yandan

$$f(x)=\frac{x}{1-x}$$

şeklinde tanımlı $f:(0,1)\to(0,\infty)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece $(0,1)\cong(0,\infty)\cong(a,\infty)$ dur. $(0,1)\cong(1,b)$ olduğundan Teorem 6.54 gereğince $(a,b)\cong(a,\infty)$ dur.

d) **i)** $f(x)=\frac{f-e}{d-c}x+\frac{ed-fc}{d-c}$ şeklinde tanımlanan $f:[c,d)\to[e,f)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. O halde $[c,d)\cong(e,f]$ dir.

ii) $f(x)=\frac{d-c}{e-f}x+\frac{ce-df}{e-f}$ şeklinde tanımlanan $f:[e,f)\to(c,d]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. O halde $[e,f)\cong(c,d]$ dir.

iii) $f(x)=\frac{f-e}{d-c}x+\frac{ed-fc}{d-c}$ şeklinde tanımlanan $f:(c,d]\to(e,f]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. O halde $(c,d]\cong(e,f]$ dir.

Böylece Teorem 6.54 gereğince $[c,d)\cong[e,f)\cong(c,d]\cong(e,f]$ dir.

e) $a>0$ olduğunu kabul edelim. $a\le 0$ hali için çözüm benzer şekilde yapılır.

i) $f(x)=\frac{-a}{x-1}$ şeklinde tanımlanan $f:[0,1)\to[a,\infty)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $[0,1)\cong[a,\infty)$ dur.

ii) $a>0$ olduğunu kabul edelim. $a\le 0$ hali için çözüm benzer şekilde yapılır.

$$f(x)=\frac{-a}{1-x}+2a$$

şeklinde tanımlanan $f:[0,1)\to(-\infty,a]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $[0,1)\cong(-\infty,a]$ dır.

iii) $a>0$ olduğunu kabul edelim. $a\le 0$ hali için çözüm benzer şekilde yapılır.

$$f(x)=-ax+a^2+a$$

şeklinde tanımlanan $f:[a,\infty)\to(-\infty,a]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $[a,\infty)\cong(-\infty,a]$ dır.

iv) $f(x)=\frac{x-a}{b-a}$ şeklinde tanımlanan $f:[a,b)\to[0,1)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece $[0,1)$ ile $[a,\infty)$ homeomorfik olduklarından $[a,b)$ ile $[a,\infty)$ homeomorfiktir. Yani $[a,b)\cong[a,\infty)$ dır.

v) $f(x)=-x+a+b$ şeklinde tanımlanan $f:[a,b)\to(a,b]$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $[a,b)\cong(a,b]$ dir.✔

ÇÖZÜM 24

$\mathbb{R}$ deki herhengi bir aralık aşağıdaki formlardan biri şeklindedir.

a) $[a,\infty)$ **b)** $(-\infty,a]$ **c)** $(-\infty,a)$
d) (a,∞) **e)** $[a,b]$ **f)** $[a,b)$

g) $(a,b]$ h) (a,b) i) $[a,a]=\{a\}$
j) $\mathbb{R}$

Alıştırma 23 gereğince

$$[a,\infty)\cong(-\infty,a]\cong[a,b)\cong(a,b]\cong[0,1),$$
$$(a,b)\cong(-\infty,a)\cong(a,\infty)\cong\mathbb{R}\cong(0,1),$$
$$[a,b]\cong[0,1],\ [a,a]=\{a\}\cong\{0\}$$

dır.✓

ÇÖZÜM 25

$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ homeomorfik olduklarından bir $f:X\to Y$ homeomorfizmi vardır.

a) $\Rightarrow$). $(X,\mathcal{T}_1)$ bir ayrık uzay ve $y\in Y$ olsun. f bire-bir ve örten olduğundan $f(x)=y$ olacak şekilde tek bir $x\in X$ vardır. $(X,\mathcal{T}_1)$ bir ayrık uzay olduğundan $\{x\}$ kümesi açıktır. f bir homeomorfizm olduğundan açık bir fonksiyondur. Dolayısıyla $f(\{x\})=\{y\}$ kümesi açıktır. Böylece Örnek 3.12 gereğince $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı ayrık uzaydır.

$\Leftarrow$). $(Y,\mathcal{T}_2)$ ayrık uzay iken $(X,\mathcal{T}_1)$ in ayrık uzay olduğu f^{-1} fonksiyonu kullanılarak benzer şekilde gösterilir.

b) $\Rightarrow$). $(X,\mathcal{T}_1)$ bir kaba uzay olsun. $U\neq\emptyset$ ve $U\neq Y$ olmak üzere $U\in\mathcal{T}_2$ olsun. $U\neq\emptyset$, $U\neq Y$ olduğunu kabül edelim. f bire-bir örten olduğundan

$$f^{-1}(U)\neq\emptyset \text{ ve } f^{-1}(U)\neq X$$

dir. Diğer yandan, f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ dir. Bu ise $\mathcal{T}_1$ kaba topoloji olduğundan bir çelişkidir. O halde $U\in\mathcal{T}_2$ ise

$$U=\emptyset \text{ veya } U=Y$$

dir. Yani $\mathcal{T}_2$ kaba topolojidir.

$\Leftarrow$). $(Y,\mathcal{T}_2)$ kaba uzay iken $(X,\mathcal{T}_1)$ in kaba uzay olduğu f^{-1} fonksiyonu kullanılarak benzer şekilde gösterilir.✓

ÇÖZÜM 26

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=-1$, $f(3)=2$, $f(4)=-2$, $f(5)=3$, $f(6)=-3$, $f(7)=4,\cdots$ şeklinde tanımlı $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. f ve f^{-1} fonksiyonlarının tanım kümeleri üzerindeki topolojiler ayrık topoloji olduğundan f ve f^{-1} fonksiyonları Örnek 6.8 gereğince süreklidir. O halde f bir homeomorfizmdir. Yani $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ ayrık uzayları homeomorfiktir.✓

ÇÖZÜM 27

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\\ x-2, & x\in(3,4)\end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f:X_1\to X_2$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). f fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğu açıktır.

HO-2). $(0,1)$ üzerinde $\mathrm{id}(x)=x$ şeklinde tanımlı id ve $(3,4)$ üzerinde $g(x)=x-2$ şeklinde tanımlı g fonksiyonları süreklidir. $(0,1)$, $(3,4)$ kümeleri X_1 uzayında açık ve

$$(0,1)\cap(3,4)=\emptyset$$

olduğundan Teorem 6.17 gereğince f süreklidir.

HO-3). f nin ters fonksiyonu

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\\ x+2, & x\in(1,2)\end{cases}$$

şeklinde tanımlı $g:X_2\to X_1$ fonksiyonudur. g nin sürekliliği f nin sürekliliğine benzer şekilde gösterilir.

Böylece f bir homeomorfizmdir. Yani $X_1=(0,1)\cup(3,4)$ ve $X_2=(0,1)\cup(1,2)$ uzayları homeomorfiktir.✓

ÇÖZÜM 28

Alıştırma 12 gereğince bu fonksiyon bire-bir örten ve süreklidir. O halde Teorem 6.59 gereğince bu fonksiyonun bir homeomorfizm olmadığını göstermek için f nin açık bir fonksiyon olmadığının gösterilmesi yeterlidir. $U=(0,1]$ kümesi X uzayında açıktır. Diğeryandan, $f(U)=[0,1)$ olup bu küme Y uzayında açık değildir. O halde f bir homeomorfizm değildir.✓

ÇÖZÜM 29

a) $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x in bir yerel tabanı olsun.

YTB-1). Her $B\in\mathscr{B}_x$ için $B\in\mathcal{T}_1$ olur. Bu durumda f bir homeomorfizm olduğundan $f(B)\in\mathcal{T}_2$ olur. Yani $\mathscr{B}_{f(x)}\subseteq\mathcal{T}_2$ dir.

YTB-2). $f(B)\in\mathscr{B}_{f(x)}$ olsun. Bu durumda $B\in\mathscr{B}_x$ olduğundan $x\in B$ dir. Böylece $f(x)\in f(B)$ dir.

YTB-3). $f(x)\in U$ ve $U\in\mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $x\in f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ dir. Böylece

$$x\in B\subseteq f^{-1}(U)$$

olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. Bu durumda

$$f(x) \in f(B) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$$

dur.

Böylece, $\mathscr{B}_{f(x)}$ kolleksiyonu $f(x)$ in yerel tabanıdır.

b) $\Rightarrow$). x noktası A nın bir limit noktası olsun. $f(x) \in U$ özelliğindeki bir $U \in \mathcal{T}_2$ için

$$U \cap (f(A) \setminus \{f(x)\}) = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}((f(A) \setminus \{f(x)\})) = \emptyset$$

ve dolayısıyla

$$f^{-1}(U) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

olur. Diğer yandan, $x \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ ve x noktası A nın bir limit noktası olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $f(x) \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}_2$ için

$$U \cap (f(A) \setminus \{f(x)\}) \neq \emptyset$$

dur. Yani $f(x)$, $f(A)$ nın bir limit noktasıdır.

$\Leftarrow$). Tersine, $f(x)$ noktası $f(A)$ nın bir limit noktası olsun. $x \in U$ özelliğindeki bir $U \in \mathcal{T}_1$ için

$$U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$f(U) \cap f(A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

ve dolayısıyla

$$f(U) \cap (f(A) \setminus \{f(x)\}) = \emptyset$$

olur. Diğer yandan $f(x) \in f(U)$, $f(U) \in \mathcal{T}_2$ ve $f(x)$ noktası $f(A)$ nın bir limit noktası olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}_1$ için

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Yani x, A nın bir limit noktasıdır.

ÇÖZÜM 30

a) Sonuç 6.49 gereğince

$$f\left(\mathring{A}\right) = (f(A))^{\circ}$$

dir.

b) Teorem 6.59 gereğince her $A \subseteq X$ için

$$f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$$

dır.

$$\begin{aligned} f(\partial A) &= f\left(\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}\right) = f\left(\overline{A}\right) \cap f\left(\overline{X \setminus A}\right) \\ &= \overline{f(A)} \cap \overline{f(X \setminus A)} = \overline{f(A)} \cap \overline{Y \setminus f(A)} = \partial f(A) \end{aligned}$$

dır.

c) $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right) = f(X) = Y$ dir.

d) $A \cap \widetilde{A} = \emptyset$ olsun. Alıştırma 29 gereğince $\widetilde{f(A)} = f\left(\widetilde{A}\right)$ olduğundan

$$\emptyset = f\left(A \cap \widetilde{A}\right) = f(A) \cap f\left(\widetilde{A}\right) = f(A) \cap \widetilde{f(A)}$$

dür.✔

ÇÖZÜM 31

a) Önce f nin bire-bir olduğunu gösterelim. $x \neq y$ olsun.

i) $x, y < -1$ ise $x + 1 \neq y + 1$ olduğundan $f(x) \neq f(y)$ dir.

ii) $x, y \geq 0$ ise $x \neq y$ olduğundan $f(x) \neq f(y)$ dir.

iii) $y < -1$ ve $x \geq 0$ ise $y + 1 < 0$ olduğundan $y + 1 \neq x$ yani

$$f(x) \neq f(y)$$

dir. Benzer şekilde $x < -1, y \geq 0$ ise $f(x) \neq f(y)$ dir. O halde f bire-bir dir.

Şimdi f nin örten olduğunu gösterelim. $y \in \mathbb{R}$ olsun. $y \geq 0$ ise $f(y) = y$ dir. $y < 0$ ise $x = y - 1$ olmak üzere

$$x \in X \quad \text{ve} \quad f(x) = y$$

dir. O halde f örtendir.

b) f nin bir homeomorfizm olmadığını gösterelim.

HO-1). (a) gereğince f bire-bir ve örtendir.

HO-2).

$$\begin{aligned} &0 \leq a < b \text{ için } f^{-1}((a,b)) = (a,b) \\ &a < b < 0 \text{ için } f^{-1}((a,b)) = (a-1, b-1) \\ &a \leq 0 < b \text{ için } f^{-1}((a,b)) = [0,b) \cup (a-1,-1) \end{aligned}$$

kümeleri X uzayında açık olduklarından f süreklidir.

HO-3). f nin tersi

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f^{-1}: \mathbb{R} \to X$ fonksiyonudur. $b > 0$ için $[0, b)$ kümesi X uzayında açık ve

$$(f^{-1})^{-1}([0, b)) = [0, b)$$

kümesi $\mathbb{R}$ de açık olmadığından f sürekli değildir. O halde f bir homeomorfizm değildir.✔

ÇÖZÜM 32

$f(x, y) = x$ şeklinde tanımlı $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). f fonksiyonunun bire-bir olduğunu gösterelim. $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ ve $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ olsun. Bu durumda ya $x_1 \neq x_2$ ya da $y_1 \neq y_2$ dir. $x_1 \neq x_2$ ise $f(x_1, y_1) = x_1$ ve $f(x_2, y_2) = x_2$ olduğundan $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$ dir. $y_1 \neq y_2$ olsun. Bu durumda

$$mx_1 + c \neq mx_2 + c$$

ve dolayısıyla $x_1 \neq x_2$ dir. Böylece

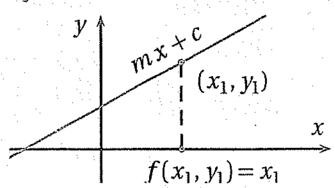
$$f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$$

dir. O halde f bire-bir dir. Şimdi f nin örten olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(x, mx + c) \in X \quad \text{ve} \quad f(x, y) = x$$

olduğundan f örtendir.

Şekil 6.27



HO-2). $f(x, y) = x$ şeklinde tanımlı $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu π_1 izdüşüm fonksiyonunun X e kısıtlanmışı olduğundan süreklidir.

HO-3). f nin ters fonksiyonu

$$f^{-1}(x) = (x, mx + c)$$

şeklinde tanımlı $f^{-1}: \mathbb{R} \to X$ fonksiyonudur.

$$(\pi_1 \circ f^{-1})(x) = \mathrm{id}(x) \quad \text{ve} \quad (\pi_2 \circ f^{-1})(x) = mx + c$$

fonksiyonları sürekli olduklarından Teorem 6.35 gereğince f^{-1} fonksiyonu süreklidir.

O halde f bir homeomorfizmdir.✔

ÇÖZÜM 33

a) $f, g \in G$ olsun. Bu durumda $f \circ g \in G$ dir. Diğer yandan $f \in G$ ise $f^{-1} \in G$ ve $\mathrm{id} \in G$ dir. Üstelik

i) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, **ii)** $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f$,
iii) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$

şartları sağlanır. O halde G bir gruptur.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlı $f_n: (0,1) \to (0,1)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. O halde $f_n \in G$ dir. Böylece $\mathbb{N}$ sonlu olmadığından ve $n \neq m$ için $f_n \neq f_m$ olduğundan G sonlu değildir.

c) $\mathrm{id}(x) = x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id}: X \to X$ fonksiyonu bir homeomorfizm ve $\mathrm{id}(a) = a$ olduğundan $\mathrm{id} \in G_a$ dır. $f, g \in G_a$ olsun. g bir homeomorfizm olduğundan g^{-1} bir homeomorfizmdir. Böylece, $f \circ g^{-1} \in G$ dir. $(f \circ g^{-1})(a) = f(g^{-1}(a)) = f(a) = a$ olduğundan $f \circ g^{-1} \in G_a$ dır. O halde G_a kümesi G nin bir alt grubudur.✔

ÇÖZÜM 34

d_1 ve d_2 metrikleri Lipschitz denk olduklarından

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha, \beta > 0$ sayıları vardır.

$\mathrm{id}(x) = x$ şeklinde tanımlı $\mathrm{id}: (X, d_1) \to (X, d_2)$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). id fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğu açıktır.

HO-2). $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \alpha\varepsilon$ diyelim. Bu durumda $d_1(x, x_0) < \delta$ ise her $x, y \in X$ için $\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ olduğundan

$$d_2(x, x_0) \leq \frac{d_1(x, x_0)}{\alpha} < \frac{\delta}{\alpha} = \varepsilon$$

dır. Dolayısıyla $d_1(x, x_0) < \delta$ ise

$$d_2(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(x_0)) = d_2(x, x_0) < \varepsilon$$

olur. Yani id fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktası keyfi olduğundan id süreklidir.

HO-3). id bire-bir ve örten olduğundan id^{-1} ters fonksiyonu vardır ve $x \in X$ için $\mathrm{id}^{-1}(x) = x$ dir. Şimdi $\mathrm{id}^{-1}: (X, d_2) \to (X, d_1)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\beta}$ diyelim. Bu durumda

$d_2(x,x_0)<\delta$ ise her x,y için $d_1(x,y)\le \beta d_2(x,y)$ olduğundan

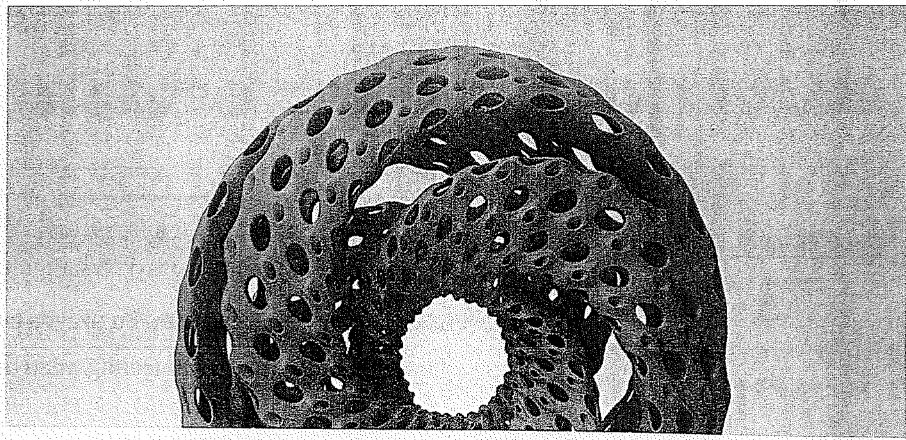
$$\frac{d_1(x,x_0)}{\beta}\le d_2(x,x_0)<\delta=\frac{\varepsilon}{\beta}$$

olduğundan $d_1(x,x_0)<\varepsilon$ olur. Dolayısıyla $d_2(x,x_0)<\delta$ ise

$$d_1\left(\mathrm{id}^{-1}(x),\mathrm{id}^{-1}(x_0)\right)=d_1(x,x_0)<\varepsilon$$

olur. Yani id^{-1} fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktası keyfi olduğundan id^{-1} süreklidir.

O halde id bir homeomorfizmdir. Bu durumda (X,d_1) ve (X,d_2) uzayları homeomorfiktir.✔



7. Ayırma Aksiyomları

Topolojinin problemlerinden bir tanesi verilen iki topolojik uzayın homeomorfik olup olmadığını belirlemektir. Bu problemi çözmek için belirli bir metod olmamasına rağmen özel durumlarda uygulanan teknikler vardır. İki uzayın homeomorfik olduğunu göstermek uzaylardan birinden diğerine kendisi ve tersi sürekli bir fonksiyon oluşturma meselesidir. İki uzayın homeomorfik olmadığını göstermek ise değişik bir meseledir. İki uzayın homeomorfik olmadığını göstermek için uzaylar arasında bire-bir örten kendisi ve tersi sürekli olan hiç bir fonksiyonun var olmadığının gösterilmesi gerekir. Eğer uzaylardan birinin sahip olduğu fakat diğer uzayın sahip olmadığı bazı topolojik özellikler bulunabilirse problem çözülmüş olur. Yani uzaylar homeomorfik olamazlar. Bu bölümde bu topolojik özelliklerden ayırma aksiyomları adı verilen ve T_i-uzayları denilen uzaylarla regüler, tamamen regüler ve normal uzay kavramları verilerek bunlarla ilgili bazı sonuçlar incelenecektir.

7.1. T_0-Uzayları

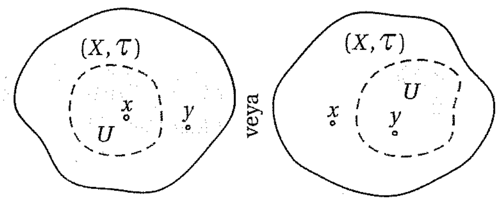
TANIM 7.1. ▷ T_0-uzayı

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X kümesinin farklı her iki noktasının en az birinin diğerini içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya bir T_0-uzayı denir. Diğer bir deyişle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U \text{ ve } y \notin U \text{ veya } y \in U \text{ ve } x \notin U$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ varsa bu uzaya bir T_0-uzayı denir. (Şekil 7.1 e bakınız.)

Şekil 7.1



Not

Bir $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_0-uzayı olduğunu göstermek için $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U,\ y \notin U \text{ veya } y \in U,\ x \notin U$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ kümesinin olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu yüzden $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_0-uzayı olmadığını göstermek için

$$x \in U,\ y \notin U \text{ ve } y \in U,\ x \notin U$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ kümesi bulunamayan $x \neq y$ noktalarının bulunması yeterlidir.

ÖRNEK 7.2. ▷
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının bir T_0-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu uzayda boş olmayan tek açık küme X dir. X hem x noktasını hemde y noktasını içerdiğinden bu uzay bir T_0-uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.3. ▷
Herhangi bir $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayının bir T_0-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ kümesi açıktır. Üstelik $x \in \{x\}, y \notin \{x\}$ dir. Böylece bu uzay bir T_0-uzayıdır.✍

ÖRNEK 7.4. ▷
$X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_0-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$ ve $\{a\} \in \mathcal{T}$ olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_0-uzayıdır.✍

ÖRNEK 7.5. ▷
$X = \{a, b, c, d\}$ ve

$$\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayının bir T_0-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $x \neq a$ ise $x = b$ veya $x = c$ veya $x = d$ dir. Buna göre x in üç hali içinde $a \in \{a\}, x \notin \{a\}$ ve $\{a\} \in \mathcal{T}_{4n}$ dır.
b) $x \neq b$ ve $x \neq a$ ise $x = c$ veya $x = d$ dir. Buna göre x in iki hali içinde $b \in \{b\}, x \notin \{b\}$ ve $\{b\} \in \mathcal{T}_{4n}$ dır.
c) $c \neq d$ için $c \in \{a, c\}, d \notin \{a, c\}$ ve $\{a, c\} \in \mathcal{T}_{4n}$ dır.

Yani $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U$ ve $y \notin U$ veya $x \notin U$ ve $y \in U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}_{4n}$ vardır. Böylece $(X, \mathcal{T}_{4n})$ uzayı bir T_0-uzayıdır.✍

ÖRNEK 7.6. ▷
$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_0-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $c, d \in X$ ve $c \neq d$ dir.

a) $c \in U$ özelliğindeki açık kümeler

$$\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\} \text{ ve } X$$

dir. Bu durumda $c \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ ise $d \in U$ olur. Diğer bir deyişle $c \in U$ ve $d \notin U$ olacak şekilde U açık kümesi yoktur.

b) Benzer şekilde $d \in U$ özelliğindeki açık kümeler

$$\{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\} \text{ ve } X$$

dir. Bu durumda $d \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ ise $c \in U$ olur. Diğer bir deyişle $d \in U$ ve $c \notin U$ olacak şekilde U açık kümesi yoktur.

Böylece, $c \in U$ ve $d \notin U$ veya $d \in U$ ve $c \notin U$ olacak şekilde U açık kümesi olmadığından $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_0-uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.7. ▷
X bir küme ve $\mathscr{P}$ kolleksiyonu X in aşikar ayrışımlarından farklı bir ayrışımı olmak üzere $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ ayrışım uzayının T_0-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{P}$ nin en az bir U elemanı $x \neq y$ özelliğinde iki nokta içerir. Yani $x \neq y$ ve $x, y \in U$ olacak şekilde bir $U \in \mathscr{P}$ ve $x, y \in X$ noktaları vardır. x noktasını içeren her açık küme U yu kapsayacağından y noktasınıda içerir. Benzer şekilde y noktasını içeren her açık kümede x noktasınıda içerir. Böylece $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ uzayı bir T_0-uzayı olamaz.✍

ÖRNEK 7.8. ▷
$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir sonlu tümleyenler uzayının T_0-uzayı olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sonlu olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X)$ olacağından Örnek 7.3 gereğince bu uzay bir T_0-uzayıdır.
b) X sonlu olmasın. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $U = X \setminus \{y\}$ olmak üzere $x \in U$, $y \notin U$ ve $U \in \mathcal{T}$ dur. Bu durumda bu uzay bir T_0-uzayıdır.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı bir T_0-uzayıdır.

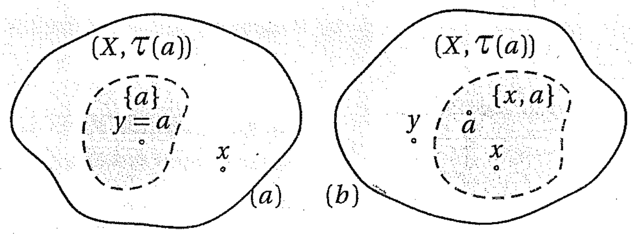
Benzer şekilde, herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının bir T_0-uzayı olduğu gösterilebilir.✍

ÖRNEK 7.9. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının bir T_0-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun.

a) $y = a$ olsun. Bu durumda $x \notin \{a\}$, $y \in \{a\}$ ve $\{a\}$ kümesi açıktır. (Şekil 7.2(a) ya bakınız.)
b) $x \neq a$, $y \neq a$ olsun. Bu durumda $\{x, a\}$ kümesi açıktır. Üstelik, $x \in \{x, a\}$, $y \notin \{x, a\}$ dır. (Şekil 7.2(b) ye bakınız.)

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı bir T_0-uzayıdır.✍



Şekil 7.2

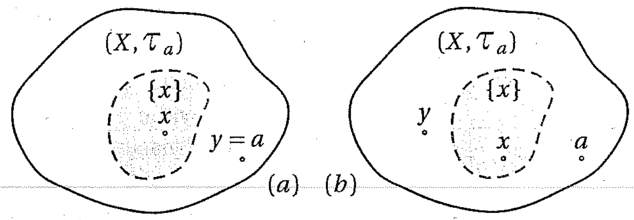
ÖRNEK 7.10. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T}_a)$ topolojik uzayının bir T_0-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun.

a) $y = a$ olsun. Bu durumda $x \in \{x\}$, $y \notin \{x\}$ ve $\{x\} \in \mathcal{T}_a$ dır. (Şekil 7.3(a) ya bakınız.)
b) $x \neq a$ ve $y \neq a$ olsun. Bu durumda

$$x \in \{x\}, \quad y \notin \{x\} \quad \text{ve} \quad \{x\} \in \mathcal{T}_a$$

dır. (Şekil 7.3(b) ye bakınız.)
(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı T_0-uzayıdır.✍



Şekil 7.3

Teorem 7.11. ▷
$\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ özelliğine sahip iki topoloji olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_0-uzayı ise $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayıda bir T_0-uzayıdır.

İSPAT: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_0-uzayı olduğundan $x \in U$, $y \notin U$ veya $x \notin U$, $y \in U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}_1$ vardır. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_2$ ve

$$x \in U, y \notin U \text{ veya } x \notin U, \ y \in U$$

dur. Böylece $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_0-uzayıdır.✔

Teorem 7.12. ▷
Her T_0-uzayının her alt uzayıda bir T_0-uzayıdır.

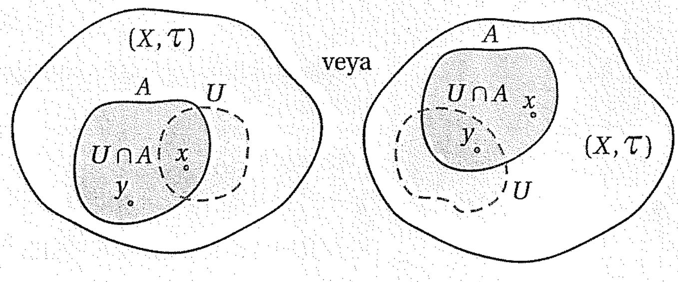
İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ bir T_0-uzayı ve $(A, \mathcal{T}_A)$ da bu uzayın bir alt uzayı olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in A$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. $(X, \mathcal{T})$ bir T_0-uzayı olduğundan

$$x \in U, \ y \notin U \text{ veya } y \in U, \ x \notin U$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda

$$x \in U \cap A,\ y \notin U \cap A \text{ veya } y \in U \cap A,\ x \notin U \cap A$$

olur. Üstelik, $U \cap A \in \mathcal{T}_A$ dır. O halde $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı bir T_0-uzayıdır. (Şekil 7.4 ye bakınız.)✔



Şekil 7.4

Teorem 7.13. ▷

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzayları homeomorfik olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_0-uzayıdır. **b)** $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_0-uzayıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfik olduklarından bir $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfizmi vardır.

a)⇒ b). $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_0-uzayı olsun. $y_1 \neq y_2$ ve $y_1, y_2 \in Y$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu örten olduğundan

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır. f fonksiyonu bire-bir olduğundan $x_1 \neq x_2$ dir. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_0-uzayı olduğundan

$$x_1 \in U,\ x_2 \notin U \text{ veya } x_1 \notin U,\ x_2 \in U$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ kümesi vardır. f bir homeomorfizm olduğundan $f(U) \in \mathcal{T}_2$ dir. Diğer yandan

$$y_1 \in f(U),\ y_2 \notin f(U) \text{ veya } y_1 \notin f(U),\ y_2 \in f(U)$$

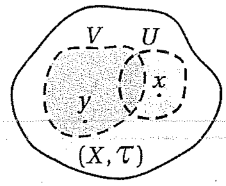
dur. Böylece $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_0-uzayıdır.

b)⇒ a). $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ bir homeomorfizm olduğundan (a) ⇒ b)) gereğince $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_0-uzayı ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_0-uzayı olur.✔

Not

Teorem 7.13 ye göre $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri T_0-uzayı ve diğeri T_0-uzayı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

7.2. T_1-Uzayları



Şekil 7.5

TANIM 7.14. ▷ **T_1-uzayı**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X kümesinin farklı her iki noktasının her birinin diğer noktayı içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya bir **T_1-uzayı** denir. Diğer bir deyişle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U,\ y \notin U \text{ ve } y \in V,\ x \notin V$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri varsa bu uzaya bir **T_1-uzayı** denir. (Şekil 7.5 e bakınız.)

ÖRNEK 7.15. ▷
$(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayının T_1-uzayı olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri açıktır. Üstelik,

$$x \in \{x\}, \quad y \notin \{x\} \quad \text{ve} \quad y \in \{y\}, \quad x \notin \{y\}$$

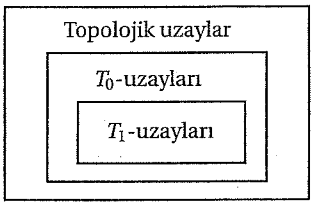
dir. Böylece bu uzay bir T_1-uzayıdır.

ÖRNEK 7.16. ▷
Her (X, d) metrik uzayının bir T_1-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ ve $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} d(x, y)$ olsun. Bu durumda

$$x \in B(x, \varepsilon), \quad y \notin B(x, \varepsilon) \quad \text{ve} \quad y \in B(y, \varepsilon), \quad x \notin B(y, \varepsilon)$$

dur. Üstelik, $B(x, \varepsilon)$, $B(y, \varepsilon)$ açık yuvarları birer açık kümedir. O halde (X, d) metrik uzayı bir T_1-uzayıdır.



Şekil 7.6

Not
Örnak 7.16 gereğince $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzayları birer metrik uzay olduklarından T_1-uzayıdırlar.

NOT 7.17.

1. Bir $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_1-uzayı olduğunu göstermek için $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için
$$x \in U,\ y \notin U \text{ ve } y \in V,\ x \notin V$$
olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümelerinin olduğunun gösterilmesi gerekir. Böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayının T_1-uzayı olmadığını göstermek için
$$x \in U,\ y \notin U \text{ veya } y \in V,\ x \notin V$$
olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri bulunamayan $x \neq y$ özelliğinde $x, y \in X$ noktalarının bulunması yeterlidir.
2. T_1-uzayının tanımı gereğince her T_1-uzayı bir T_0-uzayıdır. Fakat her T_0-uzayının bir T_1-uzayı olması gerekmez. (Şekil 7.6 ya bakınız.)

ÖRNEK 7.18. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının T_1-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq a$ olsun. $U \in \mathcal{T}(a)$ ve $x \in U$ ise $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $a \in U$ dur. Diğer bir deyişle x noktasının her komşuluğu a noktasınıda içerir. O halde $x \in U$, $a \notin U$ olacak şekilde hiç bir $U \in \mathcal{T}(a)$ yoktur. Böylece bu uzay bir T_1-uzayı değildir.

ÖRNEK 7.19. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T}_a)$ topolojik uzayının T_1-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq a$ olsun. $U \in \mathcal{T}_a$ ve $a \in U$ ise $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince $U = X$ olacağından $x \in U$ olur. Diğer bir deyişle a noktasının her komşuluğu x noktasınıda içerir. O halde $a \in U$, $x \notin U$ olacak şekilde hiç bir $U \in \mathcal{T}_a$ yoktur. Böylece bu uzay bir T_1-uzayı değildir.

ÖRNEK 7.20. ▷
X kümesinin birden fazla elemanı varsa $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının T_1-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 7.2 gereğince $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayı bir T_0-uzayı olmadığından T_1-uzayı değildir.

ÖRNEK 7.21. ▷
X bir küme ve $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in aşikar ayrışımlarından farklı bir ayrışımı ise $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ uzayının T_1-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 7.7 gereğince $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayı bir T_0-uzayı olmadığından bir T_1-uzayı da değildir.

Teorem 7.22. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayıdır. **b)** Her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi kapalıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). $x \in X$ ve $y \in X \setminus \{x\}$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ dir. $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan

$$x \in U,\ y \notin U \text{ ve } y \in V_y,\ x \notin V_y$$

olacak şekilde $U, V_y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $V_y \cap \{x\} = \emptyset$ olduğundan $V_y \subseteq X \setminus \{x\}$ olur. Diğer bir deyişle her $y \in X \setminus \{x\}$ için $y \in V_y \subseteq X \setminus \{x\}$ olacak şekilde bir $V_y \in \mathcal{T}$ vardır. Sonuç 3.44 gereğince $X \setminus \{x\}$ kümesi açıktır. ($X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$ olduğundan $X \setminus \{x\}$ kümesi açıktır.) O halde $\{x\}$ kümesi kapalıdır.

b)⇒ a). $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri kapalı oldukları için $X \setminus \{x\}$ ve $X \setminus \{y\}$ kümeleri açıktır. Üstelik,

$$x \in X \setminus \{y\},\ y \notin X \setminus \{y\} \text{ ve } y \in X \setminus \{x\},\ x \notin X \setminus \{x\}$$

dir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayıdır.✓

SONUÇ 7.23. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayıdır. **b)** X in sonlu her alt kümesi kapalıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). A kümesi X in sonlu bir alt kümesi olsun. Teorem 7.22 gereğince her $x \in A$ için $\{x\}$ kümesi kapalıdır. Bu durumda sonlu sayıdaki kapalı kümelerin birleşimi Teorem 3.58 gereğince kapalı olduğundan $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$ kapalıdır.

b)⇒ a). Her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi sonlu olduğundan kapalıdır. Bu durumda Teorem 7.22 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayıdır.✔

ÖRNEK 7.24. ▷
X sonlu bir küme olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ bir T_1-uzayı ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ ve $X\setminus\{x\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ diyelim. Bu durumda Sonuç 7.23 gereğince $X\setminus\{x\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$ kümesi kapalıdır. Böylece $\{x\}$ kümesi açıktır. Örnek 3.12 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. Dolayısıyla sonlu her T_1-uzayı ayrık uzaydır. Yani ayrık uzaydan başka sonlu T_1-uzayı yoktur.✍

ÖRNEK 7.25. ▷
X birden fazla elemanı olan bir küme olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının T_1-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayın kapalı kümeleri sadece $\emptyset$ ve X kümeleridir. Böylece her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi kapalı değildir. Teorem 7.22 gereğince bu uzay bir T_1-uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.26. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının T_1-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayda her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi kapalıdır. Teorem 7.22 gereğince bu uzay bir T_1-uzayıdır.

Benzer şekilde, herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının bir T_1-uzayı olduğu gösterilebilir. (Alıştırma 11 ye bakınız.)✍

Teorem 7.27. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ kapalı (açık) ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_1-uzayı ise $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayıda bir T_1-uzayıdır.

İSPAT: $y \in Y$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan $\{x\}$ kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Böylece f kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(\{x\}) = \{y\}$ kümesi $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında kapalıdır. Teorem 7.22 gereğince $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_1-uzayıdır. f açık bir fonksiyon ise ispat benzer şekilde yapılır.✔

ÖRNEK 7.28. ▷
X bir küme, $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojileri X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ özelliğine sahip iki topoloji olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_1-uzayı ise $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı da bir T_1-uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 6.42 gereğince $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu kapalıdır. O halde Teorem 7.27 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_1-uzayı ise $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı da bir T_1-uzayıdır.✍

SONUÇ 7.29. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzayları homeomorfik olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir T_1-uzayı olmasıdır.

Not
Sonuç 7.29 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri T_1-uzayı ve diğeri T_1-uzayı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

Teorem 7.30. ▷
Her T_1-uzayının her alt uzayıda bir T_1-uzayıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olsun. $(A, \mathcal{T}_A)$ da $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir alt uzayı ve $x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in X$ olup $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olduğundan Teorem 7.22 gereğince $\{x\}$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalıdır. $\{x\} = A \cap \{x\}$ olduğundan Teorem 3.68 gereğince $\{x\}$ kümesi $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayında kapalıdır. Teorem 7.22 gereğince $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı bir T_1-uzayıdır.✔

Teorem 7.31. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayıdır.
b) Her $x \in X$ için $\mathcal{N}_x = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$ (veya $\mathcal{N}_x$ kolleksiyonu x noktasının bir yerel tabanı) olmak üzere $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). Her $U \in \mathcal{N}_x$ için $x \in U$ olduğundan $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U$ dur. $y \neq x$ ve $y \in X$ olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olduğundan $\{y\}$ kapalıdır. Böylece $X \setminus \{y\}$ kümesi açık ve $x \in X \setminus \{y\}$ dir. O halde $X \setminus \{y\} \in \mathcal{N}_x$ olur. Üstelik, $y \notin X \setminus \{y\}$ olduğundan

$$y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U \tag{7.1}$$

dur. (7.2) ve (7.1) gereğince $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U$ olur.

b)⇒ a). $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda (a) gereğince $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U$ dur. O halde en az bir $U \in \mathcal{N}_x$ için $y \notin U$ ve $x \in U$ dur. Benzer şekilde en az bir $V \in \mathcal{N}_y$ için $x \notin V$ ve $y \in V$ olur. $\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $U, V \in \mathcal{T}$ olur. Böylece

$$y \notin U, \ x \in U \text{ ve } x \notin V, \ y \in V$$

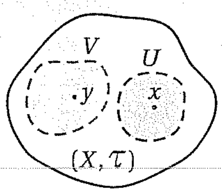
olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayıdır.✔

7.3. Hausdorff Uzayları (T_2-Uzayları)

TANIM 7.32. ▷ **Hausdorff uzayı (T_2-uzayı)**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına bir **Hausdorff uzayı** veya bir T_2-**uzayı** denir. (Şekil 7.7 ye bakınız.)



Şekil 7.7

ÖRNEK 7.33. ▷
$X = \{a,b,c,d\}$ ve $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $a \in U$ özelliğindeki açık kümelerin kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_a = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, X\}$$

ve $c \in V$ özelliğindeki açık kümelerin kolleksiyonu

$$\mathcal{N}_c = \{\{a,c\}, \{a,b,c\}, X\}$$

dir. Her $U \in \mathcal{N}_a$ ve her $V \in \mathcal{N}_c$ için $U \cap V \neq \emptyset$ dur. Böylece $a \neq c$ için $a \in U$, $c \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_{4n}$ kümeleri yoktur. O halde bu uzay bir Hausdorff uzayı değildir.

Not
Bir $(X,\mathcal{T})$ uzayının Hausdorff uzayı olduğunu göstermek için $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümelerinin olduğunun gösterilmesi gerekir. Böylece $(X,\mathcal{T})$ uzayının Hausdorff uzayı olmadığını göstermek için

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri bulunamayan $x \neq y$ noktalarının bulunması yeterlidir.

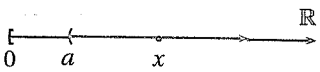
ÖRNEK 7.34. ▷
X birden fazla elemanı olan bir küme olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. $x \in U$ ve $y \in V$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U = X$ ve $V = X$ olacağından $U \cap V = X$ olur. Diğerbir deyişle $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri yoktur. O halde bu uzay bir Hausdorff uzayı değildir.

ÖRNEK 7.35. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim.

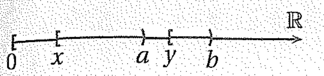
ÇÖZÜM: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(X)$ dir. Üstelik, $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$ ve $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ dur. Böylece bu uzay bir Hausdorff uzayıdır.

ÖRNEK 7.36. ▷
$X = [0,\infty)$, $\mathcal{T} = \{(a,\infty) \mid a \geq 0\} \cup \{\emptyset, X\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.



Şekil 7.8

ÇÖZÜM: $x \neq 0$ olmak üzere $x \in X$ olsun. $0 \in U$, $x \in V$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ ise $U = X$ olacağından $x \in U$ olur. Bu durumda $x \in U \cap V$ dir. O halde $0 \in U$, $x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ yoktur. Böylece, $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayı değildir. (Şekil 7.8 ya



Şekil 7.9

bakınız.)✍

ÖRNEK 7.37. ▷

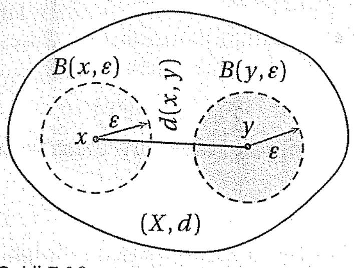
a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $x \neq y$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $x < y$ olduğunu kabul edelim. $x < a < y$ özelliğinde bir $a \in \mathbb{R}$ ve $y < b$ özelliğinde bir $b \in \mathbb{R}$ seçelim. Bu durumda $x \in [x, a)$, $y \in [y, b)$ ve $[x, a) \bigcap [y, b) = \emptyset$ dur. Üstelik, $[x, a), [y, b) \in \mathcal{T}_{\text{sağ}}$ dır. (Şekil 7.9 ye bakınız.) O halde $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

b) Benzer şekilde $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayınında bir Hausdorff uzayı olduğu gösterilir.✍



Şekil 7.10

ÖRNEK 7.38. ▷

Herhangi bir (X, d) metrik uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $d(x, y) > 0$ dır. $\varepsilon = \frac{1}{2}\, d(x, y)$ diyelim. Bu durumda $x \in B(x, \varepsilon)$, $y \in B(y, \varepsilon)$ ve $B(x, \varepsilon)$, $B(y, \varepsilon)$ kümeleri açıktır. Şimdi $B(x, \varepsilon) \bigcap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in B(x, \varepsilon) \bigcap B(y, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $d(z, x) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ olur. Üçgen eşitsizliği gereğince

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

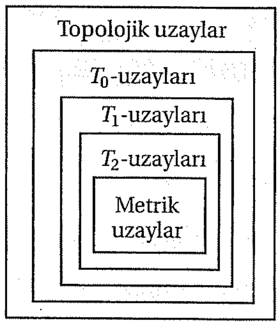
dur. Yani $\frac{1}{2} d(x, y) < \varepsilon$ dur. Bu ise $\varepsilon = \frac{1}{2}\, d(x, y)$ olması ile çelişir. O halde

$$B(x, \varepsilon) \bigcap B(y, \varepsilon) = \emptyset$$

dur. Böylece (X, d) bir Hausdorff uzayıdır. (Şekil 7.10 ya bakınız.)✍

Not

1. Örnek 7.38 gereğince her $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzayları Hausdorff uzayıdırlar.
2. Tanım 7.14 ve Tanım 7.32 gereğince her Hausdorff uzayı bir T_1-uzayıdır. Fakat her T_1-uzayı bir Hausdorff uzayı değildir. (Şekil 7.11 e bakınız.)



Şekil 7.11

ÖRNEK 7.39. ▷

$(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının bir Hausdorff uzayı olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM: Örnek 7.26 gereğince bu uzay bir T_1-uzayıdır.

a) X sayılabilir bir küme ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olacağından bu uzay Örnek 7.35 gereğince bir Hausdorff uzayıdır.

b) X sayılamaz bir küme olsun. $(X, \mathcal{T})$ nun bir Hausdorff uzayı olduğunu varsayalım. $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $x \in U$, $y \in V$ ve $U \bigcap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ olduğundan $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \backslash U$ ve $X \backslash V$ kümeleri sayılabilirdir. Diğer yandan, $U \bigcap V = \emptyset$ olduğundan $(X \backslash U) \bigcup (X \backslash V) = X$ dir. İki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir olduğundan X kümesi sayılabilirdir. Bu ise X kümesinin sayılamaz olması ile çelişir. O halde bu uzay bir Hausdorff uzayı değildir.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı X sayılabilir ise Hausdorff uzayı ve X sayılamazsa Hausdorff uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.40. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir sonlu tümleyenler uzayının bir Hausdorff uzayı olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM: Örnek 7.26 gereğince bu uzay T_1-uzayıdır.

a) X sonlu bir küme olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayı Örnek 7.35 gereğince bir Hausdorff uzayı olduğundan $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayıdır.

b) X kümesi sonlu olmasın. $(X, \mathcal{T})$ nun bir Hausdorff uzayı olduğunu varsayalım. $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Böylece $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ olduğundan $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \setminus V$ ve $X \setminus U$ kümeleri sonludur. Diğer yandan $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$ dir. İki sonlu kümenin birleşimi sonlu olduğundan X kümesi sonludur. Bu ise X in sonlu olmaması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı değildir.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı X sonlu ise Hausdorff uzayı ve X sonlu değilse bir Hausdorff uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.41. ▷
X bir küme ve $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in aşikar ayrışımlarından farklı bir ayrışımı olmak üzere $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayının Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 7.21 gereğince $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayı bir T_1-uzayı olmadığından bu uzay bir Hausdorff uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.42. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ uzayının Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 7.18 gereğince $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı bir T_1-uzayı olmadığından bir Hausdorff uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.43. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 7.19 gereğince $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı bir T_1-uzayı olmadığından bir Hausdorff uzayı değildir.✍

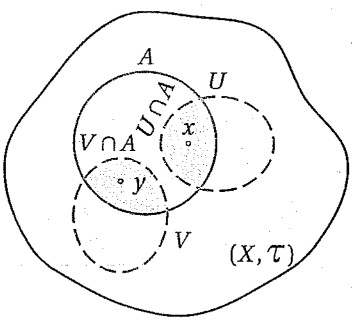
Teorem 7.44. ▷
Her Hausdorff uzayının her alt uzayıda bir Hausdorff uzayıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı ve $(A, \mathcal{T}_A)$ bunun bir alt uzayı olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in A$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Böylece

$$x \in U \cap A,\ y \in V \cap A \text{ ve } (A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$$



Şekil 7.12

dur. $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince $A \cap U \in \mathcal{T}_A$ ve $A \cap V \in \mathcal{T}_A$ olduğundan $(A, \mathcal{T}_A)$ bir Hausdorff uzayıdır. (Şekil 7.12 a bakınız.)✔

Not

Örnek 7.38 gereğince her $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzayları birer Hausdorff uzayı olduklarından Teorem 7.44 gereğince $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzaylarının her alt uzayıda bir Hausdorff uzayıdır.

Teorem 7.45.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayıdır.

b) $y \neq x$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U$ ve $y \notin \overline{U}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır.

c) Her $x \in X$ için $\mathcal{N}_x = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$ (veya $\mathcal{N}_x$, x noktasının yerel bir tabanı) olmak üzere

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U}$$

dır.

İSPAT:

a)⇒ b). $y \neq x$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Teorem 5.26 gereğince $y \notin \overline{U}$ dır.

b)⇒ c). $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $x \in \overline{U}$ olduğundan her $U \in \mathcal{N}_x$ için $x \in \overline{U}$ olur. Bu durumda

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U} \tag{7.2}$$

olur. $y \neq x$ ve $y \in X$ olsun. (b) gereğince $x \in U$ ve $y \notin \overline{U}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $U \in \mathcal{N}_x$ ve $y \notin \overline{U}$ olduğundan

$$y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U} \tag{7.3}$$

olur. (7.2) ve (7.3) gereğince $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U}$ dır.

c)⇒ a). $y \neq x$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda (c) gereğince

$$y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U}$$

dir. Böylece en az bir $U \in \mathcal{N}_x$ için $y \notin \overline{U}$ dır. Diğer bir deyişle $x \in U$ özelliğindeki en az bir $U \in \mathcal{T}$ için $y \notin \overline{U}$ dır. $V = X \setminus \overline{U}$ diyelim. $\overline{U}$ kümesi kapalı olduğundan $V \in \mathcal{T}$ olur. Üstelik, $y \notin \overline{U}$ olduğundan $y \in V$ olur. Diğeryandan

$$U \cap V = U \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$$

dur. O halde $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayıdır.✔

Teorem 7.46.

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olsun.

a) $f : X \to Y$ bire-bir, örten ve kapalı (açık) bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir Hausdorff uzayı ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda bir Hausdorff uzayıdır.

b) $f : X \to Y$ bire-bir sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir Hausdorff uzayı ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayıda bir Hausdorff uzayıdır.

İSPAT:

a) Teorem 6.44 gereğince f fonksiyonu açıktır. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ olsun. f fonksiyonu örten olduğundan

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{ve} \quad f(x_2) = y_2$$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır. (Şekil 7.13 e bakınız.) f fonksiyonu bire-bir olduğundan $x_1 \neq x_2$ dir. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan

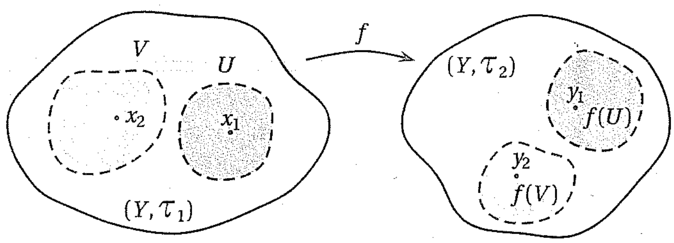
$$x_1 \in U,\ x_2 \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_1$ kümeleri vardır. $U \cap V = \emptyset$ olduğundan

$$f(U) \cap f(V) = \emptyset$$

dur. Diğer yandan $y_1 \in f(U)$, $y_2 \in f(V)$ ve f fonksiyonu açık olduğundan $f(U)$, $f(V) \in \mathcal{T}_2$ dir. O halde $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

Şekil 7.13



b) Teorem 6.51 gereğince $f^{-1} : f(X) \to X$ fonksiyonu kapalı ve örtendir. $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 7.44 gereğince $f(X)$ bir Hausdorff uzayıdır. $f^{-1}(f(X)) = X$ olduğundan (a) gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir Hausdorff uzayı olur. ✔

ÖRNEK 7.47. ▷
$\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ özelliğine sahip iki topoloji olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir Hausdorff uzayı ise $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayınında bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: id $: (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu Örnek 6.42 gereğince kapalı bir fonksiyondur. Böylece $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir Hausdorff uzayı ise Teorem 7.46 (a) gereğince $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayıda bir Hausdorff uzayıdır. ✍

Not
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylarından biri Hausdorff uzayı ve diğeri Hausdorff uzayı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

Teorem 7.46 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 7.48. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzayları homeomorfik olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir Hausdorff uzayı olmasıdır.

7.4. T_3-Uzayları ve Regüler Uzaylar

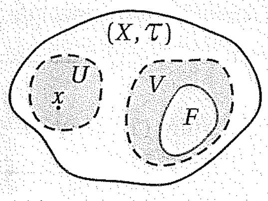
TANIM 7.49. ▹ **T_3-uzayı ve Regüler uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun.

a) Kapalı her $F \subseteq X$ kümesi ve $x \notin F$ özelliğindeki her $x \in X$ noktası için

$$U \cap V = \emptyset,\ F \subseteq V \text{ ve } x \in U$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına **T_3-uzayı** denir. (Şekil 7.14 ye bakınız.)

b) $(X,\mathcal{T})$ uzayı hem bir T_3-uzayı hem de bir T_1-uzayı ise $(X,\mathcal{T})$ uzayına **regüler uzay** denir.



Şekil 7.14

Not
$F = \emptyset$ ise $U = X$, $V = \emptyset$ alındığında U, V kümeleri açık ve $F \subseteq V$, $x \in U$, $U \cap V = \emptyset$ olur. Diğer yandan, $F = X$ ise $x \notin F$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ noktası yoktur. Böylece bir uzayın T_3-uzayı olması için $F \neq \emptyset$ ve $F \neq X$ özelliğindeki kapalı F kümeleri ve $x \notin F$ özelliğindeki $x \in X$ noktaları için

$$F \subseteq V,\ x \in U \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümelerinin olup olmadığına bakılması yeterlidir.

ÖRNEK 7.50. ▹
$X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$ olsun. $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayı olduğunu fakat $(X,\mathcal{T})$ regüler olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu $\mathcal{K} = \{\emptyset,\ X,\ \{a\}, \{b,c\}\}$ dir.

a) $F_1 = \{a\}$ olsun. Bu durumda $b \notin F_1$ dir. $F_1 \subseteq \{a\} = V \in \mathcal{T}$, $b \in \{b,c\} = U \in \mathcal{T}$ ve $U \cap V = \emptyset$ dur. $c \notin F_1$ dir. $F_1 \subseteq \{a\} = V \in \mathcal{T}$, $c \in \{b,c\} = U \in \mathcal{T}$ ve $U \cap V = \emptyset$ dur.

b) $F_2 = \{b,c\}$ olsun. Bu durumda $a \notin F_2$ dir. $F_2 \subseteq \{b,c\} = V \in \mathcal{T}$, $a \in \{a\} = U \in \mathcal{T}$ ve $U \cap V = \emptyset$ dur.

(a) ve (b) gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayıdır. Diğer yandan $\{c\}$ kümesi kapalı olmadığından bu uzay bir T_1-uzayı değildir. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı regüler değildir.

ÖRNEK 7.51. ▹
Herhangi bir $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının regüler olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: F kümesi boş olmayan kapalı bir küme ve $x \notin F$ olmak üzere $x \in X$ olsun. Bu durumda $F = V$ ve $\{x\} = U$ kümeleri açıktır. Üstelik, $x \in U$, $F \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dur. O halde her ayrık uzay bir T_3-uzayıdır. $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan bu uzay bir regüler uzaydır.

ÖRNEK 7.52. ▹
$(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının T_3-uzayı fakat regüler olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayda boş küme ve X kümesinden farklı hiç bir kapalı küme olmadığından bu uzay bir T_3-uzayıdır. $(X,\mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olmadığından bu uzay bir regüler uzay değildir.

ÖRNEK 7.53. ▹
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının bir T_3-uzayı olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM: Örnek 7.26 gereğince bu uzay bir T_1-uzayıdır.

a) X sonlu bir küme olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. Örnek 7.4 gereğince bu uzay bir T_3-uzayıdır.

b) X sonlu bir küme olmasın. $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_3-uzayı olduğunu kabul edelim. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{y\} = F$ kümesi kapalı ve $x \notin F$ dir. $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayı olduğundan $x \in U$, $F \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $X \setminus U$ ve $X \setminus V$ kümeleri sonludur. İki sonlu kümenin birleşimi sonlu ve $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$ olduğundan X sonlu olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde bu uzay bir T_3-uzayı değildir.

Bu durumda X sonlu ise $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı regüler (T_3-uzayı) X sonlu değilse $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı regüler (T_3-uzayı) değildir.✍

ÖRNEK 7.54. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayın bir T_3-uzayı olduğunu kabul edelim. $x \neq a$ olmak üzere $x \in X$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}(a)$ nın tanımı gereğince $\{x\} = F$ kümesi kapalıdır ve $a \notin F$ dir. Bu uzay bir T_3-uzayı olduğundan $a \in U$, $F \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}(a)$ vardır. Bu durumda $F \subseteq V$ $(V \neq \emptyset)$ ve $V \in \mathcal{T}(a)$ olduğundan $a \in V$ olur. Bu durumda $a \in U \cap V$ dir. O halde $U \cap V \neq \emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece bu uzay bir T_3-uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.55. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

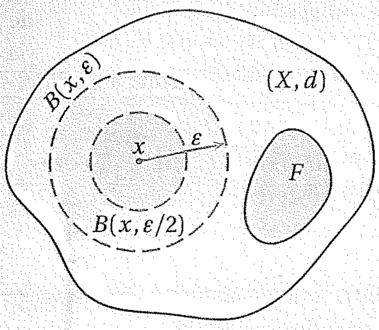
ÇÖZÜM: Bu uzayın bir T_3-uzayı olduğunu kabul edelim. $x \neq a$ olmak üzere $x \in X$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_a$ nın tanımı gereğince $\{a\} = F$ kümesi kapalıdır ve $x \notin F$ dir. Bu uzay bir T_3-uzayı olduğundan $F \subseteq V$, $x \in U$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_a$ vardır. Bu durumda $F = \{a\} \subseteq V$ $(V \neq \emptyset)$ ve $V \in \mathcal{T}_a$ olduğundan $V = X$ dir. O halde $U \cap V \neq \emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece bu uzay bir T_3-uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.56. ▷
X bir küme ve $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in aşikar ayrışımlarından farklı bir ayrışımı olsun. $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ uzayının T_3-uzayı olduğunu fakat regüler olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: F kümesi kapalı ve $x \notin F$ olmak üzere $x \in X$ olsun. $X \setminus F = U$ ve $V = F$ diyelim. Bu durumda $x \in U$, $F \subseteq V$ dir. Diğer yandan Örnek 4.17 gereğince $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ uzayında bir W kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart W nun kapalı olması gerektiğinden $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ dir. Böylece $U \cap V = (X \setminus F) \cap F = \emptyset$ olduğundan her ayrışım uzayı bir T_3-uzayıdır. Diğer yandan bu uzay Örnek 7.21 gereğince bir T_1-uzayı değildir. Dolayısıyla, $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ uzayı bir regüler uzay değildir.✍

Teorem 7.57. ▷
Her (X, d) metrik uzayı bir regüler uzaydır.

İSPAT: (X, d) metrik uzayının bir T_1-uzayı olduğunu biliyoruz. Şimdi (X, d) uzayının bir T_3-uzayı olduğunu gösterelim. F kapalı bir küme ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda $X \setminus F$



Şekil 7.15

kümesi açık ve $x \in X \setminus F$ dir. Teorem 4.5 gereğince $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus F$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır.

$$U = B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ ve } V = \left\{y \mid d(x,y) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olsun. (Şekil 7.15 e bakınız.)

Açıkça $x \in U$ ve U açıktır. Diğer yandan $V = X \setminus D\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğundan V açıktır. Şimdi, $F \subseteq V$ olduğunu gösterelim. $y \in F$ olsun. Bu durumda $y \notin X \setminus F$ dir. Böylece $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus F$ olduğundan $y \notin B(x,\varepsilon)$ dur. O halde $d(x,y) \geq \varepsilon$ ve böylece $d(x,y) > \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Dolayısıyla, $y \in V$ dir. $y \in F$ keyfi olduğundan $F \subseteq V$ olur.

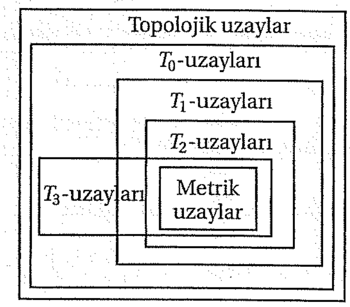
Şimdi de $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $y \in U \cap V$ olsun. Bu durumda $y \in U$ ve $y \in V$ dir. Buradan

$$d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } d(x,y) > \frac{\varepsilon}{2}$$

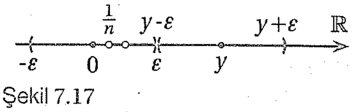
olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $U \cap V = \emptyset$ dur.✓

Not

1. Teorem 7.57 gereğince $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzayları regülerdir.
2. Her T_3-uzayı bir Hausdorff uzayı hatta bir T_1-uzayı ve her Hausdorff uzayı da bir T_3-uzayı olmak zorunda değildir. (Örnek 7.50 ve Şekil 7.16 e bakınız.)



Şekil 7.16



Şekil 7.17

ÖRNEK 7.58. ▷ $S = \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere tabanı

$$\mathscr{B}_3 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus S \mid a < 0 < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

olan $\mathbb{R}$ üzerindeki topoloji $\mathcal{T}_3$ olsun. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayının bir Hausdorff uzayı fakat bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Önce, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim. $x \neq y$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}|x-y|$ olmak üzere

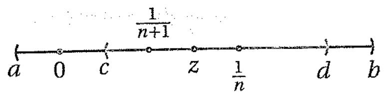
$$U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \quad V = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$$

kümeleri açık ve $x \in U$, $y \in V$ dur. Üstelik, $U \cap V = \emptyset$ dur. x ve y noktalarından biri örneğin $x = 0$ ise $\varepsilon = \frac{1}{2}|y|$ ve

$$U = (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus S, \quad V = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$$

olur. (Şekil 7.17 e bakınız.) Böylece $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

b) Şimdi, bu uzayın bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim. Bu uzayın bir T_3-uzayı olduğunu kabul edelim. S kümesi bu uzayda kapalıdır ve $0 \notin S$ dir. Bu durumda bu uzay bir T_3-uzayı olduğundan $0 \in U$, $S \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_3$ kümeleri olacağından $0 \in B_1 \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_1 = (a,b) \setminus S \in \mathscr{B}_3$ vardır. ($0 \in (a,b) \subseteq U$ olsaydı bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \in (a,b)$ olacağından $\frac{1}{n} \in (a,b) \cap S$ olurdu. Bu ise $(a,b) \cap S \subseteq U \cap V$ olduğundan $U \cap V = \emptyset$ olması ile çelişirdi.) $\frac{1}{n} \in (a,b)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda $\frac{1}{n} \in V$ ve V açık bir küme olduğundan $\frac{1}{n} \in B_2 \subseteq V$ olacak şekilde bir $B_2 = (c,d) \in \mathscr{B}_3$ vardır. $z < \frac{1}{n}$ ve $z > \max\left\{c, \frac{1}{n+1}\right\}$



Şekil 7.18

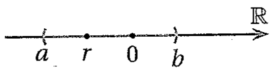
olacak şekilde bir $z \in \mathbb{R}$ $(z \neq 1/m,\ m \in \mathbb{N})$ seçelim. (Şekil 7.18 e bakınız.) Bu durumda $z \in B_1 = (a,b)\setminus S$ olduğundan $z \in U$ ve $c < z < d$ olduğundan $z \in V$ olur. O halde $z \in U \cap V$ yani $U \cap V \neq \emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $0 \in U$, $S \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_3$ kümeleri yoktur. Böylece bu uzay bir T_3-uzayı değildir.✍

ÖRNEK 7.59. ▶
Alt tabanı $\mathscr{S} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$ olan $\mathbb{R}$ üzerindeki topoloji $\mathcal{T}$ olsun. $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ uzayının bir Hausdorff uzayı fakat bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $\mathcal{T}$ topolojisi $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiden daha ince olduğundan (Alıştırma 30 e bakınız) Örnek 7.47 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

b) Şimdi, bu uzayın bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim. Bu uzayın bir T_3-uzayı olduğunu kabul edelim. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesi bu uzayda kapalı ve $0 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dur. Bu durumda $0 \in U$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $U = \mathbb{Q}$ ise $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $V \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $U \neq \mathbb{Q}$ dur. $0 \in U$ olduğundan $0 \in (a,b) \subseteq U$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Farklı iki reel sayı arasında bir irrasyonel sayı olduğundan $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olacak şekilde bir $r \in (a,b)$ vardır. (Şekil 7.19 ya bakınız.) $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq V$ ve $r \in (a,b) \subseteq U$ olduğundan $r \in U \cap V$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $0 \in U$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri yoktur. Böylece bu uzay bir T_3-uzayı değildir.✍



Şekil 7.19

ÖRNEK 7.60. ▶
T_3-uzayı fakat Hausdorff uzayı olmayan bir $(X,\mathcal{T})$ uzayı örneği verelim.

ÇÖZÜM: Örnek 7.52 gereğince her $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayı bir T_3-uzayıdır. Diğer yandan bu uzay X in birden fazla elemanı varsa Örnek 7.34 gereğince bir Hausdorff uzayı değidir.✍

Teorem 7.61. ▶
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayıdır.

b) Her $x \in X$ ve $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır.

c) Her $x \in X$ ve $x \notin F$ özelliğindeki X in kapalı her F alt kümesi için $x \in V$ ve $\overline{V} \cap F = \emptyset$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ kümesi vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $x \in X$ ve $x \in U$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $X\setminus U$ kümesi kapalıdır. Üstelik, $x \notin X\setminus U$ dur. $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayı olduğundan $x \in V$, $X\setminus U \subseteq W$ ve $W \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $V, W \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Böylece $x \in V \subseteq X\setminus W$ olur. $X\setminus W$ kümesi kapalı olduğundan $\overline{V} \subseteq \overline{X\setminus W} = X\setminus W$ olur. Yani $W \subseteq X\setminus\overline{V}$ dir. Diğer yandan

$$\overline{V} \cap (X\setminus U) \subseteq \overline{V} \cap W \subseteq \overline{V} \cap (X\setminus\overline{V})$$

dır. $\overline{V} \cap (X\setminus\overline{V}) = \emptyset$ olduğundan $\overline{V} \cap (X\setminus U) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla, $\overline{V} \subseteq U$ olur.

Böylece $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ olur.

b)⇒ c). F kümesi kapalı ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda $x \in X \setminus F$ ve $X \setminus F$ kümesi açıktır. Böylece (b) gereğince $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ kümesi vardır. Buradan $\overline{V} \cap F = \emptyset$ elde edilir. Üstelik, $x \in V$ ve $V \in \mathcal{T}$ dur.

c)⇒ a). F kümesi kapalı ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda (c) gereğince

$$x \in V \quad \text{ve} \quad \overline{V} \cap F = \emptyset$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ kümesi vardır. Böylece $F \subseteq X \setminus \overline{V}$ dır. Diğer yandan $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$ dur. Üstelik,

$$V, X \setminus \overline{V} \in \mathcal{T} \quad \text{ve} \quad x \in V, \quad F \subseteq X \setminus \overline{V}$$

dır. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayıdır.✔

SONUÇ 7.62. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir T_3-uzayı olsun. Bu durumda F kapalı bir küme ve $x \notin F$ ise

$$x \in U, \quad F \subseteq V \quad \text{ve} \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır.

İSPAT: F kümesi kapalı olduğundan $X \setminus F$ kümesi açık ve $x \in X \setminus F$ dır. Böylece $(X, \mathcal{T})$ bir T_3-uzayı olduğundan Teorem 7.61 (b) gereğince

$$x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus F$$

olacak şekilde bir $W \in \mathcal{T}$ kümesi vardır. Benzer şekilde $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ kümesi vardır. $V = X \setminus \overline{W}$ olsun. $W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus F$ olduğundan

$$F \subseteq X \setminus \overline{W} \subseteq X \setminus W$$

olur. Böylece $V = X \setminus \overline{W}$ olduğundan $F \subseteq V \subseteq \overline{V}$ olur. Diğer yandan $X \setminus W$ kapalı olduğundan

$$\overline{V} = \overline{X \setminus \overline{W}} \subseteq \overline{X \setminus W} = X \setminus W$$

olur. Böylece

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W$$

dur. Bu durumda

$$\overline{U} \cap \overline{V} \subseteq W \cap (X \setminus W) = \emptyset$$

olduğundan $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ dur.✔

Teorem 7.63. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_3-uzayıdır. **b)** $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_3-uzayıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfik olduğundan bir $f : X \to Y$ homeomorfizmi vardır.

a)⇒ b). $y \in Y$ ve $y \in U$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. $x \in f^{-1}(U)$ olduğundan Teorem 7.61 gereğince

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U)$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}_1$ vardır. Bu durumda f bir homeomorfizm olduğundan Teorem 6.59 gereğince $f\left(\overline{V}\right) = \overline{f(V)}$ ve $f(V) \in \mathcal{T}_2$ dir. Böylece

$$f(x) = y \in f(V) \subseteq f\left(\overline{V}\right) = \overline{f(V)} \subseteq U$$

olur. Teorem 7.61 gereğince $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_3-uzayıdır.

b)⇒ a). $f^{-1} : Y \to X$ bir homeomorfizm olduğundan (a)⇒b)) gereğince $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_3-uzayı ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_3-uzayı olur.✔

Not

1. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri T_3-uzayı diğeri T_3-uzayı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.
2. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri regüler diğeri regüler değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

Sonuç 7.29 ve Teorem 7.63 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 7.64. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir regüler uzay olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir regüler uzay olmasıdır.

ÖRNEK 7.65. ▷

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sağ})$ uzayının bir regüler uzay olduğunu gösterelim.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sol})$ uzayının bir regüler uzay olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Önce $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sağ})$ uzayının bir regüler uzay olduğunu gösterelim.

i) Örnek 7.37 gereğince bu uzay bir T_2-uzayı ve böylece bir T_1-uzayıdır.

ii) Bu uzayın bir T_3-uzayı olduğunu gösterelim. F kapalı bir küme ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ kapalı olduğundan $X \setminus \{x\}$ kümesi açıktır. Böylece her $y \in F$ için $[y, y_\alpha) \subseteq X \setminus \{x\}$ olacak şekilde bir $y_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Diğer bir deyişle her $y \in F$ için

$$\{x\} \cap [y, y_\alpha) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $y_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. $U = \bigcup_{y \in F} [y, y_\alpha)$ diyelim. Diğer yandan $\mathbb{R} \setminus F$ açık ve $x \in \mathbb{R} \setminus F$ olduğundan

$$[x, x_\alpha) \cap F = \emptyset$$

olacak şekilde bir $x_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. $V = [x, x_\alpha)$ alınırsa

$$U, V \in \mathcal{T} \text{ ve } x \in V,\ F \subseteq U$$

olur.

Şimdi $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in U \cap V$ olsun. Bu durumda $z \in [y, y_\alpha)$ olacak şekilde bir $y \in F$ ve $y_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Benzer şekilde $z \in [x, x_\alpha)$ olacak şekilde bir $x_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. $y \le x$ olsun. Bu durumda $z \in [y, y_\alpha) \cap [x, x_\alpha)$ olduğundan $x \in [y, y_\alpha)$ dır. Bu ise $\{x\} \cap [y, y_\alpha) = \emptyset$ olması ile çelişir. Şimdi, $y \ge x$ olsun. Bu durumda da $y \in [x, x_\alpha)$ olur. Bu ise $y \in F$ olduğundan

$$F \cap [x, x_\alpha) = \emptyset$$

olması ile çelişir. O halde $U \cap V = \emptyset$ dur. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı bir T_3-uzayıdır.

(i) ve (ii) gereğince $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı bir regüler uzaydır.

b) Benzer şekilde $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayınında bir regüler uzay olduğu gösterilir.✍

Teorem 7.66. ▷

Her regüler $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

İSPAT: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olduğundan $\{x\}$ kümesi kapalıdır. Üstelik, $y \notin \{x\}$ dir. Böylece $(X, \mathcal{T})$ bir regüler uzay olduğundan

$$\{x\} \subseteq U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.✔

Not

Örnek 7.58 ve Örnek 7.59 da görüldüğü gibi her Hausdorff uzayı bir regüler uzay değildir.

Teorem 7.67. ▷

Her regüler uzayın (T_3-uzayının) her alt uzayıda bir regüler uzay (T_3-uzayı) dır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ bir regüler uzay ve $(A, \mathcal{T}_A)$ bu uzayın bir alt uzayı olsun. $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olduğundan Teorem 7.30 gereğince $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayı bir T_1-uzayıdır.

F kümesi $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayında kapalı ve $x \notin F$ olmak üzere $x \in A$ olsun. Teorem 3.68 gereğince $F = A \cap K$ olacak şekilde $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı bir K kümesi vardır. Bu durumda $x \in A$, $x \notin F$ olduğundan $x \notin K$ dır. $(X, \mathcal{T})$ bir regüler uzay olduğundan

$$x \in U,\ K \subseteq V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Böylece

$$x \in U \cap A,\ F = K \cap A \subseteq V \cap A \text{ ve } U \cap A,\ V \cap A \in \mathcal{T}_A$$

dır. Diğer yandan, $U \cap V = \emptyset$ ve

$$(U \cap A) \cap (V \cap A) \subseteq U \cap V$$

olduğundan

$$(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$$

olur. Böylece, $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayı regülerdir.✔

Not

Teorem 7.57 ve Teorem 7.67 gereğince her metrik uzayın her alt uzayıda bir regüler uzaydır. Böylece $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzaylarının alt uzayları regüler uzaydır.

7.5. $T_{3\frac{1}{2}}$-Uzayları ve Tamamen Regüler (Tychonoff) Uzayları

TANIM 7.68. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun.
a) $(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı her F alt kümesi ve $x \notin F$ özelliğindeki her $x \in X$ noktası için $f(x) = 1$ ve $f(F) = \{0\}$ olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına bir $T_{3\frac{1}{2}}$**-uzayı** denir.
b) $(X,\mathcal{T})$ uzayı hem bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı hem de bir T_1-uzayı ise $(X,\mathcal{T})$ uzayına **tamamen regüler bir uzay** veya **Tychonoff uzayı** denir.

ÖRNEK 7.69. ▷
$(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı fakat tamamen regüler olmadığını gösterelim.

NOT 7.70. Açıkça, $f(x) = 1$ ve $f(F) = \{0\}$ olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonunun olması için gerek ve yeter şart $g(x) = 0$ ve $g(F) = \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $g : X \to [0,1]$ fonksiyonunun olmasıdır. Diğer yandan $h(y) = (b-a)y + a$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığı ile $[a,b]$ aralığı arasında bir homeomorfizm olduğundan $f(x) = 1$ ve $f(F) = \{0\}$ olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonunun olması için gerek ve yeter şart $g(x) = a$ ve $g(F) = \{b\}$ olacak şekilde sürekli bir $g : X \to [a,b]$ fonksiyonunun olmasıdır. Böyle bir sürekli fonksiyonun olması için gerek ve yeter şart $h(F) = \{0\}$ ve $h(x) \neq 0$ olacak şekilde sürekli bir $h : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun olmasıdır.

ÇÖZÜM: $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayında $\emptyset$ ve X kümelerinden başka kapalı kümeler olmadığından bu uzay bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır. Diğer yandan $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayı bir T_1-uzayı olmadığından bir tamamen regüler uzay (Tychonoff uzayı) değildir.

ÖRNEK 7.71. ▷
$(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının tamamen regüler olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: F kümesi kapalı ve $x \notin F$ olsun. $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \notin F \\ 0, & y \in F \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan $f(F) = \{0\}$ ve $f(x) = 1$ dir. Böylece bu uzay bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır. $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı bir T_1-uzayı olduğundan bir tamamen regüler (Tychonoff) uzaydır.

ÖRNEK 7.72. ▷
X kümesinin aşikar ayrışımlarından farklı bir ayrışımı $\mathcal{P}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayının $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı fakat tamamen regüler olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: F kümesi kapalı ve $x \notin F$ olsun. $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\in F\\ 1, & y\notin F\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi, f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. U kümesi $[0,1]$ uzayında açık olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(U)=\begin{cases}X, & 0,1\in U\\ F, & 0\in U \text{ ve } 1\notin U\\ X\setminus F, & 1\in U \text{ ve } 0\notin U\end{cases}$$

dir. Örnek 4.17 gereğince $(X,\mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ uzayında bir kümenin açık olması için gerek ve yeter şart kümenin kapalı olması gerektiğinden $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ dir. O halde, f fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan $f(F)=\{0\}$ ve $f(x)=1$ dir. Böylece bu uzay bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır. Örnek 7.21 gereğince bu uzay bir T_1-uzayı olmadığından tamamen regüler bir uzay değildir.✍

Teorem 7.73. ▶

Tamamen regüler her uzay bir regüler uzayıdır.

İSPAT: $(X,\mathcal{T})$ uzayı tamamen regüler olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayı ve bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

$(X,\mathcal{T})$ uzayının bir T_3-uzayı olduğunu gösterelim. F kümesi kapalı ve $x\notin F$ olmak üzere $x\in X$ olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olduğundan

$$f(F)=\{1\} \quad \text{ve} \quad f(x)=0$$

olacak şekilde sürekli bir $f: X\to[0,1]$ fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$F\subseteq f^{-1}((1/2,1]) \text{ ve } x\in f^{-1}([0,1/2))$$

dir. Üstelik,

$$f^{-1}((1/2,1])\bigcap f^{-1}([0,1/2))=\emptyset$$

ve f fonksiyonu sürekli olduğundan

$$f^{-1}((1/2,1]),\quad f^{-1}([0,1/2))\in\mathcal{T}$$

dur. O halde, $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_3-uzayıdır.✔

Teorem 7.66 gereğince her regüler $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUC 7.74. ▶ Tamamen regüler her uzay bir Hausdorff uzayıdır.

Teorem 7.75. ▶

Her (X,d) metrik uzayı tamamen regüler bir uzayıdır.

İSPAT: Her (X,d) metrik uzayının bir T_1-uzayı olduğunu biliyoruz.

Şimdi, (X,d) metrik uzayının bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olduğunu gösterelim. F kapalı ve $x \notin F$ olsun. Alıştırma 17 gereğince

$$f(y) = d(y,F) = \inf\{d(y,z) : z \in F\}$$

şeklinde tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Üstelik,

$$f(F) = \{0\} \quad \text{ve} \quad f(x) \neq 0$$

dır. O halde (X,d) uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır. Böylece (X,d) metrik uzayı tamamen regüler bir uzaydır.✔

Teorem 7.76. ▷ Her $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayının her alt uzayıda bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

İSPAT: $(X,\mathcal{T})$ bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı ve $(A,\mathcal{T}_A)$ bu uzayın bir alt uzayı olsun. F kümesi $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında kapalı ve $x \in A \setminus F$ olsun. Teorem 3.68 gereğince

$$F = A \cap K$$

olacak şekilde $(X,\mathcal{T})$ uzayında kapalı bir K kümesi vardır. Bu durumda $x \in A$, $x \notin F$ olduğundan $x \notin K$ dır. $(X,\mathcal{T})$ bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olduğundan

$$f(x) = 1 \quad \text{ve} \quad f(K) = \{0\}$$

olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır. Diğer yandan Teorem 6.16 gereğince $f|_A : A \to [0,1]$ fonksiyonu süreklidir. Üstelik,

$$f|_A(F) = \{0\} \quad \text{ve} \quad f|_A(x) = 1$$

dir. O halde $(A,\mathcal{T}_A)$ alt uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.✔

SONUÇ 7.77. ▷ Tamamen regüler her uzayının her alt uzayıda tamamen regülerdir.

Not

Teorem 7.75 gereğince $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzayları tamamen regülerdir. Sonuç 7.77 gereğince $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzaylarının her alt uzayı tamamen regülerdir.

Teorem 7.78. ▷ $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır. **b)** $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

İSPAT: $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfik olduğundan bir $f : X \to Y$ homeomorfizmi vardır.

a)⇒ b). F kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında kapalı ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda $f(x) \notin f(F)$ ve

$f(F)$ kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında kapalıdır. Diğer yandan $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olduğundan

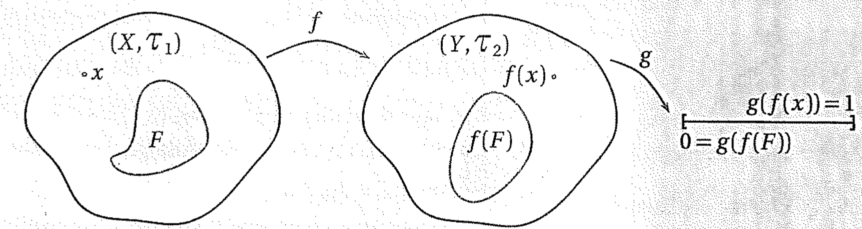
$$g(f(x)) = 1 \quad \text{ve} \quad g(f(F)) = \{0\}$$

olacak şekilde bir $g : Y \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. $g \circ f : X \to [0,1]$ fonksiyonu sürekli ve

$$(g \circ f)(F) = \{0\} \quad \text{ve} \quad (g \circ f)(x) = 1$$

dir. Böylece, $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir $T_{\frac{3}{2}}$-uzayıdır. (Şekil 7.20 e bakınız.)

b)⇒ a). $f^{-1} : Y \to X$ bir homeomorfizm olduğundan (a)⇒b)) gereğince $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olur.✔



Şekil 7.20

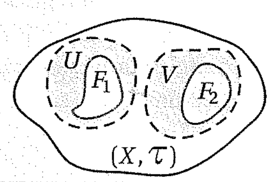
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfik ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir T_1-uzayı olması gerektiğinden Teorem 7.78 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 7.79. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının tamamen regüler olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının tamamen regüler bir uzay olmasıdır.

Not 7.80.

1. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından bir tanesi $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı ve diğeri $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.
2. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri tamamen regüler ve diğeri tamamen regüler değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

7.6. T_4-Uzayları ve Normal Uzaylar



Şekil 7.21

Tanım 7.81. ▷ **T_4-Uzayı ve Normal uzay**

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun.

a) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı her F_1 ve F_2 kümeleri için

$$U \cap V = \emptyset, \; F_1 \subseteq U \text{ ve } F_2 \subseteq V$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri varsa $(X, \mathcal{T})$ uzayına bir **T_4-uzayı** denir. (Şekil 7.21 ye bakınız.)

b) $(X, \mathcal{T})$ uzayı hem bir T_1-uzayı hem de bir T_4-uzayı ise $(X, \mathcal{T})$ uzayına **normal uzay** denir.☜

ÖRNEK 7.82. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının normal olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı iki küme F_1 ve F_2 olsun. $U = F_1$ ve $V = F_2$ alınırsa $U \cap V = \emptyset$, $F_1 \subseteq U$ ve $F_2 \subseteq V$ olur. U ve V kümeleri açık olduğundan $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı bir T_4-uzayıdır. $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı bir T_1-uzayı olduğundan bu uzay normaldir.✍

Not

Bir uzayın T_4-uzayı olması için $F_1 \neq \emptyset$, $F_2 \neq \emptyset$ ve $F_1 \neq X$, $F_2 \neq X$ özelliğindeki kapalı F_1, F_2 kümeleri için $F_1 \subseteq U$ ve $F_2 \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümelerinin olup olmadığına bakılması yeterlidir. Çünkü, örneğin, $F_1 = \emptyset$ ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ise $U = \emptyset$ ve $V = X$ alınırsa $U, V \in \mathcal{T}$ olmak üzere

$$U \cap V = \emptyset,\ F_1 \subseteq U,\ F_2 \subseteq V$$

olur. Benzer şekilde $F_1 = X$ ise $F_2 = \emptyset$ olacağından $U = X$ ve $V = \emptyset$ alınırsa $U, V \in \mathcal{T}$ olmak üzere

$$U \cap V = \emptyset,\ F_1 \subseteq U,\ F_2 \subseteq V$$

olur.

ÖRNEK 7.83. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının T_4-uzayı olduğunu fakat normal olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayda $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğinde $\emptyset$ ve X kümelerinden farklı kapalı F_1 ve F_2 kümeleri olmadığından $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayı bir T_4-uzayıdır. Diğer yandan $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayı T_1-uzayı olmadığından bu uzay normal değildir.✍

ÖRNEK 7.84. ▷
X bir küme ve $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in aşikar ayrışımlarından farklı bir ayrışımı olmak üzere $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayının T_4-uzayı fakat normal olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı iki küme F_1 ve F_2 olsun. Örnek 4.17 gereğince F_1 ve F_2 kümeleri bu uzayda açıktır. Böylece $U = F_1$ ve $V = F_2$ alınırsa $U \cap V = \emptyset$, $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ olur. O halde, $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayı bir T_4-uzayıdır. Diğer yandan $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ uzayı T_1-uzayı olmadığından bu uzay normal değildir.✍

ÖRNEK 7.85. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının normal olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sonlu bir küme ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olacağından Örnek 7.82 gereğince $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı bir T_4-uzayıdır. Bu durumda $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan bu uzay normaldir.

b) X sonlu bir küme olmasın. $(X,\mathcal{T})$ nun bir T_4-uzayı olduğunu kabul edelim. $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri kapalı ve $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ dur. Kabulümüz gereğince $\{x\} \subseteq U$, $\{y\} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda

$$(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$$

olur. Böylece $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $X \setminus U$ ve $X \setminus V$ kümeleri sonlu olduğundan X kümesi sonludur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\{x\} \subseteq U, \{y\} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri yoktur. Böylece $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı bir T_4-uzayı olamaz. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı normal değildir.✍

ÖRNEK 7.86. ▷
X kümesinin en az üç elemanı olmak üzere herhangi bir $(X,\mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının

normal olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X,\mathcal{T}(a))$ nın bir T_4-uzayı olduğunu kabul edelim. $x \neq a,\ y \neq a,\ x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri kapalı ve $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ dur. Kabulümüz gereğince $\{x\} \subseteq U$, $\{y\} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}(a)$ kümeleri vardır. Bu durumda $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ olduğundan $a \in U$ ve $a \in V$ olur. Böylece $U \cap V \neq \emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $(X,\mathcal{T}(a))$ uzayı bir T_4-uzayı değildir. Bu durumda $(X,\mathcal{T}(a))$ uzayı normal değildir.✍

ÖRNEK 7.87. ⊳
$(X,\mathcal{T}_a)$ uzayının T_4-uzayı olduğunu fakat normal olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayda boş olmayan kapalı her küme a noktasını içerdiğinden $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde kapalı F_1 ve F_2 kümeleri yoktur. Böylece bu uzay bir T_4-uzayıdır. $(X,\mathcal{T}_a)$ uzayı T_1-uzayı olmadığından bu uzay normal değildir.✍

ÖRNEK 7.88. ⊳
a) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının normal bir uzay olduğunu gösterelim.
b) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının normal bir uzay olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Önce $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının normal bir uzay olduğunu gösterelim.

i) Örnek 7.37 gereğince bu uzay bir T_2-uzayı böylece bir T_1-uzayıdır.

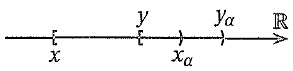
ii) Şimdi $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının bir T_4-uzayı olduğunu gösterelim. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğine sahip kapalı iki küme F_1 ve F_2 olsun. Bu durumda F_1 kapalı olduğundan her $y \in F_2$ için

$$F_1 \cap [y, y_\alpha) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $y_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Benzer şekilde F_2 kapalı olduğundan her $x \in F_1$ için

$$F_2 \cap [x, x_\alpha) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $x_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır $V = \bigcup_{y \in F_2} [y, y_\alpha)$ ve $U = \bigcup_{y \in F_1} [x, x_\alpha)$ olsun. Bu durumda $U, V \in \mathcal{T}$ ve $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ olur. Şimdi $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in U \cap V$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \in [x, x_\alpha)$ olacak şekilde bir $x \in F_1$ ve $z \in [y, y_\alpha)$ olacak şekilde bir $y \in F_2$ vardır. $x < y$ olduğunu kabul edelim. ($y < x$ olması hali benzer şekilde yapılır.) $x_\alpha < y$ ise $[x, x_\alpha) \cap [y, y_\alpha) = \emptyset$ dur. Bu ise $z \in [x, x_\alpha) \cap [y, y_\alpha)$ olması ile çelişir. O halde $y \leq x_\alpha$ dır. (Şekil 7.22 e bakınız.) Bu durumda $y \in [x, x_\alpha)$ ve $y \in [x, x_\alpha) \cap F_2$ olur. Bu ise $[x, x_\alpha) \cap F_2 = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylece, $U \cap V = \emptyset$ dur.



Şekil 7.22

(i) ve (ii) gereğince $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı normal bir uzaydır.

b) Benzer şekilde $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayınında normal bir uzay olduğu gösterilir.✍

Not
Herhangi bir T_4-uzayının bir T_3-uzayı olması gerkmez.

ÖRNEK 7.89. ⊳
$X = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının T_4-

uzayı fakat T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{d\}\}$$

dir. $F_1, F_2 \in \mathcal{K}$ ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ise $F_1 = \emptyset$ veya $F_2 = \emptyset$ dur. Böylece bu uzay bir T_4-uzayıdır.

Diğer yandan $\{d\}$ kümesi kapalı ve $a \notin \{d\}$ dir. $a \in U$, $\{d\} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri olmadığından bu uzay bir T_3-uzayı değildir.

ÖRNEK 7.90.

$\mathcal{T}_1 = \{(x,\infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olsun.

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının T_4-uzayı fakat T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının T_4-uzayı fakat T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Önce $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının T_4-uzayı fakat T_3-uzayı olmadığını gösterelim.

i) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir T_4-uzayı olduğunu gösterelim. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve F_1, F_2 kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayında $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ den farklı iki kapalı küme olsun. Bu durumda

$$(\mathbb{R} \setminus F_1) \cup (\mathbb{R} \setminus F_2) = \mathbb{R}$$

dir. $\mathbb{R} \setminus F_1$ ve $\mathbb{R} \setminus F_2$ kümeleri açık olduklarından

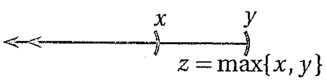
$$\mathbb{R} \setminus F_1 = (-\infty, x) \text{ ve } \mathbb{R} \setminus F_2 = (-\infty, y)$$

olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece, $\max\{x,y\} = z$ olmak üzere

$$(\mathbb{R} \setminus F_1) \cup (\mathbb{R} \setminus F_2) = (-\infty, z)$$

dir. (Şekil 7.23 ye bakınız.) Bu ise

$$(\mathbb{R} \setminus F_1) \cup (\mathbb{R} \setminus F_2) = \mathbb{R}$$



Şekil 7.23

olması ile çelişir. O halde $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ dur. Bu durumda $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğinde $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ den farklı kapalı F_1, F_2 kümeleri olmadığından $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_4-uzayıdır.

ii) Şimdi, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim. F_1 kümesi $\emptyset$ kümeden farklı kapalı bir küme ve $x \notin F_1$ olsun. $x \in U$ ve $F_1 \subseteq V$ ve $U, V \in \mathcal{T}_2$ olsun. U ve V den biri $\mathbb{R}$ kümesi ise $U \cap V \neq \emptyset$ olur. O halde $U \neq \mathbb{R}$ ve $V \neq \mathbb{R}$ dir. Bu durumda $U = (-\infty, a)$ ve $V = (-\infty, b)$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. $c = \min\{a,b\}$ olmak üzere $U \cap V = (-\infty, c)$ dir. O halde $U \cap V \neq \emptyset$ dur. Bu durumda $x \in U$, $F_1 \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_2$ kümeleri yoktur. Böylece $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_3-uzayı değildir.

b) Benzer şekilde $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir T_4-uzayı olduğu ve bir T_3-uzayı olmadığı gösterilebilir.

Teorem 7.91.

Normal her $(X,\mathcal{T})$ uzayı regülerdir.

İSPAT: F kapalı bir küme ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan $\{x\}$ kümesi kapalıdır. $\{x\} \cap F = \emptyset$ ve $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayı olduğundan $\{x\} \subseteq U$, $F \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $x \in U$ olacağından $(X,\mathcal{T})$ uzayı regülerdir.✓

Teorem 7.92.

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayıdır.

b) Boş olmayan kapalı her F kümesi ve $F \subseteq V$ özelliğindeki her $V \in \mathcal{T}$ için

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır.

c) Kapalı her F kümesi ve $F \subseteq V$ özelliğindeki her $V \in \mathcal{T}$ için

$$F \subseteq \overset{\circ}{W} \subseteq \overline{W} \subseteq V$$

olacak şekilde bir $W \subseteq X$ kümesi vardır.

İSPAT:

a)$\Rightarrow$ b). F boş olmayan kapalı bir küme olmak üzere $F \subseteq V$ ve $V \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda F ve $X \setminus V$ kümeleri kapalıdır. Üstelik, $F \subseteq V$ olduğundan $F \cap (X \setminus V) = \emptyset$ dur. $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayı olduğundan

$$F \subseteq U,\ X \setminus V \subseteq W \text{ ve } U \cap W = \emptyset$$

olacak şekilde $U, W \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $\overline{U} \cap W = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $x \in \overline{U} \cap W$ olsun. Bu durumda $x \in \overline{U}$ ve $x \in W$ olur. $x \in \overline{U}$ ve $x \in W \in \mathcal{T}$ olduğundan $U \cap W \neq \emptyset$ dur. Bu ise $U \cap W = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $\overline{U} \cap W = \emptyset$ olur. Böylece $\overline{U} \subseteq X \setminus W$ olduğundan

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus W \subseteq V$$

olur. Yani

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ vardır.

b)$\Rightarrow$ c). (b) de $U = W$ alınırsa U açık olduğundan $\overset{\circ}{W} = \overset{\circ}{U} = U$ olur. Böylece istenilen elde edilir.

c)$\Rightarrow$ a). F_1, F_2 kapalı kümeler ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda $V = X \setminus F_2$ kümesi açık ve $F_1 \subseteq X \setminus F_2$ dir. (c) gereğince

$$F_1 \subseteq \overset{\circ}{W} \subseteq \overline{W} \subseteq V = X \setminus F_2$$

olacak şekilde bir W kümesi vardır. Bu durumda $F_2 \subseteq X\setminus\overline{W}$ olur. Üstelik $\overset{\circ}{W}, X\setminus\overline{W} \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan $\overset{\circ}{W} \bigcap (X\setminus\overline{W}) = \emptyset$ dur. Bu durumda

$$\overset{\circ}{W},\ X\setminus\overline{W} \in \mathcal{T},\ \overset{\circ}{W} \bigcap (X\setminus\overline{W}) = \emptyset,\ F_1 \subseteq \overset{\circ}{W} \text{ ve } F_2 \subseteq X\setminus\overline{W}$$

olur. Bu ise $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayı demektir.✓

Teorem 7.93. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir T_4-uzayı olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı her alt uzayıda bir T_4-uzayıdır.

İSPAT: $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı $(X,\mathcal{T})$ uzayın kapalı bir alt uzayı olsun. F_1, F_2 kümeleri $(A,\mathcal{T}_A)$ alt uzayında kapalı ve $F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$ olsun. Sonuç 3.70 gereğince F_1 ve F_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında kapalıdır. Böylece, $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayı olduğundan $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ ve $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $F_1 \subseteq A \bigcap U_1$, $F_2 \subseteq A \bigcap U_2$ olur. Diğer yandan Tanım 3.24 gereğince $A \bigcap U_1$ ve $A \bigcap U_2$ kümeleri $(A,\mathcal{T}_A)$ alt uzayında açıktır. Üstelik, $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$ olduğundan

$$(A \bigcap U_1) \bigcap (A \bigcap U_2) = \emptyset$$

dur. O halde $(A,\mathcal{T}_A)$ alt uzayı bir T_4-uzayıdır.✓

SONUÇ 7.94. ▷ Normal her uzayın kapalı her alt uzayı normaldir.

Teorem 7.95. ▷ $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ fonksiyonu kapalı, sürekli ve örten olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı normal ise $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayıda normal bir uzaydır.

İSPAT: $(X,\mathcal{T}_1)$ bir normal uzay olduğundan bir T_1-uzayı ve bir T_4-uzayıdır.

Teorem 7.27 gereğince $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı bir T_1-uzayı olur. Şimdi, $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının bir T_4-uzayı olduğunu gösterelim. F_1, F_2 kümeleri $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında kapalı ve $F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda f sürekli olduğundan Teorem 6.15 gereğince $f^{-1}(F_1)$ ve $f^{-1}(F_2)$ kümeleri $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Üstelik,

$$f^{-1}(F_1) \bigcap f^{-1}(F_2) = \emptyset$$

dur. Böylece $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_4-uzayı olduğundan

$$f^{-1}(F_1) \subseteq U,\ f^{-1}(F_2) \subseteq V \text{ ve } U \bigcap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}_1$ kümeleri vardır. f kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(X\setminus U)$ ve $f(X\setminus V)$ kümeleri $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında kapalıdır. Böylece $U_1 = Y\setminus f(X\setminus U)$ ve $V_1 = Y\setminus f(X\setminus V)$ kümeleri $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında açıktır. Üstelik, $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq V_1$ dir. Şimdi, $U_1 \bigcap V_1 = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $y \in U_1 \bigcap V_1$ olsun. Bu durumda $y \in Y\setminus f(X\setminus U)$ ve $y \in Y\setminus f(X\setminus V)$ dir. Böylece, $y \notin f(X\setminus U)$ ve $y \notin f(X\setminus V)$ dir. Diğer yandan $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Bu durumda $x \notin X\setminus U$ ve $x \notin X\setminus V$ dir. Yani $x \in U$ ve $x \in V$ dir. Bu ise $U \bigcap V = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $U_1 \bigcap V_1 = \emptyset$ dur. Böylece, $(Y,\mathcal{T}_2)$

uzayı bir T_4-uzayıdır.✔

Not

1. $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri T_4-uzayı ve diğeri T_4-uzayı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.
2. $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri normal ve diğeri normal değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

SONUÇ 7.96. ▷ $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının bir normal uzay olması için gerek ve yeter şart $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının bir normal uzay olmasıdır.

Teorem 7.97. ▷

Her metrik uzay bir normal uzaydır.

İSPAT: Her (X,d) metrik uzayının T_1-uzayı olduğunu biliyoruz. Şimdi her (X,d) metrik uzayının T_4-uzayı olduğunu gösterelim. F_1, F_2 kümeleri (X,d) uzayında kapalı ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. Her bir $x \in F_1$ için $x \notin F_2$ olacağından Sonuç 5.27 gereğince $B(x,\delta_x) \cap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde bir $\delta_x > 0$ sayısı vardır. Benzer şekilde her bir $y \in F_2$ için $y \notin F_1$ olacağından Sonuç 5.27 gereğince $B(y,\varepsilon_y) \cap F_1 = \emptyset$ olacak şekilde bir $\varepsilon_y > 0$ sayısı vardır.

$$U = \bigcup_{x\in F_1} B\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right) \text{ ve } V = \bigcup_{y\in F_2} B\left(y, \frac{\varepsilon_y}{3}\right)$$

olsun. Bu durumda $F_1 \subseteq U$ ve $F_2 \subseteq V$ dir. Üstelik, açık kümelerin herhangi bir birleşimi açık olduğundan U ve V kümeleri (X,d) uzayında açıktır. Şimdi $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in U \cap V$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \in U$ olduğundan $z \in B\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right)$ olacak şekilde bir $\delta_x > 0$ sayısı ve bir $x \in F_1$ noktası vardır. Benzer şekilde $z \in V$ olduğundan $z \in B\left(y, \frac{\varepsilon_y}{3}\right)$ olacak şekilde bir $\varepsilon_y > 0$ sayısı ve bir $y \in F_2$ noktası vardır. Bu durumda $d(x,z) < \frac{\delta_x}{3}$ ve $d(y,z) < \frac{\varepsilon_y}{3}$ dür. $\max\{\delta_x, \varepsilon_y\} = \delta_x$ veya $\max\{\delta_x, \varepsilon_y\} = \varepsilon_y$ dir. $\max\{\delta_x, \varepsilon_y\} = \delta_x$ olduğunu kabul edelim. ($\max\{\delta_x, \varepsilon_y\} = \delta_y$ olması hali benzer şekilde yapılır.) Bu durumda

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < \frac{\delta_x}{3} + \frac{\varepsilon_y}{3} < \delta_x$$

olacağından $y \in B(x,\delta_x)$ olur. O halde $y \in B(x,\delta_x) \cap F_2$ dir. Bu ise $x \in F_1$ için

$$B(x,\delta_x) \cap F_2 = \emptyset$$

olması ile çelişir. Böylece $U \cap V = \emptyset$ dur. Dolayısıyla (X,d) uzayı bir T_4-uzayıdır.✔

Teorem 7.97 gereğince her metrik uzay bir T_4-uzayı ve bir normal uzay olduğundan $n \ge 1$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ standart uzayları birer T_4-uzayı ve normal uzaylardır.

YARDIMCI TEOREM 7.98. ▷
$D = \left\{ r = \frac{m}{2^n} \mid m \le 2^n, n, m \ge 0, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi $[0,1]$ uzayında yoğundur.

İSPAT: $a \in [0,1]$ ve $\delta > 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

olduğundan $0 < \frac{1}{q} < \delta$ olacak şekilde bir $\frac{1}{q} \in D$ vardır. Diğer yandan

$$[0,1] = \left[0, \frac{1}{q}\right] \bigcup \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right] \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{q-1}{q}, 1\right]$$

olduğundan

$$a \in \left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right]$$

olacak şekilde bir

$$\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right]$$

aralığı vardır. Böylece

$$\frac{m}{q} \leq a \leq \frac{m+1}{q}$$

olur. $\frac{1}{q} < \delta$ olduğundan

$$a - \delta < \frac{m}{q} \leq a < a + \delta$$

olur. Bu durumda

$$\frac{m}{q} \in (a-\delta, a+\delta)$$

olur. Yani

$$(a-\delta, a+\delta) \bigcap [0,1] \neq \emptyset$$

dur. Bu her $a \in [0,1]$ ve her $\delta > 0$ için doğru olduğundan Sonuç **??** gereğince D kümesi $[0,1]$ uzayında yoğundur.✔

Teorem 7.99 ▷ Urysohn Lemması

$(X, \mathcal{T})$ bir T_4-uzayı ve $F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$ özelliğinde kapalı iki küme F_1 ve F_2 olsun. Bu durumda $f(F_1) = \{0\}$ ve $f(F_2) = \{1\}$ özelliğinde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

İSPAT: $F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$ olduğundan $F_1 \subseteq X \setminus F_2$ dir. F_1 kapalı ve $X \setminus F_2$ kümesi açık olduğundan Teorem 7.92 gereğince

$$F_1 \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq X \setminus F_2$$

olacak şekilde bir $U_{1/2}$ açık kümesi vardır. Benzer şekilde F_1 kapalı ve $U_{1/2}$ kümesi açık olduğundan Teorem 7.92 gereğince

$$F_1 \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq X \setminus F_2$$

olacak şekilde $U_{1/4}$ ve $U_{3/4}$ açık kümeleri vardır. Bu şekilde devam edilirse her bir $t \in D$ için $t_1, t_2 \in D$ ve $t_1 < t_2$ için $\overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2}$ özelliğine sahip U_t açık kümelerinin kolleksiyonu elde edilir.

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \mid x \in U_t\}, & x \notin F_2 \\ 1, & x \in F_2 \end{cases}$$

şeklinde bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu tanımlayalım. Her $t \in D$ için $F_1 \subseteq U_t$ olduğundan $f(F_1) = \{0\}$ ve f nin tanımı gereğince $f(F_2) = \{1\}$ dir.

Şimdi, f nin sürekli olduğunu gösterelim.

$$\mathscr{S} = \{[0,a), [b,1) \mid a, b \in (0,1)\}$$

kolleksiyonu $[0,1]$ alt uzayının bir alt tabanı olduğundan f nin sürekli olduğunu göstermek için $U \in \mathscr{S}$ için $f^{-1}(U)$ nun açık olduğunun gösterilmesi Teorem 6.20 gereğince yeterlidir. Önce,

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{t<a} U_t$$

olduğunu gösterelim. $x \in f^{-1}([0,a))$ olsun. Bu durumda $f(x) \in [0,a)$ dır. Yani $0 \leq f(x) < a$ dır. Yardımcı Teorem 7.98 gereğince D kümesi $[0,1]$ uzayında yoğun olduğundan $f(x) < t_x < a$ olacak şekilde bir $t_x \in D$ vardır. Diğer bir deyişle

$$f(x) = \inf\{t \mid x \in U_t\} < t_x < a$$

dır. O halde $x \in U_t$ ve $t_x < a$ dır. Böylece $x \in \bigcup_{t<a} U_t$ dir. Dolayısıyla

$$f^{-1}([0,a)) \subseteq \bigcup_{t<a} U_t \tag{7.4}$$

dir. $y \in \bigcup_{t<a} U_t$ olsun. Bu durumda $t_y < a$, $y \in U_{t_y}$ olacak şekilde bir $t_y \in D$ vardır. Böylece

$$f(y) = \inf\{t \mid y \in U_t\} \leq t_y < a$$

dır. O halde $y \in f^{-1}([0,a))$ dır. Böylece

$$\bigcup_{t<a} U_t \subseteq f^{-1}([0,a)) \tag{7.5}$$

olur. O halde (7.4) ve (7.5) gereğince

$$\bigcup_{t<a} U_t = f^{-1}([0,a))$$

olur. $\bigcup_{t<a} U_t$ kümesi açık olduğundan $f^{-1}([0,a))$ kümeside açıktır.

Şimdi

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \backslash \overline{U_t} \mid t > b\}$$

olduğunu gösterelim. $x \in f^{-1}((b,1])$ olsun. Bu durumda $f(x) \in (b,1]$ dır. Yani $b < f(x) \leq 1$ dir. Yardımcı Teorem 7.98 gereğince D kümesi $[0,1]$ uzayında yoğun olduğundan

$$b < t_1 < t_2 < f(x)$$

olacak şekilde $t_1, t_2 \in D$ elemanları vardır. Diğer bir deyişle

$$f(x) = \inf\{t \mid x \in U_t\} > t_2$$

ve böylece $x \notin U_{t_2}$ dir. $t_1 < t_2$ olduğundan

$$\overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2}$$

olur. O halde $x \notin \overline{U_{t_1}}$ ve böylece $x \in X \backslash \overline{U_{t_1}}$ ve $t_1 > b$ dir. Dolayısıyla

$$x \in \bigcup\{X \backslash \overline{U_t} \mid t > b\}$$

dir. O halde

$$f^{-1}((b,1]) \subseteq \bigcup\{X\setminus\overline{U_t} \mid t > b\} \tag{7.6}$$

olur. $y \in \bigcup\{X\setminus\overline{U_t} \mid t > b\}$ olsun. Bu durumda $y \in X\setminus\overline{U_{t_y}}$ ve $t_y > b$ olacak şekilde bir $t_y \in D$ vardır. Bu durumda $y \notin \overline{U_{t_y}}$ dir. $t < t_y$ olduğundan $U_t \subseteq U_{t_y} \subseteq \overline{U_{t_y}}$ olur. Buradan $t < t_y$ özelliğindeki her $t_y \in D$ için $y \notin U_t$ elde edilir. O halde

$$f(y) = \inf\{t \mid y \in U_t\} \geq t_y > b$$

olacağından $y \in f^{-1}((b,1])$ olur. Yani

$$\bigcup\{X\setminus\overline{U_t} \mid t > b\} \subseteq f^{-1}((b,1]) \tag{7.7}$$

dir. O halde (7.6) ve (7.7) gereğince

$$\bigcup\{X\setminus\overline{U_t} \mid t > b\} = f^{-1}((b,1])$$

elde edilir. $\bigcup\{X\setminus\overline{U_t} \mid t > b\}$ kümesi açık olduğundan $f^{-1}((b,1])$ kümeside açıktır. Böylece f fonksiyonu süreklidir.✓

SONUÇ 7.100. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayıdır.

b) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı F_1 ve F_2 kümeleri için

$$f(F_1) = \{0\} \quad \text{ve} \quad f(F_2) = \{1\}$$

olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem (Urysohn Lemması) 7.99 da ispatlandı.

b)⇒ a). F_1, F_2 kümeleri kapalı ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda (b) gereğince $f(F_1) = \{0\}$ ve $f(F_2) = \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

$$U = f^{-1}\left(\left[0,\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) < \tfrac{1}{2}\right\}$$

ve

$$V = f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},1\right]\right) = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) > \tfrac{1}{2}\right\}$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu sürekli olduğundan $U, V \in \mathcal{T}$ dur. Üstelik,

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{ve} \quad F_1 \subseteq U, \quad F_2 \subseteq V$$

dir. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayıdır.✓

Sonuç 7.100 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 7.101. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı normal bir uzaydır.

b) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı F_1 ve F_2 kümeleri için

$$f(F_1) = \{0\} \quad \text{ve} \quad f(F_2) = \{1\}$$

olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

SONUÇ 7.102. ▶ Normal her uzay tamamen regülerdir.

NOT 7.103. Regüler bir uzayın normal olması gerekmez. (Örnek 10.44 ve Örnek 10.45 e bakınız.) Teorem 7.91 gereğince normal her uzay regülerdir. Bu sonucu şu şekilde de söyleyebiliriz. Sonuç 7.101 gereğince normal her uzay tamamen regüler ve Teorem 7.73 gereğince tamamen regüler her uzay regüler olduğundan normal her uzay regülerdir.

Teorem 7.92 gereğince aşağıdaki Teoremi yazabiliriz.

Teorem 7.104. ▶

$(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı normal bir uzaydır.

b) Boş olmayan kapalı her F kümesi ve $F \subseteq V$ özelliğindeki her $V \in \mathcal{T}$ için

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ vardır.

c) Kapalı her F kümesi ve $F \subseteq V$ özelliğindeki her $V \in \mathcal{T}$ için

$$F \subseteq \overset{\circ}{W} \subseteq \overline{W} \subseteq V$$

olacak şekilde bir $W \subseteq X$ kümesi vardır.

Teorem 7.30 gereğince bir T_1-uzayının her alt uzayı bir T_1-uzayı ve Teorem 7.93 gereğince bir T_4-uzayının kapalı her alt uzayı bir T_4-uzayı olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 7.105. ▶ $(X, \mathcal{T})$ bir normal uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı her alt uzayıda normal bir uzaydır.

7.7. Alıştırmalar

1. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde iki topoloji ve $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayları birer T_0-uzayı olduğu halde $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_0-uzayı olmayabileceğini bir örnek vererek gösteriniz.

2. $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı ve $A \subseteq X$ sonlu olsun. A nın hiç bir limit noktasının olmadığını gösteriniz.

3. Sürekli bir fonksiyon altında bir T_1-uzayının görüntüsünün bir T_1-uzayı olması gerekmediğini bir örnek vererek gösteriniz.

4. $(X, \mathcal{T}_1)$ bir topolojik uzay ve $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ olması gerektiğini gösteriniz.

5. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olsun. X kümesi sonlu ise $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olduğunu gösteriniz.

6. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı ve $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ olsun. Her i için $x_i \in U(x_i)$ ve $i \neq j$ için $U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset$ olacak şekilde $U(x_i) \in \mathcal{T}$ kümeleri olduğunu gösteriniz.

7. $X = \{a, b, c\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ olsun. $(X, \mathcal{T})$ nun bir T_3-uzayı fakat bir T_1-uzayı olmadığını gösteriniz.

8. $X = \{a, b, c\}$ ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ olsun. $(X, \mathcal{T})$ nun bir T_4-uzayı fakat bir T_3-uzayı ve T_1-uzayı olmadığını gösteriniz.

9. $(X, \mathcal{T})$ bir regüler uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U, y \in V$ ve $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümelerinin olduğunu gösteriniz.

10. $(X, \mathcal{T})$ normal bir uzay olsun. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı her F_1 ve F_2 kümeleri için $F_1 \subseteq U_1, F_2 \subseteq V_1$ ve $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$ olacak şekilde $U_1, V_1 \in \mathcal{T}$ kümelerinin olduğunu gösteriniz.

11.

a) $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının T_0-uzayı ve T_1-uzayı olduğunu gösteriniz.

b) X sayılamayan bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının T_3-uzayı, $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı ve T_4-uzayı olmadığını gösteriniz.

7.8. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

$X = \{a, b, c\}$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayları birer T_0-uzaylarıdır.

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ dir. $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_0-uzayı olmadığını gösterelim. $b \neq c$ ve b yi içeren açık kümeler X, $\{b, c\}$ ve c noktasını içeren açık kümeler X, $\{b, c\}$ dir. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayında b noktasını içerip c yi içermeyen veya c noktasını içerip b yi içermeyen hiç bir açık küme olmadığından $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir T_0-uzayı değildir.✔

ÇÖZÜM 2

$x \in X$ noktasının A kümesinin bir limit noktası olduğunu kabul edelim. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

dur. Yani U açık kümesi A nın x den farklı bir noktasını içerir. Teorem 11.54 gereğince U, A nın sonsuz sayıda noktasını içermek zorundadır. Bu ise A sonlu olduğundan mümkün değildir. O halde A nın hiç bir limit noktası yoktur.✔

ÇÖZÜM 3

$(X, \mathcal{T})$ bir kaba uzay olmak üzere $\mathrm{id} : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$ birim fonksiyonu sürekli ve örtendir. Diğeryandan Örnek 7.15 gereğince $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayı bir T_1-uzayı olmasına rağmen Örnek 7.25 gereğince $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayı bir T_1-uzayı değildir.✔

ÇÖZÜM 4

$\Rightarrow$). $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bir T_1-uzayı olduğunu kabul edelim ve $U \neq \emptyset, U \neq X$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $X \setminus U$ sonludur. O halde $X \setminus U$ kümesi Sonuç 7.23 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Böylece $U \in \mathcal{T}_1$ ve dolayısıyla $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ olur.

$\Leftarrow$). $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ olduğunu kabul edelim ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalıdır. O halde $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}$ dur. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ olduğundan $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_1$ dir. O halde $\{x\}$ kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ de kapalıdır. x keyfi olduğundan her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ de kapalıdır. Teorem 7.22 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bir T_1-uzayıdır.✔

ÇÖZÜM 5

$(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan bir T_1-uzayıdır. $x \in X$ olsun. $X \setminus \{x\}$ sonlu olduğundan Sonuç 7.23 gereğince kapalıdır. Böylece $\{x\}$ açıktır. O halde Örnek 3.12 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir.✔

ÇÖZÜM 6

$(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan $x_i \neq x_j$ için

$$x_i \in U_{i_j}, x_j \in U_{j_i}$$

ve

$$U_{i_j} \cap U_{j_i} = \emptyset$$

olacak şekilde

$$U_{i_j}, U_{j_i} \in \mathcal{T}$$

kümeleri vardır.

$$U(x_i) = \bigcap_{j \neq i} U_{i_j}$$

olsun. Bu durumda $x_i \in U(x_i)$ ve $i \neq j$ için

$$U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset$$

dur. Üstelik, sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi açık olduğundan $U(x_i)$ kümeleri açıktır.✔

ÇÖZÜM 7

$(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$$

dır. Önce $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_3-uzayı olduğunu gösterelim.

$F_1 = \{b, c\}$ olsun. Bu durumda $x \notin F_1$ ise $x = a$ dır. $V = F_1$ ve $U = \{a\}$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ dur. Üstelik $F_1 \subseteq V$ ve $a \in U$ dur.

$F_2 = \{a\}$ olsun. Bu durumda $x \notin F_2$ ise $x = b$ veya $x = c$ dir. $b \notin F_2$ için $V = \{a\}$ ve $U = \{b, c\}$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ dur. Üstelik $F_2 \subseteq V$ ve $b \in U$ dur. $c \notin F_2$ için $V = \{a\}$ ve $U = \{b, c\}$ olsun. Bu durumda $U \cap V = \emptyset$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ dur. Üstelik $F_2 \subseteq V$ ve $c \in U$ dur. O halde bu uzay bir T_3-uzayıdır.

Şimdi $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir T_1-uzayı olmadığını gösterelim.

$\{b\}$ kümesi kapalı olmadığından $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayı değildir.✔

ÇÖZÜM 8

$(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}=\{X,\emptyset,\{b,c\},\{c\}\}$$

dır. Önce $(X,\mathcal{T})$ nun bir T_4-uzayı olduğunu gösterelim. $F_1\cap F_2=\emptyset$ olacak şekilde $\emptyset$ ve X den farklı kapalı F_1 ve F_2 kümeleri olmadığından bu uzay bir T_4- uzayıdır.

Şimdi $(X,\mathcal{T})$ uzayının bir T_3-uzayı olmadığını gösterelim. $F_1=\{b,c\}$ kümesi kapalı ve $a\notin F_1$ dir. $F_1\subseteq U$ özelliğindeki tek açık küme X dir. $a\in X$ olduğundan $U\cap V=\emptyset$, $F_1\subseteq V$ ve $a\in U$ olacak şekilde $U,V\in\mathcal{T}$ kümeleri yoktur. O halde bu uzay bir T_3-uzayı değildir.

$(X,\mathcal{T})$ uzayının bir T_1-uzayı olmadığını gösterelim. $\{b\}$ kümesi kapalı olmadığından $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayı değildir.✔

ÇÖZÜM 9

$(X,\mathcal{T})$ regüler olduğundan bir T_1- uzayı ve bir T_3 -uzayıdır. Bu durumda Teorem 7.22 gereğince $\{y\}$ kümesi kapalıdır. Böylece $x\notin\{y\}$ olduğundan Sonuç 7.62 gereğince $x\in U$, $y\in V$ ve $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$ olacak şekilde $U,V\in\mathcal{T}$ kümeleri vardır.✔

ÇÖZÜM 10

$F_1\cap F_2=\emptyset$ ve F_1,F_2 kümeleri kapalı olsun. $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_4-uzayı olduğundan

$$F_1\subseteq U,F_2\subseteq V$$

ve

$$U\cap V=\emptyset$$

olacak şekilde $U,V\in\mathcal{T}$ kümeleri vardır. Teorem 7.92 gereğince

$$F_1\subseteq U_1\subseteq\overline{U_1}\subseteq U,F_2\subseteq V_1\subseteq\overline{V_1}\subseteq V$$

olacak şekilde $U_1,V_1\in\mathcal{T}$ kümeleri vardır. Böylece $\overline{U_1}\cap\overline{V_1}=\emptyset$ dur.✔

ÇÖZÜM 11

a) $x\neq y$ ve $x,y\in X$ olsun. Bu durumda $X\setminus\{x\}$ ve $X\setminus\{y\}$ kümelerinin tümleyenleri sayılabilir olduğundan bu kümeler açıktır. $x\in X\setminus\{y\}$ ve $y\notin X\setminus\{y\}$ olduğundan bu uzay bir T_0-uzayıdır. $x\in X\setminus\{y\},y\notin X\setminus\{y\}$ ve $y\in X\setminus\{x\},x\notin X\setminus\{x\}$ olduğundan bu uzay bir T_1-uzayıdır.

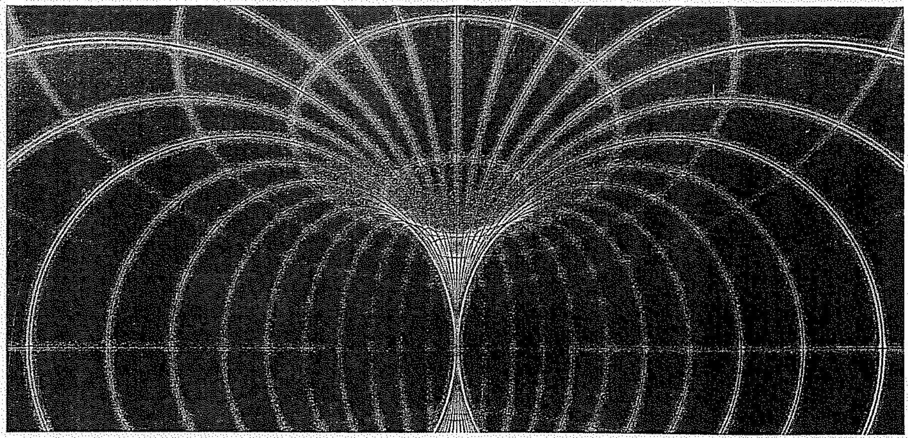
b) U ve V boş kümeden farklı iki açık küme ve $U\cap V=\emptyset$ olsun. Bu durumda

$$(X\setminus U)\cup(X\setminus V)=X$$

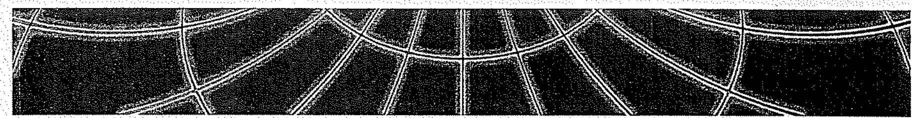
dir. Diğer yandan, $X\setminus U$ ve $X\setminus V$ kümeleri sayılabilir olduğundan X sayılabilirdir. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$$U\cap V\neq\emptyset$$

dur. Yani bu uzayda boş olmayan ayrık açık kümeler yoktur. Böylece bu uzay T_3-uzayı ve T_4-uzayı olamaz. Böylece her $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı bir T_3-uzayı olduğundan bu uzay bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıda olamaz.✔



8. Sayılabilir ve Ayrılabilir Uzaylar



Bu bölümde topolojik özelliklerden biri olan birinci sayılabilir uzay, ikinci sayılabilir uzay ve ayrılabilir uzay kavramları verilerek bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar incelenecektir.

8.1. Birinci Sayılabilir Uzaylar

TANIM 8.1. ▷ **Birinci sayılabilir uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına birinci sayılabilir uzay denir.

NOT 8.2. $(X,\mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir uzay olsun.

1. $\mathcal{N}_x = \{M_n | n \in I\}$ kolleksiyonu x noktasının sayılabilir bir yerel tabanı olsun. Bu durumda I sonlu veya I sonsuzdur. I sonlu ve $I = \{1,2,\cdots,m\}$ ise $n \geq m$ için $M_n = M_m$ olmak üzere $\mathcal{N}_x = \{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ yazılabilir. I sonsuzsa $I = \mathbb{N}$ alınabilir. O halde x noktasının sayılabilir yerel tabanı olarak

$$\mathcal{N}_x = \{M_n | n \in \mathbb{N}\}$$

alınabilir.

2. $\mathcal{M}_x = \{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı ise $n \in \mathbb{N}$ için $N_n = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ olmak üzere

$$\mathcal{N}_x = \{N_n | n \in \mathbb{N}\}$$

kolleksiyonu da $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanıdır. (Alıştırma 1 e bakınız.) O halde $x \in X$ noktasının sayılabilir bir tabanı olarak her zaman

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \cdots$$

olmak üzere $\{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu alınabilir.

ÖRNEK 8.3. ▷
X sonlu bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: X sayılabilir olduğundan $\mathcal{T}$ sayılabilirdir. $x \in X$ ve $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının herhangi bir yerel tabanı ise $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ olacağından $\mathcal{B}_x$ sayılabilirdir. Böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayı birinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.4. ▷
Her (X, d) metrik uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ olsun. Örnek 4.65 gereğince $\mathcal{B}_x = \{B(x, r) | r > 0,\ r \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır. $\mathcal{B}_x$ sayılabilir olduğundan (X, d) uzayı birinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.5. ▷
A, $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ nin alt kümkesi olsun. A alt uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ nin her alt uzayı bir metrik uzay olduğundan Örnek 8.4 gereğince birinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.6. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ kolleksiyonu x noktasının sayılabilir yerel bir tabanıdır. O halde her $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı birinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.7. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_x = \{X\}$ kolleksiyonu x in sayılabilir yerel bir tabanıdır. O halde her $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayı birinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.8. ▷
$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ tek-çift uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $n \in \mathbb{N}$ olsun. n çift ise $\mathcal{B}_n = \{\{n-1, n\}\}$ kolleksiyonu n nin sayılabilir yerel tabanıdır. n tek ise $\mathcal{B}_n = \{\{n, n+1\}\}$ kolleksiyonu n nin sayılabilir yerel tabanıdır. O halde bu uzay birinci sayılabilirdir.

ÖRNEK 8.9. ▷
$(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ ayrışım uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ ise $\mathcal{P}$ kolleksiyonu X in bir ayrışımı olduğundan $x \in U$ olacak şekilde tek bir $U \in \mathcal{P}$ kümesi vardır. Üstelik, $\mathcal{P}$, Örnek 4.17 gereğince $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ nun bir tabanıdır. Bu durumda $\mathscr{B}_x = \{U\}$ kolleksiyonu Örnek 4.67 gereğince x noktasının bir yerel tabanıdır. $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu sayılabilir olduğundan $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ uzayı birinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.10. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının birinci sayılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir olsun. Bu durumda $x \in X$ için

$$\mathscr{B}_x = \{X \setminus A | A \text{ sonlu ve } x \notin A\}$$

kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır. (Alıştırma 36 e bakınız.) Sayılabilir bir kümenin sonlu alt kümelerinin kolleksiyonu sayılabilir olduğundan (Teorem 1.15 e bakınız) $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu sayılabilirdir. Böylece, $(X, \mathcal{T})$ birinci sayılabilirdir.

b) X sayılamaz olsun. $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının birinci sayılabilir olduğunu varsayalım. Bu durumda her x noktasının sayılabilir bir $\mathscr{B}_x$ yerel tabanı vardır. Böylece X bir T_1-uzayı olduğundan Teorem 7.31 gereğince

$$\{x\} = \bigcap_{B_x \in \mathscr{B}_x} B_x$$

olur. Bu durumda

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{B_x \in \mathscr{B}_x} (X \setminus B_x)$$

dir. Her bir $X \setminus B_x$ kümesi sonlu tümleyenler topolojisinin tanımı gereği sonludur. Sayılabilir sayıdaki sayılabilir kümelerin birleşimi sayılabilir olduğundan (Sonuç 1.9 ye bakınız) $X \setminus \{x\}$ kümesi sayılabilirdir. (Sonuç 1.9 ye bakınız.) Bu ise X in sayılamaz olması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı birinci sayılabilir değildir.

(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının birinci sayılabilir olması için gerek ve yeter şart X in sayılabilir olmasıdır.✍

ÖRNEK 8.11. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ olsun. Örnek 4.64 gereğince $\mathscr{B}_x = \{\{a, x\}\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel tabanıdır. $\mathscr{B}_x$ sayılabilir olduğundan $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x nin sayılabilir bir yerel tabanıdır. Böylece $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı birinci sayılabilirdir.✍

Teorem 8.12. ▷
Birinci sayılabilir her uzayın her alt uzayıda birinci sayılabilirdir.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ uzayı birinci sayılabilir ve $(A, \mathcal{T}_A)$ bu uzayın bir alt uzayı olsun. $x \in A$ olsun. $\mathscr{B}_x = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu x noktasının $(X, \mathcal{T})$ uzayındaki sayılabilir yerel bir tabanı olsun. Sonuç 4.69 gereğince

$$\mathscr{B}_{A_x} = \{A \cap B_n | B_n \in \mathscr{B}_x\}$$

kolleksiyonu x noktasının $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayında sayılabilir bir yerel tabanıdır. Böylece $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı birinci sayılabilirdir.✔

Teorem 8.13. $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ sürekli, açık ve örten bir fonksiyon olsun. $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı birinci sayılabilir ise $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayıda birinci sayılabilirdir.

İSPAT: $y\in Y$ olsun. Bu durumda $f(x)=y$ olacak şekilde bir $x\in X$ vardır.

$$\mathscr{B}_x=\{B_n|n\in\mathbb{N}\}$$

kolleksiyonu x noktasının sayılabilir yerel bir tabanı ve $\mathscr{B}_y=\{f(B_n)|B_n\in\mathscr{B}_x\}$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B}_y$ kolleksiyonu sayılabilirdir. Şimdi, $\mathscr{B}_y$ nin y noktasının yerel bir tabanı olduğunu gösterelim.

YTB-1). Her $n\in\mathbb{N}$ için B_n kümesi açık ve f açık bir fonksiyon olduğundan $f(B_n)$ kümesi $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında açıktır. Yani $\mathscr{B}_y\subseteq\mathcal{T}_2$ dir.

YTB-2). Her $n\in\mathbb{N}$ için $x\in B_n$ olduğundan $y=f(x)\in f(B_n)$ dir.

YTB-3). U kümesi $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında açık ve $y\in U$ olsun. Bu durumda $x\in f^{-1}(U)$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında açıktır. Böylece $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı olduğundan $B_n\subseteq f^{-1}(U)$ olacak şekilde bir $B_n\in\mathscr{B}_x$ kümesi vardır. Bu durumda $y\in f(B_n)\subseteq U$ olur.

Böylece $\mathscr{B}_y$ kolleksiyonu y noktasının sayılabilir bir yerel tabanıdır. O halde $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı birinci sayılabilirdir.✓

Not
$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzaylarından birisi birinci sayılabilir ve diğeri birinci sayılabilir değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

SONUÇ 8.14. ▷ $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının birinci sayılabilir olması için gerek ve yeter şart $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının birinci sayılabilir olmasıdır.

8.2. İkinci Sayılabilir Uzaylar

TANIM 8.15. ▷ **İkinci sayılabilir uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{T}$ nun sayılabilir bir tabanı varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına ikinci sayılabilir uzay denir.

ÖRNEK 8.16. ▷
X sonlu bir küme olmak üzere herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ uzayının ikinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: X sayılabilir olduğundan $\mathcal{T}$ sayılabilir dir. Bu durumda $\mathcal{T}$ nun her tabanıda sayılabilirdir. Böylece $(X,\mathcal{T})$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

ÖRNEK 8.17. ▷
$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^n$ standart uzaylarının ikinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{B}=\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)|x\in\mathbb{Q},\varepsilon\in\mathbb{Q},\ \varepsilon>0\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin sayılabilir bir tabanıdır. O halde $\mathbb{R}$ ikinci sayılabilirdir. Benzer şekilde $n\geq 2$

için

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) | x_i \in \mathbb{Q}, \varepsilon_i \in \mathbb{Q}, \varepsilon_i > 0 \right\}$$

kolleksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topolojinin sayılabilir bir tabanı olduğundan $\mathbb{R}^n$ ikinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.18. ▶
Herhangi bir $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayının ikinci sayılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir olsun. $\mathscr{B} = \{\{x\} | x \in X\}$ kolleksiyonu $\mathscr{P}(X)$ in sayılabilir bir tabanı olduğundan bu uzay ikinci sayılabilirdir.

b) X sayılamayan bir küme ve $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathscr{P}(X)$ in herhangi bir tabanı olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi açık olduğundan $\{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i$ ($i \in I$ için $B_i \in \mathscr{B}$) olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. O halde $\{x\} = B_i$ olacak şekilde bir $B_i \in \mathscr{B}$ vardır. Bu durumda her $x \in X$ için $\{x\} \in \mathscr{B}$ olur. Yani

$$\{\{x\} | x \in X\} \subseteq \mathscr{B}$$

dir. Böylece X sayılamaz olduğundan $\{\{x\} | x \in X\}$ kolleksiyonu da sayılamazdır. Dolayısıyla $\mathscr{B}$ sayılamazdır. O halde $\mathscr{P}(X)$ in sayılabilir bir tabanı yoktur. Böylece bu uzay ikinci sayılabilir değildir.

(a) ve (b) gereğince ayrık bir uzayın ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter şart X in sayılabilir olmasıdır.✍

ÖRNEK 8.19. ▶
$(X, \mathcal{T})$ kaba uzayın ikinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{B} = \{X\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayın sayılabilir bir tabanı olduğundan bu uzay ikinci sayılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.20. ▶
$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathscr{P}})$ tek-çift uzayının ikinci sayılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{P} = \{\{2n-1, 2n\} | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\mathscr{P}}$ nin sayılabilir bir tabanı olduğundan bu uzay ikinci sayılabilirdir.✍

Teorem 8.21. ▶
İkinci sayılabilir her uzay birinci sayılabilirdir.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilir bir uzay ve $\mathscr{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun sayılabilir bir tabanı ve $x \in X$ olsun. Bu durumda Örnek 4.67 gereğince $\mathscr{B}_x = \{B_n \in \mathscr{B} | x \in B_n\}$ kolleksiyonu x in yerel bir tabanıdır. $\mathscr{B}_x$ sayılabilir olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayı birinci sayılabilirdir.✔

ÖRNEK 8.22. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının ikinci sayılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir olsun. $\{X \setminus A | A \text{ sonlu}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun sayılabilir bir tabanıdır. Böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
b) X sayılamaz ise Örnek 8.10 gereğince $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı birinci sayılabilir olmadığından bu uzay Teorem 8.21 gereğince ikinci sayılabilir değildir.

(a) ve (b) gereğince X sayılabilir ise $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ikinci sayılabilir ve X sayılabilir değilse $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ikinci sayılabilir değildir.✍

Teorem 8.23 ▷
İkinci sayılabilir her uzayın her alt uzayıda ikinci sayılabilirdir.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ uzayı ikinci sayılabilir ve $(A, \mathcal{T}_A)$ bu uzayın bir alt uzayı olsun. $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayın sayılabilir bir tabanı olsun. Teorem 4.2 gereğince $\mathcal{B}_A = \{A \cap B_n | B_n \in \mathcal{B}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_A$ nın bir tabanıdır. $\mathcal{B}_A$ sayılabilir olduğundan $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayı ikinci sayılabilirdir.✔

ÖRNEK 8.24. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayının ikinci sayılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir bir küme olsun. Alıştırma 25 gereğince $\mathcal{B} = \{\{a, x\} | x \in X\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}(a)$ nın bir tabanıdır. $\mathcal{B}$ sayılabilir olduğundan bu uzay ikinci sayılabilirdir.
b) X sayılamaz bir küme olsun. Bu durmda $X \setminus \{a\}$ kümeside sayılamazdır.
Şimdi $X \setminus \{a\}$ alt uzayının ayrık uzay olduğunu gösterelim. $y \in X \setminus \{a\}$ olsun. Bu durumda $\{a, y\} \in \mathcal{T}(a)$ ve $\{y\} = (X \setminus \{a\}) \cap \{a, y\}$ olduğundan $\{y\}$ kümesi $X \setminus \{a\}$ alt uzayında açıktır. Teorem 3.12 gereğince $X \setminus \{a\}$ alt uzayı ayrıktır. $X \setminus \{x\}$ sayılamaz olduğundan Örnek 8.18 gereğince $X \setminus \{a\}$ alt uzayı ikinci sayılabilir değildir. Dolayısıyla Teorem 8.23 gereğince $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı da ikinci sayılabilir değildir.

(a) ve (b) gereğince X sayılabilir ise $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı ikinci sayılabilir ve X sayılabilir değilse $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı ikinci sayılabilir değildir.✍

Teorem 8.25 ▷
$f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sürekli, açık ve örten bir fonksiyon olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı ikinci sayılabilir ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda ikinci sayılabilirdir.

İSPAT: $\mathcal{B}_X = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının sayılabilir bir tabanı ve $\mathcal{B}_Y = \{f(B_n) | B_n \in \mathcal{B}_X\}$ olsun. $\mathcal{B}_X$ kolleksiyonu sayılabilir olduğundan $\mathcal{B}_Y$ kolleksiyonu sayılabilirdir. Şimdi, $\mathcal{B}_Y$ kolleksiyonunun $\mathcal{T}_2$ nin bir tabanı olduğunu gösterelim.

TB-1). Her $n \in \mathbb{N}$ için B_n kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında açık ve f açık bir fonksiyon olduğundan $f(B_n)$ kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında açıktır. Yani $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{T}_2$ dir.

TB-2). U kümesi $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında açık olsun. Bu durumda f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında açıktır. $\mathcal{B}_X$ kolleksiyonu $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının bir tabanı olduğundan $f^{-1}(U) = \bigcup_{n\in J} B_n$ olacak şekilde bir $J \subseteq \mathbb{N}$ vardır. Buradan $U = \bigcup_{n\in J} f(B_n)$ elde edilir.

Bu durumda $\mathcal{B}_Y$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_2$ nin sayılabilir bir tabanıdır. O halde $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.✓

Not: $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri ikinci sayılabilir ve diğeri ikinci sayılabilir değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

SONUÇ 8.26. ▷ $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter şart $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının ikinci sayılabilir olmasıdır.

8.3. Ayrılabilir Uzaylar

TANIM 8.27. ▷ **Ayrılabilir uzay**
$(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya **ayrılabilir uzay** denir.

ÖRNEK 8.28. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir ve Örnek 5.73 gereğince $\mathbb{R}$ standart uzayında yoğun olduğundan $\mathbb{R}$ standart uzayı ayrılabilirdir.

ÖRNEK 8.29. ▷
$\mathbb{C}$ standart uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $A = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{a+ib : a\in\mathbb{Q},\ b\in\mathbb{Q}\}$ olsun. ($A = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ kümesinin elemanlarına rasyonel karmaşık sayılar denir.) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan A da sayılabiliridir. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ olsun ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğundan

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ ve } B\left(y, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla

$$x_0 \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ ve } y_0 \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}$ vardır. Yani

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ ve } |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

olacak biçimde x_0 ve y_0 rasyonel sayıları vardır. $z_0 = x_0 + iy_0$ olsun. Bu durumda $z_0 \in A$ ve

$$d(z, z_0) = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

olur. O halde $z_0 \in A$ ve $z_0 \in B(z,\varepsilon)$ olur. Bu durumda $B(z,r)\cap A \neq \emptyset$ olur. Böylece $z \in \overline{A}$ olur. Bu durumda $\overline{A} = \mathbb{C}$ dir.

ÖRNEK 8.30. ▷
$\mathbb{R}^n$ standart uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q} = \{(r_1,r_2,\cdots,r_n)|r_1,r_2,\cdots,r_n \in \mathbb{Q}\}$ kümesi sayılabilir ve Örnek 5.74 gereğince $\mathbb{R}^n$ standart uzayında yoğun olduğundan $\mathbb{R}^n$ standart uzayı ayrılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.31. ▷
X herhangi bir sayılabilir küme olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: X kümesi sayılabilir ve X kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında yoğun olduğundan $(X,\mathcal{T})$ uzayı ayrılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.32. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının ayrılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM: Örnek 5.77 gereğince bu uzayın yoğun alt kümesi sadece X kümesidir. Böylece $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart X kümesinin sayılabilir olmasıdır. Bu durumda X sayılamazsa $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayı ayrılabilir değildir. Diğeryandan $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayı birinci sayılabilirdir. ✍

ÖRNEK 8.33. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayda X in boş olmayan her alt kümesi yoğun olduğundan herhangi bir $x \in X$ için $\{x\}$ kümeside yoğun ve sayılabilirdir. O halde $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayı ayrılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.34. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının ayrılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir ise Örnek 8.31 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı ayrılabilirdir.
b) X sayılamayan bir küme ve A kümesi X in herhangi bir sayılabilir alt kümesi olsun. Bu durumda $A \neq X$ dir. A sayılabilir olduğundan kapalıdır. Teorem 5.29 gereğince

$$\overline{A} = A \neq X$$

dir. O halde sayılabilir herhangi bir A kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında yoğun olamaz. Diğer bir deyişle X in sayılabilir yoğun hiç bir alt kümesi yoktur. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı ayrılabilir değildir.

(a) ve (b) gereğince $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart X in sayılabilir olmasıdır.✍

ÖRNEK 8.35. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının ayrılabilir olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir ise Örnek 8.31 gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayı ayrılabilirdir.
b) X sayılamayan bir küme ve A kümesi X in herhangi bir sayılabilir sonsuz alt kümesi olsun. Bu durumda $\overline{A}$ kümesi kapalı ve sonsuzdur. $(X, \mathcal{T})$ nun kapalı kümeleri sadece sonlu kümeler ve X olduğundan $\overline{A} = X$ olur. Böylece $(X, \mathcal{T})$ ayrılabilirdir.

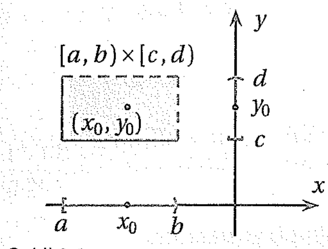
(a) ve (b) gereğince $(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ayrılabilirdir.✍

ÖRNEK 8.36. ▷
$\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki tabanı $\mathscr{B}^2_{\text{sağ}} = \{[a,b) \times [c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ olan topoloji olsun. $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Önce, $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nun bu uzayda yoğun olduğunu gösterelim. $U = [a,b) \times [c,d)$ olsun. Bu durumda

$$a < x_0 < b, \quad c < y_0 < d$$

olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ vardır. Böylece $(x_0, y_0) \in U$ ve $(x_0, y_0) \in A$ olur. Yani $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.82 gereğince A kümesi $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ de yoğundur. A sayılabilir olduğundan $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayı ayrılabilirdir. (Şekil 8.1 e bakınız.)✍



Şekil 8.1

Teorem 8.37. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı ayrılabilir ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda ayrılabilirdir.

İSPAT: A kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

kümesi sayılabilirdir. Diğer yandan f sürekli olduğundan Teorem 6.22 gereğince $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ dır. Bu durumda $Y = f(X) = f\left(\overline{A}\right)$ olduğundan $Y = \overline{f(A)}$ olur. O halde $f(A)$ kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesidir. Böylece $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı ayrılabilirdir.✔

Not
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından biri ayrılabilir ve diğeri ayrılabilir değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

SONUÇ 8.38. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının ayrılabilir olmasıdır.

ÖRNEK 8.39. ▷
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ standart uzayı ile $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ sayılabilir tümleyenler uzayının homeomorfik ol-

madığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ standart uzayı ayrılabilir ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ sayılabilir tümleyenler uzayı ayrılabilir olmadığından bu iki uzay homeomorfik olamazlar.✍

Teorem 8.40

Ayrılabilir her (X, d) metrik uzayın her (Y, d_Y) alt uzayıda ayrılabilirdir.

İSPAT: A kümesi (X, d) metrik uzayın sayılabilir yoğun alt kümesi olsun.

a) A sonlu ise $X = \overline{A} = A$ olacağından X sonlu olur. Bu durumda $Y \subseteq X$ olduğundan Y sonlu dur. Örnek 8.31 gereğince (Y, d_Y) alt uzayı ayrılabilirdir.

b) A sonlu olmasın. $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ diyelim. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $x_k \in A$ için

$$B\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \cap Y = \emptyset \text{ veya } B\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \cap Y \neq \emptyset$$

dur. $B\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \cap Y \neq \emptyset$ özelliğindeki her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $x_k \in A$ için

$$y_{k_n} \in B\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \cap Y$$

olacak şekilde bir y_{k_n} vardır. Bu şekildeki y_{k_n} lerin kümesine B diyelim. Bu durumda $B \subseteq Y$ ve B nin eleman sayısı enfazla $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin eleman sayısı kadar olacağından B sayılabilirdir.

Şimdi, B kümesinin (Y, d_Y) alt uzayında yoğun olduğunu gösterelim.

$$\mathscr{B} = \{B(y, \varepsilon) \mid y \in Y, \varepsilon > 0\}$$

kolleksiyonu (Y, d_Y) nin bir tabanıdır. $B(y, \varepsilon) \in \mathscr{B}$ olsun. $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir m seçelim. A kümesi (X, d) uzayında yoğun olduğundan

$$B\left(y, \frac{1}{m}\right) \cap A \neq \emptyset$$

dur. Böylece $x_k \in B\left(y, \frac{1}{m}\right) \cap A$ olacak şekilde bir $x_k \in A$ vardır. Bu durumda $d(x_k, y) < \frac{1}{m}$ olur. Böylece $y \in B\left(x_k, \frac{1}{m}\right)$ olur. $y \in Y$ olduğundan

$$B\left(x_k, \frac{1}{m}\right) \cap Y \neq \emptyset$$

dur. B nin x_k için seçilen bir y_{k_m} elemanını alalım. Bu durumda

$$d(y, y_{k_m}) \leq d(y, x_k) + d(x_k, y_{k_m}) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan $y_{k_m} \in B(y, \varepsilon)$ olur. O halde $y_{k_m} \in B(y, \varepsilon) \cap B$ olur. Yani $B(y, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ dur. Bu durumda her $B(y, \varepsilon) \in \mathscr{B}$ için $B(y, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ olur. Sonuç 5.79 gereğince B kümesi (Y, d_Y) alt uzayında yoğundur.✔

Teorem 8.40 bütün topolojik uzaylar için doğru değildir. Yani herhangi bir ayrılabilir topolojik uzayın herhangi bir alt uzayı ayrılabilir olmayabilir.

ÖRNEK 8.41. ▷
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}(0))$ uzayı verilsin.
a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(0))$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.
b) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ alt uzayının ayrılabilir olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(0))$ uzayı verilsin. Örnek 5.83 gereğince $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$ olduğundan bu uzay ayrılabilirdir. $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ bir ayrık uzay olduğundan Örnek 8.32 gereğince ayrılabilir değildir.

ÖRNEK 8.42. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı verilsin.
a) $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.
b) $(X\setminus\{a\}, \mathcal{T}_{X\setminus\{a\}})$ alt uzayının ayrılabilir olmadığını gösterelim.

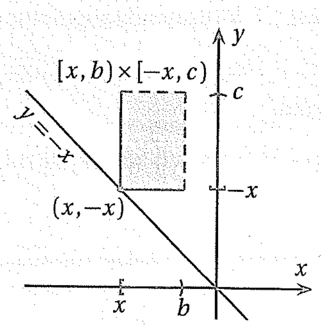
ÇÖZÜM: Herhangi bir $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayını göz önüne alalım. $\{a\}$ sayılabilir ve Örnek 5.83 gereğince $\overline{\{a\}} = X$ olduğundan bu uzay ayrılabilirdir. X sayılamaz bir küme ise $X\setminus\{a\}$ alt uzayı bir ayrık uzay olduğundan Örnek 8.32 gereğince ayrılabilir değildir.✍

ÖRNEK 8.43. ▷
$\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde tabanı $\mathscr{B}^2_{\text{sağ}} = \{[a,b)\times[c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ olan topoloji olmak üzere $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayı verilsin.
a) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.
b) $Y = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ alt uzayının ayrılabilir olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 8.36 gereğince $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayı ayrılabilidir. $Y = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ bu uzayın bir alt uzayıdır. $(x,-x) \in Y$ olsun.

$$\{(x,-x)\} = Y \cap ([x,b)\times[-x,c))$$

olduğundan $\{(x,-x)\}$ kümesi Y de açıktır (Şekil 8.2 ye bakınız). Diğer bir deyişle Teorem 3.12 gereğince $\left(Y, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}_Y}\right)$ uzayı ayrık bir uzaydır. Y sayılabilir olmadığından Örnek 8.32 gereğince $\left(Y, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}_Y}\right)$ uzayı ayrılabilir değildir.✍



Şekil 8.2

Teorem 8.44. ▷
Ayrılabilir her uzayın açık her alt uzayı ayrılabilirdir.

İSPAT: $(X,\mathcal{T})$ ayrılabilir bir uzay, Y kümesi $(X,\mathcal{T})$ da açık olmak üzere $(Y,\mathcal{T}_Y)$ bu uzayın bir alt uzayı olsun. $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi olsun. Bu durumda $B = Y \cap A$ kümesi sayılabilirdir. Şimdi B kümesinin $(Y,\mathcal{T}_Y)$ uzayında yoğun olduğunu gösterelim. U kümesi $(Y,\mathcal{T}_Y)$ uzayında açık ve boş kümeden farklı olsun. Bu durumda $U = Y \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{T}$ vardır. $V \in \mathcal{T}$ ve $Y \in \mathcal{T}$ olduğundan $U \in \mathcal{T}$ olur. A kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında yoğun olduğundan $A \cap U \neq \emptyset$ dur. Böylece

$$B \cap U = (Y \cap A) \cap (Y \cap V) = A \cap (Y \cap V) = A \cap U \neq \emptyset$$

dur. Teorem 5.78 gereğince B kümesi $(Y, \mathcal{T}_Y)$ uzayında yoğundur. Böylece $(Y, \mathcal{T}_Y)$ alt uzayı ayrılabilirdir.✓

8.4. İkinci Sayılabilirlilik ve Ayrılabilirlilik

Teorem 8.45. ▶

$(X, \mathcal{T})$ uzayı ikinci sayılabilir ise ayrılabilirdir.

İSPAT: $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayının sayılabilir bir tabanı olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için B_n kümesinden tek bir x_n elemanı seçelim ve bu elemanların kümesine A diyelim. Bu durumda A nın eleman sayısı enfazla $\mathcal{B}$ nin eleman sayısı kadar olduğundan A sayılabilirdir. Şimdi A kümesinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında yoğun olduğunu gösterelim. $U \neq \emptyset$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$ bu uzayın bir tabanı olduğundan $n \in J$ için $B_n \in \mathcal{B}$ olmak üzere $U = \bigcup_{n \in J} B_n$ olacak şekilde bir $J \subseteq \mathbb{N}$ vardır. Böylece $U \neq \emptyset$ olduğundan bazı $n \in J$ için $B_n \neq \emptyset$ dur. $x_n \in B_n$ ve $x_n \in A$ olduğundan

$$x_n \in B_n \cap A \subseteq A \cap U$$

dur. Yani $A \cap U \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.78 gereğince A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında yoğundur.✓

ÖRNEK 8.46. ▶

$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ tek-çift uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ tek-çift uzayı $\mathcal{P}$ sayılabilir olduğundan ikinci sayılabilirdir. Böylece bu uzay Teorem 8.45 gereğince ayrılabilirdir.✍

Teorem 8.47. ▶

Ayrılabilir her (X, d) metrik uzayı ikinci sayılabilirdir.

İSPAT: (X, d) uzayı ayrılabilir olduğundan X in $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ gibi sayılabilir yoğun bir A alt kümesi vardır. Bu durumda

$$\mathcal{B} = \{B(x_n, r) | x_n \in A,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$$

kolleksiyonu sayılabilirdir. $\mathcal{B}$ kolleksiyonunun (X, d) uzayının bir tabanı olduğunu gösterelim. Her açık yuvar açık bir küme olduğundan $\mathcal{B}$ nin her elemanı açık bir küme dir. U kümesi (X, d) uzayında açık bir küme ve $x \in U$ olsun. Teorem 4.5 gereğince $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan A kümesi (X, d) uzayında yoğun olduğundan

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap A \neq \emptyset$$

dur. Böylece $a \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Bu durumda $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur.

$\frac{\varepsilon}{3} < r_0 < \frac{2\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{Q}$ seçelim. $d(x,a) < \frac{\varepsilon}{3}$ olduğundan $x \in B(a,r_0)$ olur. Şimdi $B(a,r_0) \subseteq B(x,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. $y \in B(a,r_0)$ olsun. Bu durumda

$$d(y,a) < r_0 < \frac{2\varepsilon}{3}$$

dır. Böylece

$$d(y,x) \leq d(y,a) + d(a,x) < r_0 + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olacağından $y \in B(x,\varepsilon)$ olur. O halde

$$B(a,r_0) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

dur.

Teorem 4.9 gereğince gereğince $\mathscr{B}$ kolleksiyonu (X,d) uzayının bir tabanıdır. Böylece (X,d) uzayı ikinci sayılabilirdir.✓

Not

1. Her metrik uzay birinci sayılabilir olduğundan her (X,d) ayrık metrik uzayı birinci sayılabilir olmasına rağmen X sayılamaz bir küme ise (X,d) ayrık uzayı ayrılabilir değildir.
2. Teorem 8.47 herhangi bir topolojik uzay için doğru olmayabilir. Yani ayrılabilir bir topolojik uzay ikinci sayılabilir olmayabilir.

ÖRNEK 8.48. ▷ Ayrılabilir bir uzayın ikinci sayılabilir olması gerekmediğini bir örnek vererek gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 8.35 gereğince X sonsuz bir küme ise $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı ayrılabilirdir. Diğer yandan Örnek 8.22 gereğince bu uzay ikinci sayılabilir değildir.✍

Teorem 8.45 ve Teorem 8.47 gereğince metrik uzaylar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 8.49. ▷ (X,d) bir metrik uzay olsun. (X,d) uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart (X,d) uzayının ikinci sayılabilir olmasıdır.

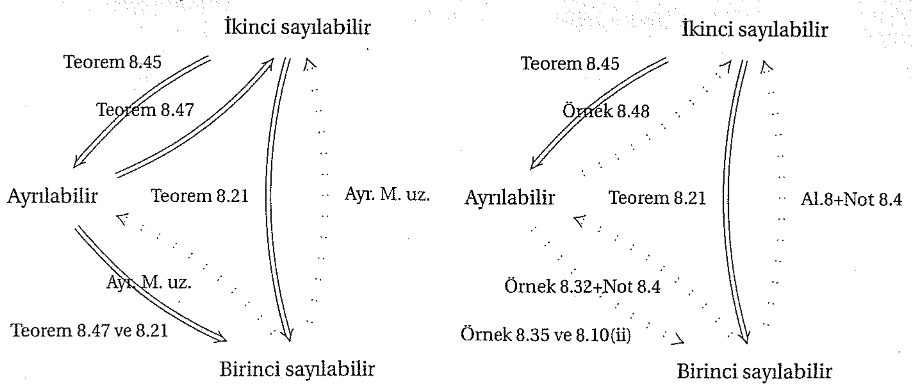
Not

X sayılamayan bir küme ise $(X,\mathscr{P}(X))$ ayrık uzayı birinci sayılabilir fakat ikinci sayılabilir ve ayrılabilir değildir.

Topolojik ve metrik uzaylar için birinci sayılabilirlik, ikinci sayılabilirlik ve ayrılabilirlik kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekilde olduğu gibi olur.

Not

Sonuç 8.49 gereğince $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) standart uzayının bir alt uzayının ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter şart bu alt uzayın ayrılabilir olmasıdır. Teorem 8.23 gereğince $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) standart uzayının her alt uzayı ikinci sayılabilir olduğundan $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) standart uzayının her alt uzayı ayrılabilirdir.



Metrik uzay Topolojik uzay

8.5. Alıştırmalar

1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{M}_x = \{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı ise $n \in \mathbb{N}$ için $N_n = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ olmak üzere $\mathcal{N}_x = \{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonunun da $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı olduğunu gösteriniz.

2. İkinci sayılabilir bir topolojik uzayın herhangi bir sayılamaz A alt kümesinin Anın en az bir limit noktasını içerdiğini gösteriniz.

3.
a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösteriniz.
b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının ikinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.

4.
a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösteriniz.
b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının ikinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.

5.
a) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
b) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının ikinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.
c) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sol}}\right)$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
d) ve $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sol}}\right)$ uzaylarının ikinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.

6. $(X, \mathcal{T}_1)$, $(X, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olsun. $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı ayrılabilir ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında ayrılabilir olduğunu gösteriniz.

7. $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı olsun.
a) X sayılabilir ise $(X, \mathcal{T})$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
b) X sayılamazsa $(X, \mathcal{T})$ uzayının birinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.

8.
$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x] | x \in \mathbb{R}\}$$
ve
$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) | x \in \mathbb{R}\}$$
olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin.
a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının ayrılabilir ve birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının ikinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.
c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının ayrılabilir ve birinci sayılabilir olduğunu gösteriniz.
d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının ikinci sayılabilir olmadığını gösteriniz.

9. $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı verilsin.
a) $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının birinci sayılabilir olup olmadığını araştırınız.
b) $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının ikinci sayılabilir olup olmadığını araştırınız.
c) $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının ayrılabilir olup olmadığını araştırınız.

10. $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık bir uzay olsun. $(X, \mathcal{P}(X))$ in $\mathbb{R}$ nin bir alt uzayı ile homeomorfik olması için gerek ve yeter şartın X in sayılabilir olması gerektiğini ispatlayınız.

11. $(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilir bir uzay ve $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$ nun $\mathcal{T}$ nun sayılabilir bir tabanını kapsadığını gösteriniz.

8.6. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

$\mathcal{N}_x = \{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonunun sayılabilir olduğu açıktır.

YTB-1). Her $n \in \mathbb{N}$ için $M_n \in \mathcal{M}_x \subseteq \mathcal{T}$ ve sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi açık olduğundan $N_n = \bigcap_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{T}$ olur. Yani $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{T}$ dur.

YTB-2). Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in M_n$ olduğundan $x \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i = N_n$ dir.

YTB-3). U kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık ve $x \in U$ olsun. $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı olduğundan $M_n \subseteq U$ olacak şekilde bir $M_n \in \mathcal{M}_x$ kümesi vardır. Bu durumda $N_n = \bigcap_{i=1}^{n} M_i \subseteq M_x \subseteq U$ olur.

Böylece $\mathcal{N}_x$ kolleksiyonu x noktasının sayılabilir bir yerel tabanıdır.✓

ÇÖZÜM 2

A nın hiçbir noktasının A nın bir limit noktası olmadığını kabul edelim. $\mathcal{B}$, X in sayılabilir bir tabanı olsun. $\mathcal{B}$ taban olduğundan her bir $x \in A$ için

$$B_x \cap A = \{x\} \quad \text{ve} \quad x \in B_x$$

olacak şekilde tek bir $B_x \in \mathcal{B}$ seçelim ve bu B_x lerin kolleksiyonuna $\mathcal{B}_x$ diyelim. Bu durumda $f(x) = B_x$ şeklinde tanımlı

$$f : A \to \mathcal{B}_x$$

fonksiyonu bire-bir dir. $\mathcal{B}$ sayılabilir olduğundan $\mathcal{B}_x$ ve dolayısıyla A sayılabilirdir. Bu ise bir çelişkidir. O halde A kümesi A nın bazı limit noktalarını içerir.✓

ÇÖZÜM 3

a) $\mathcal{B}_{\text{sağ}} = \{[x, a) | x, a \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ ın bir tabanıdır. Her $[x, a) \in \mathcal{B}_{\text{sağ}}$ için $[x, a) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ olduğundan Sonuç 5.79 gereğince $\mathbb{Q}$ bu uzayda yoğundur. Böylece, bu uzay ayrılabilirdir.

b) $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathcal{B}^x_{\text{sağ}} = \{[x, r) | x < r, r \in \mathbb{Q}\}$ kolleksiyonu x noktasının sayılabilir bir yerel tabanıdır. O halde bu uzay birinci sayılabilirdir.

c) $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ ın herhangi bir tabanı olsun. $\mathcal{B}$ nin sayılabilir olamayacağını gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $[x, x+1)$ kümesi açık ve $x \in [x, x+1)$ olduğundan $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır. $y < x$ olsun. Bu durumda $y \notin B_x$ ve $y \in B_y$ dir. Böylece $B_x \neq B_y$ dir. $y < x$ özelliğinde sayılamaz sayıda y olduğundan $\mathcal{B}$ nin de sayılamaz sayıda farklı elemanı vardır. Böylece $\mathcal{T}_{\text{sağ}}$ ın sayılabilir bir tabanı yoktur. O halde bu uzay ikinci sayılabilir değildir.✓

ÇÖZÜM 4

a) $\mathcal{B}_{\text{sol}} = \{(a, x] | x, a \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ un bir tabanıdır. Her $(a, x] \in \mathcal{B}_{\text{sol}}$ için

$$(a, x] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olduğundan Sonuç 5.79 gereğince $\mathbb{Q}$ bu uzayda yoğundur. Böylece, bu uzay ayrılabilirdir.

b) $x \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\mathcal{B}^x_{\text{sol}} = \{(r, x] | r < x,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

kolleksiyonu x noktasının sayılabilir bir tabanıdır. O halde bu uzay birinci sayılabilirdir.

c) $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ un herhangi bir tabanı olsun. $\mathcal{B}$ nin sayılabilir olamayacağını gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $(x-1, x]$ kümesi açık ve

$$x \in (x-1, x]$$

olduğundan

$$x \in B_x \subseteq (x-1, x]$$

olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır. $x < y$ olsun. Bu durumda $y \notin B_x$ ve $y \in B_y$ dir. Böylece

$$B_x \neq B_y$$

dir. $x < y$ özelliğinde sayılamaz sayıda y olduğundan $\mathcal{B}$ un da sayılamaz sayıda farklı elemanı vardır. Böylece $\mathcal{T}_{\text{sol}}$ ın sayılabilir bir tabanı yoktur. O halde bu uzay ikinci sayılabilir değildir.✓

ÇÖZÜM 5

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n}\right) \times \left[y, y + \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

kolleksiyonu (x,y) noktasının $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayında sayılabilir yerel bir tabanıdır. O halde $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı birinci sayılabilirdir.

b) $X=\{(1,x)\in\mathbb{R}^2 | x\in\mathbb{R}\}$ olsun. $\pi_2 : X\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ izdüşüm fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli ve açıktır. $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının ikinci sayılabilir olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 8.23 gereğince X uzayı ikinci sayılabilirdir. Böylece Teorem 8.25 gereğince $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ ikinci sayılabilirdir. Bu ise Alıştırma 3 gereğince bir çelişkidir. O halde $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayı ikinci sayılabilir değildir.

c) Benzer şekilde

$$\mathscr{B}_{(x,y)}=\left\{\left(x-\frac{1}{n},x\right]\times\left(y-\frac{1}{n},y\right]\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$$

kolleksiyonu (x,y) noktasının $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzayında sayılabilir yerel bir tabanıdır. O halde $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzayıda birinci sayılabilirdir.

d) Benzer şekilde $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzayının ikinci sayılabilir olmadığı gösterilir.✔

ÇÖZÜM 6

A kümesi $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi olsun. $U\in\mathcal{T}_1$ ve $U\neq\emptyset$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ olduğundan $U\in\mathcal{T}_2$ dir. Böylece A kümesi $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayında yoğun olduğundan $A\cap U\neq\emptyset$ dur. Böylece A kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında yoğundur. A sayılabilir olduğundan $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı ayrılabilirdir.✔

ÇÖZÜM 7

a) X sayılabilir ise $\mathcal{T}=\mathscr{P}(X)$ olup bu uzay Örnek 8.6 gereğince birinci sayılabilirdir.

b) X sayılamaz olsun. $(X,\mathcal{T})$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda verilen her x noktasının sayılabilir bir $\mathscr{B}_x$ yerel tabanı vardır. $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan Teorem 7.31 gereğince

$$\bigcap_{B_x\in\mathscr{B}_x} B_x=\{x\}$$

dir. O halde

$$X\backslash\{x\}=\bigcup_{B_x\in\mathscr{B}_x}(X\backslash B_x)$$

dir. Her bir $X\backslash B_x$ kümesi sayılabilir ve sayılabilir kümelerin herhangi bir sayılabilir birleşimi sayılabilir olduğundan $X\backslash\{x\}$ kümesi sayılabilirdir. Bu ise X kümesinin sayılamaz olması ile çelişir. O halde bu uzay birinci sayılabilir değildir.✔

ÇÖZÜM 8

a) Önce, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim. U boş olmayan açık bir küme olsun. Bu durumda $U=\mathbb{R}$ veya bir $x\in\mathbb{R}$ için $U=(-\infty,x)$ veya $U=(-\infty,x]$ şeklindedir. Her üç durumda da $U\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ dur. Böylece $\mathbb{Q}$ bu uzayda yoğundur. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan bu uzay ayrılabilirdir. Şimdi, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim. $x\in\mathbb{R}$ olsun. $\mathscr{B}_x=\{(-\infty,x]\}$ kolleksiyonu x noktasının sayılabilir bir tabanıdır. O halde bu uzay birinci sayılabilirdir.

b) $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_1$ in herhangi bir tabanı olsun. $\mathscr{B}$ nin sayılabilir olamayacağını gösterelim. $x\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x\in(-\infty,x]$ ve $(-\infty,x]$ kümesi açıktır. Böylece $x\in B_x\subseteq(-\infty,x]$ olacak şekilde bir $B_x\in\mathscr{B}$ vardır. x noktasını içeren en küçük açık küme $(-\infty,x]$ olduğundan $(-\infty,x]=B_x$ dir. $x<y$ olsun. Bu durumda $B_y=(-\infty,y]$ olup $y\notin B_x$ dir. O halde $B_y\neq B_x$ dir. $x<y$ özelliğinde sayılamaz sayıda y olduğundan $\mathscr{B}$ nin de sayılamaz sayıda farklı elemanı vardır. Böylece $\mathcal{T}_1$ in sayılabilir bir tabanı yoktur. O halde bu uzay ikinci sayılabilir değildir.

c) Önce, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ uzayının ayrılabilir olduğunu gösterelim. U boş olmayan açık bir küme olsun. Bu durumda $U=\mathbb{R}$ veya bir $x\in\mathbb{R}$ için $U=(x,\infty)$ veya $U=[x,\infty)$ şeklindedir. Her üç durumda da $U\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ dur. Böylece $\mathbb{Q}$ bu uzayda yoğundur. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan bu uzay ayrılabilirdir. Şimdi, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ uzayının birinci sayılabilir olduğunu gösterelim. $x\in\mathbb{R}$ olsun. $\mathscr{B}_x=\{[x,\infty)\}$ kolleksiyonu x noktasının sayılabilir bir tabanıdır. O halde bu uzay birinci sayılabilirdir.

d) $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_2$ in herhangi bir tabanı olsun. $\mathscr{B}$ nin sayılabilir olamayacağını gösterelim. $x\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x\in[x,\infty)$ ve $[x,\infty)$ kümesi açıktır. Böylece

$$x\in B_x\subseteq[x,\infty)$$

olacak şekilde bir $B_x\in\mathscr{B}$ vardır. x noktasını içeren en küçük açık küme $[x,\infty)$ olduğundan $[x,\infty)=B_x$ dir. $y<x$ olsun. Bu durumda $B_y=[y,\infty)$ olup $y\notin B_x$ dir. O halde $B_y\neq B_x$ dir. $y<x$ özelliğinde sayılamaz sayıda y olduğundan $\mathscr{B}$ nin de sayılamaz sayıda farklı elemanı vardır. Böylece $\mathcal{T}_2$ in sayılabilir bir tabanı yoktur. O halde bu uzay ikinci sayılabilir değildir.✔

ÇÖZÜM 9

a). $x \in X$ olsun. $x = a$ ise $\mathscr{B}_a = \{X\}$ kolleksiyonu a nın sayılabilir yerel tabanıdır. $x \neq a$ olsun. Bu durumda

$$\mathscr{B}_x = \{\{x\}\}$$

kolleksiyonu x nın sayılabilir yerel tabanıdır. O halde bu uzay birinci sayılabilirdir.

b). X sayılabilir ise

$$\mathscr{B} = \{\{x\} \mid x \in X,\ x \neq a\} \bigcup \{X\}$$

kolleksiyonu $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının sayılabilir bir tabanıdır. Böylece bu uzay ikinci sayılabilirdir. X sayılamayan bir küme olsun. $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_a$ nın bir yabanı olsun. Bu durumda $x \neq a$ olmak üzere $\{x\} \in \mathcal{T}_a$ dır. Böylece

$$\{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (i \in I \text{ için } B_i \in \mathscr{B})$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda bir $i \in I$ için $B_i = \{x\}$ olur. Bu durumda $\{x\} \in \mathscr{B}$ dir. Bu $x \neq a$ özelliğindeki her $x \in X$ için doğru olduğundan

$$\{\{x\} \mid x \neq a,\ x \in X\} \subseteq \mathscr{B}$$

olur. Bu durumda X sayılamadığından $\mathscr{B}$ de sayılamaz. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının sayılabilir hiç bir tabanı yoktur. Böylece $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı ikinci sayılabilir değildir.

c). X sayılabilir ise Örnek 8.31 gereğince $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı ayrılabilirdir. X sayılamayan bir küme olsun. $A \subseteq X$ sayılabilir olsun. Bu durumda $a \in A$ veya $a \notin A$ olur. $a \in A$ ise A kapalı olacağından

$$\overline{A} = A \neq X$$

olur. $a \notin A$ olsun. Bu durumda

$$\overline{A} = A \bigcup \{a\} \neq X$$

olur. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının sayılabilir hiç bir yoğun alt kümesi yoktur. Böylece bu uzay ayrılabilir değildir.✔

ÇÖZÜM 10

⇒). $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayının $\mathbb{R}$ nin bir Y alt uzayı ile homeomorfik olduğunu varsayalım. Bu durumda Alıştırma 25 gereğince Y ayrık uzaydır. Diğer yandan $\mathbb{R}$ ikinci sayılabilir olduğundan Teorem 8.23 gereğince Y de ikinci sayılabilirdir. Böylece Örnek 8.18 gereğince Y sayılabilirdir.

⇐). Tersine, X sayılabilir olsun. X in sonlu ve

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(i) = x_i$ şeklinde tanımlı $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to X$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Şimdi, X in sonlu olmadığını varsayalım. Bu durumda

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$$

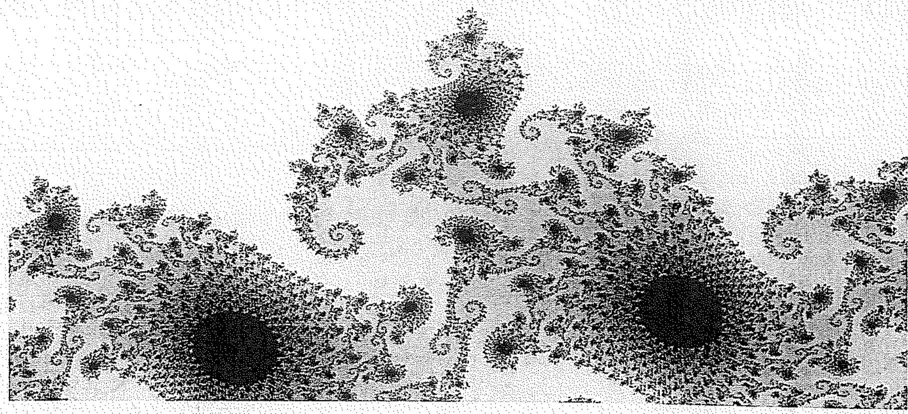
şeklindedir. $f(x_n) = n$ şeklinde tanımlı $f : (X, \mathscr{P}(X)) \to \mathbb{N}$ fonksiyonu bire-bir örtendir. Bu fonksiyonun ters fonksiyonu

$$g(n) = x_n$$

şeklinde tanımlı $g : \mathbb{N} \to (X, \mathscr{P}(X))$ fonksiyonudur. f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri üzerindeki topolojiler ayrık topoloji olduğundan f ve g süreklidir. O halde f bir homeomorfizmdir.✔

ÇÖZÜM 11

$(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilir bir uzay olduğundan $\mathcal{T}$ nun sayılabilir bir $\mathscr{B}$ tabanı vardır. $B_m \in \mathscr{B}$ ise $\mathscr{U}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan $U_{n,m} \subseteq B_m$ olacak şekilde bir $U_{n,m} \in \mathscr{U}$ vardır. Benzer şekilde $U_{n,m} \in \mathscr{U}$ ise $\mathscr{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan $B_n \subseteq U_{n,m}$ olacak şekilde bir $B_n \in \mathscr{B}$ vardır. Bu durumda her $n, m \in \mathbb{N}$ için $B_n \subseteq U_{n,m} \subseteq B_m$ olacak şekilde $U_{n,m} \in \mathscr{U}$ vardır. $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan $\{U_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonuda $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olur. Üstelik, $\{U_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{U}$ ve $\{U_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ sayılabilirdir.✔



9. Topolojik Uzaylarda Yakınsaklık

Bölüm 2 de metrik uzaylarda yakınsaklık kavramını gördük. Bu bölümde topolojik uzaylarda dizi ve ağ (net) kavramları tanıtılarak dizilerin birinci sayılabilir uzaylarla, ağların genel topolojik uzaylarla olan ilişkileri verilecektir.

Teorem 2.66 gereğince bir (X, d) metrik uzayında X kümesinin elemanlarından oluşan bir (x_n) dizisinin bir x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olacak şekilde var olmasıdır. Bu teoremden faydalanılarak bir dizilerin yakınsaklığı kavramı metrik uzaylardan topolojik uzaylara şu şekilde aktarılır.

9.1. Diziler ve Topolojik Uzaylar

Tanım 9.1. ▷ **Dizilerin yakınsaklığı**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi (x_n) olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olacak şekilde varsa (x_n) **dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor** denir. Bu durumda x noktasına (x_n) dizisinin **limiti** denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Örnek 9.2. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında $n \geq n_0$ olduğunda $x_n = x$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisinin x noktasına yakınsadığını gösterelim.

Çözüm: $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in U$ olur. Yani bu dizi x noktasına yakınsar. Bunun sonucu olarak $x \in X$ için (x) sabit dizisi de x noktasına yakınsar.

ÖRNEK 9.3. ▷
$(X, \mathscr{P}(X))$ bir ayrık uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştıralım.

ÇÖZÜM: (x_n) bu uzayda x noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $\{x\}$ kümesi açık ve $x \in \{x\}$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in \{x\}$ olacak şekilde vardır. Böylece $n \geq n_0$ için $x_n = x$ olmak zorundadır. Yani dizi

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x \cdots$$

formundadır.

Böylece ayrık bir uzayda bir (x_n) dizisinin bir x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin belli bir indisden sonraki terimlerinin x e eşit olmasıdır. Yani

$$x_n \to x \Leftrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x \cdots$$

olur.✍

ÖRNEK 9.4. ▷
$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir sayılabilir tümleyenler uzayı ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştıralım.

ÇÖZÜM: (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsasın. $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $U = (X \setminus A) \bigcup \{x\}$ olsun. Bu durumda $x \in U$ olur. Diğer yandan

$$X \setminus U = A \bigcap (X \setminus \{x\}) \subseteq A$$

ve A sayılabilir olduğundan $X \setminus U$ sayılabilirdir. Böylece U kümesi açıktır. $x_n \to x$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in U = (X \setminus A) \bigcup \{x\}$ olacak şekilde vardır. O halde her $n \geq n_0$ için $x_n \notin X \setminus A$ olduğundan $x_n \in \{x\}$ olur. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $x_n = x$ olur. Diğer bir deyişle dizinin belli bir indisten sonraki terimleri x e eşittir. Yani dizi

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x \cdots$$

formundadır.

Böylece herhangi bir sayılabilir tümleyenler uzayında bir (x_n) dizisinin bir x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin belli bir indisden sonraki terimlerinin x e eşit olmasıdır. Yani

$$x_n \to x \Leftrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x, x, x \cdots$$

olur.✍

SONUÇ 9.5. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi, $x \in X$ ve $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

b) $x \in B$ özelliğindeki her $B \in \mathscr{B}$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $B \in \mathscr{B}$ ve $x \in B$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $B \in \mathcal{T}$ dur. Böylece (x_n) dizisi x noktasına yakınsadığından Tanım 9.1 gereğince istenilen özellikte bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ olsun. Teorem 3.44 gereğince $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}$ vardır. Böylece (b) gereğince $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde $B \subseteq U$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla $x_n \to x$ dir.✔

SONUÇ 9.6. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ için $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının bir yerel tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

b) Her $B \in \mathscr{B}_x$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $B \in \mathscr{B}_x$ olsun. Tanım 4.61 gereğince $x \in B$ ve $\mathscr{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $x \in B$ ve $B \in \mathcal{T}$ olur. Böylece (x_n) dizisi x noktasına yakınsadığından istenilen özellikte bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ olsun. Tanım 4.61 gereğince $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. Böylece (b) gereğince $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde $B \subseteq U$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla $x_n \to x$ dir.✔

ÖRNEK 9.7. ▷
$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir kaba uzay olmak üzere (x_n) terimleri X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi ve $x \in X$ olsun. (x_n) dizisinin x e yakınsadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathscr{B}_x = \{X\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olduğundan Sonuç 9.6 gereğince $x_n \to x$ dir. x keyfi olduğundan $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayında her dizi $(X, \mathcal{T})$ uzayının her noktasına yakınsar.✍

Teorem 9.8. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff uzayında yakınsak bir dizinin limiti tek dir.

Not

Teorem 2.49 gereğince herhangi bir metrik uzayda yakınsak bir dizi sadece tek bir noktaya yakınsar. Diğer yandan Örnek 9.7 da görüldüğü gibi herhangi bir topolojik uzayda bir dizi birden fazla noktaya yakınsayabilir.

İSPAT: (x_n) dizisi $(X, \mathcal{T})$ uzayında $x, y \in X$ gibi farklı iki noktaya yakınsadığını varsayalım. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan

$$x \in U, \quad y \in V \quad \text{ve} \quad U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır. (x_n) dizisisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\text{her } n \geq n_0 \text{ için } x_n \in U$$

olacak şekilde vardır. Benzer şekilde (x_n) dizisisi y noktasına yakınsadığından bir

$n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\text{her } n \geq n_1 \text{ için } x_n \in V$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda

$$\text{her } n \geq \max\{n_0, n_1\} \text{ için } x_n \in U \cap V$$

olur. Bu ise $U \cap V = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde (x_n) dizisi tek bir noktaya yakınsar.✔

Teorem 9.9. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Terimleri A nın elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisi varsa $x \in \overline{A}$ dır.

İSPAT: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ ve (x_n) dizisi x noktasına yakınsasın. $x \in \overline{A}$ olduğunu gösterelim. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. (x_n) dizisi x e yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ için $x_n \in U \cap A$ olur. O halde $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.26 gereğince $x \in \overline{A}$ dır.✔

Not

Herhangi bir topolojik uzayda $x \in \overline{A}$ olmasına rağmen A da x noktasına yakınsayan bir dizi olmayabilir.

ÖRNEK 9.10. ▷ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı olsun. $2 \in \overline{(0,1)}$ olmasına rağmen $(0,1)$ de 2 noktasına yakınsayan hiç bir dizinin olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $2 \in \overline{(0,1)}$ olduğunu gösterelim. $2 \in U$ özelliğindeki bir $U \in \mathcal{T}$ kümesi için $U \cap (0,1) = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(0,1) \subseteq \mathbb{R} \setminus U$ dur. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince $\mathbb{R} \setminus U$ sayılabilir olduğundan $(0,1)$ sayılabilirdir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $2 \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $U \cap (0,1) \neq \emptyset$ dur. Teorem 5.26 gereğince $2 \in \overline{(0,1)}$ dir.

b) (x_n) terimleri $(0,1)$ in elemanlarından oluşan bir dizi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq 2$ olacağından Örnek 9.4 gereğince (x_n) dizisi 2 noktasına yakınsayamaz.

(a) ve (b) gereğince $2 \in \overline{(0,1)}$ olmasına rağmen $(0,1)$ de 2 noktasına yakınsayan hiç bir dizi yoktur.✍

Not

1. Sonuç 9.11 da A kümesinin kapalı olması şartı kaldırılamaz. Yani A kümesi kapalı değilse terimleri A nın elemanlarından oluşan yakınsak bir dizinin limiti A nın bir elemanı olmayabilir.
2. A kümesi kapalı olmamasına rağmen terimleri A nın elemanlarından oluşan bir dizinin limiti A nın bir elemanı olabilir.

SONUÇ 9.11. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ kapalı olsun. Bu durumda terimleri A nın elemanlarından oluşan yakınsak her dizinin limiti A kümesinin bir elemanıdır.

İSPAT: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ ve (x_n) dizisi x noktasına yakınsasın. Bu durumda Teorem 9.9 gereğince $x \in \overline{A}$ dır. A kümesi kapalı olduğundan $A = \overline{A}$ ve dolayısıyla $x \in A$ olur.✔

ÖRNEK 9.12. ▷ $\mathbb{R}$ standart uzayının $A = (0,1]$ alt kümesi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \dfrac{1}{n}$ olmak üzere (x_n) dizisi terimleri A nın elemanlarından oluşan bir dizidir. Diğer yandan $x_n \to 0$ fakat $0 \notin A$ dır.✍

ÖRNEK 9.13. ▷
$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı olsun.

a) $(0,1)$ aralığı sayılabilir olmadığından $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ uzayında kapalı değildir. (x_n), $(0,1)$ de bir dizi ve $x_n \to x$ olsun. Bu durumda Örnek 9.4 gereğince $n \geq n_0$ olduğunda $x_n = x$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in (0,1)$ olduğundan $x \in (0,1)$ dir. O halde $(0,1)$ kümesi kapalı (açık) olmamasına rağmen terimleri $(0,1)$ in elemanlarından oluşan yakınsak her dizinin limiti $(0,1)$ kümesinin bir elemanıdır.

b) Terimleri $(0,1)$ in elemanlarından oluşan ve 2 noktasına yakınsayan hiç bir dizi olmamasına rağmen $2 \in \overline{(0,1)}$ dir.✍

TANIM 9.14. ▷ **Dizisel süreklilik**
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun.

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında x noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyorsa f fonksiyonuna **x noktasında dizisel süreklidir** denir.

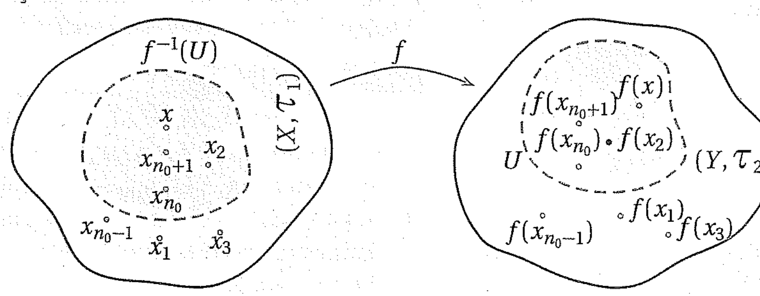
b) f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında dizisel sürekliyse f ye **X üzerinde dizisel sürekli** veya kısaca **dizisel sürekli** denir. Diğer bir deyişle f yakınsak dizilerin limitini koruyorsa, yani her $x \in X$ için $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında $x_n \to x$ olduğunda $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında $f(x_n) \to f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna **dizisel sürekli** denir.☜

Teorem 9.15. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olsun. Bu durumda sürekli her $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu dizisel süreklidir.

İSPAT: $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında $x_n \to x$ olsun. $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında $f(x_n) \to f(x)$ olduğunu gösterelim. $f(x) \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $x \in f^{-1}(U)$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında $x_n \to x$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ için $x_n \in f^{-1}(U)$ olacak şekilde vardır. (Şekil 9.1 e bakınız.) Böylece $n \geq n_0$ için $f(x_n) \in U$ olur. O halde $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında $f(x_n) \to f(x)$ dir. Yani f dizisel süreklidir.✔

Not
Dizisel sürekli bir fonksiyon sürekli olmayabilir. Diğer bir deyişle $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayındaki $x_n \to x$ özelliğindeki her (x_n) dizisi için $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında $f(x_n) \to f(x)$ olmasına rağmen f fonksiyonu sürekli olmayabilir.

Şekil 9.1



ÖRNEK 9.16. ▷
$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı olmak üzere $\mathrm{id}(x) = x$ şeklinde tanımlı id :

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun dizisel sürekli olmasına rağmen sürekli olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) (x_n), $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Örnek 9.4 gereğince her $n \geq n_0$ için $x_n = x$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. U kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açık bir küme ve $\mathrm{id}(x) \in U$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $\mathrm{id}(x_n) = \mathrm{id}(x)$ olduğundan $\mathrm{id}(x_n) \in U$ olur. Böylece $(\mathrm{id}(x_n))$ dizisi $\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathrm{id}(x)$ noktasına yakınsar. O halde id fonksiyonu dizisel süreklidir.

b) id fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterelim. $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathrm{id}^{-1}((a,b)) = (a,b)$ dir. $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ sayılabilir olmadığından (a,b) kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ uzayında açık değildir. Sonuç 6.28 gereğince $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli değildir.

9.2. Diziler ve Birinci Sayılabilir Uzaylar

Teorem 9.17

$(X, \mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir topolojik uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayında yakınsak her dizinin tek bir limiti varsa $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ uzayında yakınsak her dizinin tek bir limiti olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim. $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olmadığını varsayalım. Bu durumda $a \neq b$ ve $a \in U$, $b \in V$ özelliğindeki her $U, V \in \mathcal{T}$ için $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde a ve b noktaları vardır. $\{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonları sırasıyla a ve b nin

$$N_n \supseteq N_{n+1} \text{ ve } M_n \supseteq M_{n+1}$$

özelliğine sahip sayılabilir yerel tabanları olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $N_n \cap M_n \neq \emptyset$ dur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in N_n \cap M_n$ olmak üzere bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. (x_n) dizisinin a noktasına yakınsadığını gösterelim. $N_{n_0} \in \{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $N_n \subseteq N_{n_0}$ olur. Böylece $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in N_n$ olduğundan $x_n \in N_{n_0}$ olur. Sonuç 9.6 gereğince (x_n) dizisi a noktasına yakınsar. Benzer şekilde (x_n) dizisinin b noktasına yakınsadığı gösterilir. Böylece (x_n) dizisi hem a noktasına hem de b noktasına yakınsar. Bu ise bir çelişkidir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

Teorem 9.18

(X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart terimleri A nın elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir dizinin olmasıdır.

b) A kümesinin (X, d) uzayında kapalı olması için gerek ve yeter şart terimleri A kümesinin elemanlarından oluşan yakınsak her dizinin limitinin A kümesinin bir elemanı olmasıdır.

İSPAT:

a) $\Rightarrow$). $x \in \overline{A}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olur. Her bir $n \in \mathbb{N}$

$(\varepsilon = 1/n)$ için $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ olacak şekilde bir x_n elemanı seçerek bir (x_n) dizisi oluşturalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ dır. Şimdi $x_n \to x$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ herhangi bir reel sayı ve n_0 da $1/\varepsilon$ dan büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ için

$$x_n \in B(x, 1/n) \subseteq B(x, 1/n_0) \subseteq B(x, \varepsilon)$$

olur. Sonuç 9.6 gereğince $x_n \to x$ dir.

$\Leftarrow$). Teorem 9.9 gereğince A kümesinde x noktasına yakınsayan bir dizi varsa $x \in \overline{A}$ dır.

b) $\Rightarrow$). A kapalı olsun. Bu durumda $\overline{A} = A$ dır. (x_n) terimleri A nın elemanlarından oluşan $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. (a) gereğince $x \in \overline{A} = A$ dır.

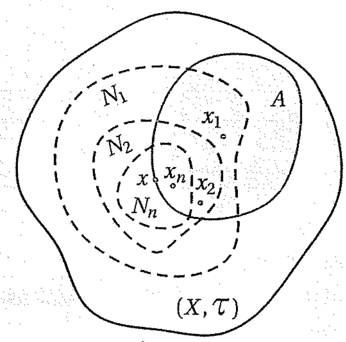
$\Leftarrow$). $x \in \overline{A}$ olsun. (a) gereğince terimleri A nın elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. Bu durumda $x \in A$ olur. Böylece $\overline{A} \subseteq A$ dır. Dolayısıyla $\overline{A} = A$ olur. $\overline{A}$ kapalı olduğundan A kapalıdır.✓

Teorem 9.19.

$(X, \mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart terimleri A nın elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir dizinin olmasıdır.

b) A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart terimleri A nın elemanlarından oluşan yakınsak her dizinin limitinin A nın bir elemanı olmasıdır.



Şekil 9.2

İSPAT:

a) $\Rightarrow$). $x \in \overline{A}$ olsun. $\{N_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu x noktasının $N_n \supseteq N_{n+1}$ özelliğine sahip bir yerel tabanı olsun. $x \in \overline{A}$ olduğundan Teorem 5.26 gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $N_n \cap A \neq \emptyset$ dur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_n \in N_n \cap A$ seçebiliriz. (Şekil 9.2 e bakınız.) Bu durumda (x_n) dizisi A nın elemanlarından oluşan bir dizidir. Şimdi (x_n) dizisinin x noktasına yakınsadığını gösterelim. U kümesi x noktasını içeren açık bir küme olsun. Bu durumda Tanım 4.61 gereğince $N_{n_0} \subseteq U$ olacak şekilde bir N_{n_0} vardır. Böylece

$$U \supseteq N_{n_0} \supseteq N_{n_0+1} \supseteq \cdots$$

ve $n \geq n_0$ için $x_n \in N_n \subseteq N_{n_0} \subseteq U$ olduğundan $x_n \in U$ olur. O halde (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

$\Leftarrow$). Teorem 9.9 gereğince A kümesinde x noktasına yakınsayan bir dizi varsa $x \in \overline{A}$ dır.

b) $\Rightarrow$). A kapalı olsun. Bu durumda $\overline{A} = A$ dır. (x_n) terimleri A nın elemanlarından oluşan $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. (a) gereğince $x \in \overline{A} = A$ dır.

$\Leftarrow$). $x \in \overline{A}$ olsun. (a) gereğince terimleri A nın elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. Bu durumda $x \in A$ olur. Böylece $\overline{A} \subseteq A$ dır. Dolayısıyla $\overline{A} = A$ olur. $\overline{A}$ kapalı olduğundan A kapalıdır.✓

Teorem 9.19 gereğince birinci sayılabilir uzayların topolojileri yakınsak dizilerle ifade edilebilir.

SONUÇ 9.20. ▷ $(X,\mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir uzay ve $U \subseteq X$ olsun. U kümesinin $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olması için gerek ve yeter şart $x \in U$ olmak üzere $x_n \to x$ ise $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının olmasıdır.

Teorem 9.21 ▷

$(X,\mathcal{T}_1)$ birinci sayılabilir bir uzay olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir. b) f fonksiyonu dizisel süreklidir.

Not

1. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f:(X,d) \to (Y,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin dizisel sürekli olmasıdır.
2. Sürekli her $f: X \to Y$ fonksiyonu dizisel sürekli olmasına rağmen X uzayı birinci sayılabilir değilse f sürekli olmak zorunda değildir. (Örnek 9.16 e bakınız.)

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 9.15 gereğince f sürekli ise f dizisel süreklidir.

b)⇒ a). f nin sürekli olmadığını varsayalım. Teorem 6.22 gereğince $f\left(\overline{A}\right) \nsubseteq \overline{f(A)}$ olacak şekilde bir $A \subseteq X$ vardır. O halde $y \in f\left(\overline{A}\right) \setminus \overline{f(A)}$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. Böylece $y \in f\left(\overline{A}\right)$ olduğundan $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in \overline{A}$ vardır. Teorem 9.19 gereğince $x_n \to x$ olacak şekilde A da bir (x_n) dizisi vardır. (b) gereğince $f(x_n) \to f(x) = y$ dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) \in f(A)$ olduğundan y noktası $f(A)$ kümesinin terimlerinden oluşan bir dizinin limitidir. Teorem 9.19 gereğince $y \in \overline{f(A)}$ dır. Böylece $y \notin f\left(\overline{A}\right) \setminus \overline{f(A)}$ olur. Bu ise $y \in f\left(\overline{A}\right) \setminus \overline{f(A)}$ olması ile çelişir. O halde f sürekli olmak zorundadır.✔

9.3. Ağlar (Netler)

TANIM 9.22. ▷ Yönlendirilmiş küme

Λ bir küme ve $\leq$ da Λ üzerinde bir bağıntı olsun.

YK-1). Her $p \in \Lambda$ için $p \leq p$ dir (yani $\leq$ bağıntısı yansıyandır),

YK-2). $p \leq q$ ve $q \leq r$ özelliğindeki her $p,q,r \in \Lambda$ için $p \leq r$ dir (yani $\leq$ bağıntısı geçişkendir),

YK-3). Her $p,q \in \Lambda$ için $p \leq s$ ve $q \leq s$ olacak şekilde bir $s \in \Lambda$ vardır

şartları sağlanıyorsa Λ ye $\leq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme veya kısaca yönlendirilmiş bir küme denir.

TANIM 9.23. ▷ Ağ (net)

Λ yönlendirilmiş bir küme ve X herhangi bir küme olsun. Herhangi bir $x:\Lambda \to X$ fonksiyonuna terimleri X in elemanlarından oluşan bir ağ (net) veya kısaca X de bir ağ (net) denir. $\alpha \in \Lambda$ için $x(\alpha) = x_\alpha$ ise x ağı $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ veya kısaca (x_α) ile gösterilir. Her $\alpha \in \Lambda$ için $x(\alpha) = x_\alpha = y$ ise $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağına y değerli sabit ağ denir ve kısaca (y) ile gösterilir.

ÖRNEK 9.24. ▷

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri bilinen "$\leq$" bağıntısına göre birer yönlendirilmiş kümedir. Böylece her dizi bir ağdır.✍

ÖRNEK 9.25. ▷
"$(i,j) \leq (m,n)$ olması için gerek ve yeter şart $i \leq m, j \leq n$ olmasıdır" bağıntısına göre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesi yönlendirilmiş bir kümedir. Böylece X bir küme olmak üzere her $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to X$ fonksiyonu X de bir ağdır.✍

ÖRNEK 9.26. ▷
$\mathbb{R}$ kümesi bilinen "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme olduğundan her $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de bir ağdır.✍

ÖRNEK 9.27. ▷
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kümesi bilinen "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme olduğundan her $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de bir ağdır. Örneğin

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

şeklinde tanımlı $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de bir ağdır.✍

ÖRNEK 9.28. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x\in X$ olmak üzere $\mathcal{B}_x = \{U\in\mathcal{T} \mid x\in U\}$ olsun. $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonunun

"$U \leq V$ olması için gerek ve yeter şart $V\subseteq U$ olmasıdır"

şeklinde tanımlı $\leq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

YK-1). Her $U\in\mathcal{B}_x$ için $U\subseteq U$ olduğundan $U\leq U$ dur.
YK-2). $U,V,W\in\mathcal{B}_x$ olmak üzere $U\leq V$ ve $V\leq W$ olsun. Bu durumda $V\subseteq U$ ve $W\subseteq V$ dir. Böylece $W\subseteq U$ olur. Bu durumda $U\leq W$ dur.
YK-3). $U,V\in\mathcal{B}_x$ olsun. $W=U\cap V$ diyelim. Bu durumda $W\subseteq U$ ve $W\subseteq V$ olacağından $U\leq W$ ve $V\leq W$ olur. Üstelik $W\in\mathcal{B}_x$ dir.

Böylece $\mathcal{B}_x$ kolleksiyonu $\leq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş bir kümedir.

Her bir $U\in\mathcal{B}_x$ kümesinden bir x_U elemanı seçelim. Bu durumda $f(U)=x_U$ şeklinde tanımlı $f:\mathcal{B}_x\to X$ fonksiyonu X de bir ağdır. Yani $(x_U)_{U\in\mathcal{B}_x}$, X de bir ağdır.✍

TANIM 9.29. ▷ **Ağların (netlerin) yakınsaklığı**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve X in elemanlarından oluşan bir ağ $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ olsun. $x\in U$ özelleğindeki her $U\in\mathcal{T}$ için bir $\alpha_0\in\Lambda$ elemanı her $\alpha\geq\alpha_0$ için $x_\alpha\in U$ olacak şekilde varsa $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ **ağına $x\in X$ noktasına yakınsıyor** denir. Bu durumda $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağına yakınsak, x noktasınada $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının **limiti** denir ve genellikle bu durum $x_\alpha\to x$ veya $\lim\limits_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x$ veya $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$ şeklinde gösterilir.☜

ÖRNEK 9.30. ▷
$(X,\mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. $\alpha\geq\alpha_0$ olduğunda $x_\alpha = x$ olacak şekilde bir

$\alpha_0 \in \Lambda$ varsa $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının x e yakınsadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olur. Yani bu ağ x noktasına yakınsar. Bunun bir sonucu olarak her $x \in X$ için (x) sabit ağı x noktasına yakınsar.✍

ÖRNEK 9.31. ▷
$(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık bir uzay olsun. $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının yakınsaklığını araştıralım.

ÇÖZÜM: $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda x noktasına yakınsayan bir ağ olsun. Bu durumda $\{x\}$ kümesi açık ve $x \in \{x\}$ olduğundan bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in \{x\}$ olacak şekilde vardır. Böylece $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha = x$ olmak zorundadır. Böylece ayrık bir uzayda

$$x_\alpha \to x \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha_0 \text{ için } x_\alpha = x \text{ olacak şekilde bir } \alpha_0 \in \Lambda \text{ vardır.}$$

dır.✍

SONUÇ 9.32. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda bir ağ ve $x \in X$ olmak üzere $\mathscr{B}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı x noktasına yakınsar.

b) $x \in B$ özelliğindeki her $B \in \mathscr{B}$ için $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in B$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $x \in B$ ve $B \in \mathscr{B}$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $B \in \mathcal{T}$ dur. Tanım 9.29 gereğince istenilen özellikte bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ olsun. Teorem 4.9 gereğince $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}$ vardır. Böylece (b) gereğince $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in B$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır. O halde $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır. Dolayısıyla, $x_\alpha \to x$ dir.✔

SONUÇ 9.33. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda bir ağ olsun. $x \in X$ için $\mathscr{B}_x$ kolleksiyonu x noktasının bir yerel tabanı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı x noktasına yakınsar.

b) Her $B \in \mathscr{B}_x$ için $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in B$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $B \in \mathscr{B}_x$ olsun. Bu durumda $x \in B$ ve $\mathscr{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan $B \in \mathcal{T}$ ve $x \in B$ olur. Tanım 9.29 gereğince istenilen özellikte bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}$ ve $x \in U$ olsun. Tanım 4.61 gereğince $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_x$ vardır. Böylece (b) gereğince $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in B$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır. O halde $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı vardır. Dolayısıyla, $x_\alpha \to x$ dir.✔

ÖRNEK 9.34. ▷
$\left(3-\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ ağının $\mathbb{R}$ standart uzayında 3 noktasına yakınsadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

$$\mathscr{B}_3 = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$

kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayında 3 noktasının bir yerel tabanıdır. $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \in \mathscr{B}_3$ olsun.

$$x_0 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ seçelim. $x \geq x_0$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x_0} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

dur. Böylece

$$-\varepsilon < -\frac{1}{x} < \varepsilon$$

olur. O halde

$$3-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 3+\varepsilon$$

dur. Böylece $x \geq x_0$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için

$$3-\frac{1}{x} \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$$

olur. Sonuç 9.33 gereğince $\left(3-\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ ağı $\mathbb{R}$ standart uzayında 3 noktasına yakınsar. ✍

ÖRNEK 9.35. ▷
Örnek 9.28 de tanımlanan $(x_U)_{U\in\mathscr{B}_x}$ ağının x noktasına yakınsadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in U$ ve $U \in \mathscr{B}_x$ olsun. $U_0 = U$ diyelim. Bu durumda $U_0 \in \mathscr{B}_x$ olur. $V \geq U_0$ olsun. Bu durumda $V \subseteq U_0$ dır. Böylece $x_V \in V$ olduğundan $x_V \in U_0$ olur. O halde her $V \geq U_0$ için $x_V \in U_0 = U$ dur. Sonuç 9.33 gereğince $(x_U)_{U\in\mathscr{B}_x}$ ağı x noktasına yakınsar. ✍

Teorem 9.36. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda

a) $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart A da x noktasına yakınsayan bir ağın olmasıdır.

b) A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart terimleri A nın elemanlarından oluşan yakınsak her ağın limitinin A nın bir elemanı olmasıdır.

İSPAT:

a) $\Rightarrow$). $x \in \overline{A}$ olsun. Bu durumda $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $U \cap A \neq \emptyset$ dur. Böylece $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $x_U \in U \cap A$ olacak şekilde bir $x_U \in A$

seçerek bir (x_U) ağı oluşturabiliriz. Örnek 9.35 gereğince (x_U) ağı x noktasına yakınsar.

$\Leftarrow$). Tersine, A kümesinde x noktasına yakınsayan bir $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ vardır. Dolayısıyla, $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $U \cap A \neq \emptyset$ dur. O halde Teorem 5.26 gereğince $x \in \overline{A}$ dır.

b) $\Rightarrow$). A kümesinin kapalı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{A} = A$ dır. (x_U) ağı A nın elemanlarından oluşan ve $x \in X$ noktasına yakınsayan bir ağ olsun. Bu durumda (a) gereğince $x \in \overline{A}$ olacağından $x \in A$ olur.

$\Leftarrow$). Tersine, terimleri A nın elemanlarından oluşan yakınsak her ağın limitinin A nın bir elemanı olduğunu kabul edelim. $x \in \overline{A}$ olsun. Bu durumda (a) gereğince terimleri A nın elemanlarından oluşan x noktasına yakınsayan bir (x_α) ağı vardır. Kabulümüz gereğince $x \in A$ olacağından $\overline{A} \subseteq A$ ve dolayısıyla $\overline{A} = A$ dır. Böylece A kümesi kapalıdır.✔

Teorem 9.36 gereğince herhangi bir topolojik uzayın topolojisi yakınsak ağlarla ifade edilebilir.

SONUÇ 9.37. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $U \subseteq X$ olsun. Bu durumda U alt kümesinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olması için gerek ve yeter şart her $x \in U$ ve $x_\alpha \to x$ özelliğindeki her (x_α) ağı için $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanının olmasıdır.

Dizilerde olduğu gibi bir ağın birden fazla limit noktası olabilir.

ÖRNEK 9.38. ▷
$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir kaba uzay ve $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ terimleri X kümesinin elemanlarından oluşan bir ağ ve $x \in X$ olsun. (x_α) ağının x noktasına yakınsadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{B}_x = \{X\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır. Her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \in X$ olduğundan Sonuç 9.33 gereğince $x_\alpha \to x$ dir. $x \in X$ keyfi olduğundan $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayında her ağ $(X, \mathcal{T})$ uzayının her noktasına yakınsar.✍

Teorem 9.39. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.
b) $(X, \mathcal{T})$ uzayındaki yakınsak her ağın tek bir limiti vardır.

İSPAT:

a)$\Rightarrow$ b). $x \neq y$ olmak üzere bir $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının hem x noktasına hem de y noktasına yakınsadığını kabul edelim. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı x noktasına yakınsadığından bir $\alpha_1 \in \Lambda$ elemanı $\alpha \geq \alpha_1$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olacak şekilde vardır. Benzer şekilde $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı y noktasına yakınsadığından bir $\alpha_2 \in \Lambda$ elemanı $\alpha \geq \alpha_2$ olduğunda $x_\alpha \in V$ olacak şekilde vardır. O halde $\alpha_0 \geq \alpha_1$ ve $\alpha_0 \geq \alpha_2$ olmak üzere her $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in U \cap V$ olur. Bu ise $U \cap V = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı birden fazla noktaya yakınsayamaz.

b)⇒ a). $(X,\mathcal{T})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olmadığını varsayalım. Bu durumda $t\in U_t$, $s\in V_s$ özelliğindeki her $U_t, V_s\in\mathcal{T}$ kümeleri için $U_t\bigcap V_s\neq\emptyset$ olacak şekilde $s\neq t$ özelliğinde $t,s\in X$ noktaları vardır. $\mathcal{B}_s=\{V_s\in\mathcal{T}\,|\,s\in V_s\}$ ve $\mathcal{B}_t=\{U_t\in\mathcal{T}\,|\,t\in U_t\}$ kolleksiyonları sırasıyla s ve t nin yerel tabanları olsun. Bu durumda Örnek 9.28 gereğince $\mathcal{B}_s$ ve $\mathcal{B}_t$ kümeleri yönlendirilmiş birer kümedir. $\mathcal{B}_s\times\mathcal{B}_t$ üzerinde $\geq$ bağıntısını

$$\text{“}(T_s,U_t)\geq(V_s,W_t)\Leftrightarrow T_s\subseteq V_s \text{ ve } U_t\subseteq W_t\text{"}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{B}_s\times\mathcal{B}_t$ kümesi $\geq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş bir kümedir. Açıkça, $(T_s,U_t)\in\mathcal{B}_s\times\mathcal{B}_t$ ise

$$T_s\bigcap U_t\neq\emptyset$$

dur. Böylece $T_s\bigcap U_t$ kümesinden $s_{(T,U)}$ gibi bir eleman seçebiliriz. Yani bir $\left(s_{(T,U)}\right)$ ağı oluşturabiliriz.

Şimdi $\left(s_{(T,U)}\right)$ ağının hem s ye hem de t ye yakınsadığını gösterelim. T_s, s nin bir komşuluğu U_t de t nin bir komşuluğu olsun. Yani $s\in T_s$, $t\in U_t$ ve $T_s, U_t\in\mathcal{T}$ olsun. Bu durumda

$$(V_s,W_t)\geq(T_s,U_t)$$

özelliğindeki her $(V_s,W_t)\in\mathcal{B}_s\times\mathcal{B}_t$ için

$$V_s\subseteq T_s,\ W_t\subseteq U_t$$

olur. Böylece

$$s_{(V_s,W_t)}\in V_s\bigcap W_t\subseteq T_s\bigcap U_t$$

olacağından

$$s_{(V_s,W_t)}\in T_s \text{ ve } s_{(V_s,W_t)}\in U_t$$

olur. Böylece

$$\left(s_{(T,U)}\right)_{(T,U)\in\mathcal{B}_s\times\mathcal{B}_t}$$

ağı hem s ye hem de t ye yakınsar. Bu ise (b) ile çelişir. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.✓

Teorem 9.40.

$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir.
b) f fonksiyonu yakınsak ağların limitini korur.

İSPAT:

a)⇒ b). $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı $(X,\mathcal{T})$ uzayında yakınsak ve $x_\alpha\to x$ olsun. $(f(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ ağının $f(x)$ noktasına yakınsadığını gösterelim. $U\in\mathcal{T}_2$ ve $f(x)\in U$ olsun. Bu durumda $x\in f^{-1}(U)$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_1$ dir. Diğer yandan $x_\alpha\to x$ olduğundan $\alpha\geq\alpha_0$ olduğunda $x_\alpha\in f^{-1}(U)$ olacak şekilde bir $\alpha_0\in\Lambda$ vardır. Böylece $\alpha\geq\alpha_0$ olduğunda $f(x_\alpha)\in U$ olur. O halde $f(x_\alpha)\to f(x)$ dir. Yani f fonksiyonu yakınsak ağların limitlerini korur.

b)$\Rightarrow$ **a).** f nin sürekli olmadığını kabul edelim. Teorem 6.22 gereğince $f\left(\overline{A}\right) \not\subseteq \overline{f(A)}$ olacak şekilde bir $A \subseteq X$ vardır. O halde $y \in f\left(\overline{A}\right) \setminus \overline{f(A)}$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. Böylece $y \in f\left(\overline{A}\right)$ olduğundan $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in \overline{A}$ vardır. Teorem 9.36 gereğince $x_\alpha \to x$ olacak şekilde A da bir (x_α) ağı vardır. (b) gereğince $f(x_\alpha) \to f(x) = y$ dir. Böylece y noktası $f(A)$ nın elemanlarından oluşan bir ağın limitidir. Teorem 9.36 gereğince $y \in \overline{f(A)}$ dır. Bu durumda $y \notin f\left(\overline{A}\right) \setminus \overline{f(A)}$ olur. Bu ise $y \in f\left(\overline{A}\right) \setminus \overline{f(A)}$ olması ile çelişir. O halde f fonksiyonu süreklidir.✔

9.4. Alıştırmalar

1. $(X,\mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda x noktasının A nın bir limit noktası olması için gerek ve yeter şart $A \setminus \{x\}$ kümesinde x noktasına yakınsayan bir dizinin olmasıdır, ispatlayınız.

2. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda x noktasının A nın bir limit noktası olması için gerek ve yeter şart $A \setminus \{x\}$ kümesinde x noktasına yakınsayan bir ağın olmasıdır, ispatlayınız.

3. Bir X kümesi üzerinde denk iki metrik d_1 ve d_2 olsun. (X,d_2) uzayında $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şartın (X,d_1) uzayında $x_n \to x$ olması gerektiğini ispatlayınız.

4.

a) (X,d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere $x_n \to x$ olsun. $A = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin (X,d) de kapalı olduğunu gösteriniz

b) (a) yı kullanarak $\{2\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ de kapalı olduğunu gösteriniz.

c) $\left\{2 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ de kapalı olmadığını gösteriniz.

5. Örnek 2.11 da tanımlanan $(\mathscr{C}(0,100), d_\infty)$ uzayı verilsin.

a) $A = \{x \in \mathscr{C}(0,100) \mid x(0) = 0\}$ kümesinin kapalı olup olmadığını araştırınız.

b) $B = \{x \in \mathscr{C}(0,100) \mid t = 0,1,2,\cdots,100$ için $x(t) = t\}$ kümesinin kapalı olup olmadığını araştırınız.

c) $C = \{x \in \mathscr{C}(0,100) \mid$bazı $t = 0,1,2,\cdots,100$ için $x(t) = t\}$ kümesinin kapalı olup olmadığını araştırınız.

6. Örnek 2.11 de tanımlanan $(\mathscr{C}(a,b), d_\infty)$ uzayında

$$A = \{x \in \mathscr{C}(a,b) \mid x : [a,b] \to [c,d] \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

kümesinin kapalı olup olmadığını araştırınız.

7.

a) $\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Q}$ kümesinin kapalı olup olmadığını Teorem 9.18 ü kullanarak araştırınız.

b) $\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesinin kapalı olup olmadığını Teorem 9.18 ü kullanarak araştırınız.

8. $(X,\mathcal{T})$ bir kaba uzay ve $A \neq X$ ve $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. Teorem 9.19 ü kullanarak A kümesinin kapalı olup olmadığını araştırınız.

9.5. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

$(X,\mathcal{T})$ birinci sayılabilir olduğundan her $x \in X$ noktasının her $n \in \mathbb{N}$ için

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \cdots$$

olmak üzere $\mathcal{N}_x = \{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde sayılabilir bir tabanı vardır.

$\Rightarrow$). x noktasının A kümesinin bir limit noktası olduğunu kabul edelim. Tanım 5.1 gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $N_n \cap (A\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in N_n \cap (A\setminus\{x\})$ olacak şekilde bir x_n seçebiliriz. Bu şekilde $A\setminus\{x\}$ de bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. Şimdi bu dizinin x noktasına yakınsadığını gösterelim. $N_{n_0} \in \mathcal{N}_x$ olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ ise $N_n \subseteq N_{n_0}$ ve $x_n \in N_n$ olacağından $x_n \in N_{n_0}$ olur. O halde (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

$\Leftarrow$). Tersine, $A\setminus\{x\}$ kümesinde x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisinin olduğunu kabul edelim. $x \in N_n$ ve $N_n \in \mathcal{N}_x$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisi x noktasına yakınsadığından $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in N_n$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ için $x_n \in N_n \cap (A\setminus\{x\})$ dır. Böylece her $N_n \in \mathcal{N}_x$ için $N_n \cap (A\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. O halde x noktası A kümesinin bir limit noktasıdır.✔

ÇÖZÜM 2

$\Rightarrow$). x noktasının A kümesinin bir limit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ (veya her $U \in \mathcal{B}_x$) için Tanım 5.1 gereğince $U \cap (A\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. Böylece her $U \in \mathcal{T}$ için $x_U \in U \cap (A\setminus\{x\})$ olacak şekilde bir x_U seçebiliriz. Bu şekilde A da bir (x_U) ağı oluşturabiliriz. Örnek 9.35 gereğince $(x_U)_{U\in\mathcal{B}_x}$ ağı x noktasına yakınsar.

$\Leftarrow$). Tersine, $A\setminus\{x\}$ kümesinde x noktasına yakınsayan bir $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının olduğunu kabul edelim. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı x noktasına yakınsadığından $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ vardır. Bu durumda $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in U \cap (A\setminus\{x\})$ olur. Böylece $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $U \cap (A\setminus\{x\}) \neq \emptyset$ dur. O halde x noktası A kümesinin bir limit noktasıdır.✔

ÇÖZÜM 3

$\Rightarrow$). (X,d_2) uzayında $x_n \to x$ olsun ve $B_{d_1}(x,\varepsilon)$ verilsin. Bu durumda metrikler denk olduklarından $B_{d_1}(x,\varepsilon)$ kümesi (X,d_2) uzayında açıktır. $x \in B_{d_1}(x,\varepsilon)$ ve (X,d_2) uzayında $x_n \to x$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki n ler için $x_n \in B_{d_1}(x,\varepsilon)$ olacak şekilde vardır. O halde (X,d_1) uzayında $x_n \to x$ dir.

$\Leftarrow$). (X,d_1) uzayında $x_n \to x$ olsun ve $B_{d_2}(x,\varepsilon)$ verilsin. Bu durumda metrikler denk olduklarından $B_{d_2}(x,\varepsilon)$ kümesi (X,d_1) uzayında açıktır. $x \in B_{d_2}(x,\varepsilon)$ ve (X,d_1) uzayında $x_n \to x$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki n ler için $x_n \in B_{d_2}(x,\varepsilon)$ olacak şekilde vardır. O halde (X,d_2) uzayında $x_n \to x$ dir.✔

ÇÖZÜM 4

a) $y_n \in A$ olmak üzere $y_n \to y$ olsun. x noktası (y_n) dizisi içinde sonsuz defa tekrar ediyorsa (x) sabit dizisi (y_n) nin bir alt dizisi olur ve (x) sabit dizisi x e yakınsar. Yakınsak bir dizinin yakınsak olan her alt dizisinde dizinin limitine yakınsayacağından $x = y$ dir. Böylece $x \in A$ olduğundan $y \in A$ olur. x noktası (y_n) dizisi içinde sonlu defa tekrar ediyorsa x in (y_n) dizisinden atılmasıyla (y_n) nin bir (z_n) alt dizisi elde edilir. (z_n) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisidir. Üstelik $z_n \to y$ dir. Diğeryandan $x_n \to x$ olduğundan $z_n \to x$ dir. Böylece $x = y$ dir. $x \in A$ olduğundan $y \in A$ dır. Teorem 9.19 gereğince A kapalıdır.

b) $2 - \frac{1}{n} \to 2$ olduğundan (a) gereğince

$$\{2\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi kapalıdır.

c) $2 - \frac{1}{n} \to 2$ ve

$$2 \notin \left\{2 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

olduğundan Teorem 9.19 gereğince

$$\left\{2 - \frac{1}{r} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi kapalı değildir.✔

ÇÖZÜM 5

a) $x_n \in A$ ve $x_n \to x$ olsun. Bu durumda $x \in \mathscr{C}(0,100)$ dür. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ olduğundan $x_n(0) = 0$ dır. Yani $(x_n(0))$ dizisi (0) sabit dizisidir. $x_n \to x$ olduğundan Örnek 2.59

gereğince her $t \in [0,100]$ için $x_n(t) \to x(t)$ ve dolayısıyla $x_n(0) \to x(0)$ dır. $x_n(0) \to 0$ ve metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin tek bir limiti olduğundan $x(0) = 0$ dır. O halde $x \in A$ dır. Böylece Teorem9.19 gereğince A kapalıdır.

b) $i = 0,1,2,\cdots n$ için $A_i = \{x \in \mathscr{C}(0,100) \mid x(i) = i\}$ kümesinin kapalı olduğu (a) ya benzer şekilde gösterilir. $B = \bigcap_{i=0}^{100} A_i$ ve kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan B kapalıdır.

c) $i = 0,1,2,\cdots n$ için $A_i = \{x \in \mathscr{C}(0,100) \mid x(i) = i\}$ kümesinin kapalı olduğu (a) ya benzer şekilde gösterilir. $C = \bigcup_{i=0}^{100} A_i$ ve sonlu sayıdaki kapalı kümelerin birleşimi kapalı olduğundan C kapalıdır.✔

ÇÖZÜM 6

$x_n \in A$ ve $x_n \to x$ olsun. Bu durumda $x \in \mathscr{C}(a,b)$ dir. Her $t \in [a,b]$ için $x_n(t) \to x(t)$ dir. $x_n \in A$ olduğundan $x_n : [a,b] \to [c,d]$ dir. Böylece her $t \in [a,b]$ için $x_n(t) \in [c,d]$ dir. $[c,d]$ kapalı olduğundan Teorem 9.19 gereğince $x(t) \in [c,d]$ dir. O halde $x : [a,b] \to [c,d]$ ve dolayısıyla $x \in A$ dır. Böylece Teorem 9.19 gereğince A kapalıdır.✔

ÇÖZÜM 7

a)

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ x_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12},\ x_4 = \frac{577}{408},\cdots$$

dizisi $\mathbb{Q}$ da bir dizidir ve $x_n \to \sqrt{2}$ dir. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğundan Teorem9.18 gereğince $\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.

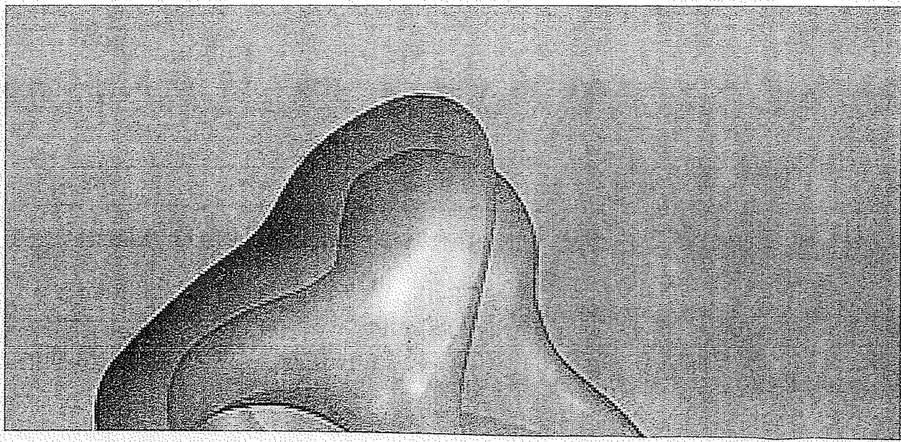
b)

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ x_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12},\ x_4 = \frac{577}{408},\cdots$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = \sqrt{2}x_n$ olsun. Bu durumda (y_n) dizisi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ da bir dizi olur. Üstelik, $y_n \to 2$ dir. $2 \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ olduğundan Teorem9.18 gereğince $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.✔

ÇÖZÜM 8

$x_n \in A$ ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda Örnek 9.7 gereğince $x_n \to x$ dir. $x \notin A$ olduğundan Teorem 9.19 gereğince A kapalı değildir.✔



10. Çarpım Uzayları

Bilinen topolojik uzaylardan yeni topolojik uzayların elde edilebileceğini biliyoruz. Bunların en önemlileri "alt uzaylar", "çarpım uzayları" ve "bölüm uzayları" dır. Bu bölümde çarpım uzaylarını inceleyeceğiz.

Burada tartışacağımız problem şudur. J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzaylar kolleksiyonu verildiğinde $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım kümesi üzerinde uygun bir $\mathcal{T}$ topolojisini nasıl tanımlarız? $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ olmak üzere $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ şeklindeki bütün kümelerin kolleksiyonu $\mathcal{T}$ olmaya açık bir adaydır. Ne yazık ki bu şekilde tanımlanan $\mathcal{T}$ kolleksiyonu bir topoloji değildir. Bununla beraber Örnek 4.7 gereğince

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

kolleksiyonu $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı ve Örnek 4.32 gereğince

$$\mathcal{B} = \left\{(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n) \mid i = 1,2,\cdots,n \text{ için } a_i, b_i \in \mathbb{R}\right\}$$

kolleksiyonunun $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin tabanı olduğunu biliyoruz. Aslında bu örnek bize genel olarak çarpım topolojisinin nasıl tanımlanabileceğini gösterir.

Çarpım uzaylarını daha anlaşılır kılmak için önce sonlu sayıdaki uzayların çarpımını ve daha sonrada keyfi sayıdaki uzayların çarpımını vereceğiz.

10.1. Sonlu Çarpımlar

Teorem 10.1.

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B}_ç = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$$

kolleksiyonu $X \times Y$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_ç$ topolojisinin tabanıdır.

İSPAT: $\mathscr{B}_ç$ nin Teorem 4.14 un (STB-1) ve (STB-2) şartlarını sağladığını gösterelim.

STB-1). $X \in \mathcal{T}_1$ ve $Y \in \mathcal{T}_2$ olduğundan $X \times Y \in \mathscr{B}_ç$ dir. Yani Teorem 4.14(STB-1) şartı sağlanır.

STB-2). $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathscr{B}_ç$ olsun. Bu durumda

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

dir. Üstelik, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_1$ ve $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}_2$ olduğundan $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \in \mathscr{B}_ç$ dir. O halde Teorem 4.14(STB-2) şartı da sağlanır.

Teorem 4.14 gereğince $\mathscr{B}_ç$ kolleksiyonu $X \times Y$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_ç$ topolojinin tabanıdır.✓

TANIM 10.2. ▷ **Çarpım topolojisi**
Teorem 10.1 de tanımlanan $\mathcal{T}_ç$ topolojisine $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojilerinin çarpımı denir ve $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ şeklinde gösterilir. $(X \times Y, \mathcal{T}_ç)$ uzayınada $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarının çarpım uzayı denir. $X = Y$ ve $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ ise çarpım topolojisi $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}^2$ ve çarpım uzayı $(X^2, \mathcal{T}^2)$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 10.3. ▷
$X = \{a, b\}$, $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ ve $Y = \{x, y\}$, $\mathcal{T}_2 = \{Y, \emptyset, \{x\}\}$ olmak üzere $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ yi bulalım.

ÇÖZÜM:

$$X \times Y = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y)\}$$

ve

$$\mathscr{B}_ç = \{X \times Y, \emptyset, X \times \{x\}, \{a\} \times Y, \{a\} \times \{x\}\} = \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x),(b,x)\}, \{(a,x),(a,y)\}, \{(a,x)\}\}$$

olur. Buradan

$$\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 = \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x),(b,x)\}, \{(a,x),(a,y)\}, \{(a,x)\}, \{(a,x),(b,x),(a,y)\}\}$$

elde edilir.

ÖRNEK 10.4. ▷
$X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ ve $Y = \{x, y\}$, $\mathcal{T}_2 = \{Y, \emptyset, \{x\}\}$ olmak üzere $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ yi bulalım.

ÇÖZÜM:

$$X \times Y = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_ç &= \{X \times Y, \emptyset, X \times \{x\}, \{a\} \times Y, \{a\} \times \{x\}, \{b,c\} \times Y, \{b,c\} \times \{x\}\} \\ &= \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x),(b,x),(c,x)\}, \{(a,x),(a,y)\}, \{(a,x)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}, \\ &\quad \{(b,x),(c,x)\}\}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_ç &= \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2\\ &= \{X\times Y, \emptyset, \{(a,x),(b,x),(c,x)\}, \{(a,x),(a,y)\}, \{(a,x)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\},\\ &\quad \{(b,x),(c,x)\}, \{(a,x),(b,x),(c,x),(a,y)\}, \{(a,x),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}\}\end{aligned}$$

elde edilir.✍

Teorem 10.5. ▶

$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\mathcal{S}_1 = \{\pi_1^{-1}(U) | U \in \mathcal{T}_1\} = \{U\times Y | U\in\mathcal{T}_1\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{\pi_2^{-1}(V) | V\in\mathcal{T}_2\} = \{X\times V | V\in\mathcal{T}_2\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{S}_ç = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$$

kolleksiyonu $X\times Y$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ çarpım topolojisinin bir alt tabanıdır.

İSPAT: Teorem 4.46 gereğince $\mathcal{S}_ç$ kolleksiyonu $X\times Y$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanıdır. Şimdi, $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}$ olduğunu gösterelim.

$\pi_1^{-1}(U)\in\mathcal{S}_1$ ise

$$\pi_1^{-1}(U) = U\times Y$$

olduğundan $\mathcal{B}_ç$ nin tanımı gereğince

$$\pi_1^{-1}(U)\in\mathcal{B}_ç$$

ve $\mathcal{B}_ç\subseteq\mathcal{T}_ç$ olduğundan

$$\pi_1^{-1}(U)\in\mathcal{T}_ç$$

olur. Yani $\mathcal{S}_1\subseteq\mathcal{T}_ç$ olur. Benzer şekilde $\pi_2^{-1}(V)\in\mathcal{S}_2$ ise $\pi_2^{-1}(V) = X\times V$ olduğundan $\mathcal{B}_ç$ nin tanımı gereğince

$$\pi_2^{-1}(V)\in\mathcal{B}_ç$$

ve $\mathcal{B}_ç\subseteq\mathcal{T}_ç$ olduğundan

$$\pi_2^{-1}(V)\in\mathcal{T}_ç$$

olur. Böylece

$$\mathcal{S}_2\subseteq\mathcal{T}_ç$$

olur. Bu durumda

$$\mathcal{S}_ç = \mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_1\subseteq\mathcal{T}_ç$$

olur. $\mathcal{T}_ç$ bir topoloji olduğundan $\mathcal{S}_ç$ ye ait sonlu sayıdaki elemanların arakesitleri $\mathcal{T}_ç$ ye aittir. $\mathcal{T}_ç$ bir topoloji olduğundan $\mathcal{S}_ç$ ye ait sonlu sayıdaki elemanların arakesitlerinin keyfi birleşimi yine $\mathcal{T}_ç$ ye aittir. Dolayısıyla

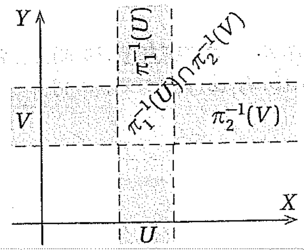
$$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_ç \tag{10.1}$$

dir.

$U\times V\in\mathcal{B}_ç$ ise

$$U\times V = \pi_1^{-1}(U)\cap\pi_2^{-1}(V)$$

olur. $\pi_1^{-1}(U), \pi_2^{-1}(V)\in\mathcal{S}_ç$ ve $\mathcal{S}_ç\subseteq\mathcal{T}$ olduğundan $U\times V\in\mathcal{T}$ olur. Böylece $\mathcal{B}_ç\subseteq\mathcal{T}$ olur.



Şekil 10.1

$\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan $\mathcal{B}_ç$ ye ait kümelerin keyfi birleşimleri $\mathcal{T}$ ya aittir. Dolayısıyla

$$\mathcal{T}_ç \subseteq \mathcal{T} \tag{10.2}$$

dur.

(10.1) ve (10.2) gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{T}_ç$ elde edilir. Böylece $\mathcal{S}_ç$, $\mathcal{T}_ç$ nin bir alt tabanıdır. (Şekil 10.1 ye bakınız.)✔

ÖRNEK 10.6. ▷
$X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ ve $Y = \{x, y\}$, $\mathcal{T}_2 = \{Y, \emptyset, \{x\}\}$ olmak üzere $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi $\mathcal{T}_ç$ olsun. $\mathcal{T}_ç$ nin
a) Bir alt tabanını bulalım. b) Bir tabanını bulalım c) $\mathcal{T}_ç = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ yi bulalım.

ÇÖZÜM:

$$X \times Y = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

olur.

a) Bu durumda

$$\pi_1^{-1}(X) = X \times Y, \quad \pi_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi_1^{-1}(\{a\}) = \{(a,x),(a,y)\},$$
$$\pi_1^{-1}(\{b,c\}) = \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

ve

$$\pi_2^{-1}(Y) = X \times Y, \quad \pi_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi_2^{-1}(\{x\}) = \{(a,x),(b,x),(c,x)\}$$

olduğundan

$$\mathcal{S}_1 = \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x),(a,y)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}\}$$

ve

$$\mathcal{S}_2 = \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x),(b,x),(c,x)\}\}$$

olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_ç &= \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \\ &= \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x),(a,y)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}, \{(a,x),(b,x),(c,x)\}\} \end{aligned}$$

olur.

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_ç = \; & \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x)\}, \{(b,x),(c,x)\}, \{(a,x),(a,y)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}, \\ & \{(a,x),(b,x),(c,x)\}\} \end{aligned}$$

olur.

c) (b) den

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_ç &= \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \\ &= \{X \times Y, \emptyset, \{(a,x)\}, \{(b,x),(c,x)\}, \{(a,x),(a,y)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}, \\ & \quad \{(a,x),(b,x),(c,x)\}, \{(a,x),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}, \\ & \quad \{(a,x),(a,y),(b,x),(c,x)\}\} \end{aligned}$$

elde edilir.✍

Teorem 10.7. ▷

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $\mathcal{B}_1$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_1$ in bir tabanı, $\mathcal{B}_2$ kolleksiyonuda $\mathcal{T}_2$ nin bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_ç = \{B_1 \times B_2 | B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

kolleksiyonu $X \times Y$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır.

İSPAT: $\mathcal{D}_ç \subseteq \mathcal{B}_ç$ ve $\mathcal{B}_ç \subseteq \mathcal{T}_ç$ olduğundan $\mathcal{D}_ç \subseteq \mathcal{T}_ç$ olur.

$W \in \mathcal{T}_ç$ ve $(x, y) \in W$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_ç$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin bir tabanı olduğundan Teorem 4.9 gereğince $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}_1$ ve bir $V \in \mathcal{T}_2$ vardır. $\mathcal{B}_1$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_1$ in bir tabanı ve $\mathcal{B}_2$ kolleksiyonuda $\mathcal{T}_2$ nin bir tabanı olduğundan Teorem 4.9 gereğince $x \in B_1 \subseteq U$ ve $y \in B_2 \subseteq V$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ve bir $B_2 \in \mathcal{B}_2$ vardır. Bu durumda $(x, y) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq W$ dur. Böylece, $\mathcal{D}_ç$ kolleksiyonu Teorem 4.9 gereğince $\mathcal{T}_ç$ nin bir tabanıdır.✔

ÖRNEK 10.8. ▷

$(X, \mathcal{T}_1) = (Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları $\mathbb{R}$ standart uzayı olsun. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin standart topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dir. Diğer yandan $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı $\mathcal{B} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ dir. Böylece

$$\mathcal{D}_ç = \{(a, b) \times (c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

kolleksiyonu $X \times Y$ kümesi yani $\mathbb{R}^2$ üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır. Örnek 4.32 gereğince $\mathcal{D}_ç$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topolojinin tabanı olduğundan $\mathbb{R}^2$ üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisi ile standart topoloji aynıdır.✍

Teorem 10.9. ▷

$I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ olmak üzere her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{T}_i)$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_ç &= \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \,\middle|\, U_i \in \mathcal{T}_i \right\} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n | \, i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } U_i \in \mathcal{T}_i\} \\
&= \{\pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n) | \, i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } U_i \in \mathcal{T}_i\} \\
&= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i) \,\middle|\, i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } U_i \in \mathcal{T}_i \right\}
\end{aligned}$$

kolleksiyonu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_ç$ topolojisinin tabanıdır.

İSPAT: $\mathcal{B}_ç$ nin Teorem 4.14 deki (STB-1) ve (STB-2) şartlarını sağladığını gösterelim.

STB-1). Her $i \in I$ için $X_i \in \mathcal{T}_i$ olduğundan $\prod_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{B}_ç$ dir. Bu durumda Teorem

4.14(STB-1) şartı sağlanır.

STB-2). $\prod_{i=1}^{n} U_i, \prod_{i=1}^{n} V_i \in \mathscr{B}_ç$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)\cap\left(\prod_{i=1}^{n} V_i\right) &= (U_1\times U_2\times\cdots\times U_n)\cap(V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)\\ &= (U_1\cap V_1)\times(U_2\cap V_2)\times\cdots\times(U_n\cap V_n)=\prod_{i=1}^{n}(U_i\cap V_i)\end{aligned}$$

ve $i=1,2,\cdots,n$ için $U_i\cap V_i\in\mathcal{T}_i$ olduğundan $\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)\cap\left(\prod_{i=1}^{n} V_i\right)\in\mathscr{B}_ç$ dir. Bu durumda Teorem 4.14(STB-2) şartıda sağlanır.

Teorem 4.14 gereğince $\mathscr{B}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_ç$ topolojinin tabanıdır. ✔

TANIM 10.10. ▶ Çarpım topolojisi
Teorem 10.9 de tanımlanan $\mathcal{T}_ç$ topolojisine $\mathcal{T}_i$ topolojilerinin çarpımı denir ve $\mathcal{T}_ç=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i$ şeklinde gösterilir. $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i,\mathcal{T}_ç\right)$ uzayınada $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzaylarının çarpım uzayı denir. $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$ ve $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2=\cdots=\mathcal{T}_n=\mathcal{T}$ ise çarpım topolojisi $\mathcal{T}_ç=\mathcal{T}^n$ ve çarpım uzayıda $(X^n,\mathcal{T}^n)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 10.11. ▷

$I=\{1,2,3,\cdots,n\}$ olmak üzere her $i\in I$ için $(X_i,\mathcal{T}_i)$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $i\in I$ için

$$\mathscr{S}_i=\{\pi_i^{-1}(U_{i_k})\,|\,U_{i_k}\in\mathcal{T}_i\}=\{X_1\times X_2\times\cdots X_{i-1}\times U_{i_k}\times X_{i+1}\times\cdots\times X_n\,|\,U_{i_k}\in\mathcal{T}_i\}$$

olmak üzere

$$\mathscr{S}_ç=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{S}_i$$

kolleksiyonu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_ç=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i$ çarpım topolojisinin bir alt tabanıdır.

İSPAT: Teorem 4.46 gereğince $\mathscr{S}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin alt tabanıdır. Şimdi, $\mathcal{T}_ç=\mathcal{T}$ olduğunu gösterelim.

$\pi_i^{-1}(U_{i_k})\in\mathscr{S}_i$ ise

$$\pi_i^{-1}(U_{i_k})=X_1\times X_2\times\cdots X_{i-1}\times U_{i_k}\times X_{i+1}\times\cdots\times X_n$$

olduğundan $\mathscr{B}_ç$ nin tanımı gereğince $\pi_i^{-1}(U_{i_k})\in\mathscr{B}_ç$ dir. Böylece $\pi_i^{-1}(U_{i_k})\in\mathcal{T}_ç$ olur. O halde her $i=1,2,\cdots,n$ için $\mathscr{S}_i\subseteq\mathcal{T}_ç$ dir. Böylece $\mathscr{S}_ç\subseteq\mathcal{T}_ç$ olur. $\mathcal{T}_ç$ bir topoloji olduğundan $\mathscr{S}_ç$ ye ait sonlu sayıdaki elemanların bütün arakesitleri $\mathcal{T}_ç$ ya aittir. Bu durumda $\mathcal{T}_ç$ bir topoloji olduğundan $\mathscr{S}_ç$ ye ait sonlu sayıdaki elemanların arakesitlerinin keyfi birleşimi yine $\mathcal{T}_ç$ ya aittir. Böylece

$$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_ç \qquad (10.3)$$

olur.

Eğer $\prod_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{B}_ç$ ise

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} U_i &= (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n)\\ &= (U_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \bigcap (X_1 \times U_2 \times \cdots \times X_n) \bigcap \cdots \bigcap (X_1 \times X_2 \times \cdots \times U_n)\\ &= \pi_1^{-1}(U_1) \bigcap \pi_2^{-1}(U_2) \bigcap \cdots \bigcap \pi_n^{-1}(U_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)\end{aligned}$$

dir. Her $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{S}_i \subseteq \mathscr{S}_ç \subseteq \mathcal{T}$$

olduğundan $\prod_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$ olur. Böylece $\mathscr{B}_ç \subseteq \mathcal{T}$ dur. O halde $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan $\mathscr{B}_ç$ ye ait kümelerin keyfi birleşimleri $\mathcal{T}$ ya aittir. O halde

$$\mathcal{T}_ç \subseteq \mathcal{T} \tag{10.4}$$

dur.

(10.3) ve (10.4) gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{T}_ç$ elde edilir. Böylece $\mathscr{S}_ç$, $\mathcal{T}_ç$ nin bir alt tabanıdır.✔

Teorem 10.12. ▷

$I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ olmak üzere her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{T}_i)$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{B}_i$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_i$ nin bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\mathscr{D}_ç = \left\{ \prod_{i=1}^{n} B_i \,\middle|\, B_i \in \mathscr{B}_i \right\} = \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n | i = 1, 2, \cdots, n \text{ için } B_i \in \mathscr{B}_i\}$$

kolleksiyonu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır.

İSPAT: $\mathscr{D}_ç \subseteq \mathscr{B}_ç$ ve $\mathscr{B}_ç \subseteq \mathcal{T}_ç$ olduğundan $\mathscr{D}_ç \subseteq \mathcal{T}_ç$ olur.

$W \in \mathcal{T}_ç$ ve $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$ olsun. Bu durumda

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq W$$

olacak şekilde bir $U_i \in \mathcal{T}_i$ vardır. $\mathscr{B}_i$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_i$ nin bir tabanı olduğundan Teorem 4.9 gereğince $x_i \in B_i \subseteq U_i$ olacak şekilde bir $B_i \in \mathscr{B}_i$ vardır. Bu durumda

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \subseteq U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq W$$

olur. Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{D}_ç$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_ç$ nin bir tabanıdır.✔

ÖRNEK 10.13. ▷

$I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ olmak üzere $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topolojik uzayı $\mathbb{R}$ standart uzayı olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin standart topoloji olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ dir. Diğer yandan $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin bir tabanı $\mathscr{B} = \{(a,b)\,|\,a,b \in \mathbb{R}\}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_ç &= \left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \,\middle|\, a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n) \,|\, i = 1,2,\cdots,n \text{ için } a_i, b_i \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

kolleksiyonu $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır. Örnek 4.32 gereğince $\mathscr{D}_ç$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topolojinin tabanı olduğundan $\mathbb{R}^n$ üzerindeki $\mathcal{T}_ç$ çarpım topolojisi ile standart topoloji aynıdır.

10.2. Keyfi Çarpımlar

Teorem 10.14. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$\mathscr{B}_K = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \right\}$$

kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_K$ topolojisinin tabanıdır.

İSPAT: $\mathscr{B}_K$ kolleksiyonunun Teorem 4.14 un (STB-1) ve (STB-2) şartlarının sağlandığını gösterelim.

STB-1). Her $\alpha \in J$ için $X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ olduğundan $\mathscr{B}_K$ nın tanımı gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha \in \mathscr{B}_K$ dır. Bu durumda Teorem 4.14(STB-1) şartı sağlanır.

STB-2). $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha,\ \prod_{\alpha \in J} V_\alpha \in \mathscr{B}_K$ olsun. Bu durumda

$$\left(\prod_{\alpha \in J} U_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha \in J} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap V_\alpha)$$

ve her $\alpha \in J$ için $U_\alpha \cap V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ olduğundan $\prod_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathscr{B}_K$ dır. Bu durumda Teorem 4.14(STB-2) şartıda sağlanır.

Teorem 4.14 gereğince $\mathscr{B}_K$ kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ üzerinde bir $\mathcal{T}_K$ topolojinin tabanıdır. ✓

TANIM 10.15. ▷ **Kutu topolojisi**

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerinde tabanı $\mathscr{B}_K = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \right\}$ kolleksiyonu olan $\mathcal{T}_K$ topolojisine kutu topolojisi denir.

Teorem 10.16. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve her $\alpha \in J$ için $\mathscr{B}_\alpha$ da $\mathcal{T}_\alpha$ nın bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\mathscr{D}_K = \left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \,\middle|\, B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha \right\}$$

kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_K$ kutu topolojisinin bir tabanıdır.

İSPAT: $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha \in \mathscr{D}_K$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in J$ çin $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha \subseteq \mathcal{T}_\alpha$ olduğundan kutu topolojisinin tanımı gereği $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha \in \mathcal{T}_K$ dır. Böylece $\mathscr{D}_K \subseteq \mathcal{T}_K$ dır.

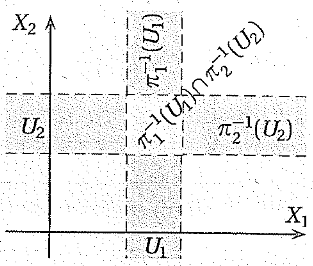
$U \in \mathcal{T}_K$ ve $x = (x_\alpha) \in U$ olsun. Bu durumda $\mathscr{B}_K$, $\mathcal{T}_K$ topolojisinin bir tabanı olduğundan $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq U$ olacak şekilde $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathscr{B}_K$ vardır. Böylece her $\alpha \in J$ için $x_\alpha \in U_\alpha$ ve $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ dur. Diğer yandan $\alpha \in J$ için $\mathscr{B}_\alpha$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_\alpha$ nın bir tabanı olduğundan Teorem 4.9 gereğince $x_\alpha \in B_\alpha \subseteq U_\alpha$ olacak şekilde bir $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ kümesi vardır. Bu durumda $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq U$ dur. Teorem 4.9 gereğince $\mathscr{D}_K$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_K$ nın bir tabanıdır.✓

Teorem 10.17.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ olsun. Her $\alpha \in J$ için

$$\mathscr{S}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \mid U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_\alpha\} \quad \text{ve} \quad \mathscr{S}_ç = \bigcup_{\alpha \in J} \mathscr{S}_\alpha$$

olsun. Bu durumda $\mathscr{S}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_ç$ toplolojisinin alt tabanıdır. (Şekil 10.2 e bakınız.)



Şekil 10.2

İSPAT: Teorem 4.46 gereğince $\mathscr{S}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}_ç$ topolojisinin alt tabanıdır.✓

NOT 10.18.

1. $\mathscr{S}_ç$, $\mathcal{T}_ç$ nin alt tabanı olduğundan

$$\mathscr{B}_ç = \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \,\middle|\, I \text{ sonlu, } I \subseteq J \text{ ve } U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_\alpha \right\}$$

kolleksiyonu $\mathcal{T}_ç$ nin bir tabanıdır.

2. Eğer $\pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}), \pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{S}_\alpha$ ise $U_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_\alpha$ ve

$$\pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \cap \pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha_i}) = \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i})$$

olduğundan $\pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \cap \pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{S}_\alpha$ olur. Bu durumda $\mathscr{S}_\alpha$ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine $\mathscr{S}_\alpha$ ya ait olur. O halde $\mathcal{T}$ nun tabanı olan

$$\mathscr{B}_ç = \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \,\middle|\, I \text{ sonlu, } I \subseteq J \text{ ve } U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_\alpha \right\}$$

nın elemanları oluşturulurken $\mathscr{S}_ç$ den seçilen elemanların farklı $\mathscr{S}_\alpha$ lardan alınması yeterlidir. Böylece $\mathscr{B}_ç$ nin herhangi bir B elemanı $\alpha_1, \alpha_2.\cdots, \alpha_n$ elemanları J nin farklı elemanları ve $i = 1,2,\cdots,n$ için $U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ olmak üzere

$$B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

olması için gerek ve yeter şart $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2.\cdots, \alpha_n$ için $X_\alpha = U_\alpha$ olmak üzere

$$B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$$

olması gerektiğinden

$$\mathscr{B}_ç = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } X_\alpha = U_\alpha \right\}$$

dır. Yani

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_ç &= \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \,\middle|\, I \text{ sonlu, } I \subseteq J \text{ ve } U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_\alpha \right\} \\ &= \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } X_\alpha = U_\alpha \right\} \end{aligned}$$

dir.

TANIM 10.19. ▷ **Çarpım topolojisi**
$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki alt tabanı Teorem 10.17 daki $\mathscr{S}_ç$ (tabanı $\mathscr{B}_ç$) olan $\mathcal{T}_ç$ topolojisine çarpım topolojisi denir ve $\mathcal{T}_ç = \prod_{\alpha \in J} \mathcal{T}_\alpha$ şeklinde gösterilir. $\left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \mathcal{T}_ç\right)$ uzayınada $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ uzaylarının çarpım uzayı denir.

Teorem 10.20. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve her $\alpha \in J$ için $\mathscr{B}_\alpha$ da $\mathcal{T}_\alpha$ nın bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathscr{D} &= \left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \,\middle|\, B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha, \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } X_\alpha = B_\alpha \right\} \\ &= \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} \pi_\alpha^{-1}(B_{\alpha_i}) \,\middle|\, I \text{ sonlu, } I \subseteq J \text{ ve } B_{\alpha_i} \in \mathscr{B}_\alpha \right\} \end{aligned}$$

kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_ç = \prod_{\alpha \in J} \mathcal{T}_\alpha$ çarpım toplolojisinin bir tabanıdır.

İSPAT: Sonuç 4.31 yı kullanarak ispatı yapalım.

a) Her $\alpha \in J$ için $\mathscr{B}_\alpha \subseteq \mathcal{T}_\alpha$ olduğundan çarpım topolojisinin tanımı gereğince $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha \in$

$\mathcal{D}$ ise $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \in \mathcal{B}_ç$ dir. O halde $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in J} B_\alpha$ ve $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \in \mathcal{D}$ ise $x = (x_\alpha) \in B \subseteq \prod_{\alpha\in J} B_\alpha$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}_ç$ $(B = \prod_{\alpha\in J} B_\alpha)$ vardır.

b) $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \in \mathcal{B}_ç$ ve $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in J$ için $x_\alpha \in U_\alpha$ dır. Diğer yandan $\mathcal{B}_ç$ nin tanımı gereğince her $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha = X_\alpha$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in J$ vardır. $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $B_\alpha = X_\alpha$ olsun. $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $\mathcal{B}_\alpha$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_\alpha$ nın bir tabanı olduğundan $x_\alpha \in B_\alpha \subseteq U_\alpha$ olacak şekilde bir $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ vardır. Böylece $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in J} B_\alpha$ ve $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \in \mathcal{D}$ dir. Üstelik, $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ dır.

Sonuç 4.31 gereğince $\mathcal{D}$ ile $\mathcal{B}_ç$ tabanları denktir. Böylece $\mathcal{D}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}_ç = \prod_{\alpha\in J} \mathcal{T}_\alpha$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır.✓

SONUÇ 10.21. ▷ J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_K$ kutu topolojisi $\mathcal{T}_ç = \prod_{\alpha\in J} \mathcal{T}_\alpha$ çarpım topolojisinden daha incedir.

İSPAT: $U \in \mathcal{B}_ç$ ve $x = (x_\alpha) \in U$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha = X_\alpha$ olmak üzere $U = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\mathcal{B}_K$ nın tanımı gereğince $U \in \mathcal{B}_K$ dır. Yani $x = (x_\alpha) \in V \subseteq U$ olacak şekilde $(V = U)$ $V \in \mathcal{B}_K$ vardır. Teorem 4.27 gereğince $\mathcal{T}_ç \subseteq \mathcal{T}_K$ dır.✓

Not

$(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzaylarındaki açık kümelerin çarpımı kutu topolojisine göre her zaman açık olmasına rağmen çarpım topolojisine göre açık olmayabilir. Örneğin, her $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $U_\alpha \neq X_\alpha$ ise $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ kümesi kutu topolojisine göre her zaman açıktır. Fakat $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ kümesi çarpım topolojisine göre her zaman açık değildir.

SONUÇ 10.22. ▷ J sonlu bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}_K$ kutu topolojisi ve $\mathcal{T}_ç = \prod_{\alpha\in J} \mathcal{T}_\alpha$ çarpım topolojisi aynıdır. Yani $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_ç$ dir.

Not

Bundan böyle $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ den bir topolojik uzay olarak bahsettiğimizde aksi belirtilmedikçe $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki topolojinin $\mathcal{T}_ç = \prod_{\alpha\in J} \mathcal{T}_\alpha$ çarpım topolojisi olduğu anlaşılacaktır.

Teorem 10.23. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda her $\beta \in J$ için

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$$

izdüşüm (projeksiyon) fonksiyonu sürekli ve açıktır.

İSPAT: Önce, her $\beta \in J$ için π_β fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}_\beta$ olsun. Tanım 10.19 gereğince $\pi_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{S}_ç$ ve böylece $\pi_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{B}_ç$ olur. $\mathcal{B}_ç \subseteq \mathcal{T}_ç$ olduğundan $\pi_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{T}_ç$ dir. O halde π_β süreklidir.

Şimdi, π_β nın açık bir fonksiyon olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{B}_ç$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha = X_\alpha$ olmak üzere $U = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ şeklinde yazılabilir. Diğer yandan $\pi_\beta(U) = U_\beta$ ve $U_\beta \in \mathcal{T}_\beta$ olduğundan Teorem 6.48

Not

Her $\beta \in J$ için π_β fonksiyonu açık olmasına rağmen bu fonksiyonlar kapalı olmak zorunda değildir.

gereğince π_β fonksiyonu açıktır.✔

ÖRNEK 10.24. ⊳
Her $\beta \in J$ için π_β fonksiyonunun kapalı olmak zorunda olmadığını gösteren bir örnek verelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{R}^2$ çarpım (standart) uzayının

$$A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$$

alt kümesi verilsin. Bu durumda A kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalı olmasına rağmen

$$\pi_1(A) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı değildir. (Şekil ?? e bakınız.)✍

Teorem 10.25. ⊳
J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu, $(Y, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve $f : Y \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_\alpha \circ f"'] & \left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \mathcal{T}_ç\right) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
& (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)
\end{tikzcd}$$

a) f fonksiyonu süreklidir.
b) Her $\alpha \in J$ için $\pi_\alpha \circ f$ fonksiyonunun süreklidir.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 10.23 gereğince her $\alpha \in J$ için π_α sürekli olduğundan Teorem 6.14 gereğince $\pi_\alpha \circ f$ süreklidir.

b)⇒ a). $U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m}) \in \mathcal{B}_ç$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_{m-1}}^{-1}(U_{\alpha_{m-1}}) \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})\right) \\
&= f^{-1}\left(\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\right) \cap f^{-1}\left(\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(\pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})\right) \\
&= (\pi_{\alpha_1} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap (\pi_{\alpha_2} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap (\pi_{\alpha_m} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_m})
\end{aligned}$$

dir. Her $\alpha \in J$ için $\pi_\alpha \circ f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $i = 1, 2, \cdots, m$ için $(\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_i})$ kümesi Y de açıktır. Dolayısıyla sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi açık bir küme olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi Y de açıktır. Teorem 6.20 gereğince f fonksiyonu süreklidir.✔

> **Not**
> Teorem 10.25 de $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ üzerindeki çarpım topolojisi yerine herhangi bir topoloji örneğin, kutu topolojisi alınırsa bu teorem doğru olmayabilir.

ÖRNEK 10.26. ⊳
$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ üzerinde kutu topolojisi alınırsa Teorem 10.25 in doğru olmayacağını gösterelim.

ÇÖZÜM: $n \in \mathbb{N}$ için $X_n = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}_n$, $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topoloji olmak üzere $(X_n, \mathcal{T}_n)$ standart uzayı verilsin. $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n = \mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ üzerindeki topoloji $\mathcal{T}_K$ kutu topolojisi olsun. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ fonksiyonu $f(t) = (t, t, \cdots, t, \cdots)$ şeklinde tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(t) = t$ şeklinde tanımlı $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_n \circ f = f_n"'] & \mathbb{R}^{|\mathbb{N}|} \arrow[d, "\pi_n"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için f_n sürekli ve $\pi_n \circ f = f_n$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\pi_n \circ f$ fonksiyonu süreklidir.

b) Şimdi f fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterelim.

$$B = (-1,1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \cdots$$

kümesi $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ üzerindeki $\mathcal{T}_K$ kutu topolojisinin tabanı olan $\mathcal{B}_K$ nın bir elemanı olduğundan $B \in \mathcal{T}_K$ olur. $f^{-1}(B)$ nin $\mathbb{R}$ standart uzayında açık olmadığını gösterelim. $f^{-1}(B)$ nin açık olduğunu varsayalım. Bu durumda $0 \in f^{-1}(B)$ olduğundan $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(B)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu durumda $f((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq B$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\pi_n(f((-\varepsilon, \varepsilon))) \subseteq \pi_n(B)$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\pi_n(f((-\varepsilon, \varepsilon))) = f_n((-\varepsilon, \varepsilon)) = (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{ve} \quad \pi_n(B) = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu ise $\frac{1}{n} < \varepsilon$ özelliğindeki $n \in \mathbb{N}$ ler için doğru olmadığından bir çelişkidir. O halde $f^{-1}(B)$ kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında açık değildir. Teorem 6.9 gereğince f fonksiyonu sürekli olamaz.✍

SONUÇ 10.27. ▷ J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda her bir $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$ fonksiyonunu sürekli kılan $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerindeki en kaba topoloji çarpım topolojisidir.

İSPAT: $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kümesi üzerinde her bir π_α fonksiyonunu sürekli kılan herhangi bir topoloji $\mathcal{T}$ ve $U \in \mathcal{B}_ç$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \cdots, m$ için $U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ olmak üzere

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$$

şeklinde yazılabilir. Her $\alpha \in J$ için $\pi_\alpha : \left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \mathcal{T}\right) \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ fonksiyonu sürekli olduğundan her bir $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \mathcal{T}$ dur. Böylece açık kümelerin sonlu kesişimi açık olduğundan $U \in \mathcal{T}$ olur. O halde $\mathcal{B}_ç \subseteq \mathcal{T}$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_ç \subseteq \mathcal{T}$ olur. Yani $\mathcal{T}_ç$ topolojisi $\mathcal{T}$ dan daha kabadır.✔

Teorem 10.28. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve her $\alpha \in J$ için $(A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha})$ uzayı $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha \in J} \mathcal{T}_{A_\alpha} = \mathcal{T}_{ç_{\prod_{\alpha \in J} A_\alpha}}$ dır.

İSPAT: Alıştırma 4 e bakınız.✔

Teorem 10.29.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve her $\alpha \in J$ için $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ olmak üzere $A = \prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ olsun. Bu durumda

a) Her $\alpha \in J$ için A_α kümesi $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayında kapalıysa $A = \prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ kümesi $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayında kapalıdır.

b) $\overline{A} = \prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha}$ dır.

İSPAT:

a) Her $\alpha \in J$ için A_α kümesi X_α uzayında kapalı olsun. Bu durumda her $\beta \in J$ için $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ fonksiyonu sürekli olduğundan her $\alpha \in J$ için $\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ kümesi çarpım uzayında kapalıdır. $A = \bigcap_{\alpha\in J} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ ve kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan A kümesi çarpım uzayında kapalıdır.

b) Her $\alpha \in J$ için $\overline{A_\alpha}$ kümesi X_α uzayında kapalı olduğundan (a) gereğince $\prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha}$ kümesi çarpım uzayında kapalıdır. Diğer yandan her $\alpha \in J$ için $A_\alpha \subseteq \overline{A_\alpha}$ olduğundan $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha}$ dır. Teorem 5.29 gereğince

$$\overline{A} = \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha} \tag{10.5}$$

olur.

$x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha}$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in J$ için $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ dır. $x \in \overline{A}$ olduğunu gösterelim. $x \in V$ ve $V \in \mathscr{B}_ç$ olsun. Bu durumda $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ için $V_\alpha = X_\alpha$ ve $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ için $V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ olmak üzere $V = \prod_{\alpha\in J} V_\alpha$ şekilde yazılabilir. Bu durumda her $\alpha \in J$ için $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ olduğundan Teorem 5.26 gereğince $y_\alpha \in V_\alpha \cap A_\alpha$ olacak şekilde bir $y_\alpha \in X_\alpha$ vardır. Böylece $y = (y_\alpha) \in A \cap V$ dir. Sonuç 5.27 gereğince $x \in \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$ olur. Böylece

$$\prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha} = \overline{A} \tag{10.6}$$

dır. (10.5) ve (10.6) gereğince $\overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha}$ olur.✔

Teorem 10.30.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda her $\beta \in J$ için $(X_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ uzayı $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir Y_β alt uzayı ile homeomorfiktir.

İSPAT: $\alpha \neq \beta$ özelliğindeki her $\alpha \in J$ için bir $b_\alpha \in X_\alpha$ sabit noktası seçelim. Bu durumda

$$Y_\beta = \left\{ x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \,\middle|\, \alpha \neq \beta \text{ ise } x_\alpha = b_\alpha,\ \alpha = \beta \text{ ise } x_\alpha \in X_\beta \right\}$$

uzayı $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir alt uzayıdır. $\pi_\beta|_{Y_\beta} : Y_\beta \to X_\beta$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). Önce, $\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}$ nın bire-bir ve örten olduğunu gösterelim. $x = (x_\alpha)$ ve $y = (y_\alpha)$ olmak üzere $x \neq y$ ve $x, y \in Y_\beta$ olsun. Bu durumda $\alpha \neq \beta$ için $x_\alpha = b_\alpha = y_\alpha$ olduğundan $x_\beta \neq y_\beta$ dır. Böylece

$$\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}(x) \neq \pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}(y)$$

dir. O halde $\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}$ fonksiyonu bire-birdir. $\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}$ fonksiyonu açıkça örtendir.

HO-2). π_β sürekli olduğundan $\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}$ fonksiyonuda süreklidir.

HO-3). $\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu

$$f_\beta = \left(\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}\right)^{-1} : X_\beta \to Y_\beta$$

olsun. f_β fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

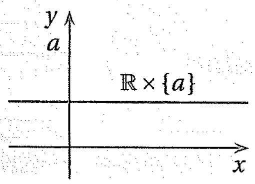
$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \cap Y_\beta$$

kümesi Y_β alt uzayının tabanının bir elemanı olsun. Bu durumda

$$U = \emptyset \text{ veya } U = Y_\beta \text{ veya } U = Y_\beta \cap \pi_\beta^{-1}(U_\beta), U_\beta \in \mathcal{T}_\beta$$

şeklindedir. Böylece

$$f_\beta^{-1}(U) = \emptyset \quad \text{veya} \quad f_\beta^{-1}(U) = X_\beta \quad \text{veya} \quad f_\beta^{-1}(U) = U_\beta$$

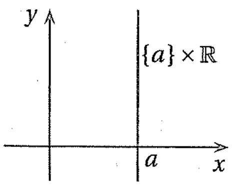


Şekil 10.3

olur. Dolayısıyla her üç halde de $f_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\beta$ olur. O halde $f_\beta = \left(\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}\right)^{-1}$ fonksiyonu süreklidir.

Bu durumda $\pi_{\beta}\big|_{Y_\beta}$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Yani $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının Y_β alt uzayı ile X_β uzayı homeomorfiktir.✔

ÖRNEK 10.31. ▷
a) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{R} \times \{a\}$ alt uzayı ile $\mathbb{R}$ nin homeomorfik olduğunu gösterelim.
b) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}^2$ nin $\{a\} \times \mathbb{R}$ alt uzayı ile $\mathbb{R}$ nin homeomorfik olduğunu gösterelim.



Şekil 10.4

ÇÖZÜM:

a) $h(x, a) = x$ şeklinde tanımlı $h : \mathbb{R} \times \{a\} \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi altında $\mathbb{R}^2$ nin

$$Y_1 = \{(x, a) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{a\}$$

alt uzayı $\mathbb{R}$ ile homeomorfiktir. (Şekil 10.3 ya bakınız.)

b) $h(a, x) = x$ şeklinde tanımlı $h : \{a\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi altında $\mathbb{R}^2$ nin

$$Y_2 = \{(a, x) : x \in \mathbb{R}\} = \{a\} \times \mathbb{R}$$

alt uzayı $\mathbb{R}$ ile homeomorfiktir. (Şekil 10.4 ya bakınız.)✍

ÖRNEK 10.32. ▷

a) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}^3$ ün $\mathbb{R} \times \{a\} \times \{b\}$ alt uzayı ile $\mathbb{R}$ nin homeomorfik olduğunu gösterelim.

b) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}^3$ ün $\{a\} \times \mathbb{R} \times \{b\}$ alt uzayı ile $\mathbb{R}$ nin homeomorfik olduğunu gösterelim.

c) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}^3$ ün $\{a\} \times \{b\} \times \mathbb{R}$ alt uzayı ile $\mathbb{R}$ nin homeomorfik olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $h(x,a,b) = x$ şeklinde tanımlı $h : \mathbb{R} \times \{a\} \times \{b\} \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi altında $\mathbb{R}^3$ ün

$$Y_1 = \{(x,a,b) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{a\} \times \{b\}$$

alt uzayı $\mathbb{R}$ ile homeomorfiktir.

b) $h(a,x,b) = x$ şeklinde tanımlı $h : \{a\} \times \mathbb{R} \times \{b\} \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi altında $\mathbb{R}^3$ ün

$$Y_2 = \{(a,x,b) : x \in \mathbb{R}\} = \{a\} \times \mathbb{R} \times \{b\}$$

alt uzayı $\mathbb{R}$ ile homeomorfiktir.

c) $h(a,b,x) = x$ şeklinde tanımlı $h : \{a\} \times \{b\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi altında $\mathbb{R}^3$ ün

$$Y_3 = \{(a,b,x) : x \in \mathbb{R}\} = \{a\} \times \{b\} \times \mathbb{R}$$

alt uzayı $\mathbb{R}$ ile homeomorfiktir.✍

10.3. Çarpım Uzayları ve Ayırma Aksiyomları

Teorem 10.33. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir T_0-uzayıdır.

b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_0-uzayıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 7.12 gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının her alt uzayı bir T_0-uzayıdır. Diğer yandan Teorem 10.30 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir alt uzayı ile homeomorfik olduğundan Teorem 7.13 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_0-uzayıdır.

b)⇒ a). $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$ ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ olsun. Bu durumda bazı $\alpha \in J$ için $x_\alpha \neq y_\alpha$ dır. Böylece $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_0-uzayı olduğundan

$$x_\alpha \in U_\alpha,\ y_\alpha \notin U_\alpha \text{ veya } x_\alpha \notin U_\alpha,\ y_\alpha \in U_\alpha$$

olacak şekilde $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayında açık bir U_α kümesi vardır. Bu durumda π_α sürekli olduğundan $U = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ kümesi $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayında açıktır. Üstelik,

$$x \in U,\ y \notin U \text{ veya } x \notin U,\ y \in U$$

dur. O halde $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir T_0-uzayıdır.✓

Teorem 10.34.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir T_1-uzayıdır.

b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_1-uzayıdır.

İSPAT:

a)$\Rightarrow$ b). Teorem 7.30 gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının her alt uzayı bir T_1-uzayıdır. Diğer yandan Teorem 10.30 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir alt uzayı ile homeomorfik olduğundan Teorem 7.29 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_1-uzayıdır.

b)$\Rightarrow$ a). $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$ ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ olsun. Bu durumda bazı $\alpha \in J$ için $x_\alpha \neq y_\alpha$ dır. Böylece $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_1-uzayı olduğundan

$$x_\alpha \in U_\alpha,\ y_\alpha \notin U_\alpha \text{ ve } x_\alpha \notin V_\alpha,\ y_\alpha \in V_\alpha$$

olacak şekilde $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayında açık U_α, V_α kümeleri vardır. Bu durumda π_α sürekli olduğundan $U = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, $V = \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ kümeleri $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayında açıktır. Üstelik,

$$x \in U,\ y \notin U \text{ ve } y \in V,\ x \notin V$$

dir. O halde $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir T_1-uzayıdır.✓

Teorem 10.35.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

İSPAT:

a)$\Rightarrow$ b). Teorem 7.44 gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının her alt uzayı bir Hausdorff uzayıdır. Diğer yandan Teorem 10.30 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir alt uzayı ile homeomorfik olduğundan Sonuç 7.48 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

b)$\Rightarrow$ a). $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$ ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ olsun. Bu durumda bazı

$\alpha \in J$ için $x_\alpha \neq y_\alpha$ dır. Böylece $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan

$$x_\alpha \in U_\alpha,\ y_\alpha \in V_\alpha \text{ ve } U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$$

olacak şekilde $U_\alpha, V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ kümeleri vardır. $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$ olduğundan

$$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) = \emptyset$$

dur. Üstelik, π_α sürekli olduğundan $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ ve $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ kümeleri $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayında açıktır. $x_\alpha \in U_\alpha$ olduğundan $x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ ve $y_\alpha \in V_\alpha$ olduğundan $y \in \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ olur. O halde $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir Hausdorff uzayıdır.✓

Teorem 10.36.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $D = \{(x,x) \mid x \in X\}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.
b) D kümesi $(X \times X, \mathcal{T}_ç)$ çarpım uzayında kapalıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). $(x,y) \in (X \times X) \setminus D$ olsun. Bu durumda $(x,y) \notin D$ olacağından $x \neq y$ dir. $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan

$$x \in U_1,\ y \in U_2 \text{ ve } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

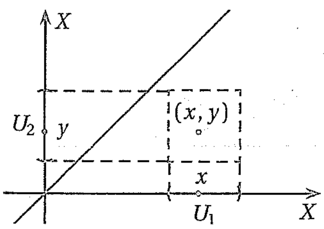
olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $D \cap (U_1 \times U_2) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $(x,x) \in D \cap (U_1 \times U_2)$ olsun. Bu durumda $x \in U_1$ ve $x \in U_2$ olur. Yani $x \in U_1 \cap U_2$ dir. Bu ise $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde

$$D \cap (U_1 \times U_2) = \emptyset$$

dur. Buradan

$$U_1 \times U_2 \subseteq (X \times X) \setminus D$$

elde edilir. Üstelik, $(x,y) \in U_1 \times U_2$ ve $U_1 \times U_2$ kümesi $(X \times X, \mathcal{T}_ç)$ çarpım uzayında açıktır. Teorem 4.9 gereğince $(X \times X) \setminus D$ kümesi $(X \times X, \mathcal{T}_ç)$ çarpım uzayında açıktır. Böylece D kümesi $(X \times X, \mathcal{T}_ç)$ çarpım uzayında kapalıdır.



Şekil 10.5

b)⇒ a). $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $(x,y) \notin D$ dir. O halde

$$(x,y) \in (X \times X) \setminus D$$

olur. Böylece $(X \times X) \setminus D$ kümesi $(X \times X, \mathcal{T}_ç)$ çarpım uzayında açık olduğundan Teorem 4.9 gereğince

$$(x,y) \in U_1 \times U_2 \subseteq (X \times X) \setminus D$$

olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda

$$D \cap (U_1 \times U_2) = \emptyset$$

olur. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $x \in U_1 \cap U_2$ olsun. Bu durumda $x \in U_1$ ve $x \in U_2$ ve $(x,x) \in D$ olur. Yani $(x,x) \in D \cap (U_1 \times U_2)$ olur. Bu ise $D \cap (U_1 \times U_2) = \emptyset$

olması ile çelişir. O halde

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

dur. Üstelik,

$$U_1, U_2 \in \mathcal{T} \text{ ve } x \in U_1,\ y \in U_2$$

dir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır. (Şekil 10.5 ye bakınız.)✔

Teorem 10.37. ▷

$f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$, $g : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sürekli iki fonksiyon ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda

$$A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır.

İSPAT:

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}_1) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi_1 \circ h = f"'] & Y \times Y \arrow[d, "\pi_1"] \\
& (Y,\mathcal{T}_2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}_1) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ h = g"'] & Y \times Y \arrow[d, "\pi_2"] \\
& (Y,\mathcal{T}_2)
\end{tikzcd}$$

$h(x) = (f(x), g(x))$ şeklinde bir $h : X \to Y \times Y$ fonksiyonu tanımlayalım. $\pi_1 \circ h = f$ ve $\pi_2 \circ h = g$ fonksiyonları sürekli olduğundan Teorem 10.25 gereğince h fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan $(Y, \mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 10.36 gereğince D kümesi $Y \times Y$ çarpım uzayında kapalıdır. Teorem 6.15 gereğince $h^{-1}(D)$ kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır. Diğer yandan

$$h^{-1}(D) = \{x \in X | h(x) \in D\} = \{x \in X | (f(x), g(x)) \in D\} = \{x \in X | f(x) = g(x)\} = A$$

olduğundan A kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında kapalıdır.✔

Teorem 10.38. ▷

$f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu sürekli ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda f nin grafiği

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında kapalıdır.

İSPAT: $g(x, y) = f(x)$ şeklinde bir $g : X \times Y \to Y$ fonksiyonu tanımlayalım. g fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. Böylece $f^{-1}(U) \times Y$ kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında açıktır. Diğer yandan

$$g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \times Y$$

olduğundan $g^{-1}(U)$ kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında açıktır. Böylece g fonksiyonu süreklidir. $(Y, \mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 10.37 gereğince

$$\{(x, y) | \pi_2(x, y) = g(x, y)\}$$

kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında kapalıdır. Bu durumda

$$\{(x,y)|\pi_2(x,y) = g(x,y)\} = \{(x,y)|y = f(x)\} = \{(x,f(x))|x \in X\} = G_f$$

kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında kapalıdır.✔

SONUC 10.39. ▷ $f:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_2)$, $g:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_2)$ sürekli iki fonksiyon ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olmak üzere A kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında yoğun olsun. Bu durumda $f|_A = g|_A$ (yani her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$) ise $f = g$ dir.

İSPAT: $f|_A = g|_A$ olduğundan $x \in A$ ise $f(x) = g(x)$ dir. Böylece

$$A \subseteq \{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

olur. Teorem 10.37 gereğince

$$\{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

kümesi kapalı olduğundan

$$\overline{A} \subseteq \overline{\{x \in X | f(x) = g(x)\}} = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

olur. Bu durumda A kümesi yoğun olduğundan

$$\{x \in X | f(x) = g(x)\} = X$$

elde edilir. Böylece her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ olur. Yani $f = g$ dir.✔

Teorem 10.40. ▷

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir T_3-uzayıdır.
b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_3-uzayıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 7.67 gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının her alt uzayı bir T_3-uzayı uzayıdır. Diğer yandan Teorem 10.30 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir alt uzayı ile homeomorfik olduğundan Teorem 7.63 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_3-uzayıdır.

b)⇒ a). $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ olsun. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_ç$ olsun. Bu durumda $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha = X_\alpha$ ve $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ olmak üzere $x \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq U$ olacak şekilde bir $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathscr{B}_ç$ kümesi vardır. $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir T_3-uzayı olduğundan Teorem 7.61 gereğince $x_\alpha \in \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$ olacak şekilde bir $V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ kümesi vardır. $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $V_\alpha = X_\alpha$ olsun. Bu durumda $x \in V = \prod_{\alpha \in J} V_\alpha$ ve $V = \prod_{\alpha \in J} V_\alpha$ kümesi $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayında açıktır. Diğer yandan Teorem 10.29

gereğince

$$\overline{V} = \prod_{\alpha \in J} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq U$$

olur. Yani $\overline{V} \subseteq U$ dur. Teorem 7.61 gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı T_3-uzayıdır.✔

SONUÇ 10.41. ⊳ J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir regüler uzay olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayının bir regüler uzay olmasıdır.

İSPAT: Teorem 10.34 ve Teorem 10.40 gereğince ispat açıktır.✔

Teorem 10.42. ⊳

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 7.77 gereğince $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının her alt uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır. Diğer yandan Teorem 10.30 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bir alt uzayı ile homeomorfik olduğundan Teorem 7.78 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

b)⇒ a). F kümesi $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ in kapalı bir alt kümesi ve $b = (b_\alpha) \notin F$ olsun. Bu durumda $b \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \setminus F$ ve $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha \setminus F$ kümesi açıktır. Teorem 4.9 gereğince

$$b \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \text{ ve } \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \setminus F$$

olacak şekilde bir $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathscr{B}_ç$ kümesi vardır. $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathscr{B}_ç$ olduğundan her $\alpha \in J$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha = X_\alpha$ dır. Diğer yandan $\left(\prod_{\alpha \in J} U_\alpha\right) \cap F = \emptyset$ ve $i = 1, 2, \cdots, n$ için $b_{\alpha_i} \notin X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}$ dir. Her bir α için X_α uzayı bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olduğundan $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$f_i(b_{\alpha_i}) = 1 \text{ ve } f_i(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) = \{0\}$$

olacak şekilde sürekli bir $f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ fonksiyonu vardır. $\phi_i : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\phi_i(x) = f_i(\pi_{\alpha_i}(x))$$

şeklinde tanımlansın. Teorem 6.14 gereğince ϕ_i fonksiyonu süreklidir. Üstelik,

$$\phi_i\left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha \setminus \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\right) = \{0\}$$

dır. $f(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_n(x)$ şeklinde bir $f : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to [0,1]$ fonksiyonu tanımlayalım. Teorem 6.34 gereğince f fonksiyonu süreklidir. Üstelik,

$$f\left(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in J} U_\alpha\right) = \{0\} \text{ ve } F \subseteq \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$$

olduğundan $f(F) = \{0\}$ ve $f(b) = 1$ dir.✔

SONUÇ 10.43. ▷ J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının tamamen regüler olması için gerek gerek ve yeter şart her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayının tamamen regüler bir uzayı olmasıdır.

İSPAT: Teorem 10.34 ve Teorem 10.42 gereğince ispat açıktır.✔

ÖRNEK 10.44. ▷
$\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ çarpım uzayı tamamen regüler olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı Sonuç 7.102 ve Örnek 7.88 gereğince tamamen regülerdir. Böylece Sonuç 10.43 gereğince $\mathcal{T}_{\text{ç}} = \mathcal{T}^2_{\text{sağ}} = \mathcal{T}_{\text{sağ}} \times \mathcal{T}_{\text{sağ}}$ olmak üzere $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ çarpım uzayı tamamen regülerdir.✍

Not
Normal uzayların çarpım uzayı normal olmayabilir.

ÖRNEK 10.45. ▷
a) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ çarpım uzayının normal olmadığını gösterelim.
b) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sol}}\right)$ çarpım uzayının normal olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) Örnek 7.88 gereğince bu uzay bir normal uzaydır. Şimdi $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ çarpım uzayının normal olmadığını gösterelim. $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının normal olduğunu kabul edelim.

$$L = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayında kapalıdır. $(x, -x) \in L$ için

$$L \cap [x, r) \times [-x, r') = \{(x, -x)\}$$

olduğundan Örnek 3.12 gereğince L alt uzayı $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ nin ayrık bir alt uzaydır. Böylece L bir ayrık uzay olduğundan L nin her alt kümesi L alt uzayında ve dolayısıyla $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayında kapalıdır. Böylece $A \subseteq L$ ise A ve $L\setminus A$ kümeleri $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayında kapalıdır. $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayı normal olduğundan

$$A \subseteq U_A, \ L\setminus A \subseteq U_{L\setminus A}$$

ve

$$U_A \cap U_{L\setminus A} = \emptyset$$

olacak şekilde $U_A, U_{L\setminus A} \in \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$ kümeleri vardır. Diğer yandan

$$D = \{(r,s) \mid r, s \text{ rasyonel}\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

kümesi $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayında yoğundur.

$$\Phi(A) = D \cap U_A,\ \Phi(\emptyset) = \emptyset,\ \Phi(L) = D$$

şeklinde tanımlı $\Phi : \mathscr{P}(L) \to \mathscr{P}(D)$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu gösterelim. $A, B \in \mathscr{P}(L)$ ve $A \neq B$ olsun. $A \setminus B \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. ($B \setminus A \neq \emptyset$ durumu benzer şekilde yapılır.) D kümesi $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ de yoğun olduğundan

$$D \cap (U_A \cap U_{L\setminus B}) \neq \emptyset$$

dur. $\Phi(A) = \Phi(B)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $D \cap U_A = D \cap U_B$ dir. Böylece

$$D \cap U_A \cap U_{L\setminus B} = D \cap U_B \cap U_{L\setminus B}$$

dir. Bu ise $D \cap U_B \cap U_{L\setminus B} = \emptyset$ ve $D \cap U_A \cap U_{L\setminus B} \neq \emptyset$ olduğundan çelişkidir. O halde $\Phi(A) \neq \Phi(B)$ ve böylece Φ bire-bir dir. Bu durumda

$$|\mathscr{P}(D)| > |\mathscr{P}(L)|$$

olur. Bu ise

$$|\mathscr{P}(L)| \geq |\mathscr{P}(D)|$$

olduğundan bir çelişkidir. O halde $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayı normal bir uzay değildir.

b) Benzer şekilde $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sol}})$ uzayının da normal olmadığı gösterilir. ✍

10.4. Çarpım Uzayları ve Sayılabilirlilik

Teorem 10.46.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun.

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı birinci sayılabilir ise her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

b) J sayılabilir ve her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı birinci sayılabilir ise $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayıda birinci sayılabilirdir.

İSPAT:

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı birinci sayılabilir olsun. Teorem 10.23 gereğince her $\alpha \in J$ için π_α fonksiyonu açık ve örten olduğundan Teorem 8.13 gereğince $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

b) J sayılabilir ve her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı birinci sayılabilir olsun. $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ olsun. Her $\alpha \in J$ için $\mathscr{B}_{x_\alpha}$ kolleksiyonu x_α noktasının sayılabilir yerel bir tabanı

Not

Sayılamaz sayıdaki birinci sayılabilir uzayların çarpım uzayı birinci sayılabilir olmayabilir.

olsun. Bu durumda

$$\mathscr{D}_{\c{c}_x} = \{ \prod_{\alpha\in J} B_\alpha \,|\, \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } B_\alpha = X_\alpha, \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } B_\alpha \in \mathscr{B}_{x_\alpha}\}$$

kolleksiyonu sayılabilir ve $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayında x noktasının bir yerel tabanıdır.

ÖRNEK 10.47. ▷
Her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı birinci sayılabilir olduğu halde $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının birinci sayılabilir olmayabileceğini gösteren bir örnek verelim.

ÇÖZÜM: I sayılamaz bir küme olmak üzere $\alpha \in I$ için $X_\alpha = \mathbb{N}$ ayrık uzayı olsun. B durumda her $\alpha \in I$ için X_α uzayı birinci sayılabilirdir.

$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayının birinci sayılabilir olmadığını gösterelim. Bu uzayın birin sayılabilir olduğunu kabul edelim. $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ ve $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu noktasının sayılabilir bir yerel tabanı olsun. Her bir n için sonlu sayıdaki α lar har diğer α lar için $\pi_\alpha(B_n) = \mathbb{N}$ dir. Sayılamaz sayıda α olduğundan her n için $\pi_{\alpha_0}(B_i) =$ olacak şekilde bir α_0 seçebiliriz. Bu durumda

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}(x_{\alpha_0}) = \left\{ y \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \,\middle|\, y_{\alpha_0} = x_{\alpha_0} \right\}$$

kümesi x noktasının bir komşuluğudur ve hiç bir B_n kümesini kapsamaz. Böyle $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu x noktasının yerel bir tabanı değildir. Bu bir çelişkidir. O hal bu uzay birinci sayılabilir değildir. Bu durumda x noktasının sayılabilir bir yerel taba yoktur. Dolayısıyla $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı birinci sayılabilir değildir.

Teorem 10.48. ▷
J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyon olsun.

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı ikinci sayılabilir ise her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı ikinci sayıla bilirdir.

b) J sayılabilir ve her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı ikinci sayılabilir ise $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayıda ikinci sayılabilirdir.

İSPAT:

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı ikinci sayılabilir olsun. Teorem 10.23 gereğince her $\alpha \in J$ iç π_α fonksiyonu sürekli, açık ve örten olduğundan Teorem 8.25 gereğince $(X_\alpha, \mathcal{T}$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

b) J sayılabilir ve her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı ikinci sayılabilir olsun. $\alpha \in J$ için kolleksiyonu $\mathcal{T}_\alpha$ nın sayılabilir bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_ç = \left\{ \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \,\middle|\, \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } U_\alpha = X_\alpha, \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \right\}$$

kolleksiyonu sayılabilirdir. Üstelik, Teorem 10.17 gereğince $\mathcal{D}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ çarpım uzayının bir tabanıdır.✓

Teorem 10.49.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun.

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı ayrılabilir ise her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayıda ayrılabiliridir.

b) J sayılabilir ve her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı ayrılabilir ise $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayıda ayrılabilirdir.

İSPAT:

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı ayrılabilir olsun. Teorem 10.23 gereğince her $\alpha \in J$ için π_α fonksiyonu sürekli ve örten olduğundan Teorem 8.37 gereğince her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı ayrılabilirdir.

b) J sayılabilir ve her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı ayrılabilir olsun. $\alpha \in J$ için A_α kümesi $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi olsun. Her $\alpha \in J$ için bir $z_\alpha \in X_\alpha$ noktası seçelim. Sonlu sayıdaki α lar dışındaki α lar için $x_\alpha = z_\alpha$ ve diğer α lar için $x_\alpha \in A_\alpha$ özelliğindeki $x = (x_\alpha)$ noktalarının kümesine A diyelim. Yani I kümesi J nin sonlu bir alt kümesi ve $\alpha \in I$ için $T_\alpha = A_\alpha$, $\alpha \in J \setminus I$ için $T_\alpha = \{z_\alpha\}$ olmak üzere $A = \bigcup_{I \overset{\text{sonlu}}{\subseteq} J} A_I$ olsun. Bu durumda her bir A_I kümesi sayılabilir ve dolayısıyla A sayılabilirdir. Diğer yandan $y \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$, I sonlu ve $\alpha \in I$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \in J \setminus I$ için $U_\alpha = X_\alpha$ olmak üzere $y \in U = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ olsun. Bu durumda $\alpha \in I$ için $x_\alpha \in A_\alpha \cap U_\alpha$ olacak şekilde bir x_α vardır. Böylece $\alpha \in J \setminus I$ için $x_\alpha = z_\alpha$ olmak üzere $x = (x_\alpha) \in A_I \subseteq A$ ve $x \in U$ dur. Yani $A \cap U \neq \emptyset$ dur. O halde A kümesi $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayında yoğundur.✓

Teorem 10.50.

J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve (x_λ) da $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayında bir ağ (net) olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayında $x_\lambda \to x$ dır.

b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayında $\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$ dır.

İSPAT:

a)$\Rightarrow$ b). Her $\alpha \in J$ için π_α sürekli ve $x_\lambda \to x$ olduğundan Teorem 9.40 gereğince

$$\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$$

dir.

b)⇒ a). $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\bigcap\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\bigcap\cdots\bigcap\pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})\in\mathscr{B}_{ç}$ ve

$$x\in\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\bigcap\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\bigcap\cdots\bigcap\pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$$

olsun. Bu durumda her bir $i=1,2,\cdots,m$ için bir k_i elemanı $\lambda\geq k_i$ olduğunda $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda)\in U_{\alpha_i}$ olacak şekilde vardır. Yani $i=1,2,\cdots,m$ için $\lambda\geq k_i$ olduğunda $x_\lambda\in\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ olur. $\lambda_0\geq k_1,k_2,\cdots,k_m$ olsun. Bu durumda $\lambda\geq\lambda_0$ olduğunda

$$x_\lambda\in\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\bigcap\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\bigcap\cdots\bigcap\pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$$

olur. Böylece $x_\lambda\to x$ dir.✓

10.5. Alıştırmalar

1. $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2),\cdots,(X_n,\mathcal{T}_n)$ uzaylarının ayrık uzaylar olması için gerek ve yeter şartın

$$(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$$

çarpım uzayının ayrık uzay olması gerektiğini gösteriniz.

2. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayının ayrık uzay olması için gerek ve yeter şartın her bir $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayının ayrık ve sonlu sayıdaki X_i uzayları hariç diğer X_i uzaylarının hepsinin tek elemandan oluşması gerektiğini gösteriniz.

3. Sonlu sayıdaki kaba topolojik uzaylarının çarpım uzayının da kaba topolojik uzay olduğunu gösteriniz.

4. J bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve $\alpha\in J$ için $(A_\alpha,\mathcal{T}_{A_\alpha})$ uzayı $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$$\prod_{\alpha\in J}\mathcal{T}_{A_\alpha}=\mathcal{T}_{ç\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}$$

olduğunu gösteriniz.

5. X_1, X_2 sonsuz elemanlı iki küme ve $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ sırasıyla X_1 ve X_2 üzerindeki sonlu tümeleyenler topoloji olsun. $X_1\times X_2$ üzerindeki çarpım topolojisinin sonlu tümeleyenler topolojisi olmadığını gösteriniz.

6. $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve G_f de f nin grafiği olsun.

$$h(x)=(x,f(x))$$

şeklinde tanımlı $h:X\to G_f$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olması için gerek ve yeter şartın f nin sürekli olması gerektiğini gösteriniz.

7. $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2),\cdots,(X_n,\mathcal{T}_n)$ topolojik uzayları verilsin. $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$ uzayı ile $X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}\times X_n$ uzayının homeomorfik olduğunu gösteriniz.

8. $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2),\cdots,(X_n,\mathcal{T}_n)$ topolojik uzaylar,

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}\times X_n$$

olmak üzere $\mathscr{B}_{a_i}$ kolleksiyonları a_i noktalarının $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzaylarındaki yerel tabanları olsun.

$$\mathscr{B}_a=\left\{\prod_{i=1}^{n}B_{a_i}\,\middle|\,B_{a_i}\in\mathscr{B}_{a_i}\right\}$$

kolleksiyonunun $X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}\times X_n$ çarpım uzayında a noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösteriniz.

9. $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve

$$a=(a_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$$

olmak üzere $\mathscr{B}_{a_\alpha}$ kolleksiyonları a_α noktalarının $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzaylarındaki yerel tabanları olsun. Bu durumda

$$\mathscr{B}_a=\left\{\prod_{\alpha\in J}B_{a_\alpha}\,\middle|\,I\text{ sonlu, }\alpha\in I\text{ için }B_{a_\alpha}\in\mathscr{B}_{a_\alpha},\ \alpha\notin I\text{ için }B_{a_\alpha}=X_{a_\alpha}\right\}$$

kolleksiyonunun $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ çarpım uzayında a noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösteriniz.

10. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0, d \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki kümelerin $\mathbb{R}^2$ de kapalı olduklarını Teorem 10.37 ü kullanarak gösteriniz.

a) $A = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$

b) $B = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{(x-a)^2}{c} + \frac{(y-b)^2}{d} = 1\right\}$

c) $C = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{(x-a)^2}{c} - \frac{(y-b)^2}{d} = 1\right\}$

d) $D = \{(x, y) \mid (x-a)^2 - 2c(y-b) = 0\}$

11. $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ve $d \neq 0, e \neq 0, f \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki kümelerin $\mathbb{R}^3$ de kapalı olduklarını Teorem 10.37 ü kullanarak gösteriniz.

a) $A = \{(x, y, z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$

b) $A = \left\{(x, y.z) \,\middle|\, \frac{(x-a)^2}{d} + \frac{(y-b)^2}{e} + \frac{(z-c)^2}{f} = 1\right\}$

10.6. Alıştırma Çözümleri

Çözüm 1

$\Rightarrow$). $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2),\cdots,(X_n,\mathcal{T}_n)$ uzaylarının ayrık uzaylar olduğunu varsayalım. $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ olsun. $i=1,2,\cdots,n$ için $\mathcal{T}_i=\mathcal{P}(X_i)$ olduğundan $\{x_i\}$ kümesi $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayında açıktır. Diğer yandan $\{x\}=\prod_{i=1}^{n}\{x_i\}$ olduğundan çarpım topolojisinin tanımı gereği $\{x\}$ kümesi $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$ çarpım uzayında açıktır. O halde Örnek 3.12 gereğince $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$ çarpım uzayı ayrık uzaydır.

$\Leftarrow$). $(X_1,\mathcal{T}_1)\times(X_2,\mathcal{T}_2)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$ çarpım uzayının ayrık uzay olduğunu varsayalım. $x_j\in X_j$ olsun. Bu durumda

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_{j-1}\times\{x_j\}\times X_{j+1}\times\cdots\times X_n$$

kümesi $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\mathcal{T}_i)$ çarpım uzayında açıktır. Diğer yandan π_j izdüşüm fonksiyonu açık ve

$$\pi_j\left(X_1\times X_2\times\cdots\times X_{j-1}\times\{x_j\}\times X_{j+1}\times\cdots\times X_n\right)=\{x_j\}$$

olduğundan $\{x_j\}$ kümesi $\left(X_j,\mathcal{T}_j\right)$ uzayında açıktır. Böylece Örnek 3.12 gereğince $\left(X_j,\mathcal{T}_j\right)$ uzayı ayrık uzaydır.✔

Çözüm 2

$\Rightarrow$). $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayı ayrık ve $x_j\in X_j$ olsun. $i\neq j$ için $\{x_i\}=X_i$ ve $i=j$ için $\{x_i\}=\{x_j\}$ olmak üzere $U=\prod_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$ kümesi açıktır. $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$ nun tanımı gereğince her bir $\{x_i\}$ kümesi $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayında açıktır. O halde $\{x_j\}$ kümesi $\left(X_j,\mathcal{T}_j\right)$ uzayında açıktır. Böylece Örnek 3.12 gereğince $\left(X_j,\mathcal{T}_j\right)$ uzayı ayrık uzaydır.

$\Leftarrow$). $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$ olsun. Bu durumda

$$\{x\}=\prod_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$$

dir. Her i için $\{x_i\}$ kümesi $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayında açık ve sonlu sayıdaki i ler dışındaki i ler için $\{x_i\}=X_i$ olduğundan çarpım topolojisinin tanımı gereği $\{x\}$ kümesi $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayında açıktır. Böylece Örnek 3.12 gereğince $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayı ayrık uzaydır.✔

Çözüm 3

$i=1,2,\cdots,n$ için $(X_i,\mathcal{T}_i)$ uzayları kaba uzay, $\mathcal{T}_{ç}=\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2\times\ldots\times\mathcal{T}_n$ ve $U\in\mathcal{B}_{ç}$ ($\mathcal{B}_{ç}$, $\mathcal{T}_{ç}$ nin tabanı) olsun. Bu durumda çarpım topolojisinin tanımı gereğince $U_i\in\mathcal{T}_i$ olmak üzere $U=\prod_{i=1}^{n}U_i$ şeklinde yazılabilir. $i=1,2,\cdots,n$ için $U_i\in\mathcal{T}_i$ ve $\mathcal{T}_i=\{\emptyset,X_i\}$ olduğundan $U_i=\emptyset$ veya $U_i=X_i$ dir. En az bir i için $U_i=\emptyset$ ise $U=\emptyset$ dur. Her i için $U_i\neq\emptyset$ ise her i için $U_i=X_i$ ve böylece $U=X$ dir. O halde $U=\emptyset$ veya $U=X$ dir. Böylece $\mathcal{B}=\{X\}$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_{ç}$ kaba topolojidir.✔

Çözüm 4

$\mathcal{B}_{ç}$, $\mathcal{T}_{ç}=\prod_{\alpha\in J}\mathcal{T}_\alpha$ çarpım topolojisinin tabanı ve $\prod_{\alpha\in J}\mathcal{B}_{A_\alpha}$ da $\prod_{\alpha\in J}\mathcal{T}_{A_\alpha}$ çarpım topolojisinin tabanı olsun. Bu durumda

$\mathcal{B}_{ç_{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}}=\left\{U\cap\prod_{\alpha\in J}A_\alpha | U\in\mathcal{B}_{ç}\right\}$ de $\mathcal{T}_{ç_{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}}$ alt uzayının tabanıdır.

$V=\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\cap\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\in\mathcal{B}_{ç_{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}}$ olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\in\mathcal{B}_{ç}$ olduğundan $\mathcal{B}_{ç}$ nin tanımı gereğince $\alpha\in J$ için $V_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha\notin I$ için $V_\alpha=X_\alpha$ olacak şekilde sonlu bir I indis kümesi vardır. Böylece $V=\prod_{\alpha\in J}(V_\alpha\cap A_\alpha)$ dır. Her $\alpha\in J$ için $V_\alpha\cap A_\alpha\in\mathcal{T}_{A_\alpha}$ ve $\alpha\notin I$ için $V_\alpha\cap A_\alpha=A_\alpha$ dır. O halde $\prod_{\alpha\in J}\mathcal{B}_{A_\alpha}$ nın tanımı gereğince $V=\prod_{\alpha\in J}(V_\alpha\cap A_\alpha)\in\prod_{\alpha\in J}\mathcal{B}_{A_\alpha}$ dır. Yani

$$\mathcal{B}_{ç_{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}}\subseteq\prod_{\alpha\in J}\mathcal{B}_{A_\alpha} \tag{10.7}$$

dır.

Tersine, $U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\in\prod_{\alpha\in J}\mathcal{B}_{A_\alpha}$ olsun. Bu durumda çarpım topolojisinin tanımı gereği $\alpha\in J$ için $U_\alpha\in\mathcal{T}_{A_\alpha}$ ve $\alpha\notin I$ için $U_\alpha=A_\alpha$ olacak şekilde sonlu bir I indis kümesi vardır. $\alpha\notin I$ için $V_\alpha=X_\alpha$ ve $\alpha\in I$ için $U_\alpha=V_\alpha\cap A_\alpha$ olacak şekilde bir $V_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha$ vardır. Bu durumda $V=\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\in\mathcal{B}_{ç}$ dır. Üstelik

$$U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha=U=\prod_{\alpha\in J}(V_\alpha\cap A_\alpha)=\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\cap\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha$$

dır. O halde $U\in\mathcal{B}_{ç_{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}}$ dır. Böylece

$$\prod_{\alpha\in J}\mathcal{B}_{A_\alpha}\subseteq\mathcal{B}_{ç_{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}} \tag{10.8}$$

dır. (10.7) ve (10.8) gereğince $\mathscr{B}_{\text{ç} \prod_{\alpha\in J} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in J} \mathscr{B}_{A_\alpha}$ dır. O halde $\prod_{\alpha\in J} \mathcal{T}_{A_\alpha} = \mathcal{T}_{\text{ç} \prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$ dır.✔

ÇÖZÜM 5

$X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ kolleksiyonları $\mathbb{R}$ üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisi olsun. $U_1 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ve $U_2 = \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}\setminus U_1 = \{1\}$ olduğundan U_1 ve U_2 kümeleri açıktır.

$$\mathbb{R}^2\setminus(U_1 \times U_2) = \mathbb{R}^2\setminus[(\mathbb{R}\setminus\{1\}) \times \mathbb{R} = \{(1,y) | y \in \mathbb{R}\}$$

kümesi sonlu olmadığından $U_1 \times U_2$ kümesi $\mathbb{R}^2$ üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre açık değildir. Böylece iki sonlu tümleyenler uzayının çarpımı sonlu tümleyenler uzayı olmayabilir.✔

ÇÖZÜM 6

$\Rightarrow$). h bir homeomorfizm olsun. Bu durumda h süreklidir. Böylece $\pi_2 \circ h = f$ fonksiyonu süreklidir.

$\Leftarrow$). f sürekli olsun. h ın bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). Önce, h ın bire-bir olduğunu gösterelim. $h(x) = h(y)$ ise $(x, f(x)) = (y, f(y))$ dir. Böylece $x = y$ dir. Yani h bire-bir dir. Şimdi, h ın örten olduğunu gösterelim. $(y, f(y)) \in G_f$ olsun. Bu durumda h nın tanımı gereğince

$$h(y) = (y, f(y))$$

yani h örtendir.

HO-2). Şimdi, h ın sürekli olduğunu gösterelim. $\pi_1 \circ h = \mathrm{id}_X$ ve $\pi_2 \circ h = f$ fonksiyonları sürekli olduklarından Teorem 10.25 gereğince h süreklidir.

HO-3). Diğer yandan, $h^{-1} = \pi_{1_{|G_f}}$ olduğundan h^{-1} süreklidir.

O halde h bir homeomorfizmdir.✔

ÇÖZÜM 7

$$h : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$$

fonksiyonunu

$$h((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$$

şeklinde tanımlayalım. h ın bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

HO-1). Açıkça h bire-bir ve örtendir.

HO-2). $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$(\pi_i \circ h)((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)) = \pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = x_i$$

dir. Yani $\pi_i \circ h = \mathrm{id}_{X_i}$ dir. O halde Teorem 10.25 10.25 gereğince h süreklidir.

HO-3). h ın tersi

$$h^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)$$

şeklinde tanımlı

$$h^{-1} : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

fonksiyonudur.

$$\pi : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$$

fonksiyonu

$$\pi((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

şeklinde ve

$$\pi' : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \to X_n$$

fonksiyonu

$$\pi'((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = x_n$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça π ve π'' fonksiyonları süreklidir.

$$\begin{aligned}(\pi \circ h^{-1})(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) &= \pi((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)\\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\end{aligned}$$

ve $i = 1, 2, \cdots, n-1$ için

$$\begin{aligned}\pi_i \circ (\pi \circ h^{-1})(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) &= x_i\\ &= \pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 10.25 gereğince $\pi \circ \circ h^{-1}$ fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned}(\pi' \circ h^{-1})(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) &= \pi((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)\\ &= x_n\\ &= \pi'((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)\end{aligned}$$

fonksiyonuda sürekli olduğundan Teorem 10.25 gereğince

h^{-1} süreklidir.

Böylece, h bir homeomorfizmdir.✔

ÇÖZÜM 8

$\mathcal{B}_a$ nın $\prod_{i=1}^{n} X_i$ çarpım uzayında a noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösterelim.

YTB-1). $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{T}_ç$ olduğu açıktır.

YTB-2). $\prod_{i=1}^{n} B_{a_i} \in \mathcal{B}_a$ ise $i = 1,2,\cdots,n$ için $\mathcal{B}_{a_i}$ kolleksiyonu a_i nin yerel tabanı olduğundan $a_i \in B_{a_i}$ dir. Böylece $a \in \prod_{i=1}^{n} B_{a_i}$ dır.

YTB-3). $a \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_ç$ olsun. Bu durumda

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq U$$

olacak şekilde $U_i \in \mathcal{T}_i$ vardır. $i = 1,2,\cdots,n$ için $\mathcal{B}_{a_i}$ kolleksiyonu a_i nin yerel tabanı olduğundan $B_{a_i} \subseteq U_i$ olacak şekilde bir $B_{a_i} \in \mathcal{B}_{a_i}$ vardır. Böylece

$$B_{a_1} \times B_{a_2} \times \cdots \times B_{a_n} \in \mathcal{B}_a$$

ve

$$B_{a_1} \times B_{a_2} \times \cdots \times B_{a_n} \subseteq U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq U$$

dur.

O halde $\mathcal{B}_a$ kolleksiyonu a nın yerel tabanıdır.✔

ÇÖZÜM 9

$\mathcal{B}_a$ nın $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çarpım uzayında a noktasının bir yerel tabanı olduğunu gösterelim.

YTB-1). $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{T}_ç$ olduğu açıktır.

YTB-2). $\prod_{\alpha \in J} B_{a_\alpha}$ olsun. $\alpha \in J$ için $B_{a_\alpha} \in \mathcal{B}_{a_\alpha}$ veya $B_{a_\alpha} = X_{a_\alpha}$ olduğundan $\alpha \in J$ için $a_\alpha \in B_{a_\alpha}$ dir. Bu durumda $a = (a_\alpha)_{\alpha \in J} \in \mathcal{B}_a$ olur.

YTB-3). $a = (a_\alpha)_{\alpha \in J} \in U$ ve $U \in \mathcal{T}_ç$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_ç$ nin tanımı gereği $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ olmak üzere $a \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq U$ ve

$$\alpha \in I \text{ için } U_\alpha \neq X_\alpha, \quad \alpha \notin I \text{ için } U_\alpha = X_\alpha$$

olacak şekilde sonlu bir $I \subseteq J$ vardır. Bu durumda $a_\alpha \in U_\alpha$ dır. $\alpha \notin I$ için $B_{a_\alpha} = X_\alpha$ ve $\alpha \in I$ için $B_{a_\alpha} \subseteq U_\alpha$ olacak şekilde $B_{a_\alpha} \in \mathcal{B}_{a_\alpha}$ vardır. Böylece

$$\prod_{\alpha \in J} B_{a_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subseteq U \text{ ve } \prod_{\alpha \in J} B_{a_\alpha} \in \mathcal{B}_a$$

dır.

O halde $\mathcal{B}_a$ kolleksiyonu a nın yerel tabanıdır.✔

ÇÖZÜM 10

a) $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ ve $g(x,y) = r^2$ şeklinde tanım $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $\mathbb{R}$ standa uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 10.37 gereğince

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = g(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır.

b) $f(x,y) = \dfrac{(x-a)^2}{c} + \dfrac{(y-b)^2}{d}$ ve $g(x,y) = 1$ şeklinde tanım $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $\mathbb{R}$ standa uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 10.37 gereğince

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = g(x,y)\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{(x-a)^2}{c} + \frac{(y-b)^2}{d} = 1\right\} \end{aligned}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır.

c) $f(x,y) = \dfrac{(x-a)^2}{c} - \dfrac{(y-b)^2}{d}$ ve $g(x,y) = 1$ şeklinde tanım $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $\mathbb{R}$ stand uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 10.37 gereğince

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = g(x,y)\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{(x-a)^2}{c} - \frac{(y-b)^2}{d} = 1\right\} \end{aligned}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır.

d) $f(x,y) = (x-a)^2 - 2c(y-b)$ ve $g(x,y) = 0$ şeklinde tanı $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $\mathbb{R}$ stand uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 10.37 gereğince

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = g(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 - 2c(y-b) = 0\} \end{aligned}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır.✔

ÇÖZÜM 11

a) $f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ ve $g(x,y,z) = r^2$ ş linde tanımlı $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sü lidir. $\mathbb{R}$ standart uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 1(

gereğince

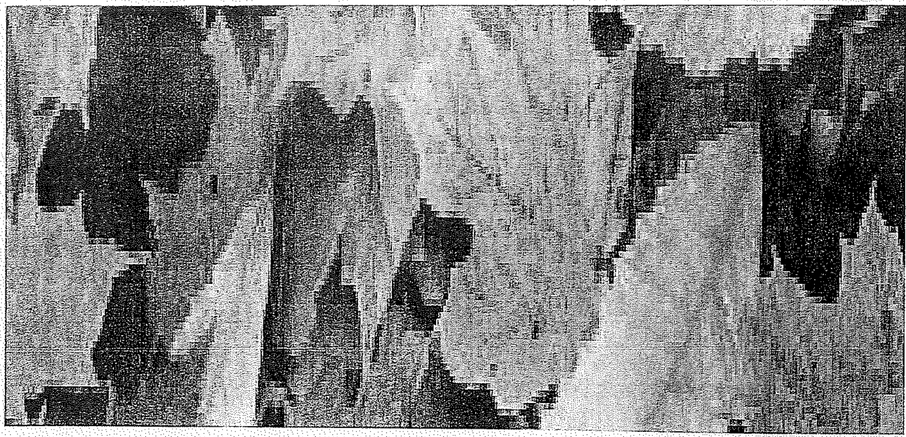
$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y,z) = g(x,y,z)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır.

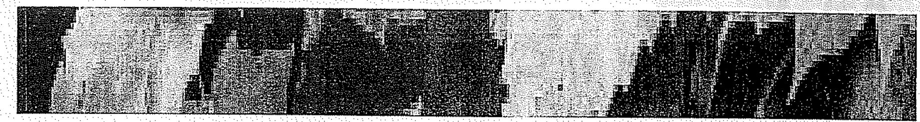
b) $f(x,y,z) = \dfrac{(x-a)^2}{d} + \dfrac{(y-b)^2}{e} + \dfrac{(z-c)^2}{f}$ ve $g(x,y,z) = 1$ şeklinde tanımlı $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $\mathbb{R}$ standart uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 10.37 gereğince

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y,z) = g(x,y,z)\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x-a)^2}{d} + \frac{(y-b)^2}{e} + \frac{(z-c)^2}{f} = 1\right\} \end{aligned}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır.✔



11. Kompaktlık



Bu bölümde topoloji ve uygulamalarında önemli role sahip olan topolojiksel özelliklerin en önemlilerinden olan kompaktlık, sayılabilir kompaktlık, dizisel kompaktlık ve yerel kompaktlık kavramları üzerinde duracağız. Kompaktlık matematiğin bir çok dalındaki sonluluk kavramının topolojiksel bir genellemesi olarak düşünülebilir.

$\mathbb{R}$ nin çeşitli aralık tiplerinden en önemlisi $[a,b]$ tipindeki kapalı ve sınırlı aralıklardır. Analiz derslerinden bilindiği gibi kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde tanımlı reel değerli bütün sürekli fonksiyonlar maksimum ve minimum değerlerini bu aralıklar üzerinde alırlar. Heine-Borel Teoremi gereğince bu çeşit aralıkların açık kümelerden oluşan her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır. Kapalı ve sınırlı aralıkların bu özelliğini kullanarak herhangi bir topolojik uzayda kompaktlık kavramı tanımlanabilir.

11.1. Kompakt Uzaylar

TANIM 11.1. ▷ **Açık örtü**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

a) I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ ve
$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$
ise $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonuna A nın bir açık örtüsü denir.

b) $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu A nın açık bir örtüsü ve $J \subseteq I$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ kolleksiyonu A nın bir örtüsü ise $\mathcal{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ örtüsüne $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ örtüsünün bir altörtüsü denir. Bu durumda J sonluysa $\mathcal{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ örtüsüne $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ örtüsünün sonlu altörtüsü denir.

Not

Açık örtü tanımında $A = X$ alınırsa
$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$
ifadesi
$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$
şeklini alır.

TANIM 11.2. ▷ **Kompakt topolojik uzay**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa $(X, \mathcal{T})$ uzayına veya kısaca X in kendisine kompakt topolojik uzay denir.

Not
Kompaktlığın tanımı gereğince bir uzayın kompakt olmadığını göstermek için uzayın sonlu hiç bir altörtüsü olmayan açık bir örtüsünün olduğunu göstermek yeterlidir.

ÖRNEK 11.3. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(-n, n)$ aralığı $\mathbb{R}$ de açık olduğundan

$$\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

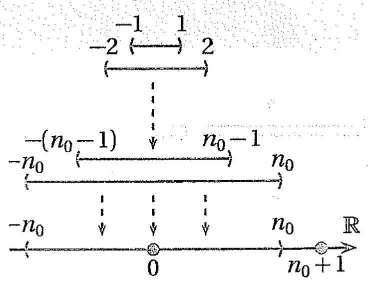
kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayının açık bir örtüsüdür. Şimdi bu örtünün sonlu hiç bir altörtüsünün olmadığını gösterelim. Bu örtünün sonlu bir $\{U_{n_i} \mid i = 1, \cdots, m\}$ alt örtüsünün olduğunu varsayalım. $n_0 = \max\{n_i \mid i = 1, \cdots, m\}$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{m} U_{n_i} = (-n_0, n_0)$ olur. Diğer yandan sonlu altörtü tanımı gereğince $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{m} U_{n_i}$ olur. Buradan

$$\mathbb{R} = (-n_0, n_0)$$

elde edilir. Bu ise $n_0 + 1 \notin (-n_0, n_0)$ olduğundan mümkün değildir. O halde $\mathbb{R}$ nin

$$\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

açık örtüsünün hiç bir sonlu altörtüsü yoktur. Bu durumda $\mathbb{R}$ standart uzayı kompakt değildir. (Şekil 11.1 e bakınız.)



Şekil 11.1

ÖRNEK 11.4. ▷
X sonlu bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: X sonlu bir küme olduğundan $\mathcal{T}$ sonludur. Böylece $\{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu bu uzayın açık bir örtüsü ise $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan bu örtü sonludur. O halde X in her $\{U_i \mid i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir $\{U_i \mid i \in I\}$ altörtüsü vardır. Böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayı kompakttır.

Not
Örnek 11.4 den görüldüğü gibi sonlu her topolojik uzay kompakttır. Aslında kompaktlık sonluluğun bir topolojiksel genellemesi olarak düşünülebilir.

ÖRNEK 11.5. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının kompaktlığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X kümesi sonlu olsun. Bu durumda Örnek 11.4 gereğince $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayı kompakttır.

b) $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayının kompakt olduğunu varsayalım. Bu durumda X in her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü olduğundan X in

$$\{\{x\} \mid x \in X\}$$

açık örtüsünün de $\{\{x_i\} \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Böylece, $X = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ dir. $\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ sonlu olduğundan X kümesi sonludur.

(a) ve(b) gereğince ayrık bir $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart X in sonlu olmasıdır.✍

ÖRNEK 11.6. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu bu uzayın açık bir örtüsü olsun. Her $i \in I$ için $U_i = \emptyset$ veya $U_i = X$ ve $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olduğundan en az bir $i_0 \in I$ için $U_{i_0} \neq \emptyset$ dur. Bu durumda, $U_{i_0} = X$ olur. $\{U_{i_0}\}$ kolleksiyonu $\{U_i \mid i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✍

ÖRNEK 11.7. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ topolojik uzayının kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu X in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ dir. $a \in X$ olduğundan en az bir $i_0 \in I$ için $a \in U_{i_0}$ olur. $\mathcal{T}_a$ nun tanımı gereğince $U_{i_0} = X$ olmak zorundadır. Bu durumda $\{X\}$ kolleksiyonu X in $\{U_i \mid i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. O halde $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayı kompakttır.✍

ÖRNEK 11.8. ▷
$(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının kompaktlığını araştıralım.

ÇÖZÜM:

a) X kümesi sonlu olsun. Örnek 11.4 gereğince $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı kompakttır.
b) $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı kompakt olsun. $\{\{a, y\} \mid y \in X\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. Bu durumda bu örtünün $\{\{a, y_i\} \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Buradan
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \{a, y_i\} = \{a, y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$
elde edilir. O halde X kümesi sonludur.

(a) ve(b) gereğince herhangi bir $(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart X kümesinin sonlu olmasıdır.✍

ÖRNEK 11.9. ▷
$(X, \mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olsun.

a) $X \in \mathcal{U}$ ise $\{X\}$, $\mathcal{U}$ nun sonlu bir altörtüsüdür.
b) $X \notin \mathcal{U}$ olsun. Herhangi bir boş olmayan $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ seçelim. $\mathcal{T}$ nun tanımı gereğince

$X \setminus U_{i_0}$ kümesi sonludur. $X \setminus U_{i_0} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ olsun. $\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in bir örtüsü olduğundan

$$x_1 \in U_{i_1},\ x_2 \in U_{i_2}, \cdots, x_n \in U_{i_n}$$

olacak şekilde $U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n} \in \mathcal{U}$ kümeleri vardır. O halde

$$X \setminus U_{i_0} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

dir. Böylece

$$X = U_{i_0} \cup (X \setminus U_{i_0}) = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

olur. Bu durumda $\{U_{i_0}, U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{U}$ nun sonlu bir altörtüsü olur.

(b) ve(a) gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✍

ÖRNEK 11.10. ▷
$(Y, \mathcal{T})$ kompakt bir uzay ve $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{T}_f = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}\}$$

olmak üzere $(X, \mathcal{T}_f)$ uzayının kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu X uzayının açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $U_i = f^{-1}(V_i)$ olacak şekilde bir $V_i \in \mathcal{T}$ kümesi vardır. Böylece

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right)$$

ve f örten olduğundan $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ dir. Böylece $\{V_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu Y kümesinin açık bir örtüsüdür. $(Y, \mathcal{T})$ uzayı kompakt olduğundan bu örtünün $\{V_{i_k} \mid k = 1, 2, \cdots, n\}$ gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Böylece $Y = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$ olur. O halde

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

olur. Bu durumda $\{U_{i_k} \mid k = 1, 2, \cdots, n\}$ örtüsü $\{U_i \mid i \in I\}$ nın sonlu bir altörtüsüdür. Böylece $(X, \mathcal{T}_f)$ uzayı kompakttır.✍

ÖRNEK 11.11. ▷
$\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ bir X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ özelliğine sahip iki topoloji olsun. $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı kompaktsa $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayındaki açık kümelerden oluşan açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan $\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayındaki açık kümelerden oluşan açık bir örtüsü olur. $(X, \mathcal{T}_2)$ kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir $\mathcal{V}$ altörtüsü vardır. O halde $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı kompakttır.✍

SONUÇ 11.12. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır.

b) $\{U_i | i \in I\}$ açık kümelerin bir kolleksiyonu ve I nın sonlu her J alt kümesi için $\bigcup_{i\in J} U_i \neq X$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i \neq X$ dir.

İSPAT:

a)$\Rightarrow$ b). $\{U_i | i \in I\}$ açık kümelerin bir kolleksiyonu ve I nın sonlu her J alt kümesi için $\bigcup_{i\in J} U_i \neq X$ olsun. $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{U_i | i = 1, 2, \cdots, m\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Yani $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ dir. $J = \{1, 2, \cdots, m\} \subseteq I$ sonlu ve $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde $\bigcup_{i\in I} U_i \neq X$ dir.

b)$\Rightarrow$ a). $(X,\mathcal{T})$ uzayının kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda X in hiç bir sonlu altörtüsü olmayan bir $\{U_i | i \in I\}$ açık örtüsü vardır. Bu durumda I nın sonlu her J alt kümesi için $\bigcup_{i\in J} U_i \neq X$ olur.(a) gereğince $\bigcup_{i\in I} U_i \neq X$ dir. Bu ise $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonunun X in açık bir örtüsü olması ile çelişir. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✓

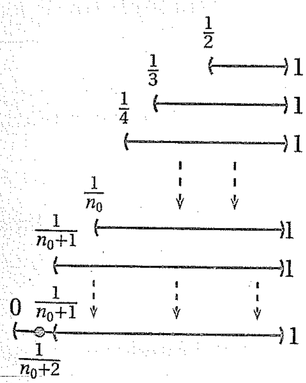
11.2. Alt Uzayların Kompaktlığı

TANIM 11.13. ▷ **Kompakt alt küme**

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve A da X in bir alt kümesi olsun. $(A,\mathcal{T}_A)$ alt uzayı kompaktsa A ya X in kompakt alt kümesi denir.

ÖRNEK 11.14. ▷

$\mathbb{R}$ standart uzayının $(0,1)$ alt kümesinin kompakt olmadığını gösterelim.



Şekil 11.2

ÇÖZÜM: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık ve

$$\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) = (0,1) \cap \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$$

olduğundan $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ kümesi $(0,1)$ de açıktır. Diğeryandan

$$(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$$

olduğundan $\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) \middle| \; n \in \mathbb{N}\right\}$ kolleksiyonu $(0,1)$ in açık bir örtüsüdür.

$\mathcal{V} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) \middle| \; n \in I \subseteq \mathbb{N}\right\}$ kolleksiyonu bu örtünün sonlu bir altörtüsü olsun. Bu durumda $n_0 = \max\{n | n \in I\}$ olmak üzere

$$(0,1) = \bigcup_{n \in I}\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) = \left(\frac{1}{n_0+1}, 1\right)$$

olur. Bu ise $\frac{1}{n_0+2} \in (0,1)$ ve $\frac{1}{n_0+2} \notin \left(\frac{1}{n_0+1}, 1\right)$ olduğundan bir çelişkidir. (Şekil 11.2 ye bakınız.) Böylece, $(0,1)$ in $\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) \middle| \, n \in \mathbb{N}\right\}$ açık örtünün sonlu hiç bir altörtüsü yoktur. O halde $(0,1)$ uzayı $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi değildir.✍

ÖRNEK 11.15. ▶
$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ standart uzayının $A = (0, \infty)$ alt kümesinin kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = (0, n)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $(0, n)$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık ve $U_n = (0, n) \cap A$ olduğundan $U_n \in \mathcal{T}_A$ dır. Diğeryandan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ olduğundan $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu A nın açık bir örtüsüdür. Bu örtünün

$$\{(0, n_1), (0, n_2), \cdots, (0, n_m)\}$$

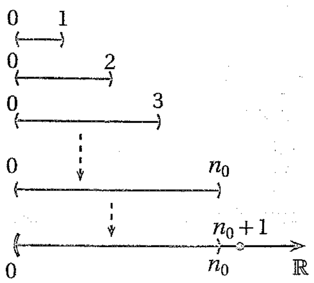
gibi herhangi bir sonlu altörtüsünün olduğunu kabul edelim. $n_0 = \max\{n_i | i = 1, 2, \cdots, m\}$ diyelim. Bu durumda

$$A = (0, n_1) \cup (0, n_2) \cup \cdots \cup (0, n_m) = (0, n_0)$$

olur. Bu ise

$$n_0 + 1 \in A \quad \text{ve} \quad n_0 + 1 \notin (0, n_0)$$

olduğundan bir çelişkidir. (Şekil 11.3 e bakınız.) O halde $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı kompakt değildir. Böylece A kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt bir alt kümesi değildir.✍



Şekil 11.3

ÖRNEK 11.16. ▶
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının sonlu her A alt kümesinin kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 11.4 gereğince $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı kompakttır. O halde A kümesi X in kompakt bir alt kümesidir. A keyfi olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayının sonlu her alt kümesi kompakttır.✍

Teorem 11.17. ▶
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve A da X in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kompakttır. ($(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı kompakttır.)

b) A nın $(X, \mathcal{T})$ uzayındaki açık kümelerden oluşan her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu A nın $(X, \mathcal{T})$ uzayındaki açık kümelerden oluşan bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ olacağından $A = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$ olur. Her bir

$i \in I$ için $A \cap U_i \in \mathcal{T}_A$ olduğundan $\{A \cap U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsüdür. Böylece $(A, \mathcal{T}_A)$ kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{A \cap U_1, A \cap U_2, \cdots, A \cap U_n\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Bu durumda $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap U_i)$ olur. Buradan $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ elde edilir. O halde $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ örtüsü A nın $\{U_i | i \in I\}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür.

b)⇒ a). $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsü olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i = A \cap V_i$ olacak şekilde bir $V_i \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $A = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap V_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ olur. O halde $\{V_i | i \in I\}$ kolleksiyonu A nın $(X, \mathcal{T})$ uzayının açık kümelerinden oluşan bir açık örtüsüdür.(b) gereğince bu örtünün sonlu bir altörtüsü vardır. Bu sonlu altörtü $\{V_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ olsun. Bu durumda $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ ve böylece

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cap A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap V_i) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

olur. O halde $\{U_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ kolleksiyonu A kümesinin $\{U_i | i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. Böylece A alt uzayı kompakttır.✔

Not
Teorem 11.17 gereğince $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayın bir A alt kümesinin kompakt olup olmadığını incelerken $(X, \mathcal{T})$ uzayı veya $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayının açık kümeleri kullanılabilir.

ÖRNEK 11.18. ▷
$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. (x_n) terimleri X kümesinin elemanlarından oluşan $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsü olsun. $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ olduğundan $x \in U_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Diğeryandan (x_n) dizisi x e yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in U_{i_0}$ olacak şekilde vardır. Her bir $n < n_0$ için $x_n \in U_n$ olacak şekilde bir $U_n \in \mathcal{U}$ seçelim. Bu durumda her $n < n_0$ için $x_n \in \bigcup_{i=1}^{n_0-1} U_i$ olur. O halde $A \subseteq U_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_0-1} U_i\right)$ olur. Diğer bir deyişle $\{U_{i_0}\} \cup \{U_i | i = 1, 2, \cdots, n_0 - 1\}$ kolleksiyonu $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. Böylece,

$$A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kümesi kompakttır.✍

ÖRNEK 11.19. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının bir A alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şartın A nın sonlu olması gerektiğini gösterelim.

ÇÖZÜM: $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı bir ayrık uzaydır. Örnek 11.5 gereğince A nın kompakt olması için gerek ve yeter şart A nın sonlu olmasıdır.✍

Teorem 11.20.

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X in sonlu sayıdaki kompakt alt kümelerinin birleşimide kompakttır.

İSPAT: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında kompakt ve $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ olsun. $\mathscr{U}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $k = 1,2,\cdots,n$ için $A_k \subseteq A \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{U}} U$ olduğundan her bir $k = 1,2,\cdots,n$ için $\mathscr{U}$ kolleksiyonu A_k kümesinin açık bir örtüsüdür. Her bir A_k kümesi kompakt olduğundan $\mathscr{U}$ örtüsünün A_k kümesini örtecek şekilde sonlu bir $\mathscr{U}_k$ altörtüsü vardır. Bu durumda her bir $k = 1,2,\cdots,n$ için $A_k \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{U}_k} U$ olur. Böylece $\bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{U}_k = \mathscr{U}_0$ olmak üzere

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{U\in\mathscr{U}_k} U\right) = \bigcup_{U\in\mathscr{U}_0} U$$

olur. Diğer bir deyişle $\mathscr{U}_0$ kolleksiyonu $\mathscr{U}$ açık örtüsünün A kümesini örtecek şekilde bir altörtüsüdür. Üstelik, her bir $\mathscr{U}_k$ sonlu olduğundan $\mathscr{U}_0$ sonludur. O halde A kümesi kompakttır.✔

Teorem 11.21.

Kompakt bir $(X,\mathcal{T})$ uzayın kapalı her A alt kümesi kompakttır.

İSPAT: $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ ve A kümesi kapalı olduğundan $X\setminus A$ kümesi açıktır. Diğer yandan,

$$X = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cup (X\setminus A)$$

dir. Böylece $\{U_i | i \in I\} \cup \{X\setminus A\}$ kolleksiyonu X uzayının açık bir örtüsüdür. $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır.

a) $X\setminus A \notin \{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\}$ ise $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\}$ örtüsü $\{U_i | i \in I\}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür.

b) $X\setminus A \in \{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\}$ ise bir $r \in \{1,2,\cdots,n\}$ için $U_{i_r} = X\setminus A$ dır. Bu durumda

$$X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_{r-1}} \cup (X\setminus A) \cup U_{i_{r+1}} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

olur. Böylece

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_{r-1}} \cup (X\setminus A) \cup U_{i_{r+1}} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

ve $(X\setminus A)\cap A=\emptyset$ olduğundan

$$A\subseteq U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots\cup U_{i_{r-1}}\cup U_{i_{r+1}}\cup\cdots\cup U_{i_n}$$

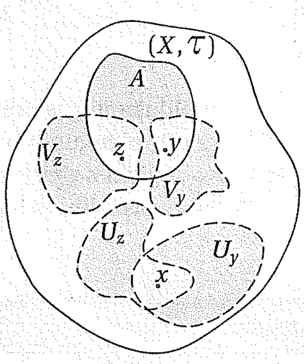
elde edilir. Dolayısıyla $\{U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_{r-1}},U_{i_{r+1}},\cdots,U_{i_n}\}$ örtüsü A nın $\{U_i|i\in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsüdür.

O halde A kümesi kompakttır.✔

Teorem 11.22. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı, A bu uzayın kompakt bir alt kümesi ve $x\notin A$ olsun. Bu durumda

$$x\in U,\ A\subseteq V \text{ ve } U\cap V=\emptyset$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır.



Şekil 11.4

İSPAT: $x\notin A$ olduğundan her $y\in A$ için $x\neq y$ dir. $(X,\mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan her $y\in A$ için

$$x\in U_y,\ y\in V_y \text{ ve } U_y\cap V_y=\emptyset$$

olacak şekilde $U_y\in\mathcal{T}$ ve $V_y\in\mathcal{T}$ kümeleri vardır. (Şekil 11.4 e bakınız.) Bu durumda $\{V_y|y\in A\}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsü olur. A kümesi kompakt olduğundan bu örtünün $\{V_{y_i}|i=1,2,\cdots,n\}$ gibi sonlu bir altörtüsü vardır.

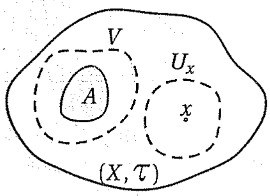
$$U=U_{y_1}\cap U_{y_2}\cap\cdots\cap U_{y_n},\ V=V_{y_1}\cup V_{y_2}\cup\cdots\cup V_{y_n}$$

olsun. Bu durumda

$$x\in U,\ A\subseteq V \text{ ve } U,V\in\mathcal{T}$$

olur. Şimdi, $U\cap V=\emptyset$ olduğunu gösterelim. $z\in U\cap V$ olsun. Bu durumda $z\in U$ ve $z\in V$ dir. Böylece $z\in U$ olduğundan $i=1,2,\cdots,n$ için $z\in U_{y_i}$ ve $z\in V$ olduğundan en az bir $i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ için $z\in V_{y_{i_0}}$ dır. Böylece $z\in U_{y_{i_0}}\cap V_{y_{i_0}}$ dır. Yani $U_{y_{i_0}}\cap V_{y_{i_0}}\neq\emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $U\cap V=\emptyset$ dur.✔

Teorem 11.23. ▷ Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ Hausdorff uzayının kompakt her A alt kümesi kapalıdır.



Şekil 11.5

İSPAT: $x\in X\setminus A$ olsun. Teorem 11.22 gereğince

$$x\in U_x,\ A\subseteq V \text{ ve } U_x\cap V=\emptyset$$

olacak sekilde $U_x,V\in\mathcal{T}$ kümeleri vardır. (Şekil 11.5 e bakınız.) $U_x\cap A=\emptyset$ olduğundan $U_x\subseteq X\setminus A$ elde edilir. Sonuç 3.44 gereğince $X\setminus A$ kümesi açıktır. (Veya $X\setminus A=\bigcup_{x\in X\setminus A}U_x$ olduğundan $X\setminus A$ açıktır.) Bu durumda A kümesi kapalı olur.✔

Örnek 7.38 gereğince her metrik uzay bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.23 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 11.24. ▷ Herhangi bir (X,d) metrik uzayının kompakt her A alt kümesi kapalıdır.

Teorem 11.25.

$(X,\mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olmak üzere F_1, F_2 kümeleri kompakt ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda

$$F_1 \subseteq V,\ F_2 \subseteq U \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır.

Not

$(X,\mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı değilse Teorem 11.23 doğru olmayabilir. Örneğin, herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ kaba uzayında her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi kompakt olmasına rağmen kapalı değildir. Benzer şekilde $(X,\mathcal{T}(a))$ uzayında $\{a\}$ kümesi kompakt olmasına rağmen kapalı değildir.

İSPAT: $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olduğundan her $y \in F_2$ için $y \notin F_1$ olur. Teorem 11.22 gereğince her $y \in F_2$ için

$$y \in U_y,\ F_1 \subseteq V_y \text{ ve } U_y \cap V_y = \emptyset$$

olacak şekilde $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $\{U_y | y \in F_2\}$ kolleksiyonu F_2 kümesinin açık bir örtüsü olur. F_2 kompakt olduğundan bu örtünün $\{U_{y_i} | i = 1,2,\cdots,n\}$ gibi sonlu bir altörtüsü vardır.

$$U = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \cdots \cup U_{y_n} \text{ ve } V = V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \cdots \cap V_{y_n}$$

olsun. Açıkça $U, V \in \mathcal{T}$ ve $F_2 \subseteq U$, $F_1 \subseteq V$ olur. Şimdi, $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in U \cap V$ olsun. Bu durumda $z \in V$ ve $z \in U$ olur. Böylece $z \in V$ olduğundan $i = 1,2,\cdots,n$ için $z \in V_{y_i}$ ve $z \in U$ olduğundan en az bir $i_0 \in \{1,2,\cdots,n\}$ için $z \in U_{y_{i_0}}$ olur. Böylece $z \in U_{y_{i_0}} \cap V_{y_{i_0}}$ dır. Yani $U_{y_{i_0}} \cap V_{y_{i_0}} \neq \emptyset$ dur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $U \cap V = \emptyset$ dur.✔

Teorem 11.26.

Herhangi bir kompakt $(X,\mathcal{T})$ Hausdorff uzayı normaldir.

İSPAT: F_1 ve F_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında kapalı ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. Teorem 11.21 gereğince F_1 ve F_2 kümeleri kompakttır. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olduğundan Teorem 11.25 gereğince $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Böylece $(X,\mathcal{T})$ uzayı normaldir.✔

11.3. Kompaktlık ve Kapalı Kümeler

TANIM 11.27. ▷ **Sonlu arakesit özelliği**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\{F_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. I nın sonlu her J alt kümesi için $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$ ise $\{F_i | i \in I\}$ kolleksiyonuna sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

Teorem 11.28.

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır.

b) $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ özelliğine sahip kapalı kümelerden oluşan her $\{F_i | i \in I\}$ kolleksiyonu için $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ olacak şekilde I nın sonlu bir J alt kümesi vardır.

c) Kapalı kümelerden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip her $\{F_i | i \in I\}$ kolleksiyonu için $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). Kapalı kümelerden oluşan $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ özelliğine sahip bir $\{F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu verilsin. Her $i \in I$ için F_i kapalı olduğundan $X \backslash F_i$ kümesi açıktır. Diğer yandan $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ olduğundan $\bigcup_{i\in I}(X\backslash F_i) = X$ dir. O halde $\{X\backslash F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. (a) gereğince bu örtünün

$$\{X\backslash F_{i_1}, X\backslash F_{i_2}, \cdots, X\backslash F_{i_n}\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Bu durumda

$$X = (X\backslash F_{i_1}) \cup (X\backslash F_{i_2}) \cup \cdots \cup (X\backslash F_{i_n})$$

olur. Buradan $\emptyset = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_n}$ elde edilir. O halde $J = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I$ sonlu ve $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$ dur.

b)⇒ c). Sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı kümelerden oluşan bir $\{F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu için $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda(b) gereğince $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$ olacak şekilde I nın sonlu bir J alt kümesi vardır. Bu ise $\{F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonunun sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir. O halde $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ dur.

c)⇒ a). $(X, \mathcal{T})$ uzayının kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda X in hiç bir sonlu altörtüsü olmayan açık bir $\{U_i \mid i \in I\}$ örtüsü vardır. Her $i \in I$ için U_i kümesi açık olduğundan $X \backslash U_i$ kümesi kapalıdır. Diğer yandan I nın sonlu her J alt kümesi için $\bigcup_{i\in J} U_i \neq X$ olduğundan $\bigcap_{i\in J}(X\backslash U_i) \neq \emptyset$ dur. O halde $\{X\backslash U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu kapalı kümelerden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip bir kolleksiyondur. (c) gereğince $\bigcap_{i\in I}(X\backslash U_i) \neq \emptyset$ olur. Buradan $\bigcup_{i\in I} U_i \neq X$ elde edilir. Bu ise $\{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonunun X in bir örtüsü olması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✔

11.4. $\mathbb{R}$ Standart Uzayının Kompakt Alt Kümeleri

Teorem 11.29.

$\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt her A alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İSPAT: $\mathbb{R}$ standart uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.23 gereğince A kümesi kapalıdır.

Şimdi, A kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsüdür. Bu durumda $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n_i, n_i)$ olur. A kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{(-n_i, n_i) \mid i = 1, 2, \cdots, m\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Yani $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (-n_i, n_i)$ dir. $m_0 = \max\{n_i \mid i = 1, 2, \cdots, m\}$

denilirse
$$\bigcup_{i=1}^{m}(-n_i,n_i)=(-m_0,m_0)$$
olacağından
$$A\subseteq(-m_0,m_0)\subseteq[-m_0,m_0]$$
olur. Teorem 2.39 gereğince A sınırlıdır.✔

ÖRNEK 11.30. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının

a) (a,b)	b) $[a,b)$	c) $(a,b]$	d) $[a,\infty)$
e) (a,∞)	f) $(-\infty,b)$	g) $(-\infty,b]$	h) $\mathbb{N}$
i) $\mathbb{Z}$	j) $\mathbb{Q}$	k) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	l) $\mathbb{R}$

alt kümelerinin kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Teorem 11.29 gereğince $\mathbb{R}$ nin kapalı veya sınırlı olmayan hiç bir alt kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayında kompakt olamaz. Buna göre $a<b$ özelliğindeki her $a,b\in\mathbb{R}$ için

a) (a,b) aralığı kapalı olmadığından kompakt değildir.
b) $[a,b)$ aralığı kapalı olmadığından kompakt değildir.
c) $(a,b]$ aralığı kapalı olmadığından kompakt değildir.
d) $[a,\infty)$ aralığı sınırlı olmadığından kompakt değildir.
e) (a,∞) aralığı sınırlı (kapalı) olmadığından kompakt değildir.
f) $(-\infty,b)$ aralığı sınırlı (kapalı) olmadığından kompakt değildir.
g) $(-\infty,b]$ aralığı sınırlı olmadığından kompakt değildir.
h) $\mathbb{N}$ kümesi sınırlı olmadığından kompakt değildir.
i) $\mathbb{Z}$ kümesi sınırlı olmadığından kompakt değildir.
j) $\mathbb{Q}$ kümesi sınırlı (kapalı) olmadığından kompakt değildir.
k) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesi sınırlı (kapalı) olmadığından kompakt değildir.
l) $\mathbb{R}$ kümesi sınırlı olmadığından kompakt değildir.✍

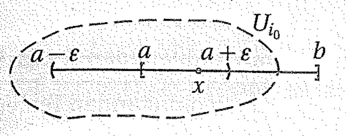
Teorem 11.31. ▷ Heine-Borel
$\mathbb{R}$ standart uzayının kapalı ve sınırlı herhangi bir $[a,b]$ aralığı kompakttır.

İSPAT: $\mathbb{R}$ nin açık kümelerden oluşan $\mathscr{U}=\{U_i\,|\,i\in I\}$ kolleksiyonu $[a,b]$ aralığının bir açık örtüsü olsun.
$$G=\{x\in\mathbb{R}|x\geq a,\text{ ve }[a,x]\text{ aralığı }\mathscr{U}\text{ örtüsünün sonlu bir altörtüsü tarafından örtülebilsin}\}$$
olsun. $b\in G$ olduğunu gösterirsek $[a,b]$ aralığının kompakt olduğunu göstermiş oluruz.

Önce $G\neq\emptyset$ olduğunu gösterelim. $a\in[a,b]$ ve $[a,b]\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$ olduğundan en az bir $i_0\in I$ için $a\in U_{i_0}$ olur. Bu durumda U_{i_0} kümesi $\mathbb{R}$ de açık olduğundan Not 4.6 gereğince en az bir $\varepsilon>0$ için
$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq U_{i_0}$$

olur. Böylece

$$[a, a+\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$$



Şekil 11.6

dır. (Şekil 11.6 ya bakınız.) O halde her $x \in [a, a+\varepsilon)$ için

$$[a, x] \subseteq [a, a+\varepsilon)$$

olduğundan $[a, x]$ aralığı $\mathscr{U}$ nun sonlu $\{U_{i_0}\}$ altörtüsü tarafından örtülür. Böylece $x \in G$ dir. Yani $G \neq \emptyset$ dur. Bu durumda ya G üstten sınırlı değildir ya da üstten sınırlıdır.

a) G üstten sınırlı olmasın. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $c > x$ olacak şekilde bir $c \in G$ vardır. Böylece $b \in \mathbb{R}$ için $c > b$ olacak şekilde bir $c \in G$ vardır. (Şekil 11.7 ye bakınız.) O halde $[a, c]$ aralığı $\mathscr{U}$ nun sonlu bir $\mathscr{V}$ altörtüsü tarafından örtülür.

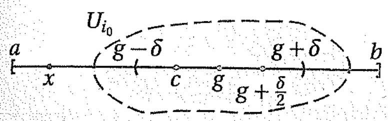
Şekil 11.7

$$[a, b] \subseteq [a, c]$$

olduğundan $[a, b]$ aralığıda $\mathscr{U}$ nun sonlu $\mathscr{V}$ altörtüsü tarafından örtülür. Böylece $b \in G$ olur. Bu durumda $\mathscr{U}$ nun sonlu bir altörtüsü vardır. Bu durumda $[a, b]$ aralığı kompakttır.

b) G kümesi üsten sınırlı olsun. O zaman, $g = \sup G$ olacak şekilde bir $g \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $g > b$ veya $g \leq b$ dir.

i) $g \leq b$ olsun. Bu durumda $x > a$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ olduğundan $g > a$ dır. $g \in [a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ olduğundan bazı $U_0 \in \mathscr{U}$ için $g \in U_0$ olmalıdır. U_0 açık olduğundan, bazı $\delta > 0$ için



Şekil 11.8

$$U_0 \supset (g-\delta, g+\delta)$$

(ve $g > a$ olduğundan, $a < g-\delta$ olduğunu kabul edebiliriz) olur. g nin G kümesinin en küçük üst sınırı olmasından $c > g-\delta$ olacak şekilde bir $c \in G$ noktası vardır. (Şekil 11.8 e bakınız.) Bu ise, $[a, c]$ aralığının $\mathscr{U}$ örtüsünün sonlu bir

$$\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$$

alt kolleksiyonu tarafından örtülmesi demektir. O zaman,

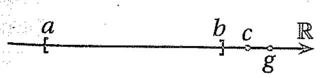
$$\begin{aligned}[a, g+\delta/2] &\subseteq [a, c] \cup (g-\delta, g+\delta/2] \subseteq [a, c] \cup (g-\delta, g+\delta) \\ &\subseteq (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r) \cup U_0\end{aligned}$$

olur. Yani $[a, g+\delta/2]$ aralığı $\mathscr{U}$ nun sonlu

$$\{U_1, U_2, \cdots, U_r, U_0\}$$

altörtüsü tarafından örtülür. Böylece $g+\delta/2 \in G$ olur. Bu ise g nin G kümesinin en küçük üst sınırı olması ile çelişir. Bu çelişki $g > b$ olmasını gerektirir.

ii) $g > b$ olsun. Bu durumda b elemanı G nin bir üst sınırı olamaz. Böylece $g > c > b$ olacak şekilde bir $c \in G$ vardır. (Şekil 11.9 a bakınız.) O halde $[a, c]$ aralığı $\mathscr{U}$ nun sonlu bir $\mathscr{V}$ altörtüsü tarafından örtülür. $[a, b] \subseteq [a, c]$ olduğundan bu sonlu $\mathscr{V}$ örtüsü $[a, b]$ aralığınıda örter. Dolayısıyla $b \in G$ dir. Bu durumda $\mathscr{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü vardır. O halde bu durumda $[a, b]$ aralığı kompakttır.✔



Şekil 11.9

Teorem 11.32. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının kapalı ve sınırlı her A alt kümesi kompakttır.

İSPAT: A, $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. A sınırlı olduğundan $A \subseteq [a,b]$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. $[a,b]$ kompakt ve A kapalı olduğundan Teorem 11.21 gereğince A kompakttır.✔

Teorem 11.32 ve Teorem 11.29 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 11.33. ▷ $\mathbb{R}$ standart uzayının bir A alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart A nın kapalı ve sınırlı olmasıdır.

11.5. Kompaktlık ve Sürekli Fonksiyonlar

Teorem 11.34. ▷
$f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı kompaktsa $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda kompakttır.

İSPAT: $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu Y nin açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $Y = \bigcup_{i\in I} U_i$ dir. f sürekli ve her $i \in I$ için U_i açık olduğundan $f^{-1}(U_i)$ açıktır. Diğer yandan

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

olur. O halde $\{f^{-1}(U_i) | i \in I\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{f^{-1}(U_{i_1}), f^{-1}(U_{i_2}), \cdots, f^{-1}(U_{i_m})\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Böylece

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup f^{-1}(U_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_m})$$

olur. Bu durumda f örten olduğundan

$$\begin{aligned} Y &= f(X) = f(f^{-1}(U_{i_1}) \cup f^{-1}(U_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_m})) \\ &= f(f^{-1}(U_{i_1})) \cup f(f^{-1}(U_{i_2})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(U_{i_m})) \\ &= U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_m} \end{aligned}$$

olur. Yani $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m}\}$ örtüsü Y nin $\{U_i | i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. Böylece $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı kompakttır.✔

SONUÇ 11.35. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının kompakt olmasıdır.

ÖRNEK 11.36. ▷
X sonlu bir küme değilse $(X, \mathcal{T}(a))$ uzayı ile $(X, \mathcal{T}_a)$ uzayının homeomorfik ol-

madığını gösterelim.

Not

$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ topolojik uzaylarından biri kompakt diğeri kompakt değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

ÇÖZÜM: Örnek 11.7 gereğince $(X,\mathcal{T}_a)$ uzayı kompakt ve Örnek 11.8 gereğince X sonlu değilse $(X,\mathcal{T}(a))$ topolojik uzayı kompakt olmadığından X sonlu değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar. Örneğin, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$ ve $(\mathbb{R},\mathcal{T}(0))$ uzayları homeomorfik değildir.

ÖRNEK 11.37. ▷
$(0,\infty)$ aralığının kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: (a,b) ve $(0,\infty)$ uzayları Alıştırma 24 gereğince homeomorfiktir. (a,b) aralığı Örnek 11.65 gereğince kompakt olmadığından $(0,\infty)$ aralığıda kompakt değildir.✍

Teorem 11.38. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ kompakt bir uzay ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda $f: (X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ sürekli bir fonksiyon ise f kapalıdır.

İSPAT: A kümesi $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayında kapalı olsun. Teorem 11.21 gereğince A kompakttır. f sürekli olduğundan Teorem 11.34 gereğince $f(A)$ kümesi $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayında kompakttır. $(Y,\mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.23 gereğince $f(A)$ kapalıdır. O halde f fonksiyonu kapalı bir fonksiyondur.✔

Teorem 11.39. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ kompakt bir uzay ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda $f: (X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bire-bir örten ve sürekli bir fonksiyon ise f bir homeomorfizmdir.

İSPAT: Teorem 11.38 gereğince f kapalıdır. Teorem 6.59 gereğince f fonksiyonu bir homeomorfizmdir.✔

ÖRNEK 11.40. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$ bir Hausdorff uzayı, $(X,\mathcal{T}_2)$ kompakt bir uzay ve $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ ise $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$ olması gerektiğini gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathrm{id}:(X,\mathcal{T}_2)\to(X,\mathcal{T}_1)$ fonksiyonu bire-bir örten ve sürekli olduğundan Teorem 11.39 gereğince bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla $U\in\mathcal{T}_2$ ise $\mathrm{id}(U)=U\in\mathcal{T}_1$ dir. Yani $\mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_1$ dir. O halde $\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1$ dir.✍

Teorem 11.41. ▷ **Maksimum-minimum değer teoremi**
$(X,\mathcal{T})$ kompakt bir uzay ve $f:(X,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x\in X$ için

$$f(x_0)\le f(x)\le f(y_0)$$

olacak şekilde $x_0,y_0\in X$ noktaları vardır.

İSPAT: f fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 11.34 gereğince $f(X)$ kompakttır. Sonuç 11.33 gereğince $f(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir. $f(X)$

sınırlı olduğundan $\sup f(X)$ vardır. Diğeryandan $f(X)$ kapalı olduğundan Teorem 5.16 gereğince

$$\sup f(X) \in f(X)$$

dir. Bu durumda $\sup f(X) = \max f(X)$ ve dolayısıyla $\max f(X) \in f(X)$ olur. Bu durumda bazı $y_0 \in X$ için

$$f(y_0) = \max f(X)$$

dir. Yani her $x \in X$ için $f(x) \leq f(y_0)$ olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır. Benzer şekilde, her $x \in X$ için $f(x_0) \leq f(x)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ olduğu gösterilir. Böylece her $x \in X$ için

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$$

olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ vardır.✓

Not

Teorem 11.41 gereğince $(X, \mathcal{T})$ kompakt ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise f maksimum ve minimum değerini X üzerinde alır.

SONUÇ 11.42. ▶ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f maksimum ve minimum değerini $[a, b]$ üzerinde alır.

11.6. Çarpım Uzaylarının Kompaktlığı

Sonlu Sayıdaki Uzayların Çarpımının Kompaktlığı

Teorem 11.43. ▶

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay olmak üzere C kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının kompakt bir alt kümesi ve U kümesi $(X \times Y, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ uzayında açık bir küme olsun. Bu durumda

$$V = \{x \in X \mid \{x\} \times C \subseteq U\}$$

kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında açıktır.

İSPAT: $x \in V$ olsun. Bu durumda $\{x\} \times C \subseteq U$ olur. O halde her $y \in C$ için $(x, y) \in U$ olur. U kümesi $(X \times Y, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ uzayında açık bir küme olduğundan her $y \in C$ için $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq U$ olacak şekilde $U_y \in \mathcal{T}_1$ ve $V_y \in \mathcal{T}_2$ kümeleri vardır. Bu durumda

$$\mathcal{U} = \{V_y \mid y \in C\}$$

kolleksiyonu C nin bir açık örtüsüdür. C kompakt olduğundan bu örtünün

$$\mathcal{V} = \{V_{y_1}, V_{y_2}, \cdots, V_{y_n}\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır.

$$U_x = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n} \quad \text{ve} \quad V_x = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

olsun. Bu durumda $x \in U_x$ ve $C \subseteq V_x$ olur. Üstelik, $U_x \in \mathcal{T}_1$ ve $V_x \in \mathcal{T}_2$ dir. Diğer yandan

$$U_x \times C \subseteq U_x \times \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_x \times V_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i}) \subseteq U$$

olur. O halde her $z \in U_x$ için $\{z\} \times C \subseteq U$ olur. Böylece V nin tanımı gereğince $z \in V$ olur. Buradan $U_x \subseteq V$ elde edilir. Bu durumda $x \in U_x$, $U_x \subseteq V$ ve $U_x \in \mathcal{T}_1$ olduğundan Sonuç

3.44 gereğince V kümesi açıktır. (Veya $V = \bigcup_{x \in V} U_x$ olduğundan V kümesi açıktır.)✔

Teorem 11.44. ▶ Tychonoff Teoremi

$(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \cdots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ topolojik uzayları verilsin. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{i=1}^{n} X_i$ çarpım uzayı kompakttır.

b) Her $i = 1, 2, \cdots, n$ için $(X_i, \mathcal{T}_i)$ uzayı kompakttır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 10.23 gereğince her $i = 1, 2, \cdots, n$ için π_i fonksiyonu süreklidir. $\prod_{j=1}^{n} X_j$ çarpım uzayı kompakt ve

$$\pi_i \left(\prod_{j=1}^{n} X_j \right) = X_i$$

olduğundan Teorem 11.34 gereğince $(X_i, \mathcal{T}_i)$ uzayı kompakttır.

b)⇒ a). i) Önce iki kompakt uzayın çarpım uzayının kompakt olduğunu gösterelim. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzayları kompakt olsun. $(X \times Y, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ çarpım uzayının kompakt olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}$ kolleksiyonu $X \times Y$ uzayının keyfi bir açık örtüsü olsun. $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü olduğunu gösterelim.

$x \in X$ olsun. $f : Y \to X \times Y$ fonksiyonunu $y \in Y$ için $f(y) = (x, y)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda f fonksiyonu sürekli ve Y uzayı kompakt olduğundan $f(Y)$ kümesi $(X \times Y, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ çarpım uzayında kompakttır. Böylece

$$f(Y) = \{x\} \times Y$$

olduğundan $\{x\} \times Y$ kümesi $(X \times Y, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ çarpım uzayında kompakttır. $\mathcal{U}$ kolleksiyonu $\{x\} \times Y$ kümesinin de bir açık örtüsü olacağından $\mathcal{U}$ nun $\{x\} \times Y$ kümesini örtecek şekilde $\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$ gibi bir sonlu alt örtüsü vardır.

$$V_x = \{x' \in X | \{x'\} \times Y \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r\}$$

olsun. Bu durumda $x \in V_x$ ve Teorem 11.43 gereğince V_x kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında açıktır. $(x', y) \in V_x \times Y$ ise $x' \in V_x$ olduğundan

$$(x', y) \in \{x'\} \times Y \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$$

olur. Bu durumda

$$\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$$

kolleksiyonu $V_x \times Y$ yi örter.

Diğer yandan $\{V_x | x \in X\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{V_{x_1}, V_{x_2}, \cdots, V_{x_s}\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $X = \bigcup_{j=1}^{s} V_{x_j}$ dir. Böylece

$$X \times Y = \left(\bigcup_{j=1}^{s} V_{x_j} \right) \times Y = \bigcup_{j=1}^{s} \left(V_{x_j} \times Y \right)$$

olur. Her $j = 1, 2, \cdots, s$ için $V_{x_j} \times Y$ kümesi $\mathscr{U}$ nun $\mathscr{U}_j$ gibi sonlu bir alt örtüsü tarafından örtüldüğünden $X \times Y$ de $\mathscr{U}$ nün $\mathscr{U}_0 = \bigcup_{j=1}^{s} \mathscr{U}_j$ sonlu alt örtüsü tarafından örtülür. Yani $\mathscr{U}$ nun sonlu bir $\mathscr{U}_0$ alt örtüsü vardır. Bu durumda $X \times Y$ çarpım uzayı kompakttır.

ii) Şimdi tümevarım prensibini kullanılarak $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \cdots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ kompakt uzaylarının çarpım uzayının kompakt olduğunu gösterelim.
$n = 1$ için $(X_1, \mathcal{T}_1)$ uzayı kompakttır. $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \cdots, (X_n, \mathcal{T}_k)$ uzaylarının çarpımının kompakt olduğunu kabul edelim. Yani $\prod_{i=1}^{k} X_i$ çarpım uzayı kompakt olsun. Bu durumda X_{k+1} uzayı kompakt olduğundan (i) gereğince $\prod_{i=1}^{k} X_i \times X_{k+1}$ uzayı kompakttır. Diğer yandan $\prod_{i=1}^{k+1} X_i$ çarpım uzayı $\prod_{i=1}^{k} X_i \times X_{k+1}$ uzayı ile homeomorfik olduğundan (Alıştırmalar 7 ya bakınız) $\prod_{i=1}^{k+1} X_i$ çarpım uzayı kompakt olur.
Tümevarım prensibi gereğince $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \cdots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ uzaylarının çarpım uzayı $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kompakttır.✔

Keyfi Sayıdaki Uzayların Çarpımının Kompaktlığı

YARDIMCI TEOREM 11.45. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ olmak üzere $\mathscr{A}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olsun.

$$\Omega = \{\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X) \,|\, \mathscr{U} \text{ sonlu arakesit özelliğine sahip ve } \mathscr{A} \subseteq \mathscr{U}\}$$

olsun. Bu durumda Ω nın $\subseteq$ bağıntısına göre bir maksimal elemanı vardır.

İSPAT: $\Gamma = \{\mathscr{M}_i | i \in I\}$ kolleksiyonu Ω nın tam sıralı bir alt kolleksiyonu olsun. $\mathscr{M} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{M}_i$ diyelim. Önce, $\mathscr{M}$ nin Ω nın bir elemanı olduğunu gösterelim. Diğer bir deyişle

a) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$ olduğunu,

b) $\mathscr{M}$ nin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu

gösterelim.

a) Her $i \in I$ için $\mathscr{M}_i \in \Gamma$ ve $\Gamma \subseteq \Omega$ olduğundan her $i \in I$ için $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}_i$ dır. Böylece, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{M}_i$ dır.

b) Şimdi $\mathscr{M} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{M}_i$ nin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

kolleksiyonu $\mathcal{M}$ nin sonlu bir alt kolleksiyonu olsun. $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$ olduğundan

$$A_1 \in \mathcal{M}_{i_1}, A_2 \in \mathcal{M}_{i_2}, \cdots, A_n \in \mathcal{M}_{i_n}$$

olacak şekilde $\mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2}, \cdots, \mathcal{M}_{i_n} \in \Gamma$ vardır. Γ tam sıralı olduğundan

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}_{i_{j_0}}$$

olacak şekilde bir $\mathcal{M}_{i_{j_0}}$ vardır. Üstelik $\mathcal{M}_{i_{j_0}}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$$

dur. Böylece $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$ nin sonlu her $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ alt kolleksiyonu için

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$$

dur. Yani $\mathcal{M}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. O halde $\mathcal{M} \in \Omega$ dır.
Böylece $\mathcal{M}$ kolleksiyonu Γ nin bir üst sınırıdır. Yardımcı Teorem 1.23 gereğince Ω nın maksimal bir $\mathcal{M}$ elemanı vardır.✓

YARDIMCI TEOREM 11.46. ▷
Teorem 11.45 daki $\mathcal{M}$ maksimal elemanı aşağıdaki özelliklere sahiptir.
a) $A \in \mathcal{M}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{M}$ dir.
b) $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$ ise $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{M}$ dir.
c) Her $U \in \mathcal{M}$ için $U \cap A \neq \emptyset$ ise $A \in \mathcal{M}$ dir.

İSPAT:

a) $\mathcal{M} \in \Omega$ olduğundan $\mathcal{M}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ kolleksiyonu $\mathcal{M}$ nin sonlu bir alt kolleksiyonu ve $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap B = \emptyset$ olsun. $A \subseteq B$ olduğundan $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A = \emptyset$ olur. Bu ise $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, A\}$ kolleksiyonu $\mathcal{M}$ nin sonlu bir alt kolleksiyonu olduğundan $\mathcal{M}$ nin sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir. O halde $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap B \neq \emptyset$ dur. Böylece $\mathcal{M} \cup \{B\}$ kolleksiyonu sonlu arakesit özelliğine sahiptir. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{B\}$ ve $\mathcal{M}$ maksimal olduğundan $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{B\}$ olur. O halde $B \in \mathcal{M}$ dir.

b) Önce $A, B \in \mathcal{M}$ ise $C = A \cap B \in \mathcal{M}$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{M} \cup \{C\}$ nin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu gösterelim. $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq \mathcal{M} \cup \{C\}$ olsun. Bu durumda $C \notin \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ veya $C \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ dır.

i) $C \notin \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ olsun. Bu durumda $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ dır. $\mathcal{M}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ dur.

ii) $C \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ olsun. $C = A_j$ $(1 \le j \le n)$ diyelim. $A, B, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$ olduğundan

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{j-1} \cap (A \cap B) A_{j+1} \cap A_n \neq \emptyset$$

dur.

Her iki haldede $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ dur. Böylece $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Omega$ dır. $\mathcal{M}$ maksimal ve $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{C\}$ olduğundan $\mathcal{M} \cup \{C\} = \mathcal{M}$ dir. O halde, $C = A \cap B \in \mathcal{M}$ dir.

Tümavarım yöntemiyle $\mathcal{M}$ ye ait sonlu sayıdaki elemanların arakesitlerinin yine $\mathcal{M}$ ye ait olduğu gösterilebilir.

c) $\mathcal{M} \cup \{A\}$ nın sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu gösterelim. $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ $\mathcal{M} \cup \{A\}$ olsun. Bu durumda $A \notin \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ veya $A \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ dır.

i) $A \notin \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ olsun. Bu durumda $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ dır. $\mathcal{M}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ dur.

ii) $A \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ olsun. $A = A_j$ $(1 \leq j \leq n)$ diyelim.

$$A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1} \cap A \cap A_{j+1} \cap A_n = A_j \cap \left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap A_n\right)$$

ve (b) gereğince $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap A_n \in \mathcal{M}$ olduğundan

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{j-1} \cap A \cap A_{j+1} \cap A_n \neq \emptyset$$

dur.

O halde $\mathcal{M} \cup \{A\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Böylece $\mathcal{M} \cup \{A\} \in \Omega$ dır. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{A\}$ ve $\mathcal{M}$ maksimal olduğundan $\mathcal{M} \cup \{A\} = \mathcal{M}$ olur. O halde $A \in \mathcal{M}$ dir. ✔

Teorem 11.47. ▶ Tychonoff Teoremi

I bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı kompakttır.

b) Her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı kompakttır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 10.23 gereğince her $\alpha \in I$ için π_α fonksiyonu süreklidir. $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı kompakt ve $\pi_\alpha \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) = X_\alpha$ olduğundan Teorem 11.34 gereğince $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı kompakttır.

b)⇒ a). $\mathcal{A} = \{F_j | j \in J\}$ kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayının kapalı kümelerinden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip bir kolleksiyonu olsun. Yardımcı Teorem 11.45 gereğince

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} = \{M_k | k \in K\}$$

olacak şekilde sonlu arakesit özelliğine sahip maksimal bir $\mathcal{M}$ kolleksiyonu vardır.

$$\overline{\mathcal{M}} = \left\{\overline{M_k} | k \in K\right\}$$

olsun. $F_j \in \mathcal{A}$ ise $F_j \in \mathcal{M}$ ve F_j kapalı olduğundan $F_j = \overline{F_j}$ ve böylece $F_j = \overline{F_j} \in \overline{\mathcal{M}}$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$ dır. Böylece, $\overline{\mathcal{M}}$ nin arakesitinin boş olmadığını gösterirsek yani $\bigcap \overline{\mathcal{M}} = \bigcap_{k \in K} \overline{M_k} \neq \emptyset$ olduğunu gösterirsek $\mathcal{A}$ nın da arakesiti boş olmaz yani $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ olur. Diğer bir deyişle her $k \in K$ için $x \in \overline{M_k}$ olacak şekilde bir $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ olduğunu gösterirsek $\mathcal{A}$ nın arakesiti boş olmaz. Bunun için

$k \in K$ ve $x \in B$ özelliğindeki her $B \in \mathscr{B}_ç$ ($\mathscr{B}_ç$ çarpım uzayının tabanı) için

$$B \cap M_k \neq \emptyset \tag{11.1}$$

olacak şekilde bir $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathscr{M}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan her bir $\alpha \in I$ için $\{\pi_\alpha(M_k) \mid k \in K\}$ kolleksiyonu X_α nin alt kümelerinin sonlu arakesit özelliğine sahip bir kolleksiyonudur. Böylece her $\alpha \in I$ için

$$\left\{\overline{\pi_\alpha(M_k)} \mid k \in K\right\}$$

kolleksiyonu X_α nin kapalı kümelerinden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip bir kolleksiyondur. Böylece her $\alpha \in I$ için X_α kompakt olduğundan Teorem 11.28 gereğince $\bigcap_{k \in K} \overline{\pi_\alpha(M_k)} \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla her $\alpha \in I$ için $x_\alpha \in \bigcap_{k \in K} \overline{\pi_\alpha(M_k)}$ olacak şekilde bir $x_\alpha \in X_\alpha$ vardır. O halde her $k \in K$ ve X_α nin $x_\alpha \in G_\alpha$ özelliğindeki açık her G_α kümesi için

$$G_\alpha \cap \pi_\alpha(M_k) \neq \emptyset \tag{11.2}$$

olacak şekilde bir $x_\alpha \in X_\alpha$ vardır. $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ olsun. Bu durumda $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ dir. $x \in B$, $B \in \mathscr{B}_ç$ ($\mathscr{B}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ in tabanı) olsun. Bu durumda

$$B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(G_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(G_{\alpha_n})$$

olacak şekilde $\alpha = 1, 2, \cdots, n$ için X_{α_α} nın G_{α_α} açık kümeleri vardır. Böylece $x \in B$ olduğundan $\pi_{\alpha_1}(x) = x_{\alpha_1} \in \pi_{\alpha_1}(B) = G_{\alpha_1}$ olur. Böylece (11.2) gereğince her $k \in K$ için

$$G_{\alpha_1} \cap \pi_{\alpha_1}(M_k) \neq \emptyset$$

olur. Bu durumda $M_k \in \mathscr{M}$ için

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) \cap M_k = \left(\prod_{\alpha \neq \alpha_1} X_\alpha \times G_{\alpha_1}\right) \cap M_k \neq \emptyset$$

dur. Yardımcı Teorem 11.45 (c) gereğince $\pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) \in \mathscr{M}$ dir. Benzer şekilde

$$\pi_{\alpha_2}^{-1}(G_{\alpha_2}), \pi_{\alpha_3}^{-1}(G_{\alpha_3}), \cdots, \pi_{\alpha_n}^{-1}(G_{\alpha_n}) \in \mathscr{M}$$

olduğu gösterilir. $\mathscr{M}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan her $k \in K$ için

$$B \cap M_k = \left(\pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(G_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(G_{\alpha_n})\right) \cap M_k \neq \emptyset$$

olur. Böylece (11.1) doğrudur. Yani her $k \in K$ için $x \in \overline{M_k}$ dır. Diğer bir deyişle, $x \in \bigcap_{k \in K} \overline{M_k}$ dır. Böylece $\bigcap \overline{\mathscr{M}} = \bigcap_{k \in K} \overline{M_k} \neq \emptyset$ olur. Bu durumda

$$\bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$$

dur. Teorem 11.28 gereğince $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı kompakttır.✔

11.7. Sayılabilir Kompakt Uzaylar

TANIM 11.48. ▷ **Sayılabilir kompakt uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına sayılabilir kompakttır denir. $A \subseteq X$ ve $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı sayılabilir kompaktsa A kümesine $(X,\mathcal{T})$ uzayının sayılabilir kompakt alt kümesi denir.

Teorem 11.49. ▷
$(X,\mathcal{T})$ sayılabilir kompakt bir uzay ve A da X in kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda A alt uzayı sayılabilir kompakttır.

Not
Kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık tanımları gereğince her kompakt uzay sayılabilir kompakttır.

İSPAT: $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu A nın sayılabilir açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ kolleksiyonu X in sayılabilir açık bir örtüsüdür. X sayılabilir kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir $\mathcal{U}_1$ altörtüsü vardır.

a) $X \setminus A \notin \mathcal{U}_1$ ise $\mathcal{U}_1$ kolleksiyonu A nın $\mathcal{U}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü olur.

b) $X \setminus A \in \mathcal{U}_1$ ise $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \setminus \{X \setminus A\}$ kolleksiyonu A nın $\mathcal{U}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür.

O halde A kümesi sayılabilir kompakttır.✔

Teorem 11.50. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.

b) $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ özelliğine sahip kapalı kümelerden oluşan sayılabilir her $\{F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu için $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ olacak şekilde I nın sonlu bir J alt kümesi vardır.

c) Kapalı kümelerden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip sayılabilir her $\{F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu için $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). Kapalı kümelerden oluşan $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ özelliğine sahip sayılabilir $\{F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu verilsin. Her $i \in I$ için F_i kapalı olduğundan $X \setminus F_i$ kümesi açıktır. Diğer yandan $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = X$ dir. O halde $\{X \setminus F_i \mid i \in I\}$ kolleksiyonu X in sayılabilir açık bir örtüsüdür. (a) gereğince bu örtünün

$$\{X \setminus F_{i_1}, X \setminus F_{i_2}, \cdots, X \setminus F_{i_n}\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Bu durumda

$$X = (X \setminus F_{i_1}) \cup (X \setminus F_{i_2}) \cup \cdots \cup (X \setminus F_{i_n})$$

olur. Buradan $\emptyset = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_n}$ elde edilir. Dolayısıyla, $J = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I$ sonlu ve $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ dur.

b)⇒c). Sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı kümelerden oluşan sayılabilir bir $\{F_i | i \in I\}$ kolleksiyonu için $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda(a) gereğince $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$ olacak şekilde I nın sonlu bir J alt kümesi vardır. Bu ise $\{F_i | i \in I\}$ kolleksiyonunun sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir. O halde $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ dur.

c)⇒ a). $(X, \mathcal{T})$ uzayının sayılabilir kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda X in hiç bir sonlu altörtüsü olmayan sayılabilir açık bir $\{U_i | i \in I\}$ örtüsü vardır. Her $i \in I$ için U_i kümesi açık olduğundan $X \setminus U_i$ kümesi kapalıdır. Diğer yandan I nın sonlu her J alt kümesi için $\bigcup_{i\in J} U_i \neq X$ dir. Böylece $\bigcap_{i\in J}(X\setminus U_i) \neq \emptyset$ dur. O halde $\{X\setminus U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu kapalı kümelerden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip sayılabilir bir kolleksiyondur. (c) gereğince $\bigcap_{i\in I}(X\setminus U_i) \neq \emptyset$ olacağından $\bigcup_{i\in I} U_i \neq X$ olur. Bu ise $\{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonunun X in bir örtüsü olması ile çelişir. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.✔

TANIM 11.51. ▷ ***w*-limit noktası**
A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının alt kümesi ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her U açık kümesi A nın sonsuz sayıda elemanını içeriyor ise x noktasına A kümesinin bir w-limit noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için $A \cap U$ kümesi sonsuz ise x noktasına A kümesinin bir w-limit noktası denir.☜

TANIM 11.52. ▷ **Bir dizinin yığılma noktası**
$(X, \mathcal{T})$ bir topoljik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi ve her $N \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n \geq N$ doğal sayısı varsa x noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $x_n \in U$ olacak şekilde sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ varsa x noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir.☜

Teorem 11.53. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.
a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.
b) Sonsuz her $A \subseteq X$ kümesinin bir w-limit noktasıdır.
c) X deki her dizinin bir yığılma noktası vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). (b) nin doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda X in hiç bir w-limit noktası olmayan sonsuz bir A alt kümesi vardır. Her $x \in X$ için x noktası A kümesinin w-limit noktası olmadığından $x \in U_x$ özelliğinde bir U_x açık kümesi $U_x \cap A$ sonlu olacak şekilde vardır. A nın sonlu her F alt kümesi için

$$U_F = \bigcup \{U_x | U_x \cap A = F\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $\{U_F | F \subseteq A \text{ sonlu}\}$ kolleksiyonu X in sayılabilir bir açık örtüsüdür.(a) gereğince bu örtünün

$$\{U_{F_1}, U_{F_2}, \cdots, U_{F_n}\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Böylece

$$X = U_{F_1} \cup U_{F_2} \cup \cdots \cup U_{F_n}$$

dir. O halde

$$A = A \cap (U_{F_1} \cup U_{F_2} \cup \cdots \cup U_{F_n}) = (A \cap U_{F_1}) \cup (A \cap U_{F_2}) \cup \cdots \cup (A \cap U_{F_n})$$

dir. $i = 1, 2, \cdots, n$ için $A \cap U_{F_i}$ sonlu olduğundan A sonludur. Bu ise bir çelişkidir. O halde(b) doğrudur.

b)⇒ c). (x_n), X de bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ya sonlu ya da sonsuzdur.

i) $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin en az bir x_{n_0} terimi dizi içinde sonsuz defa tekrar eder. Böylece $x_{n_0} \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ kümesi (x_n) dizisinin sonsuz sayıdaki terimini içerir. Böylece x_{n_0} elemanı (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.

ii) $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olmasın. Bu durumda(b) gereğince A kümesinin x gibi bir w-limit noktası vardır. Tanım 11.51 gereğince $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ kümesi $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin sonsuz elemanı içerir. O halde x noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.

c)⇒ a). $(X, \mathcal{T})$ uzayının sayılabilir kompakt olmadığını kabul edelim. Bu durumda X in sayılabilir bir $\{U_i | i \in I\}$ açık örtüsü sonlu hiç bir altörtüsü olmayacak şekilde vardır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i \neq X$$

olduğundan

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

olacak şekilde bir $x_n \in X$ vardır. (c) gereğince (x_n) dizisinin bir $x \in X$ yığılma noktası vardır.

$$x \in X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

olduğundan bir

$$U_{i_0} \in \{U_i | i \in I\}$$

kümesi $x \in U_{i_0}$ olacak şekilde vardır.

$$n > i_0 \text{ için } x_n \notin U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{i_0} \cup \cdots \cup U_n$$

olduğundan $x_n \notin U_{i_0}$ dır. Bu x noktasının (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.✔

Teorem 11.54. ▷

$(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) x noktası A kümesinin bir w-limit noktasıdır.
b) x noktası A kümesinin bir limit noktasıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). x noktası A kümesinin w-limit noktası ise x in A kümesinin limit noktası olduğu açıktır.

b)⇒ a). (a) nin doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda bir $U \in \mathcal{T}$ kümesi $x \in U$ ve $U \cap A$ sonlu olacak şekilde vardır. Bu durumda x noktası A nın limit noktası olduğundan

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad U \cap (A \setminus \{x\}) \subseteq U \cap A$$

olduğundan $U \cap (A \setminus \{x\})$ sonludur.

$$U \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

diyelim. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olduğundan Sonuç 7.23 gereğince

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

kümesi kapalı ve böylece $X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ kümesi açıktır. Diğeryandan

$$x \in X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

dir. Böylece $U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ kümesi açık ve $x \in U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ dir.

$$(U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})) \cap A = \emptyset$$

olduğundan

$$(U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

dur. Bu ise x noktasının A kümesinin limit noktası olması ile çelişir. O halde (a) doğrudur.✔

Teorem 11.54 ve Teorem 11.53 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUC 11.55. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir T_1-uzayı olsun. Bu durmda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir kompakttır.

b) X in sonsuz elemanlı her alt kümesinin bir limit noktası vardır.

Teorem 11.56. ▷

$(X, \mathcal{T}_1)$ sayılabilir kompakt bir uzay ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ herhangi bir topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ sürekli örten bir fonksiyon ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı sayılabilir kompakttır.

İSPAT: (y_n), Y de bir dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = f(x_n)$ olacak şekilde bir $x_n \in X$ vardır. Böylece (x_n), X de bir dizidir. X sayılabilir kompakt olduğundan (x_n) nin X de x gibi bir yığılma noktası vardır. Bu durumda $f(x)$ de (y_n) nin bir yığılma noktası olur. O halde Y uzayı sayılabilir kompakttır.✔

SONUC 11.57. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının sayılabilir kompakt olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının sayılabilir kompakt olmasıdır.

ÖRNEK 11.58. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(X, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_2)$ sayılabilir kompaktsa $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayınında sayılabilir kompakt olduğunu gösterelim.

Not
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından birisi sayılabilir kompakt ve diğeri sayılabilir kompakt değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

ÇÖZÜM: id : $(X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ fonksiyonu örten ve süreklidir. Teorem 11.56 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı sayılabilir kompakttır.

TANIM 11.59. ▷ **Lindelöff uzayı**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sayılabilir bir altörtüsü varsa bu uzaya Lindelöff uzayı denir.

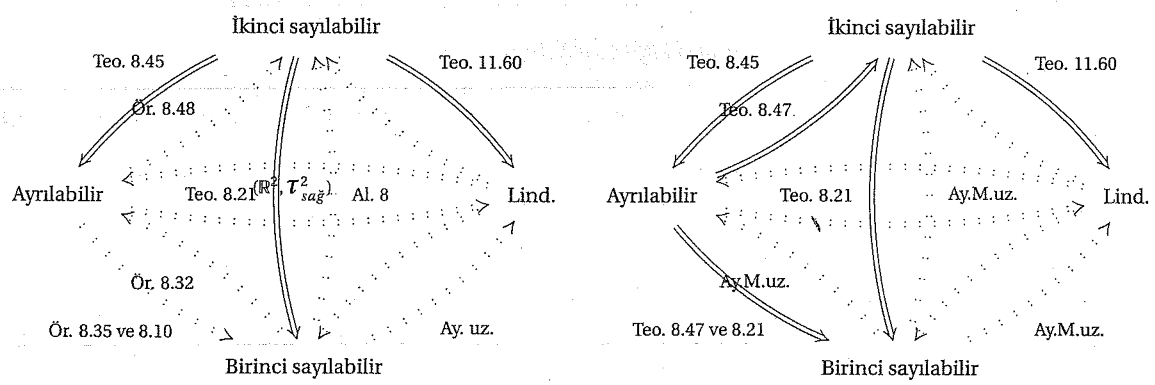
Not
Kompaktlık ve Lindelöff uzayı tanımları gereğince her kompakt uzay bir Lindelöff uzayıdır.

Teorem 11.60. ▷
İkinci sayılabilir her $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı bir Lindelöff uzayıdır.

İSPAT: $\mathscr{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu X in sayılabilir bir tabanı ve $\mathscr{U} = \{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu X in herhangi bir açık örtüsü olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $x \in U_{i_x}$ olacak şekilde bir $U_{i_x} \in \mathscr{U}$ vardır. U_{i_x} açık ve $x \in U_{i_x}$ olduğundan Teorem 4.9 gereğince $x \in B_x \subseteq U_{i_x}$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathscr{B}$ vardır. Böylece $X = \bigcup_{x \in X} B_x$ dir. Her bir $B_x \in \mathscr{B}$ için $B_x \subseteq U_{i_x}$ olacak şekilde bir tane $U_{i_x} \in \mathscr{U}$ kümesi seçelim ve bunların kolleksiyonuna $\mathscr{V}$ diyelim. Bu durumda $\mathscr{B}$ sayılabilir olduğundan $\mathscr{V}$ sayılabilirdir. Üstelik,

$$X = \bigcup_{x \in X} B_x = \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U$$

olur. Diğer bir deyişle $\mathscr{V}$ kolleksiyonu X in $\mathscr{U}$ örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsüdür. ✔



Topolojik uzaylar Metrik uzaylar

Teorem 11.61. ▷
$(X,\mathcal{T})$ ikinci sayılabilir bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır. b) $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.

İSPAT:

a)⇒ b). $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompaktsa $(X,\mathcal{T})$ uzayının sayılabilir kompakt olduğu açıktır.
b)⇒ a). $\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ ikinci sayılabilir olduğundan Teorem 11.60 gereğince bir Lindelöff uzayıdır. O halde $\mathcal{U}$ nun sayılabilir bir $\mathcal{V}$ altörtüsü vardır. $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakt olduğundan $\mathcal{V}$ nin sonlu bir $\mathcal{V}_1$ altörtüsü vardır. Bu sonlu $\mathcal{V}_1$ örtüsü $\mathcal{U}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✔

Teorem 11.62. ▷
I bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in I}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı sayılabilir kompaktsa her $\alpha\in I$ için $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayı sayılabilir kompakttır.

Not
Her $\alpha\in I$ için $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayları sayılabilir kompakt olmasına rağmen $X=\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı I sonlu olsa bile sayılabilir kompakt olmayabilir. (Örnek 11.73 ve Not 11.8 e bakınız.)

İSPAT: $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı sayılabilir kompakt ve her $\alpha\in I$ için π_α fonksiyonu sürekli ve örten olduğundan Teorem 11.56 gereğince $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayı sayılabilir kompakttır.✔

11.8. Dizisel Kompakt Uzaylar

TANIM 11.63. ▷ **Dizisel kompakt uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa X uzayına dizisel kompakttır denir. $A\subseteq X$ olmak üzere $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı dizisel kompaktsa A kümesine $(X,\mathcal{T})$ uzayının dizisel kompakt alt kümesi denir.

Teorem 11.64. ▷
Dizisel kompakt her $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı sayılabilir kompakttır.

İSPAT: A kümesi X in sonsuz elemanlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda A kümesinde terimleri farklı bir (x_n) dizisi vardır. $(X,\mathcal{T})$ uzayı dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir $x\in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. $x\in U$ ve $U\in\mathcal{T}$ olsun. Bu durumda (x_{n_k}) alt dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı $n_k\geq n_0$ olduğunda $x_{n_k}\in U$ olacak şekilde vardır. Böylece $n_k\geq n_0$ olduğunda $x_{n_k}\in U\cap A$ dır. (x_{n_k}) dizisinin terimleri farklı olduğundan $U\cap A$ kümesinin sonsuz sayıda elemanı vardır. Bu durumda x noktası A kümesinin bir w-limit noktasıdır. Teorem 11.53 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.✔

Teorem 11.65. ▷
Dizisel kompakt her $(X,\mathcal{T})$ uzayının kapalı her A alt uzayıda dizisel kompakttır.

İSPAT: (x_n), A da bir dizi olsun. Bu durumda X dizisel kompakt olduğundan (x_n) nin bir $a \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. A kapalı olduğundan Teorem 9.36 gereğince $a \in A$ dır. Böylece A dizisel kompakttır.✔

Teorem 11.66. ▶
$(X, \mathcal{T}_1)$ dizisel kompakt ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı dizisel kompakttır.

İSPAT: (y_n), Y de bir dizi olsun. Bu durumda $f(x_n) = y_n$ olacak şekilde X de bir (x_n) dizisi vardır. X dizisel kompakt olduğundan (x_n) nin bir $a \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. f sürekli olduğundan Teorem 9.40 gereğince $(f(x_{n_k}))$ yani (y_{n_k}) dizisi $f(a) \in Y$ noktasına yakınsar. Böylece $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı dizisel kompakttır.✔

ÖRNEK 11.67. ▶
$(X, \mathcal{T}_1), (X, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_2)$ dizisel kompaktsa $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının dizisel kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ fonksiyonu sürekli ve örtendir. Teorem 11.66 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı dizisel kompakttır.✍

Not
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından birisi dizisel kompakt ve diğeri dizisel kompakt değilse bu uzaylar homeomrfik olamazlar.

SONUÇ 11.68. ▶ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının dizisel kompakt olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının dizisel kompakt olmasıdır.

Not
Dizisel kompaktlığın sayılabilir kompaktlığı gerektirmesine rağmen sayılabilir kompaktlık dizisel kompaktlığı gerektirmeyebilir. Bununla beraber birinci sayılabilir uzaylar için dizisel ve sayılabilir kompaktlık denktir.

Teorem 11.69. ▶
$(X, \mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir topolojik uzay, $x \in X$ ve (x_n) de X de bir dizi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) x noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.
b) (x_n) dizisinin x e yakınsayan bir alt dizisi vardır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ birinci sayılabilir olduğundan x noktasının Not 8.2 gereğince

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \cdots$$

özelliğine sahip yerel bir $\mathcal{B} = \{N_n | n \in \mathbb{N}\}$ tabanı vardır.

a)⇒ b). Yığılma noktasının tanımı gereğince her $N_k \in \mathcal{B}$ için $n > k$ ve $x_n \in N_k$ özelliğine sahip bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in N_k$ özelliğine sahip bir x_{n_k} seçerek (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisini oluşturalım. Bu durumda (x_{n_k}) alt dizisi x noktasına yakınsar.

b)⇒ a). (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi x noktasına yakınsadığından her $N_k \in \mathcal{B}$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k > n_0$ olduğunda $x_{n_k} \in N_k$ olacak şekilde vardır. Bu durumda (x_{n_k}) alt dizisinin sonsuz sayıda terimi N_k kümesine aittir. Böylece (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimi N_k kümesine aittir. Bu durumda x noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.✓

Teorem 11.53 ve Teorem 11.64 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 11.70. ▷ $(X,\mathcal{T})$ birinci sayılabilir bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı dizisel kompakttır. **b)** $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır.

SONUÇ 11.71. ▷ $(X,\mathcal{T})$ ikinci sayılabilir bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır. **b)** $(X,\mathcal{T})$ uzayı dizisel kompakttır.

İSPAT:

a)⇒ b). $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakt olduğundan $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır. Böylece $(X,\mathcal{T})$ uzayı ikinci sayılabilir olduğundan Teorem 8.21 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı birinci sayılabilirdir. Teorem 11.70 gereğince X dizisel kompakttır.

b)⇒ a). Teorem 11.64 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakttır. Bu durumda Teorem 11.61 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✓

Teorem 11.72. ▷

I bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in I}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda

a) $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı dizisel kompaktsa her $\alpha\in I$ için $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayı dizisel kompakttır.

b) I kümesi sayılabilir ve her $\alpha\in I$ için $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayı dizisel kompaksa $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı dizisel kompakttır.

İSPAT:

a) $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı dizisel kompakt ve her $\alpha\in I$ için π_α fonksiyonu sürekli ve örten olduğundan Teorem 11.66 gereğince $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayı dizisel kompakttır.

b) I kümesi sayılabilir ve her $\alpha\in I$ için $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ uzayının dizisel kompakt olduğunu kabul edelim. $I=\mathbb{N}$ olduğunu kabul edebiliriz. (x_n), $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ de bir dizi olsun. Bu durumda $(X_1,\mathcal{T}_1)$ uzayı dizisel kompakt olduğundan (x_n) nin $\pi_1(x_{1n})\to y_1$ olacak şekilde yakınsak bir $z_1=(x_{1n})$ alt dizisi vardır. $(X_2,\mathcal{T}_2)$ uzayı dizisel kompakt olduğundan (x_{1n}) nin $\pi_2(x_{2n})\to y_2$ olacak şekilde yakınsak bir $z_2=(x_{2n})$ alt dizisi vardır. Bu şekilde devam edersek z_{k-1}, z_k nın bir alt dizisi ve $(X_k,\mathcal{T}_k)$ da $\pi_k(x_{kn})\to y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $z_k=(x_{kn})$ dizisini elde ederiz. $z=(x_{nn})$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda z, (x_n) nin bir alt dizisidir ve z nin k.terimi z_k nın bir alt dizisidir. Böylece her k için $(X_k,\mathcal{T}_k)$ uzayında $\pi_k(x_{nn})\to y_k$ olur. O halde

$$x_{nn}\to y=(y_n)$$

dir.✓

Teorem 11.72 I sayılabilir bir küme değilse her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayları dizisel kompakt olmasına rağmen $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı dizisel kompakt olmayabilir.

ÖRNEK 11.73. ▷
$I = [0,1]$ ve $x \in I$ için $I_x = [0,1]$ olmak üzere

$$I^I = \prod_{x \in I} I_x = \{\alpha \mid \alpha : I \to I \text{bir fonksiyon}\}$$

çarpım uzayını göz önüne alalım.
a) Her $x \in I$ için I_x uzayının dizisel kompakt olduğunu gösterelim.
b) $I^I = \prod_{x \in I} I_x$ çarpım uzayının dizisel kompakt olmadığını gösterelim.

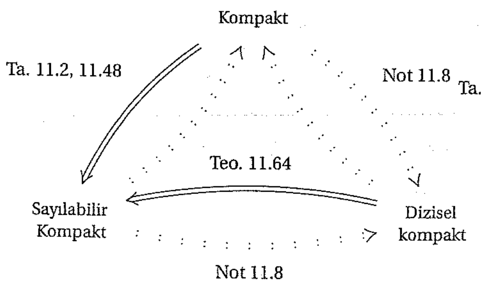
ÇÖZÜM:

a) Sonuç 11.71 gereğince her $x \in I$ için I_x uzayı dizisel kompakttır.
b) Bu uzayda bir (α_n) dizisinin bir α noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart her $x \in I$ için $(\alpha_n(x))$ dizisinin I uzayında $\alpha(x)$ noktasına yakınsamasıdır. $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n : I \to I$ fonksiyonunu

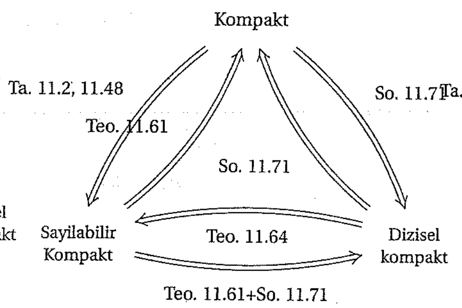
$$\alpha_n(x) = x \text{ in ondalık açılımındaki n.rakam}$$

olmak üzere bir (α_n) dizisini tanımlayalım. (α_n) dizisinin bir $\alpha \in I^I$ noktasına yakınsayan bir (α_{n_k}) alt dizisinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in I$ için $(\alpha_{n_k}(x))$ dizisi I uzayında $\alpha(x)$ noktasına yakınsar. $p \in I$ noktası n_k nın tek veya çift olmasına göre $\alpha_{n_k}(p) = 0$ veya $\alpha_{n_k}(p) = 1$ olan bir noktası olsun. Bu durumda $(\alpha_{n_k}(p))$ dizisi $0, 1, 0, 1, \cdots$ şeklindedir. Bu dizi ise yakınsak değildir. O halde (α_n) dizisinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $I^I = \prod_{x \in I} I_x$ çarpım uzayı dizisel kompakt değildir. Diğer yandan her $x \in I$ için I_x uzayı Sonuç 11.71 gereğince dizisel kompakttır.✍

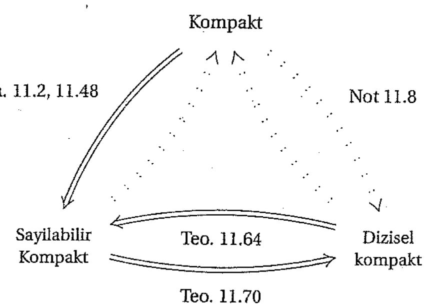
Not
Teorem 11.47 gereğince $I^I = \prod_{x \in I} I_x$ çarpım uzayı kompakttır. Bu durumda $I^I = \prod_{x \in I} I_x$ çarpım uzayı sayılabilir kompakttır. Diğer yandan Örnek 11.47 gereğince $I^I = \prod_{x \in I} I_x$ çarpım uzayı dizisel kompakt değildir. Böylece kompakt bir uzay dizisel kompakt olmayabilir.



Top. uzaylarda kompaktlik



2° sayılabilir uzaylarda kompaktlık



1° sayılabilir uzaylarda kompaktlık

11.9. Metrik Uzaylarda Kompaktlık

Bu bölümde tam metrik uzay ve metrik uzaylarda kompaktlık kavramları üzerinde duracağız.

Metrik Uzaylarda Kompaktlık

Teorem 11.74. Herhangi bir (X,d) metrik uzayının kompakt her A alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İSPAT: A kümesi (X,d) metrik uzayının kompakt bir alt kümesi olsun. (X,d) bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.23 gereğince A kümesi kapalıdır.

Şimdi A kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. Sabit bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. $x \in A$ için $d(x,x_0) = r_x$ olsun. Böylece, $n \in \mathbb{N}$ ve $n > r_x$ ise $x \in B(x_0,n)$ olur. O halde, her $x \in A$ için $x \in B(x_0,n)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\{B(x_0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

kolleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsüdür. A kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{B(x_0,n_i) \mid i = 1,2,\cdots,m\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. $n_0 = \max\{n_i \mid i = 1,2,\cdots,m\}$ olsun. Bu durumda

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_0,n_i) = B(x_0,n_0)$$

olur. Bu durumda her $x,y \in A$ için $x,y \in B(x_0,n_0)$ olacağından

$$d(x,y) \le d(x,x_0) + d(x_0,y) < n_0 + n_0 = 2n_0$$

olur. Diğer bir deyişle A kümesi sınırlıdır.✓

Teorem 11.75. A, $\mathbb{R}^n$ standart uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi kompakttır. b) A kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). $\mathbb{R}^n$ standart uzayı bir metrik uzay olduğundan Teorem 11.74 gereğince A kümesi kapalı ve sınırlıdır.

b)⇒ a). A kümesi sınırlı olduğundan Alıştırma 16 gereğince

$$A \subseteq [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$$

olacak şekilde $a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbb{R}$ ve $b_1,b_2,\cdots,b_n \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Diğeryandan Teorem 11.31 gereğince

$$[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$$

kümesi kompakttır. Böylece, A kapalı olduğundan Teorem 11.21 gereğince A kümesi kompakttır.✔

Not

Teorem 11.75 gereğince Teorem 11.74 nin tersi $\mathbb{R}^n$ standart uzayı için doğru olmasına rağmen herhangi bir metrik uzay için doğru olmayabilir. Yani her metrik uzayın kapalı ve sınırlı her alt uzayı kompakt olmak zorunda değildir.

ÖRNEK 11.76. ▶
(X,d) sonsuz elemanlı ayrık bir metrik uzay ve A da X in sonsuz elemanlı bir alt kümesi olsun. A nın kapalı ve sınırlı olmasına rağmen kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Örnek 3.52 gereğince A kapalıdır. Üstelik, $x_0 \in X$ ise $A \subseteq B(x_0,2)$ olduğundan A sınırlıdır. Diğer yandan Örnek 11.19 gereğince A kompakt değildir.✍

ÖRNEK 11.77. ▶
$(0,2)$ aralığı $(0,2)$ standart uzayında kapalı ve sınırlı olmasına rağmen kompakt değildir.✍

Tamlık ve Kompaktlık

Teorem 11.78. ▶
(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A tamsa A kümesi kapalıdır.

İSPAT: (x_n) terimleri A nın elemanlarından oluşan ve (X,d) uzayının bir x noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi (X,d) uzayında yakınsak bir dizidir. Örnek 2.51 gereğince (x_n) dizisi (X,d) uzayında bir Cauchy dizisidir. Böylece (x_n) dizisi (A,d_A) uzayında bir Cauchy dizisidir. A kümesi tam olduğundan (x_n) dizisi (A,d_A) uzayının $a \in A$ gibi bir noktasına yakınsar. Teorem 2.49 gereğince bir metrik uzayda yakınsak her dizilerin limiti tek olduğundan $a = x$ olur. Böylece $x \in A$ dır. Teorem 9.19 gereğince A kümesi kapalıdır.✔

Teorem 11.79. ▶
(X,d) tam bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A kümesi kapalıysa A tamdır.

İSPAT: (x_n) terimleri A nın elemanlarından oluşan (A,d_A) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi (X,d) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X,d) uzayı tam olduğundan bu dizi (X,d) uzayının bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Bu durumda A kümesi (X,d) uzayında kapalı olduğundan Teorem 9.19 gereğince $x \in A$ olur. O halde A tamdır.✔

Teorem 11.78 ve Teorem 11.79 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 11.80. ▶ (X,d) tam bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart A nın tam olmasıdır.

Teorem 11.81. ▶ **Cantor Arakesit Teoremi**
(X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) (X,d) uzayı tamdır.

b) (D_n) kapalı yuvarlardan oluşan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D_n \supseteq D_{n+1}$$

özelliğine sahip kümelerin bir dizisi ve $n \in \mathbb{N}$ için r_n sayısı D_n kapalı yuvarının yarı çapı olsun. Bu durumda $r_n \to 0$ ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{x\}$$

olacak şekilde tek bir $x \in X$ noktası vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). (D_n) kapalı yuvarlardan oluşan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D_n \supseteq D_{n+1} \supseteq D_{n+2} \supseteq \cdots$$

özelliğine sahip bir dizi ve $n \in \mathbb{N}$ için r_n sayısı D_n yuvarının yarı çapı olmak üzere $r_n \to 0$ olsun. $D_n = D(x_n, r_n)$ diyelim. Bu durumda $m > n$ ise $D_m \subseteq D_n$ ve dolayısıyla $x_m \in D_n$ dir. Böylece

$$d(x_m, x_n) \le r_n$$

olur. Bu durumda $m, n \to \infty$ için $d(x_m, x_n) \to 0$ dır. Diğer bir deyişle (x_n) dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d) uzayı tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n, x_{n+1}, \cdots \in D_n$$

ve D_n kapalı olduğundan $x \in D_n$ olur. Bu her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

olur. Şimdi $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{x\}$ olduğunu gösterelim. $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her n için

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) \le r_n + r_n = 2r_n$$

olur. $r_n \to 0$ olduğundan $d(x, y) = 0$ dır. O halde $x = y$ dir. Böylece

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{x\}$$

olur.

b)⇒ a). (x_n) dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $m, n \ge N$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Böylece $m \geq N$ olduğunda

$$d(x_N, x_m) < \varepsilon$$

olur.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ için $m \geq n_1$ olduğunda

$$d(x_{n_1}, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ seçelim. $D_1 = D(x_{n_1}, 1)$ diyelim. $\varepsilon = \frac{1}{4}$ için $m \geq n_2$ olduğunda

$$d(x_{n_2}, x_m) < \frac{1}{4}$$

ve $n_2 > n_1$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ seçelim ve $D_2 = D\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right)$ diyelim. Bu durumda $x \in D_2 = D\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right)$ ise

$$d(x, x_{n_1}) \leq d(x, x_{n_2}) + d(x_{n_2}, x_{n_1}) < 1$$

olur. Böylece $x \in D_1 = D(x_{n_1}, 1)$ olur. Dolayısıyla $D_2 \subseteq D_1$ dir. $\varepsilon = \frac{1}{8}$ için $m \geq n_3$ olduğunda

$$d(x_{n_3}, x_m) < \frac{1}{8}$$

ve $n_3 > n_2$ olacak şekilde bir $n_3 \in \mathbb{N}$ seçelim ve $D_3 = D\left(x_{n_3}, \frac{1}{4}\right)$ diyelim. Bu durumda açıkça $D_3 \subseteq D_2$ dir. Bu şekilde devam edilirse

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \cdots$$

özelliğinde ve D_k nın yarı çapı $\frac{1}{2^{k-1}}$ olan kapalı yuvarların bir (D_k) dizisi elde edilir. Böylece $k \in \mathbb{N}$ için

$$D_k = D\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

şeklinde tanımlanan (D_k) dizisi

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \cdots$$

özelliğine sahip ve D_k nın yarı çapı $\frac{1}{2^{k-1}}$ dır. $k \to \infty$ için $\frac{1}{2^{k-1}} \to 0$ olduğundan (b) gereğince

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$$

olacak şekilde tek bir $x \in X$ noktası vardır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $x \in D_k$ dır. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2^{k-1}}$$

dır. Dolayısıyla $x_{n_k} \to x$ dir. Teorem 2.53 gereğince $x_n \to x$ dir. Bu durumda (X, d) uzayı tamdır.✔

TANIM 11.82. ▷ **Tamamen sınırlı metrik uzay**
(X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.
a) Her $x \in X$ için

$$d(x,A) < \varepsilon$$

oluyorsa A ya bir ε-ağı denir.
b) A bir ε-ağı ve A sonlu ise A ya sonlu ε-ağı denir.
c) Her $\varepsilon > 0$ için sonlu bir ε-ağı varsa (X,d) uzayına tamamen sınırlı metrik uzay denir.

Teorem 11.83. ▷
Tamamen sınırlı her (X,d) metrik uzayı sınırlıdır.

İSPAT: (X,d) tamamen sınırlı olduğundan $\varepsilon = 1$ için

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

gibi sonlu bir 1-ağı vardır. $x \in X$ ise

$$d(x,A) = \inf\{d(x,x_i) \mid x_i \in A\} < 1$$

ve A sonlu olduğundan $d(x,x_i) < 1$ olacak şekilde bir $x_i \in A$ vardır. O halde $x \in B(x_i,1)$ dir. Böylece

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,1)$$

olur. $i = 1,2,\cdots,n$ için $B(x_i,1)$ kümeleri sınırlı ve sonlu sayıdaki sınırlı kümelerin birleşimi Teorem 2.40 gereğince sınırlı olduğundan (X,d) uzayı sınırlıdır.✔

Not
Teorem 11.83 nin tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani sınırlı bir metrik uzay tamamen sınırlı olmayabilir.

ÖRNEK 11.84. ▷
X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere (X,d) ayrık metrik uzayının sınırlı fakat tamamen sınırlı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $r > 1$ ve herhangi bir $a \in X$ için Örnek 2.16 gereğince $B(a,r) = X$ dir. Yani X uzayı sınırlıdır. $0 < \varepsilon \leq 1$ için X in

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

gibi sonlu bir ε-ağı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i,\varepsilon)$$

olur. Diğer yandan $i = 1,2,\cdots,n$ için Örnek 2.16 gereğince $B(a_i,\varepsilon) = \{a_i\}$ dir. Böylece,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i,\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

olur. Yani X sonludur. Bu ise X kümesinin sonsuz olması ile çelişir. O halde (X,d)

uzayı tamamen sınırlı değildir. ✍

Teorem 11.85. ▷

Kompakt her (X,d) metrik uzayı tamamen sınırlı ve tamdır.

İSPAT:

a) Önce, X in tamamen sınırlı olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathscr{B} = \{B(x_i,\varepsilon) \mid x_i \in X\}$$

kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{B(x_i,\varepsilon) \mid i = 1,2,\cdots,n\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$ olur.

$$A = \{x_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$$

olsun. A kümesinin bir ε-ağı olduğunu gösterelim. $x \in X$ ise $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$ olduğundan en az bir $x_i \in A$ için $x \in B(x_i,\varepsilon)$ dur. Böylece, $d(x,x_i) < \varepsilon$ olur. O halde,

$$d(x,A) \leq d(x,x_i) < \varepsilon$$

olduğundan A kümesi sonlu bir ε-ağıdır. Bu durumda (X,d) uzayı tamamen sınırlıdır.

b) Şimdi, (X,d) nin tam olduğunu gösterelim. Bunun için (X,d) nin tam olmadığını varsayalım. Bu durumda X de yakınsak olmayan bir (x_n) Cauchy dizisi vardır. Böylece (x_n) dizisinin sonsuz sayıda birbirinden farklı terimi vardır. $y \in X$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisi y noktasına yakınsamaz. O halde bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı sonsuz sayıdaki n ler için

$$d(x_n,y) \geq 2\varepsilon_0$$

olacak şekilde vardır. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $n,m \geq N$ özelliğindeki her $n,m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n,x_m) < \varepsilon_0$ olacak şekilde vardır. $n_0 > N$ ve

$$d(x_{n_0},y) \geq 2\varepsilon_0$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$2\varepsilon_0 \leq d(x_{n_0},y) \leq d(x_{n_0},x_m) + d(x_m,y) < \varepsilon_0 + d(x_m,y)$$

olduğundan her $m > N$ için $d(x_m,y) > \varepsilon_0$ olur. Böylece her $m > N$ için $x_m \notin B(y,\varepsilon_0)$ dır. Dolayısıyla $B(y,\varepsilon_0)$ açık yuvarı (x_n) dizisinin sadece sonlu sayıdaki terimini içerir. Diğer yandan, $\{B(y,\varepsilon_0) \mid y \in X\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. (X,d) uzayı kompakt olduğundan bu örtünün $\{B(y_i,\varepsilon_0) \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani, $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\varepsilon_0)$ dır. Her bir $B(y_i,\varepsilon_0)$ kümesi (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimini içerdiğinden X kümeside (x_n) dizisinin sadece sonlu sayıdaki terimini içerir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece bu örtünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

Bu ise (X,d) uzayının kompakt olması ile çelişir. O halde (X,d) uzayı tam olmak zorundadır.✓

Teorem 11.86. ▷

Tamamen sınırlı ve tam her (X,d) metrik uzayı kompakttır.

İSPAT: (X,d) nin kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda X in hiç bir sonlu alt örtüsü olmayan açık bir $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ örtüsü vardır. İspatın bundan sonraki kısmını daha iyi anlaşılabilmesi için üç adımda yapalım.

Adım 1. (x_n) Dizisinin Oluşturulması: (X,d) tamamen sınırlı olduğundan Teorem 11.83 gereğince sınırlıdır. Böylece Teorem 2.39 gereğince $X = B(x_0, r)$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ ve bir $r > 0$ reel sayısı vardır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n = \frac{r}{2^n}$ olsun. (X,d) uzayı tamamen sınırlı olduğundan

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

gibi sonlu bir ε_1-ağı vardır. Böylece,

$$\{B(x_i, \varepsilon_1) \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

kolleksiyonu X in sonlu bir örtüsüdür. O halde

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_1)$$

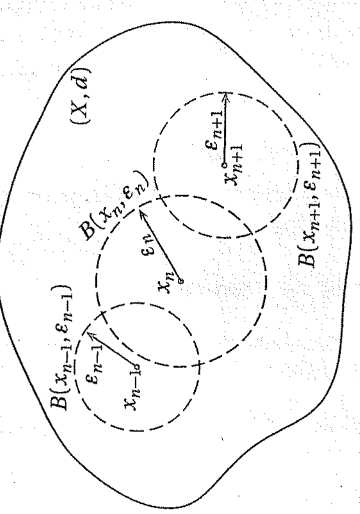
dir. $\mathcal{U}$ nun X uzayını örten sonlu hiç bir alt örtüsü olmadığından bir $B(x_i, \varepsilon_1)$ açık yuvarı $\mathcal{U}$ nun sonlu hiç bir alt örtüsü tarafından örtülemez. Bu açık yuvarı $B(x_1, \varepsilon_1)$ ile gösterelim. (X,d) uzayı tamamen sınırlı olduğundan $B(x_1, \varepsilon_1)$ açık yuvarı yarı çapı ε_1 olan sonlu sayıdaki açık yuvarların birleşimlerinin alt kümesidir. Benzer şekilde ε_2 için bir $B(x_i, \varepsilon_2)$ açık yuvarı $\mathcal{U}$ nun hiç bir sonlu alt örtüsü tarafından örtülemeyecek ve

$$B(x_i, \varepsilon_2) \cap B(x_1, \varepsilon_1) \neq \emptyset$$

olacak şekilde vardır. $B(x_i, \varepsilon_2) = B(x_2, \varepsilon_2)$ diyelim. Bu şekilde devam ederek

$$B(x_n, \varepsilon_n) \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \neq \emptyset$$

ve $B(x_n, \varepsilon_n)$ açık yuvarı $\mathcal{U}$ nun hiç bir sonlu alt örtüsü tarafından örtülemeyecek şekilde bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. (Şekil 11.10 e bakınız.)



Şekil 11.10

Adım 2. (x_n) Dizisinin Yakınsak Olduğunun Gösterilmesi: Önce (x_n) dizisinin bir Cauhy dizisi olduğunu gösterelim. $y \in B(x_n, \varepsilon_n) \cap B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$ olsun. Bu durumda

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_{n+1}, y) + d(y, x_n) < \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n < 2\varepsilon_n$$

olur. Böylece her $p \geq 0$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &< 2\varepsilon_{n+p-1} + 2\varepsilon_{n+p-2} + \cdots + 2\varepsilon_n \end{aligned}$$

$$= \quad 2r\left(\frac{1}{2^{n+p-1}}+\frac{1}{2^{n+p-2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}\right)$$

dir. O halde her $p \geq 0$ için

$$d\left(x_{n+p}, x_{n}\right)<\frac{r}{2^{n-2}}$$

olur. Böylece (x_n) bir Cauchy dizisidir. (X,d) uzayı tam olduğundan bu dizi bir $x \in X$ noktasına yakınsar.

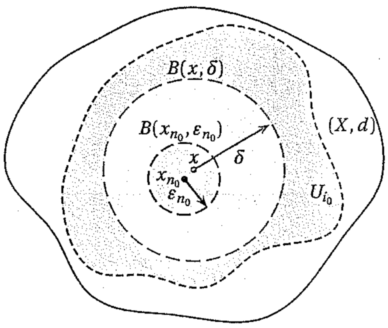
Adım 3. Bir Çelişki Elde Edilmesi: $x \in X$ olduğundan $x \in U_{i_0}$ olacak şekilde bir $U_{i_0} \in \mathscr{U}$ vardır. Diğer yandan U_{i_0} açık olduğundan Teorem 4.5 gereğince $B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

$$d\left(x_{n_0}, x\right)<\frac{\delta}{2} \text{ ve } \varepsilon_{n_0}<\frac{\delta}{2}$$

olacak şekilde yeterince büyük bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. $y \in B\left(x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}\right)$ olsun. Bu durumda $d\left(x_{n_0}, y\right) < \varepsilon_{n_0}$ dır. Diğer yandan

$$d(x, y) \leq d\left(x, x_{n_0}\right)+d\left(x_{n_0}, y\right)<\frac{\delta}{2}+\varepsilon_{n_0}<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$$

olduğundan $y \in B(x,\delta)$ olur. Buradan $B\left(x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}\right) \subseteq B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}$ elde edilir. (Şekil 11.11 e bakınız.) O halde $B\left(x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}\right)$ açık yuvarı $\mathscr{U}$ nun sonlu $\{U_{i_0}\}$ alt örtüsü tarafından örtülür. Bu ise $B\left(x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}\right)$ ın tanımı ile çelişir. O halde (X,d) uzayı kompakttır.✔



Şekil 11.11

Teorem 11.85 ve Teorem 11.86 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 11.87. ▷ Herhangi bir (X,d) metrik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart (X,d) uzayının tamamen sınırlı ve tam olmasıdır.

Kompaktlık, Dizisel Kompaktlık ve Sayılabilir Kompaktlık

Teorem 11.88. ▷

Dizisel kompakt her (X,d) metrik uzayı tamamen sınırlıdır.

İSPAT: (X,d) uzayı tamamen sınırlı olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ için X in sonlu bir

$$\{B(x_i,\varepsilon_0) \mid i = 1,2,\cdots,n\}$$

açık örtüsü yoktur. $x_1 \in X$ herhangi bir nokta olsun. $B(x_1,\varepsilon_0)$ açık yuvarı X uzayını örtemeyeceğinden

$$x_2 \notin B(x_1,\varepsilon_0)$$

olacak şekilde bir $x_2 \in X$ vardır. Benzer şekilde

$$\{B(x_1,\varepsilon_0), B(x_2,\varepsilon_0)\}$$

kolleksiyonu X kümesini örtemeyeceğinden

$$x_3 \notin B(x_1,\varepsilon_0) \cup B(x_2,\varepsilon_0)$$

olacak şekilde bir $x_3 \in X$ vardır. Aynı nedenle her $n \geq 3$ için

$$x_{n+1} \notin B(x_1,\varepsilon_0) \cup B(x_2,\varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(x_{n-1},\varepsilon_0) \cup B(x_n,\varepsilon_0)$$

olacak şekilde bir $x_{n+1} \in X$ vardır. Bu şekilde bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. $n \neq m$ ve $n > m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$x_n \notin B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(x_m, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(x_{n-1}, \varepsilon_0)$$

olduğundan $x_n \notin B(x_m, \varepsilon_0)$ dır. Dolayısıyla

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$$

dır. (x_n) dizisinin hiç bir yakınsak alt dizisinin olmadığını gösterelim. (x_n) nin $x \in X$ gibi bir noktaya yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{\varepsilon_0}{2}$ için $n_k > N$ ve $m_k > N$ olduğunda

$$d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{\varepsilon_0}{2} \text{ ve } d\left(x_{m_k}, x\right) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $n_k, m_k > N$ için

$$d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) < d\left(x_{n_k}, x\right) + d\left(x, x_{m_k}\right) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

dır. Bu ise $n \neq m$ için $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ olması ile çelişir. O halde (x_n) dizisinin hiç bir yakınsak alt dizisi yoktur. Böylece (X, d) uzayı dizisel kompakt olamaz. Bu ise bir çelişkidir. O halde her $\varepsilon > 0$ için X in

$$\{B(x_i, \varepsilon) \mid i = 1, 2, \cdots n\}$$

gibi sonlu bir örtüsü vardır. Yani (X, d) metrik uzayı tamamen sınırlıdır.✔

Not

1. (X, d) metrik uzayının her $\mathscr{U}$ açık örtüsünün bir Lebesgue sayısı olmayabilir.
2. $\varepsilon > 0$ sayısı (X, d) bir metrik uzayının bir $\mathscr{U}$ açık örtüsünün Lebesgue sayısı ise $0 < \delta < \varepsilon$ özelliğindeki her δ sayısıda $\mathscr{U}$ örtüsünün Lebesgue sayısıdır.

TANIM 11.89. ▷ **Lebesgue sayısı**
(X, d) bir metrik uzay ve $\mathscr{U}$ kolleksiyonuda X in açık bir örtüsü olsun. Her $x \in X$ için $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $U \in \mathscr{U}$ varsa $\varepsilon > 0$ sayısına $\mathscr{U}$ örtüsüsünün Lebesgue sayısı denir.

ÖRNEK 11.90. ▷
$\mathbb{R}$ nin $(0,1)$ alt uzayının $\mathscr{U} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) \middle| n \geq 2\right\}$ açık örtüsünün bir Lebesgue sayısı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\varepsilon > 0$ sayısının $\mathscr{U}$ nun bir Lebesgue sayısı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $m > \frac{1}{\varepsilon}$ olmak üzere $x = \frac{1}{m}$ diyelim. Bu durumda $B(x, \varepsilon) = \left(0, \frac{1}{m} + \varepsilon\right)$ olur. Bu durumda her m için $\left(0, \frac{1}{m} + \varepsilon\right) \nsubseteq \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $(0,1)$ alt uzayının $\mathscr{U} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) \middle| n \geq 2\right\}$ açık örtüsünün bir Lebesgue sayısı yoktur.✍

ÖRNEK 11.91. ▷
(X, d) ayrık bir metrik uzay ve $\mathscr{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ olsun. $\mathscr{U}$ nun bir Lebesgue sayısı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $\varepsilon = \frac{1}{2}$ diyelim. Bu durumda $B(x,\varepsilon) = \{x\} \subseteq \{x\}$ olduğundan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sayısı $\mathcal{U}$ nun bir Lebesgue sayısıdır.

YARDIMCI TEOREM 11.92. (X,d) dizisel kompakt bir metrik uzay ve $\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$ nun bir Lebesgue sayısı vardır.

İSPAT: $\mathcal{U}$ nun bir Lebesgue sayısı olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n}$ sayısı $\mathcal{U}$ nun Lebesgue sayısı değildir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_n \in X$ noktası her $U \in \mathcal{U}$ için $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \nsubseteq U$ olacak şekilde vardır. Bu durumda (X,d) dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin $x \in X$ gibi bir noktaya yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. $\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in bir örtüsü olduğundan $x \in U_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. Böylece Teorem 4.5 gereğince

$$B\left(x, \frac{2}{m}\right) \subseteq U_{i_0}$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. (x_{n_k}) dizisi x noktasına yakınsadığından bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k \geq k_0$ olduğunda

$$x_{n_k} \in B\left(x, \frac{1}{m}\right)$$

olacak şekilde vardır. $n_k \geq k_0$ ve $n_k \geq m$ olacak şekilde bir k seçelim.

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B\left(x, \frac{2}{m}\right)$$

olduğunu gösterelim.

$$y \in B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$$

olsun. Bu durumda

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n_k} < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

olduğundan

$$y \in B\left(x, \frac{2}{m}\right)$$

olur. O halde

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B\left(x, \frac{2}{m}\right)$$

dır. Bu durumda

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B\left(x, \frac{2}{m}\right) \subseteq U_{i_0}$$

olur. Bu ise her $U \in \mathcal{U}$ için $B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \nsubseteq U$ olması ile çelişir. O halde $\mathcal{U}$ nun bir Lebesgue sayısı vardır. ✓

Teorem 11.93. ▶ (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) (X,d) kompaktır. b) (X,d) uzayı dizisel kompakttır.

İSPAT:

a)⇒ b). (X,d) uzayı kompakt olduğundan sayılabilir kompakttır. Her metrik uzay birinci sayılabilir olduğundan Teorem 11.70 gereğince (X,d) uzayı dizisel kompakttır.

b)⇒ a). $\mathscr{U} = \{U_i | i \in I\}$ kolleksiyonu (X,d) uzayının bir açık örtüsü olsun. Yardımcı Teorem 11.92 gereğince $\mathscr{U}$ nun bir $\varepsilon > 0$ Lebesgue sayısı vardır. Teorem 11.88 gereğince X in sonlu

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$$

gibi bir ε-ağı vardır. Yani

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$$

dur. Diğer yandan Tanım 11.89 gereğince $B(x_i,\varepsilon) \subseteq U_i$ olacak şekilde bir $U_i \in \mathscr{U}$ vardır. Bu durumda

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

olur. O halde $\mathscr{U}$ nun sonlu bir $\{U_1, U_2, \cdots, U_m\}$ alt örtüsü vardır. O halde (X,d) uzayı kompakttır.✓

Not

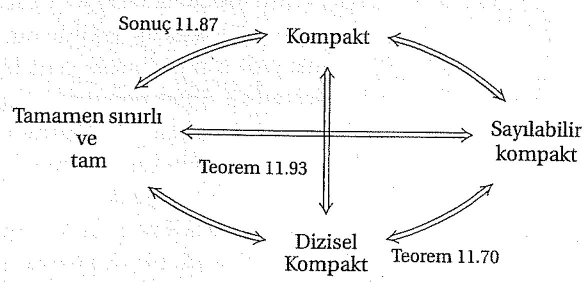
Her (X,d) metrik uzayı birinci sayılabilir olduğundan Teorem 11.70 gereğince (X,d) uzayının sayılabilir kompakt olması için gerek ve yeter şart (X,d) metrik uzayının dizisel kompakt olmasıdır.

Sonuç 11.87, Teorem 11.93 ve Teorem 11.70 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 11.94. ▶ Herhangi bir (X,d) metrik uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.

a) (X,d) uzayı kompakttır. b) (X,d) uzayı sayılabilir kompakttır.

c) (X,d) uzayı dizisel kompakttır. d) (X,d) uzayı tam ve tamamen sınırlıdır.



Metrik uzaylarda kompaktlık

Teorem 11.95. ▶ (X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X,d_1) uzayı kompaktsa f düzgün süreklidir.

İSPAT: $\varepsilon > 0$ olsun. $\left\{B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \middle| y \in Y\right\}$ kolleksiyonu Y nin açık bir örtüsü olduğundan

$$\left\{f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \middle| y \in Y\right\}$$

kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olur. Yardımcı Teorem 11.92 gereğince X in

$$\left\{f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \middle| y \in Y\right\}$$

açık örtüsünün bir $\delta > 0$ Lebesgue sayısı vardır. $d_1(x,y) < \delta$ olsun. Bu durumda $x, y \in B(x,\delta)$ olur. Diğer yandan Tanım 11.92 gereğince

$$B(x,\delta) \subseteq f^{-1}\left(B\left(z,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

olacak şekilde bir $z \in Y$ vardır. Bu durumda $x, y \in B(x,\delta)$ olduğundan

$$f(x), f(y) \in B\left(z,\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

olur. Böylece

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), z) + d_2(f(y), z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Yani her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı $d_1(x,y) < \delta$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. O halde f düzgün süreklidir.✔

11.10. Yerel Kompakt Uzaylar

Kompaktlık topolojik uzaylar üzerinde güçlü bir sınırlamadır ve matematiğin bir çok dalında özellikle analiz ve geometride sık sık karşılaşılan uzayların bir çoğu kompakt değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^n$ standart uzayı kompakt değildir. Bu yüzden kompaktlığın bir genellemesi olan yerel kompaktlık kavramı ile ilgilenilmesi ihtiyacı duyulmuştur.

TANIM 11.96. ▹
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in U \subseteq C$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ ve X in kompakt bir C alt kümesi varsa X uzayına x noktasında yerel kompakttır denir. Diğer bir deyişle $x \in X$ noktasını içeren $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir U açık kümesini içeren $(X, \mathcal{T})$ uzayının kompakt bir alt kümesi varsa $(X, \mathcal{T})$ uzayına x noktasında yerel kompakttır denir.

b) Her $x \in X$ için $(X, \mathcal{T})$ uzayı x noktasında yerel kompaktsa $(X, \mathcal{T})$ uzayına yerel kompakt uzay denir.

c) $A \subseteq X$ olmak üzere $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayı yerel kompaktsa A kümesine $(X, \mathcal{T})$ uzayının yerel kompakt bir alt kümesi denir.☜

ÖRNEK 11.97. ▹
Kompakt her $(X, \mathcal{T})$ uzayının yerel kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ olsun. Bu durumda $U = X, C = X$ olmak üzere $x \in U \subseteq C$ dir. C kompakt ve U açık olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakttır. Yani kompakt her uzay yerel kompakttır.✍

ÖRNEK 11.98. ▷
Yerel kompakt bir uzayın kompakt olması gerekmediğini bir örnek vererek gösterelim.

ÇÖZÜM: $(X, \mathscr{P}(X))$ herhangi bir ayrık uzay olsun. Her $x \in X$ için $x \in U = \{x\}$ kümesi açık ve $C = \{x\}$ kümesi kompakttır. $U \subseteq C$ olduğundan $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayı yerel kompakttır. Böylece X sonlu değilse $(X, \mathscr{P}(X))$ uzayı kompakt olmadığından yerel kompakt bir uzay kompakt olmak zorunda değildir.✍

ÖRNEK 11.99. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının yerel kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ve $C = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ olsun. Bu durumda $x \in U \subseteq C$ dir. U kümesi açık bir küme ve Teorem 11.31 gereğince C kümesi kompakt olduğundan $\mathbb{R}$ standart uzayı yerel kompakttır.

ÖRNEK 11.100. ▷
$n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n$ standart uzayın yerel kompakt olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

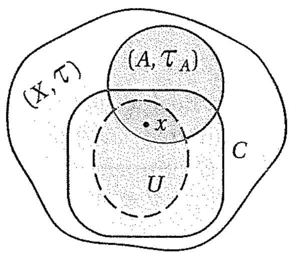
$$U = (x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon) \times (x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon) \times \cdots \times (x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon)$$

ve

$$C = [x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon] \times [x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \times \cdots \times [x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon]$$

diyelim. Bu durumda $x \in U \subseteq C$ dir. U kümesi $\mathbb{R}^n$ standart uzayında açıktır. Teorem 11.47 gereğince C kümesi kompakt olduğundan $\mathbb{R}^n$ standart uzayı yerel kompakttır.✍

Teorem 11.101. ▷
Yerel kompakt her $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı her A alt uzayı yerel kompakttır.



Şekil 11.12

İSPAT: $x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in X$ dir. $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakt olduğundan $x \in U \subseteq C$ olacak şekilde $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık bir U kümesi ve kompakt bir C kümesi vardır. Bu durumda A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olduğundan $C \cap A$ kümesi C alt uzayında kapalıdır. Teorem 11.21 gereğince $C \cap A$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayının ve dolayısıyla A alt uzayının kompakt bir alt kümesidir. Diğer yandan $U \in \mathcal{T}$ olduğundan $U \cap A$ kümesi A uzayında açıktır. Üstelik, $x \in U \cap A \subseteq C \cap A$ dır. $U \in \mathcal{T}$ olduğundan $U \cap A$ kümesi A da açıktır. Böylece A alt uzayı yerel kompakttır. (Şekil 11.12 a bakınız.)✔

Teorem 11.102. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$ yerel kompakt bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $f: X \to Y$ sürekli açık ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı yerel kompakttır.

İSPAT: $y \in Y$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır. $(X, \mathcal{T}_1)$

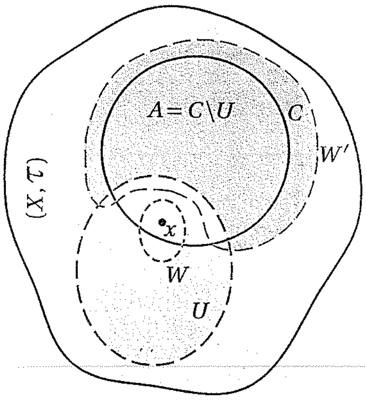
uzayı yerel kompakt olduğundan $x \in U \subseteq C$ olacak şekilde $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında açık bir U kümesi ve kompakt bir C kümesi vardır. Diğer yandan f açık olduğundan $f(U)$ kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında açık ve $f(x) = y \in f(U)$ dur. Üstelik, f sürekli olduğundan Teorem 11.34 gereğince $f(C)$ kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayında kompakttır. Böylece $f(U) \subseteq f(C)$ olduğundan $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı yerel kompakttır.✓

Not
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından birisi yerel kompakt ve diğeri yerel kompakt değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

SONUÇ 11.103. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfik olsun. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının yerel kompakt olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının yerel kompakt olmasıdır.

TANIM 11.104. ▷ **Relatif kompakt alt küme**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\overline{A}$ kümesi kompaktsa A kümesine $(X, \mathcal{T})$ uzayının relatif kompakt bir altkümesi denir.

Teorem 11.105. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı ve $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı x noktasında yerel kompakttır.
b) $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ özelliğine sahip relatif kompakt bir V açık kümesi vardır.



Şekil 11.13

İSPAT:

a)⇒ b). $(X, \mathcal{T})$ uzayı x noktasında yerel kompakt olduğundan $x \in C$ olacak şekilde $(X, \mathcal{T})$ uzayının kompakt bir C alt kümesi vardır. $x \in U$ ve U açık olsun. $A = C \setminus U$ diyelim. (Şekil 11.13 e bakınız.) Bu durumda $A = C \cap (X \setminus U)$ ve $X \setminus U$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olduğundan Teorem 11.23 gereğince A kümesi C alt uzayında kapalıdır. Böylece C kompakt olduğundan A kümesi Teorem 11.21 gereğince C alt uzayında kompakttır. Bu durumda $x \notin A$ ve A kompakt olduğundan Teorem 11.22 gereğince

$$x \in W,\ A \subseteq W',\ W \cap W' = \emptyset$$

olacak şekilde $W, W' \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $V = W \cap \overset{\circ}{C}$ olsun. Bu durumda $x \in V \subseteq C$ ve $V \in \mathcal{T}$ dur. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.23 gereğince C kümesi kapalı dır. Bu durumda $\overline{V} \subseteq \overline{C} = C$ dir. O halde C kompakt ve $\overline{V}$ kapalı olduğundan Teorem 11.21 gereğince $\overline{V}$ kümesi kompakttır. $V \subseteq W$, $A \subseteq W'$ ve $W \cap W' = \emptyset$ olduğundan $\overline{V} \cap A = \emptyset$ olur. Böylece $\overline{V} \subseteq C \setminus A$ dır. O halde $\overline{V} \subseteq U$ dur.

b)⇒ a). (b) gereğince $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

özelliğinde relatif kompakt bir V açık kümesi vardır. Bu durumda $\overline{V} = C$ alınırsa istenilen elde edilir. (Şekil 11.13 a bakınız.)✓

SONUÇ 11.106. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olsun. X in yerel kompakt olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ ve $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için

$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ özelliğinde relatif kompakt bir V açık kümesinin olmasıdır.

Teorem 11.107. ▷

$(X, \mathcal{T})$ yerel kompakt bir Hausdorff uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A kümesi açıksa A alt uzayı yerel kompakttır.

İSPAT: $x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in X$ dir. $(X, \mathcal{T})$ yerel kompakt bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.105 gereğince $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq A$ olacak şekilde $(X, \mathcal{T})$ uzayında relatif kompakt bir U açık kümesi vardır. Bu durumda U kümesi A alt uzayında açık bir küme ve $\overline{U}$ kümeside A alt uzayının kompakt bir alt kümesidir. Böylece A alt uzayı yerel kompakttır.✓

SONUÇ 11.108. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakttır.

b) $\mathcal{T}$ nun relatif kompakt açık kümelerden oluşan bir tabanı vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $\mathcal{B} = \{V \in \mathcal{T} \mid V \text{ relatif kompakt}\}$ kolleksiyonunun $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunu gösterelim. $x \in U$ ve $U \in \mathcal{T}$ olsun. Sonuç 11.106 gereğince $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ olacak şekilde relatif kompakt bir V açık kümesi vardır. Diğer bir deyişle $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ vardır. O halde $\mathcal{B}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayının relatif kompakt açık kümelerden oluşan bir tabanıdır.

b)⇒ a). (b) gereğince $\mathcal{T}$ nun relatif kompakt açık kümelerden oluşan bir $\mathcal{B}$ tabanı vardır. $x \in X$ olsun. Bu durumda $x \in U$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{B}$ vardır. $U \in \mathcal{B}$ olduğundan $U \in \mathcal{T}$ ve U relatif kompakttır. Yani $x \in U \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde açık bir U kümesi ve kompakt bir $\overline{U}$ kümesi vardır. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakttır.✓

Teorem 11.109. ▷

$(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilir yerel kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ nun relatif kompakt kümelerden oluşan sayılabilir bir tabanı vardır.

İSPAT: $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayının sayılabilir bir tabanı olsun. Teorem 11.106 gereğince her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $y \in U_n$ için

$$y \in V(y) \subseteq \overline{V(y)} \subseteq U_n$$

olacak şekilde relatif kompakt açık bir $V(y)$ kümesi vardır. Bu durumda

$$\{V(y) \mid y \in U_n\}$$

kolleksiyonu U_n alt uzayının relatif kompakt açık kümelerinden oluşan bir örtüsüdür. Teorem 8.23 gereğince ikinci sayılabilir bir uzayın her alt uzayı ikinci sayılabilir olduğundan U_n alt uzayı ikinci sayılabilirdir. Böylece U_n alt uzayının $\{V(y) \mid y \in U_n\}$ açık örtüsünün $\{V_{n,i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ gibi sayılabilir bir altörtüsü vardır. Aynı şeyi her $n \in \mathbb{N}$ için yapalım ve $\mathcal{V} = \{V_{n,i} \mid (n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ diyelim. Bu durumda $\mathcal{V}$ sayılabilirdir. Şimdi, $\mathcal{V}$ nin $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğunu gösterelim. U açık bir küme ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $x \in U_m \subseteq U$

olacak şekilde bir $U_m \in \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ vardır. Diğer yandan $U_m = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{m,i}$ olduğundan $x \in U_{m,i_0} \subseteq U_m$ olacak şekilde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $x \in U_{m,i_0} \subseteq U$ dur. Üstelik, $U_{m,i_0} \in \mathcal{V}$ dir. Böylece Teorem 4.9 gereğince $\mathcal{V}$ kolleksiyonu $\mathcal{T}$ nun relatif kompakt kümelerden oluşan sayılabilir bir tabanıdır. ✔

Teorem 11.110.

$(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakttır.

b) Her C kümesi ve $C \subseteq U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ olacak şekilde açık relatif kompakt bir V kümesi vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel kompakt olduğundan $C \subseteq U$ olacak şekilde kompakt bir C kümesi ve $U \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda her bir $x \in C$ için $\overline{V(c)} \subseteq U$ ve $x \in V(c)$ olacak şekilde relatif kompakt açık bir $V(c)$ kümesi vardır. Bu durumda

$$\{V(c) | c \in C\}$$

kolleksiyonu C nin açık bir örtüsüdür. C kompakt olduğundan C nin

$$\left\{V(c) | \overline{V(c)} \subseteq U, x \in C\right\}$$

açık örtüsünün

$$\{V_1(c), V_2(c), \cdots, V_n(c)\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır.

$$V = V_1(c) \cup V_2(c) \cup \cdots \cup V_n(c)$$

olsun. Teorem 11.20 gereğince $\overline{V}$ kompakttır. Üstelik,

$$C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

dur.

b)⇒ a). $x \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ kompakttır. Böylece $\{x\} \subseteq X$ ve X açık olduğundan

$$\{x\} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X$$

olacak şekilde relatif kompakt bir V açık kümesi vardır. Böylece $x \in V$ ve V relatif kompakt bir açık küme olduğundan X yerel kompakttır.✔

Teorem 11.111.

$(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı ve A da X in yoğun bir alt kümesi olsun. Bu durumda A alt uzayı yerel kompaktsa A kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır.

İSPAT: A nın açık olduğunu göstermek için $A = \overset{\circ}{A}$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ olsun. Bu durumda A alt uzayı yerel kompakt olduğundan $x \in U \subseteq C$ olacak şekilde A alt uzayında açık bir U kümesi ve kompakt bir C alt kümesi vardır. Böylece, $x \in U =$

$V \cap A \subseteq C$ olacak şekilde X de bir V açık kümesi vardır. $y \in V$ olsun. Bu durumda $y \in W$ özelliğindeki X in açık her W alt kümesi için A yoğun olduğundan $W \cap (V \cap A) \neq \emptyset$ dur. Böylece $y \in \overline{V \cap A}$ dır. Yani $V \subseteq \overline{V \cap A}$ dır. Diğer yandan C kompakt ve $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 11.23 gereğince C kümesi kapalıdır. O halde $\overline{C} = C$ dir. Böylece

$$V \subseteq \overline{V \cap A} \subseteq C \subseteq A$$

dır. $x \in V$ ve $V \in \mathcal{T}$ olduğundan $x \in \overset{\circ}{A}$ dır. O halde $A = \overset{\circ}{A}$ dir. Böylece Teorem 5.48 gereğince A kümesi açıktır.✔

Not

1. Yerel kompakt bir uzayın kapalı olmayan bir alt kümesi yerel kompakt olmayabilir.
2. $(X, \mathcal{T}_1)$ yerel kompakt bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı yerel kompakt olmayabilir.

ÖRNEK 11.112. ▷
$\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ standart uzayında yerel kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{Q}$ nun yerel kompakt olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathbb{R}$ standart uzayı bir Hausdorff uzayı ve $\mathbb{Q}$ kümesi yoğun olduğundan Teorem 11.111 gereğince $\mathbb{Q}$ kümesi açıktır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\mathbb{Q}$ yerel kompakt değildir.✍

ÖRNEK 11.113. ▷
Sürekli ve örten bir fonksiyon altında yerel kompakt bir uzayın görüntüsünün yerel kompakt olmasını gerekmediğini gösteren bir örnek verelim.

ÇÖZÜM: id : $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q})) \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu örten ve süreklidir. Diğeryandan $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$ uzayı yerel kompakt fakat Örnek 11.112 gereğince $\mathbb{R}$ nin $\mathbb{Q}$ alt uzayı yerel kompakt değildir.✍

Teorem 11.114. ▷
Yerel kompakt her $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff uzayı tamamen regülerdir.

İSPAT: A kapalı bir küme ve $a \notin A$ olsun. Bu durumda $a \in X \setminus A$ dır. Böylece $\{a\}$ kümesi kompakt, $X \setminus A$ kümesi açık ve $\{a\} \subseteq X \setminus A$ olduğundan Teorem 11.110 gereğince

$$\{a\} \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq X \setminus A$$

olacak şekilde relatif kompakt açık bir V_1 kümesi vardır. Benzer şekilde, $\overline{V_1} \subseteq X \setminus A$, $\overline{V_1}$ kompakt ve $X \setminus A$ açık olduğundan

$$\overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq X \setminus A$$

olacak şekilde relatif kompakt açık bir V_2 kümesi vardır. Diğer bir deyişle

$$a \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq X \setminus A$$

olacak şekilde relatif kompakt açık V_1 ve V_2 kümeleri vardır. $\overline{V_2}$ alt uzayı kompakt olduğundan Teorem 11.26 gereğince normaldir. Böylece $\overline{V_2} \setminus V_1$ kümesi $\overline{V_2}$ uzayında kapalı ve $a \notin \overline{V_2} \setminus V_1$ olduğundan

$$f(a) = 1 \quad \text{ve} \quad f\left(\overline{V_2} \setminus V_1\right) = \{0\}$$

olacak şekilde sürekli bir $f : \overline{V_2} \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{V_2} \\ 0, & x \notin X \setminus \overline{V_2} \end{cases}$$

şeklinde bir $F : X \to [0,1]$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $F_{|\overline{V_2}}$ ve $F_{|V_1}$ fonksiyonları sürekli ve bu fonksiyonlar $\overline{V_2} \cap (X \setminus V_1)$ üzerinde eşit olduğundan F fonksiyonu X üzerinde süreklidir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı tamamen regülerdir.✓

Teorem 11.115.

I bir indis kümesi olmak üzere $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda

a) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı yerel kompaktsa her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı yerel kompakttır.

b) I sonlu ve her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı yerel kompaktsa $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı yerel kompakttır.

İSPAT:

a) Her $\alpha \in I$ için π_α fonksiyonu sürekli açık ve örten olduğundan Teorem 11.102 gereğince her bir $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı yerel kompakttır.

b) $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ ve $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha=1}^{m} X_\alpha$ olsun. Bu durumda $\alpha \in I$ için $x_\alpha \in X_\alpha$ dır. $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı yerel kompakt olduğundan

$$x_\alpha \in U_\alpha \subseteq C_\alpha$$

olacak şekilde $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayında açık bir U kümesi ve kompakt bir C kümesi vardır. Diğer yandan $\prod_{\alpha=1}^{m} U_\alpha$ kümesi $\prod_{\alpha=1}^{m} X_\alpha$ çarpım uzayında açık ve

$$x \in \prod_{\alpha=1}^{m} U_\alpha \subseteq \prod_{\alpha=1}^{m} C_\alpha$$

dır. Teorem 11.48 gereğince $\prod_{\alpha=1}^{m} C_\alpha$ kümesi kompakt olduğundan $X = \prod_{\alpha=1}^{m} X_\alpha$ çarpım uzayı yerel kompakttır.✓

Not

I kümesi sonlu değilse Teorem 11.115 (a) doğru olmayabilir. Yani I sonlu değilse, her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı yerel kompakt olmasına rağmen $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayı yerel kompakt olmayabilir.

ÖRNEK 11.116.

$\alpha \in \mathbb{N}$ için $X_\alpha = \mathbb{R}$ standart uzayı olmak üzere $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}|} = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha$ çarpım uzayının yerel kompakt olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ uzayının yerel kompakt olduğunu varsayalım. $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ olsun. Bu durumda

$$x \in U \subseteq C$$

olacak şekilde açık bir U kümesi ve kompakt bir C kümesi vardır. $x \in U$ ve U kümesi açık olduğundan Teorem 4.9 gereğince

$$x \in B = \mathbb{R} \times \cdots \times (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \cdots \times (a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times (a_{\alpha_n}, b_{\alpha_n}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \subseteq U \subseteq C$$

olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}_ç$ ($\mathscr{B}_ç$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ nin tabanı) vardır. Diğer yandan $\mathbb{R}$ standart uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 10.35 gereğince $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}|}$ bir Hausdorff uzayıdır. Böylece C kümesi kapalıdır. O halde $\overline{B} \subseteq C$ dır. Bu durumda

$$\mathbb{R} \times \cdots \times [a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}] \times \cdots \times [a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}] \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times [a_{\alpha_n}, b_{\alpha_n}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots = \overline{B} \subseteq C$$

olur. $\overline{B}$ kapalı ve C kompakt olduğundan Teorem 11.21 gereğince $\overline{B}$ kompakttır. Bu ise Teorem 11.47 gereğince $\overline{B}$ kompakt olmadığından bir çelişkidir. O halde

$$\mathbb{R}^{|\mathbb{N}|} = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha$$

çarpım uzayı yerel kompakt değildir.✍

11.11. Alıştırmalar

1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{B}$, $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olsun. Aşağıdaki önermelerin denk olduklarını gösteriniz.

a) X kompakttır.

b) X in $\mathscr{B}$ nin elemanlarından oluşan her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.

2. $(X, \mathcal{T})$ bir kaba topolojik uzay olsun. X in her alt kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

3. $(X, \mathcal{T})$ bir sonlu tümleyenler uzayı olsun. X in her alt kümesinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında kompakt olduğunu gösteriniz.

4. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sağ}})$ ve $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzaylarının kompakt olup olmadıklarını araştırınız.

5. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\mathcal{T}_1 = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{[x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

topolojileri verilsin.

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının kompakt olup olmadığını araştırınız.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının kompakt olup olmadığını araştırınız.

6. $S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ de kompakt fakat $S_2 = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ nin kompakt olmadığını gösteriniz.

7. $\mathbb{R}$ nin aşağıda verilen alt kümelerinin kompakt olup olmadıklarını araştırınız.

a) $(0,1)$ **b)** $[0,1)$

c) $\mathbb{Q}$ **d)** $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

e) $\mathbb{Z}$ **f)** $\{1, 2, \ldots, n\}$

g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **h)** $\{\cos x \mid x \in [0,1]\}$

i) $\{\tan x \mid x \in [0,1]\}$ **j)** $\{\sqrt{2}/n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$

8. $a < b$, $c < d$ özelliğindeki her a, b, c ve d reel sayıları için kompaktlık kavramını kullanarak

a) (a, b) ve $[c, d]$ aralıklarının homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.

b) $[a, b)$ ve $[c, d]$ aralıklarının homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.

9. $\{C_j \mid j \in J\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı kompakt alt kümelerinden oluşsun. $\bigcap_{j \in J} C_j$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

10. $(X, \mathcal{T})$, her alt uzayı kompakt olan sonsuz bir topolojik uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ nun bir Hausdorff uzayı olmadığını gösteriniz.

11. Sayılamaz kompakt bir Hausdorff topolojik uzayın sayılamaz çoklukta kompakt ve sayılamaz çoklukta kompakt olmayan alt kümesi olduğunu gösteriniz.

12. X sonsuz bir küme olsun. $(X, \mathcal{T}(a))$ nın yerel kompakt olduğunu gösteriniz.

13. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T}_2)$ Hausdorff uzayları kompakt olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ veya $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin karşılaştırılamayacağını gösteriniz.

14. X sonlu olmayan bir küme olmak üzere $(X,\mathcal{T}_a)$ ve $(X,\mathcal{T}(a))$ uzaylarının homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.

15. $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı olsun.

a) $(X,\mathcal{T})$ uzayının kompakt olup olmadığını araştırınız.

b) $(X,\mathcal{T})$ uzayının dizisel kompakt olup olmadığını araştırınız.

c) $(X,\mathcal{T})$ uzayının sayılabilir kompakt olup olmadığını araştırınız.

16. $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin. $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ ve $(X,\mathcal{T}_1)$ sayılabilir kompakt olsun. $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayının sayılabilir kompakt olduğunu gösteriniz.

17. Bire-bir örten sürekli fakat homeomorfizm olmayan bir $f: X \to Y$ fonksiyonu ve kompakt bir $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı ile bir $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı örneği veriniz.

18. Bire-bir örten sürekli fakat homeomorfizm olmayan bir $f: X \to Y$ fonksiyonu ve bir $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı ile bir Hausdorff $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı örneği veriniz.

19.

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\mathbb{N}\} \cup \{\{1,2,\cdots,n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\mathbb{N}\} \cup \{\{n,n+1,\cdots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

olmak üzere $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ ve $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin.

a) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayının kompakt olmadığını fakat yerel kompakt olduğunu gösteriniz.

b) $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayının kompakt ve yerel kompakt olduğunu gösteriniz.

20. $[1,2)$ aralığının $\mathbb{R}$ standart uzayında yerel kompakt olduğunu gösteriniz.

21. İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ standart uzayında yerel kompakt olmadığını gösteriniz.

22. $(X,\mathcal{T})$ uzayı bir Lindelöf uzayı ve sayılabilir kompaksa $(X,\mathcal{T})$ uzayının kompakt olduğunu gösteriniz.

23. X sayılamaz bir küme olmak üzere $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayının Lindelöf uzayı olmadığını gösteriniz.

24. $(X,\mathcal{T})$ uzayı Lindelöf uzayı ve A, X in kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda A alt uzayının Lindelöf uzayı olduğunu gösteriniz.

25. $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının Lindelöf uzayı olmadığını gösteriniz.

26. $f:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_2)$ sürekli örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı Lindelöf uzayı ise $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının da Lindelöf uzayı olduğunu gösteriniz.

27. $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bir Lindelöf uzayı ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı kompakt olsun. Bu durumda $(X\times Y,\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2)$ çarpım uzayının Lindelöf uzayı olduğunu gösteriniz.

28. $\mathbb{R}$ nin aşağıdaki alt kümelerinin kompakt olmadıklarını Sonuç 11.94 yı kullanarak gösteriniz.

a) $[a,b)$,	b) $(a,b]$
c) $[a,\infty)$	d) (a,∞)
e) $(-\infty,a]$	f) $(-\infty,a)$
g) $\mathbb{Z}$	h) $\mathbb{Q}$
i) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	j) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$
k) $\{1,2,3,7,9,\cdots\}$	l) $\{\sqrt{2}/n \mid n=1,2,3,...\}$

29. $S_1 = \{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ ve $S_2 = \left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ kümelerinin $\mathbb{R}$ uzayında kompakt olup olmadığını Sonuç 11.94 yı kullanarak araştırınız.

30. $\mathbb{R}^2$ standart uzayının kompakt olmadığını Sonuç 11.94 yı kullanarak gösteriniz.

31. $\mathbb{R}^2$ nin aşağıda verilen alt kümelerinin kompakt olup olmadıklarını araştırınız.

a) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$

b) $B=\{(x,y)\mid x\geq y+1\}$

c) $C=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 4\}$

d) $D=\{(x,y)\mid 0<x<2,\ 0\leq y\leq 4\}$

e) $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$

f) $F=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$

g) $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$

32. Örnek 2.11 da tanımlanan $(\mathscr{C}(0,1),d_\infty)$ uzayının kompakt olup olmadığını araştırınız.

33. $(X,\mathcal{T})$ birinci sayılabilir kompakt bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayındaki her (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.

34. X sonlu olmayan bir küme olmak üzere (X,d) ayrık metrik uzayı verilsin.

a) Dizisel kompaktlığın tanımını kullanarak (X,d) uzayının dizisel kompakt olmadığını gösteriniz.

b) (a) dan yararlanarak (X,d) uzayının sayılabilir kompakt olmadığını gösteriniz.

35. (X_1,d_1) ve (X_2,d_2) birer metrik uzay ve $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in X_1\times X_2$ için

$$d_t(x,y) = d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$

ve

$$d_m(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

olmak üzere $(X_1 \times X_2, d_t)$ ve $(X_1 \times X_2, d_m)$ uzayları kompakt olsun. Bu durumda

a) $(X_1 \times X_2, d_t)$ b) $(X_1 \times X_2, d_m)$

uzaylarının kompakt olduğunu ispatlayınız.

36. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $A_1 \subseteq X$ ve $A_2 \subseteq X$ olsun.

a) A_1 kümesi kompakt ve A_2 kümesi kapalı ise $A_1 \cap A_2$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

b) A_1 ve A_2 kümeleri kompakt ise $A_1 \cup A_2$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

c) A_1 ve A_2 kümeleri kompakt ise $A_1 \cap A_2$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

37. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $A_1 \subseteq X$ ve $A_2 \subseteq X$ olsun.

a) A_1 kümesi kompakt, A_2 kümesi kapalı ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ise $d(A_1,A_2) > 0$ olduğunu gösteriniz.

b) A_1, A_2 kümeleri kompakt ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ise $d(A_1,A_2) = d(a,b)$ olacak şekilde $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ noktalarının olduğunu gösteriniz.

c) A_1 kümesi kompakt, A_2 kümesi kapalı ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ise $d(A_1,A_2) = d(a,b)$ olacak şekilde $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ noktalarının olmayabileceğini bir karşıt örnek vererek gösteriniz.

11.12. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

a)⇒ b). $\mathscr{U}=\{B_i : |i\in I\}$ kolleksiyonu X in $\mathscr{B}$ nin elemanlarından oluşan bir örtüsü olsun. Her $i\in I$ için $B_i\in\mathcal{T}$ olacağından $\mathscr{U}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olur. Bu durumda X kompakt olduğundan $\mathscr{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü vardır.

b)⇒ a). $\mathscr{U}=\{U_i : |i\in I\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olsun. Her $x\in X$ için $x\in U_{i_x}$ olacak şekilde bir $U_{i_x}\in\mathscr{U}$ vardır. $\mathscr{B}$, $\mathcal{T}$ nun tabanı olduğundan $x\in B_{i_x}\subseteq U_{i_x}$ olacak şekilde bir $B_{i_x}\in\mathscr{B}$ vardır. Yani her $x\in X$ için $x\in B_{i_x}\subseteq U_{i_x}$ olacak şekilde bir $B_{i_x}\in\mathscr{B}$ vardır. Bu durumda $X=\bigcup\limits_{x\in X}B_{i_x}$ olur. Böylece $\{B_{i_x} : |x\in X\}$ kolleksiyonu X in $\mathscr{B}$ nin elemanlarından oluşan bir örtüsü olur. (b) gereğince bu örtünün $\{B_{i_{x_1}},B_{i_{x_2}},\cdots,B_{i_{x_n}}\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda

$$B_{i_{x_1}}\subseteq U_{i_{x_1}},B_{i_{x_2}}\subseteq U_{i_{x_1}},\cdots,B_{i_{x_n}}\subseteq U_{i_{x_1}}$$

olmak üzere $X=U_{i_{x_1}}\cup U_{i_{x_2}}\cup\cdots\cup U_{i_{x_n}}$ olur. Yani $\{U_{i_{x_1}},U_{i_{x_2}},\cdots,U_{i_{x_n}}\}$ kolleksiyonu $\mathscr{U}$ nun sonlu bir alt örtüsüdür. Bu durumda X kompakttır.✔

ÇÖZÜM 2

$A\subseteq X$ ve $A\neq\emptyset$ olsun. $\{U_i|i\in I\}$ kolleksiyonu A nın açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\neq\emptyset$ dur. O halde en az bir $i_0\in I$ için $U_{i_0}\neq\emptyset$ dur. U_{i_0} açık olduğundan $U_{i_0}=X$ dir. Böylece $\{X\}$ kolleksiyonu A nın $\{U_i|i\in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsüdür. Böylece A kompakttır.✔

ÇÖZÜM 3

$A\subseteq X$ olsun. $\{U_i|i\in I\}$ kolleksiyonu A nın açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $A\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ dir. En az bir $i\in I$ için $U_i=X$ ise

$$\{X\},\quad \{U_i|i\in I\}$$

örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olur. Her $i\in I$ için $U_i\neq X$ olsun. $U_{i_0}\neq\emptyset$ olacak şekilde bir $U_{i_0}\in\{U_i|i\in I\}$ seçelim. Bu durumda $X\setminus U_{i_0}$ kümesi sonludur.

$$(X\setminus U_{i_0})\cap A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

olsun. $A\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ olduğundan $a_1\in U_1, a_2\in U_2,\cdots,a_n\in U_n$ olacak şekilde $U_1,U_2,\cdots,U_n\in\{U_i|i\in I\}$ kümeleri vardır. Diğer yandan

$$A\subseteq U_{i_0}\cup U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n$$

dir. Böylece $\{U_{i_0},U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ kolleksiyonu A nın $\{U_i|i\in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsüdür. Böylece A kompakttır.✔

ÇÖZÜM 4

a) Önce $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının kompakt olmadığını gösterelim. $\{(-n,n]\,|n\in\mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ nın açık bir örtüsüdür. Bu örtünün $\{(-n,n]\,|i=1,2,\cdots,m\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$n_0=\max\{n_i|i=1,2,\cdots,m\}$$

olmak üzere

$$\mathbb{R}=\bigcup_{i=1}^{m}(-n,n]=(-n_0,n_0]$$

dır. Bu ise $n_0+1\in\mathbb{R}$ ve $n_0+1\notin(-n_0,n_0]$ olduğundan bir çelişkidir. O halde $\mathbb{R}$ nin $\{(-n,n]\,|n\in\mathbb{N}\}$ açık örtüsünün sonlu hiç bir alt örtüsü yoktur. Böylece $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayı kompakt değildir.

b) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının kompakt olmadığını gösterelim. $\{[-n,n)|n\in\mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}$ nın açık bir örtüsüdür. Bu örtünün $\{[-n_i,n_i)|i=1,2,\cdots,m\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$n_0=\max\{n_i|i=1,2,\cdots,m\}$$

olmak üzere

$$\mathbb{R}=\bigcup_{i=1}^{m}[-n_i,n_i)=[-n_0,n_0)$$

dır. Bu ise $n_0+1\in\mathbb{R}$ ve $n_0+1\notin[-n_0,n_0)$ olduğundan bir çelişkidir. O halde $\mathbb{R}$ nin $\{[-n,n)|n\in\mathbb{N}\}$ açık örtüsünün sonlu hiç bir alt örtüsü yoktur. Böylece $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayı kompakt değildir.✔

ÇÖZÜM 5

a) $\{(-\infty,x)|x\in\mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayında $\mathbb{R}$ nin açık bir örtüsüdür. Bu örtünün

$$\{(-\infty,x_i)|i=1,2,\cdots,n\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsünün olduğunu varsayalım. Bu durumda $a = \sup\{x_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ olmak üzere

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n} (-\infty, x_i) = (-\infty, a)$$

olur. Bu ise $a + 1 \notin (-\infty, a)$ olduğundan bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{R}$ nin $\{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\}$ açık örtüsünün sonlu hiç bir alt örtüsü yoktur. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayı kompakt değildir.

b) $\{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayında $\mathbb{R}$ nin açık bir örtüsüdür. Bu örtünün

$$\{(x_i, \infty) | i = 1, 2, \cdots, n\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsünün olduğunu varsayalım. Bu durumda $a = \inf\{x_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ olmak üzere

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i, \infty) = (a, \infty)$$

olur. Bu ise $a - 1 \notin (a, \infty)$ olduğundan bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{R}$ nin $\{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\}$ açık örtüsünün sonlu hiç bir alt örtüsü yoktur. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayı kompakt değildir.✔

ÇÖZÜM 6

Sonuç 11.33 gereğince $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. S_1 kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır. S_2 kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.✔

ÇÖZÜM 7

Sonuç 11.33 gereğince $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Böylece:

a) $(0, 1)$ kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.

b) $[0, 1)$ kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.

c) $\mathbb{Q}$ kümesi kapalı veya sınırlı olmadığından kompakt değildir.

d) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.

e) $\mathbb{Z}$ kümesi sınırlı olmadığından kompakt değildir.

f) $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesi kapalı veya sınırlı olmadığından kompakt değildir.

h) $f(x) = \cos(x)$ şeklinde tanımlı $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $[0, 1]$ kompakt olduğundan Teorem 11.34 gereğince

$$f([0, 1]) = \cos([0, 1]) = \{\cos x | x \in [0, 1]\}$$

kümesi kompakttır.

i) $f(x) = \tan(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $[0, 1]$ kompakt olduğundan Teorem 11.34 gereğince

$$f([0, 1]) = \tan([0, 1]) = \{\tan x | x \in [0, 1]\}$$

kümesi kompakttır.

j) $\{\sqrt{2}/n : n = 1, 2, 3, \cdots\}$ kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.✔

ÇÖZÜM 8

a) (a, b) kümesi kapalı olmadığından Sonuç 11.33 gereğince kompakt değildir. $[c, d]$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan Sonuç 11.33 gereğince kompakttır. Böylece Sonuç 11.35 gereğince bu uzaylar homeomorfik olmazlar.

b) $[a, b)$ kümesi kapalı olmadığından Sonuç 11.33 gereğince kompakt değildir. $[c, d]$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan Sonuç 11.33 gereğince kompakttır. Böylece Sonuç 11.35 gereğince bu uzaylar homeomorfik olmazlar.✔

ÇÖZÜM 9

$j \in J$ için C_j kümeleri kapalı ve kapalı kümelerin arakesitleri kapalı olduğundan $\bigcap_{j \in J} C_j$ kümesi kapalıdır. Herhangi bir $i \in J$ için

$$\bigcap_{j \in J} C_j \subseteq C_i$$

ve C_i kümesi kompakt olduğundan Teorem 11.21 gereğince $\bigcap_{j \in J} C_j$ kümesi kompakttır.✔

ÇÖZÜM 10

$(X, \mathcal{T})$ nun bir Hausdorff uzayı olduğunu varsayalım. $x \in X$ olsun. Bu durumda $X \setminus \{x\}$ kümesi kompakttır. $(X, \mathcal{T})$ bir Hausdorff uzayı olduğundan $X \setminus \{x\}$ kümesi kapalıdır. Böylece $\{x\}$ kümesi açıktır. O halde Örnek 3.12 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. Bu ise X sonsuz olduğundan $(X, \mathcal{T})$ nun kompakt olması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bir Hausdorff uzayı olamaz.✔

ÇÖZÜM 11

a) $(X, \mathcal{T})$ sayılamaz kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi kompakttır. X sayılamaz olduğundan X in sayılamaz sayıda $\{x\}$ alt kümesi vardır.

Böylece X in sayılamaz sayıda kompakt alt kümesi vardır.

b) $x \in X$ olsun. $X\setminus\{x\}$ kümesinin kompakt olmadığını gösterelim. $X\setminus\{x\}$ kümesinin kompakt olduğunu varsayalım. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı Hausdorff olduğundan $X\setminus\{x\}$ kümesi kapalı ve dolayısıyla $\{x\}$ kümesi açıktır. Böylece Örnek 3.12 gereğince $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. Bu ise $(X,\mathcal{T})$ uzayının kompakt olması ile çelişir. O halde $X\setminus\{x\}$ kümesi kompakt değildir. X sayılamaz olduğundan X in sayılamaz sayıda $X\setminus\{x\}$ alt kümesi vardır. Böylece X in sayılamaz sayıda kompakt olmayan alt kümesi vardır.✔

ÇÖZÜM 12

$x \in X$ olsun. Bu durumda

$$x \in U = \{a,x\} \subseteq C = \{a,x\}$$

dir. Üstelik, U açık ve C kompakttır. O halde $(X,\mathcal{T}(a))$ uzayı yerel kompakttır.✔

ÇÖZÜM 13

$\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin karşılaştırılabilir ve $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğunu varsayalım. id : $(X,\mathcal{T}_2) \to (X,\mathcal{T}_1)$ birim fonksiyonu sürekli, bire-bir ve örtendir. $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı kompakt ve $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı Hausdorff olduğundan Teorem 11.39 gereğince id fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece id fonksiyonu açıktır. O halde $U \in \mathcal{T}_2$ ise $\mathrm{id}(U) = U \in \mathcal{T}_1$ dir. Yani $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ dir. Böylece $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$ olur. Benzer şekilde $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ ise $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$ olduğu gösterilir. O halde $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$ veya $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ karşılaştırılamaz.✔

ÇÖZÜM 14

Örnek 11.7 gereğince $(X,\mathcal{T}_a)$ uzayı kompakt ve Örnek 11.8 gereğince $(X,\mathcal{T}(a))$ uzayı kompakt değildir. Böylece Sonuç 11.35 gereğince bu uzaylar homeomorfik olamazlar.✔

ÇÖZÜM 15

X sonlu ise sonlu her uzay kompakt, dizisel kompakt ve sayılabilir kompakt olduğundan $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı kompakt, dizisel kompakt ve sayılabilir kompakt olur. X sonlu olmasın.

a) X sonlu olmadığından $(X,\mathcal{T})$ uzayında $n \neq m$ için

$$x_n \neq x_m \quad \text{ve} \quad \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq X$$

olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. $U = X\setminus\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $U_k = U \cup \{x_k\}$ diyelim. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} X\setminus U_k &= (X\setminus U) \cap (X\setminus\{x_k\}) \\ &= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap (X\setminus\{x_k\}) \\ &= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\setminus\{x_k\} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ için $X\setminus U_k$ sayılabilir olacağından U_k açıktır. Diğer yandan

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

dır. Bu durumda $\{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{U_{k_1}, U_{k_2}, \cdots, U_{k_n}\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$$

olur. Bu ise

$$k = \max\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$$

olmak üzere $x_{k+1} \in X$ ve $x_{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$ olması ile çelişir. O halde $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı kompakt değildir.

b) Önce $A \subseteq X$ ve A sonsuzsa A nın dizisel kompakt olmadığını gösterelim. Örnek 9.4 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayında bir (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yater şart (x_n) dizisinin

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, x, x, x, \cdots$$

şeklinde olmasıdır. A kümesi sonsuzsa A da terimleri birbirinden farklı bir (a_n) dizisi vardır. Böyle bir (a_n) dizisinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. O halde A kümesi dizisel kompakt olamaz. $A = X$ alınırsa $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı dizisel kompakt olamaz.

c) (a) daki $\{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu X in sayılabilir açık bir örtüsü olup sonlu hiç bir alt örtüsü olmadığından bu uzay sayılabilir kompakt değildir.✔

ÇÖZÜM 16

$\{U_n | n \in I\}$ kolleksiyonu X in $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayındaki açık kümelerinden oluşan sayılabilir açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ olduğundan $\{U_n | n \in I\}$ kolleksiyonu X in $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayındaki açık kümelerinden oluşan sayılabilir açık bir örtüsüdür. $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı sayılabilir kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu sonlu alt örtü X in $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayındaki açık kümelerinden oluşan $\{U_n|n \in I\}$ sayılabilir örtüsünün sonlu bir alt örtüsüdür. O halde $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı sayılabilir kompakttır.✔

ÇÖZÜM 17

$X = Y = [a,b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olsun.

$$\mathcal{T}_1 = \text{alt uzay topolojisi ve } \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, Y\}$$

olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı kompakttır. Diğeryandan $\mathrm{id}:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonu bire-bir örten ve sürekli olmasına rağmen bir homeomorfizm değildir.✔

ÇÖZÜM 18

$X = Y = [a,b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olsun.

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X) \text{ ve } \mathcal{T}_2 = \text{alt uzay topolojisi}$$

olsun. Bu durumda $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır. Diğeryandan $\mathrm{id}:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonu bire-bir örten ve sürekli olmasına rağmen bir homeomorfizm değildir.✔

ÇÖZÜM 19

a) i) $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = \{1,2,\cdots,n\}$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayının açık bir örtüsüdür. Bu örtünün $\mathcal{V} = \{U_{n_i} \mid i = 1,2,\cdots,m\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü olduğunu varsayalım. $n_0 = \max\{n_i \mid i = 1,2,\cdots,m\}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i = U_0 = \{1,2,\cdots,n_0\}$ olur. Bu ise $n_0+1 \in \mathbb{N}$ ve $n_0+1 \notin \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ olduğundan bir çelişkidir. O halde $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüsünün sonlu alt örtüsü yoktur. Bu durumda $\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayı kompakt değildir.

ii) $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durmda $n \in U_n = \{1,2,\cdots,n\}$ ve $\{1,2,\cdots,n\} \in \mathcal{T}_1$ dir. $C = \{1,2,\cdots,n\} = U_n$ kompakt ve $U_n \subseteq C$ olduğundan n noktasında $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayı yerel kompakttır. n noktası keyfi olduğundan $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$ uzayı yerel kompakttır.

b) i) $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kollek-iyonu $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayının açık bir örtüsü olsun. $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ olduğundan $1 \in U_n$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. Diğeryandan $n \neq 1$ için $1 \notin U_n$ olduğundan $1 \in U_1 = \mathbb{N}$ dir. Bu durumda $\{\mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{U}$ nun sonlu alt örtüsü olur. Böylece $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayı kompakttır.

ii) Örnek 11.97 gereğince kompakt her uzay yerel kompakt olduğundan $(\mathbb{N},\mathcal{T}_2)$ uzayı yerel kompakttır.✔

ÇÖZÜM 20

$x \in [1,2)$ olsun. $x \neq 1$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x-1|,|x-2|\}$ olmak üzere $U = (x-\varepsilon, x-\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $U \subseteq [1,2)$, $x \in U$ ve U açıktır. Diğeryandan $V = [x-\varepsilon, x-\varepsilon]$ kümesi kompakt ve $U \subseteq V$ dir. $x = 1$ olsun. $U = [1,3/2)$ ve $V = [1,3/2]$ olsun. Bu durumda $x \in U$, U kümesi açık, V kompakt ve $U \subseteq V$ dir. Böylece $[1,2)$ aralığı yerel kompakttır.✔

ÇÖZÜM 21

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nun yerel kompakt olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathbb{R}$ standart uzayı bir Hausdorff uzayı ve $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesi yoğun olduğundan Teorem 11.111 gereğince $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesi açıktır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ yerel kompakt değildir.✔

ÇÖZÜM 22

$\mathcal{U}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ Lindelöff uzayı olduğundan $\mathcal{U}$ nun sayılabilir bir $\mathcal{V}$ altörtüsü vardır. $(X,\mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompakt olduğundan $\mathcal{V}$ nin sonlu bir $\mathcal{V}_1$ altörtüsü vardır. Bu sonlu $\mathcal{V}_1$ örtüsü $\mathcal{U}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsüdür. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayı kompakttır.✔

ÇÖZÜM 23

$\{\{x\} \mid x \in X\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsüdür. X sayılamaz bir küme olduğundan bu örtünün sayılabilir hiç bir alt örtüsü yoktur. Böylece $(X,\mathcal{P}(X))$ uzayı Lindelöf uzayı değildir.✔

ÇÖZÜM 24

$\mathcal{U}$, A nın açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $X\setminus A$ kümesi açık olduğundan $\mathcal{U} \cup \{X\setminus A\}$ kolleksiyonu X in açık bir örtüsü olur. $(X,\mathcal{T})$ uzayı Lindelöf uzayı olduğundan bu örtünün sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü vardır. Bu durumda $\mathcal{V}\setminus\{X\setminus A\}$, $\mathcal{U}$ nun sayılabilir bir alt örtüsüdür. Böylece A alt uzayı Lindelöf uzayıdır.✔

ÇÖZÜM 25

$\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının Lindelöf uzayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{(r,-r) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ kümeside kapalı olduğundan bir Lindelöf uzayıdır. $r \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda

$$(r-1, r] \times (-r-1, -r] \in \mathcal{T}^2_{\text{sağ}}$$

ve

$$(r-1,r]\times(-r-1,-r]\bigcap\{(y,-y)\in\mathbb{R}^2\mid y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}=\{(r,-r)\}$$

olduğundan $\{(r,-r)\}$ kümesi $\{(r,-r)\in\mathbb{R}^2\mid r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ uzayında açıktır. Böylece $\{(r,-r)\mid r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ uzayı ayrıktır. Sayılamaz ayrık bir uzay Lindelöf uzayı olmadığından bu bir çelişkidir. O halde $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}^2_{\text{sağ}}\right)$ uzayının Lindelöf uzayı değildir.✔

ÇÖZÜM 26

$\mathcal{U}=\{U_i\mid i\in I\}$ kolleksiyonu $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{V}=\{f^{-1}(U_i)\mid i\in I\}$ kolleksiyonu $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının açık bir örtüsü olur. $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı Lindelöf uzayı olduğundan $\mathcal{V}$ nin $\{f^{-1}(U_{i_n})\mid n\in\mathbb{N}\}$ gibi bir sayılabilir alt örtüsü vardır. Bu durumda $\{U_{i_n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{U}$ nun sayılabilir bir alt örtüsü olur. Böylece $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı bir Lindelöf uzayıdır.✔

ÇÖZÜM 27

$\mathcal{U}=\{U_i\times V_i\mid i\in I\}$ kolleksiyonu $(X\times Y,\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2)$ çarpım uzayının bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $\{U_i\mid i\in I\}$ kolleksiyonu $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayının ve $\{V_i\mid i\in I\}$ kolleksiyonu $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayının açık örtüsü olur. Bu durumda $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bir Lindelöf uzayı olduğundan $\{U_i\mid i\in I\}$ nun $\{U_{i_n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ gibi sayılabilir bir alt örtüsü ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı kompakt olduğundan $\{V_i\mid i\in I\}$ nin $\{V_{i_k}\mid k=1,2,\cdots,m\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $\{U_{i_n}\times V_{i_k}\mid k=1,2,\cdots,m,\ n\in\mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $\mathcal{U}$ nun sayılabilir bir alt örtüsü olur. Bu durumda $(X\times Y,\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2)$ çarpım uzayı bir Lindelöf uzayıdır.✔

ÇÖZÜM 28

a) Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$x_n=b-\frac{b-a}{n}$$

olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in[a,b)$ dir. Yani (x_n) dizisi $[a,b)$ de bir dizidir. $x_n\to b\notin[a,b)$ olduğundan (x_n) dizisinin $[a,b)$ nin bir noktasına yakınsayan hiçbir alt dizisi olamaz. Böylece $[a,b)$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $[a,b)$ kompakt olamaz.

b) Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$x_n=a+\frac{b-a}{n}$$

olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in(a,b]$ dir. Yani (x_n) dizisi $(a,b]$ de bir dizidir. $x_n\to a\notin(a,b]$ olduğundan (x_n) dizisinin $(a,b]$ nin bir noktasına yakınsayan hiçbir alt dizisi olamaz. Böylece $(a,b]$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $(a,b]$ kompakt olamaz.

c) $a+1,a+2,a+3,\cdots$ dizisi $[a,\infty)$ da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $[a,\infty)$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $[a,\infty)$ kompakt olamaz.

d) $a+1,a+2,a+3,\cdots$ dizisi (a,∞) da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece (a,∞) kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince (a,∞) kompakt olamaz.

e) $a-1,a-2,a-3,\cdots$ dizisi $(-\infty,a]$ da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $(-\infty,a]$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $(-\infty,a]$ kompakt olamaz.

f) $a-1,a-2,a-3,\cdots$ dizisi $(-\infty,a)$ da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $(-\infty,a)$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $(-\infty,a)$ kompakt olamaz.

g) $1,2,3,\cdots$ dizisi $\mathbb{Z}$ da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $\mathbb{Z}$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $\mathbb{Z}$ kompakt olamaz.

h) $1,2,3,\cdots$ dizisi $\mathbb{Q}$ da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $\mathbb{Q}$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $\mathbb{Q}$ kompakt olamaz.

i) $1\sqrt{2},2\sqrt{2},3\sqrt{2},\cdots$ dizisi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ kompakt olamaz.

j) $s_1=1,s_2=0,\ n\in\mathbb{N}$ ve $n>2$ için

$$s_n=\frac{1}{2}(s_{n-1}+s_{n-2})$$

olmak üzere (s_n) dizisi $[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ da bir dizidir. Üstelik $s_n\to\sqrt{2}$ dir. Böylece bu dizinin $[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ kümesinin bir elemanına yakınsayan hiç bir alt dizisi olamaz. O halde $[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ kompakt olamaz.

k) $1,2,3,7,9,\cdots$ dizisi

$$\{1,2,3,7,9,\cdots\}$$

da bir dizidir ve bu dizinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Böylece $\{1,2,3,7,9,\cdots\}$ kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $\{1,2,3,7,9,\cdots\}$ kompakt olamaz.

l) $\left(\sqrt{2}/n\right)$ dizisi

$$\{\sqrt{2}/n\mid n=1,2,3,\cdots\}$$

de bir dizidir ve $\sqrt{2}/n \to 0$ dır. Böylece bu dizinin $\{\sqrt{2}/n \mid n = 1,2,3,\cdots\}$ kümesinin bir elemanına yakınsayan hiç bir alt dizisi olamaz. O halde

$$\{\sqrt{2}/n \mid n = 1,2,3,\cdots\}$$

kümesi dizisel kompakt değildir. Sonuç 11.94 gereğince $\{\sqrt{2}/n \mid n = 1,2,3,\cdots\}$ kompakt olamaz.✓

ÇÖZÜM 29

(s_n) dizisi S_1 de bir dizi olsun. 0 sayısı (s_n) dizisi içinde sonsuz defa tekrar ediyorsa (0) sabit dizisi (s_n) dizisinin bir alt dizisi olur ve bu alt dizi 0 a yakınsar. 0 sayısı (s_n) dizisi içinde sonlu defa tekrar ediyorsa (s_n) dizisinden $s_n = 0$ özelliğine sahip terimlerin atılmasıyla elde edilen dizi (s_n) nin bir alt dizisi olur ve $1/n \to 0$ olduğundan bu alt dizide 0 a yakınsar. O halde S_1 kümesi dizisel kompakttır. Sonuç 11.94 gereğince S_1 kompakttır.

$(1/n)$ dizisi S_2 de bir dizidir ve $1/n \to 0$ dır. Böylece bu dizinin S_2 kümesinin bir elemanına yakınsayan hiç bir alt dizisi olamaz. O halde S_2 kümesi dizisel kompakt olamaz. Sonuç 11.94 gereğince S_2 kompakt olamaz.✓

ÇÖZÜM 30

$((n,n))$ (veya $((0,n))$) dizisi $\mathbb{R}^2$ de bir dizidir ve bu dizinin hiç bir yakınsak alt dizisi yoktur. Böylece $\mathbb{R}^2$ dizisel kompakt değildir.✓

ÇÖZÜM 31

Teorem 11.75 gereğince $\mathbb{R}^n$ nin bir A alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart A kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Buna göre

a) $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

b) $B = \{(x,y) \mid x \geq y+1\}$ kümesi sınırlı olmadığından kompakt değildir.

c) $C = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4\}$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

d) $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 2,\ 0 \leq y \leq 4\}$ kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.

e) $E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ kümesi kapalı olmadığından kompakt değildir.

f) $F = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ kümesi kapalı (veya sınırlı) olmadığından kompakt değildir.

g) $G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.✓

ÇÖZÜM 32

Örnek 2.63 de tanımlanan (x_n) dizisinin yakınsak hiç bir alt dizisi yoktur. Bu durumda $(\mathscr{C}(0,1), d_\infty)$ uzayı dizisel kompakt değildir. O halde Sonuç 11.94 gereğince $(\mathscr{C}(0,1), d_\infty)$ uzayı kompakt değildir.✓

ÇÖZÜM 33

(x_n) bir dizi olsun. (x_n) dizisinin bir x_{n_0} terimi dizi içinde sonsuz defa tekrar ediyorsa (x_n) dizisinin (x_{n_0}) sabit alt dizisi yakınsaktır. (x_n) dizisinin hiç bir teriminin dizi içinde sonsuz defa tekrar etmediğini varsayalım. Bu durumda dizinin sonsuz farklı terimi vardır. (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi olmadığını kabul edelim. Bu durumda Teorem 11.69 gereğince (x_n) dizisinin hiç bir yığılma noktası yoktur. Bu durumda $x \in X$ ise x, (x_n) dizisinin bir yığılma noktası değildir. Yığılma noktasının tanımı gereğince her $x \in X$ için $x \in U_x$ özelliğinde bir U_x açık kümesi (x_n) dizisinin sadece sonlu sayıda terimini içerecek şekilde vardır. Diğeryandan

$$\{U_x \mid x \in X\}$$

kolleksiyonu X uzayının açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu açık örtünün

$$\{U_{x_i} \mid i = 1,2,\cdots,n\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ olur. Her bir $i = 1,2,\cdots,n$ için U_{x_i} kümesi (x_n) dizisinin sadece sonlu sayıda terimini içereceğinden X de (x_n) dizisinin sadece sonlu sayıda terimini içerir. Bu ise dizinin sonsuz farklı teriminin olması ile çelişir. O halde (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.✓

ÇÖZÜM 34

a) X sonlu olmadığından her $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ olacak şekilde (X,d) uzayında bir (x_n) dizisi vardır. Bu durumda her $n \neq m$ için
$$d(x_n, x_m) = 1$$
olur. (x_{n_k}) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. Bu durumda $n_k \neq m_k$ için
$$d(x_{n_k}, x_{m_k}) = 1$$
olur. Böylece (x_{n_k}) dizisi yakınsak değildir. Bu durumda

(x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi yoktur. O halde (X,d) uzayı dizisel kompakt değildir.

b) (X,d) uzayı birinci sayılabilir olduğundan Sonuç 11.94 gereğince (X,d) uzayı sayılabilir kompakt değildir. Ayrıca Sonuç 11.94 gereğince (X,d) uzayı kompakt da değildir.✓

ÇÖZÜM 35

a) (x_n), (X_1,d_1) uzayında bir dizi olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $b\in X_2$ ve

$$z_n=(x_n,b)$$

olmak üzere (z_n) dizisi $(X_1\times X_2,d_t)$ uzayında bir dizidir. $(X_1\times X_2,d_t)$ uzayı dizisel kompakt olduğundan bu dizinin

$$z_{n_i}\to z=(x,b)\in X_1\times X_2$$

olacak şekilde yakınsak bir (z_{n_i}) alt dizisi vardır. Bu durumda

$$d_t(z_{n_i},z)=d_1(x_{n_i},x)+d_2(b,b)=d_1(x_{n_i},x)\to 0$$

olur. O halde $d_1(x_{n_i},x)\to 0$ dır. Yani (x_{n_i}) dizisi (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisidir. Bu durumda (X_1,d_1) uzayı dizisel kompakttır. O halde (X_1,d_1) uzayı kompakttır. Benzer şekilde (X_2,d_2) uzayının kompakt olduğu gösterilir.

b) (x_n), (X_1,d_1) uzayında bir dizi olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $b\in X_2$ ve

$$z_n=(x_n,b)$$

olmak üzere (z_n) dizisi $(X_1\times X_2,d_m)$ uzayında bir dizidir. $(X_1\times X_2,d_m)$ uzayı dizisel kompakt olduğundan bu dizinin

$$z_{n_i}\to z=(x,b)\in X_1\times X_2$$

olacak şekilde yakınsak bir (z_{n_i}) alt dizisi vardır. Bu durumda

$$d_m(z_{n_i},z)=\max\{d_1(x_{n_i},x),d_2(b,b)\}=d_1(x_{n_i},x)\to 0$$

olur. O halde $d_1(x_{n_i},x)\to 0$ dır. Yani (x_{n_i}) dizisi (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisidir. Bu durumda (X_1,d_1) uzayı dizisel kompakttır. O halde (X_1,d_1) uzayı kompakttır. Benzer şekilde (X_2,d_2) uzayının kompakt olduğu gösterilir.✓

ÇÖZÜM 36

a) (X,d) uzayı Hausdoff uzayı ve A_1 kümesi kompakt olduğundan kapalıdır. Bu durumda $A_1\cap A_2$ kümesi kapalıdır. A_1 kompakt,

$$A_1\cap A_2\subseteq A_1$$

olduğundan $A_1\cap A_2$ kümesi kompakttır.

b) $\mathscr{U}$, $A_1\cup A_2$ kümesinin açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\mathscr{U}$ hem A_1 kümesinin hemda A_2 kümesinin açık bir örtüsü olur. Bu durumda A_1 kompakt olduğundan $\mathscr{U}$ nun A_1 kümesini örtecek şekilde sonlu bir $\mathscr{U}_1$ alt örtüsü vardır. Benzer şekilde $\mathscr{U}$ nun A_2 kümesini örtecek şekilde sonlu bir $\mathscr{U}_2$ alt örtüsü vardır. Yani

$$A_1\subseteq\bigcup_{u\in\mathscr{U}_1}U \text{ ve } A_2\subseteq\bigcup_{u\in\mathscr{U}_2}U$$

olur. Bu durumda $\mathscr{V}=\mathscr{U}_1\cup\mathscr{U}_2$ sonlu, $\mathscr{V}\subseteq\mathscr{U}$ ve

$$A_1\cup A_2\subseteq\left(\bigcup_{u\in\mathscr{U}_1}U\right)\cup\left(\bigcup_{u\in\mathscr{U}_2}U\right)=\bigcup_{u\in\mathscr{V}}U$$

olur. Bu durumda $A_1\cup A_2$ kümesi kompakttır.

c) (X,d) uzayı Hausdoff uzayı ve A_1 ve A_2 kümeleri kompakt olduklarından kapalıdır. Bu durumda $A_1\cap A_2$ kümesi kapalıdır. A_1 kompakt,

$$A_1\cap A_2\subseteq A_1$$

olduğundan $A_1\cap A_2$ kümesi kompakttır.✓

ÇÖZÜM 37

a) $d(A_1,A_2)=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $d(A_1,A_2)=\inf\{d(a,b)\mid a\in A_1,b\in A_2\}$ olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $d(a_n,b_n)<\frac{1}{n}$ olacak şekilde $a_n\in A_1,b_n\in A_2$ vardır. Bu durumda A_1 kompakt olduğundan $a_{n_i}\to a\in A_1$ olacak şekilde (a_n) dizisinin yakınsak bir (a_{n_i}) alt dizisi vardır.

$$d\left(b_{n_i},a\right)\le d\left(b_{n_i},a_{n_i}\right)+d\left(a_{n_i},a\right)\le\frac{1}{n_i}+d\left(a_{n_i},a\right)$$

olur. Bu durumda

$$0\le\lim_{n_i\to\infty}d\left(b_{n_i},a\right)\le\lim_{n_i\to\infty}\frac{1}{n_i}+\lim_{n_i\to\infty}d\left(a_{n_i},a\right)$$

olacağından

$$0\le\lim_{n\to\infty}d\left(b_{n_i},a\right)\le 0$$

olur. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}d(b_{n_i},a)=0$ yani $b_{n_i}\to a$ olur. A_2 kapalı olduğundan $a\in A_2$ olur. Bu durumda $a\in A_1\cap A_2$ olduğundan $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ olur. Bu ise $A_1\cap A_2=\emptyset$ olması ile çelişir. O halde $d(A_1, A_2) > 0$ dır.

b) $d(A_1, A_2) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A_1, b \in A_2\}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(A_1, A_2) < d(a_n, b_n) < d(A_1, A_2) + \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $a_n \in A_1, b_n \in A_2$ vardır. Bu durumda A_1 ve A_2 kompakt olduğundan $a_{n_i} \to a \in A_1$ ve $b_{n_i} \to b \in A_2$ olacak şekilde (a_n) dizisinin yakınsak bir (a_{n_i}) alt dizisi ve (b_n) dizisinin yakınsak bir (b_{n_i}) alt dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(a, b) \leq d\left(a, a_{n_i}\right) + d\left(a_{n_i}, b_{n_i}\right) + d\left(b_{n_i}, b\right)$$

olduğundan

$$d(a, b) \leq \lim_{n_i \to \infty} d\left(a, a_{n_i}\right) + \lim_{n_i \to \infty} d\left(a_{n_i}, b_{n_i}\right) + \lim_{n_i \to \infty} d\left(b_{n_i}, b\right) \tag{11.3}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} d(A_1, A_2) &\leq \lim_{n_i \to \infty} d\left(a_{n_i}, b_{n_i}\right) \leq d(A_1, A_2) + \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_i} \\ &\leq d(A_1, A_2) \end{aligned}$$

olduğundan $d(A_1, A_2) = \lim_{n_i \to \infty} d(a_{n_i}, b_{n_i})$ olur.

$$\lim_{n_i \to \infty} d\left(a, a_{n_i}\right) = 0, \quad \lim_{n_i \to \infty} d\left(b_{n_i}, b\right) = 0$$

olduğundan (11.3) gereğince

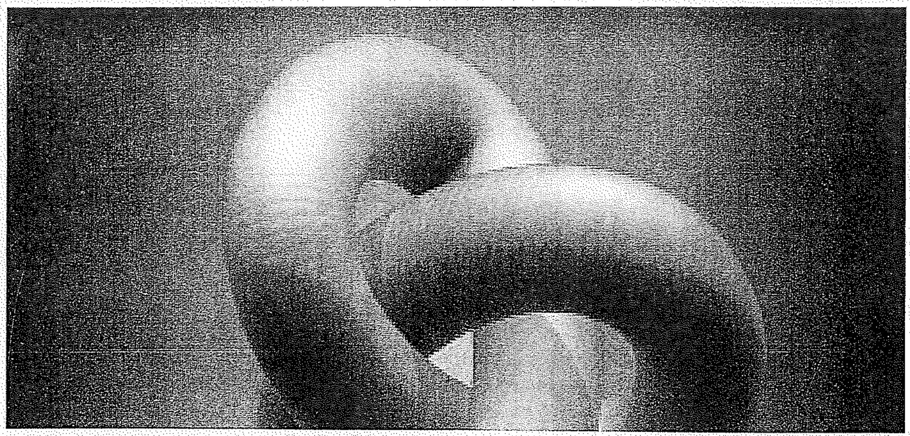
$$d(a, b) \leq d(A_1, A_2)$$

olur. $d(A_1, A_2)$ nin tanımı gereğince

$$d(A_1, A_2) \leq d(a, b)$$

olduğundan $d(A_1, A_2) = d(a, b)$ olur.

c) X, $\mathbb{R}$ nin $[0,1] \cup (2,3]$ alt uzayı olsun. Bu durumda $A_1 = [0,1]$ kümesi X uzayında kompakt ve $A_2 = (2,3]$ kümesi X uzayında kapalıdır. Diğeryandan $d(A_1, A_2) = 1$ ve $a \in A_1, b \in A_2$ için $d(a, b) > 1$ dir. Bu durumda her $a \in A_1$ ve her $b \in A_2$ için $d(A_1, A_2) \neq d(a, b)$ dir.✔



12. Bölüm Uzayları

Bir topolojik uzaydan yeni bir topolojik uzay elde etmenin bir yoluda bölüm uzaylarıdır. Bu bölümde bölüm uzayları tanıtılarak bazı sonuçlar ve örnekler verilecektir.

12.1. Tanım ve Örnekler

Teorem 12.1. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve Y boş olmayan bir küme olmak üzere $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{T}_f = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

kolleksiyonu Y kümesi üzerinde bir topolojidir.

İSPAT:

T-1). $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ ve $X = f^{-1}(Y)$ ve $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ olduğundan $X, \emptyset \in \mathcal{T}_f$ dir.

T-2). J bir indis kümesi olmak üzere $\{U_j \mid j \in J\}$, $\mathcal{T}_f$ nin bir alt kolleksiyonu olsun. Bu durumda her $j \in J$ için $f^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}$ bir topoloji olduğundan $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}$ dur. Diğer yandan,

$$\bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} U_j\right)$$

olduğundan $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}_f$ dir.

T-3). U_1 ve U_2 kümeleri $\mathcal{T}_f$ nin iki elemanı olsun. $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince

$$f^{-1}(U_1) \in \mathcal{T} \text{ ve } f^{-1}(U_2) \in \mathcal{T}$$

dur. Diğer yandan

$$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$$

ve $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \in \mathcal{T}$ olduğundan $f^{-1}(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_f$

dir.✓

TANIM 12.2. ▷ **Bölüm uzayı**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve Y boş olmayan bir küme olmak üzere $f: X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. Y kümesi üzerindeki

$$\mathcal{T}_f = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

topolojisine f fonksiyonuna **karşılık gelen bölüm topolojisi** ve $(Y, \mathcal{T}_f)$ uzayınada **bölüm uzayı** denir.

ÖRNEK 12.3. ▷
$X = \{0,1\}$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere $\mathbb{R}$ standart uzayının $(I, \mathcal{T}_I)$ alt uzayı verilsin. $f: [0,1] \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/2) \\ 1, & x \in [1/2,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}\}$$

ve

$$f^{-1}(\{0\}) = [0,1/2) \in \mathcal{T}_I, \qquad f^{-1}(\{1\}) = [1/2,1] \notin \mathcal{T}_I,$$
$$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}_I, \qquad f^{-1}(X) = [0,1] \in \mathcal{T}_I$$

olduğundan bölüm topolojisi $\mathcal{T}_f = \{\emptyset, X, \{0\}\}$ olur. Bu uzayın kapalı kümelerinin kolleksiyonu $\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ olur.✍

ÖRNEK 12.4. ▷
$X = \{0,1,2\}$ ve $f: \mathbb{R} \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$$

dir. Diğer yandan

$$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \emptyset, \qquad f^{-1}(X) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(\{0\}) = (0,\infty),$$
$$f^{-1}(\{1\}) = (-\infty,0), \qquad f^{-1}(\{0,1\}) = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$$

kümeleri $\mathbb{R}$ de açık ve

$$f^{-1}(\{2\}) = \{0\}, \quad f^{-1}(\{0,2\}) = (0,\infty) \cup \{0\} = [0,\infty), \quad f^{-1}(\{1,2\}) = (-\infty,0) \cup \{0\} = (-\infty,0]$$

kümeleri $\mathbb{R}$ de açık olmadığından bölüm topolojisi

$$\mathcal{T}_f = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

dir. Bu uzayın kapalı kümelerinin kolleksiyonu $\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{0,2\}, \{2\}\}$ olur.

ÖRNEK 12.5. ▷
Her $\alpha \in I$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ bir topolojik uzay olmak üzere $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\alpha$ izdüşüm fonksiyonununa karşılık gelen $\mathcal{T}_\pi$ bölüm topolojisini bulalım.

ÇÖZÜM: $U \subseteq X_\alpha$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{T}_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\pi_\alpha^{-1}(U)$ nın $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ çarpım uzayında açık olması gerektiğinden X_α üzerindeki π_α fonksiyonuna karşılık gelen bölüm topolojisi $\mathcal{T}_\alpha$ ve bölüm uzayıda $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayıdır.

12.2. Bölüm Fonksiyonu

TANIM 12.6. ▷ **Bölüm fonksiyonu (dönüşümü)**
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. $U \subseteq Y$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}_2$ olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ olması ise yani $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_f$ ise f ye bir **bölüm fonksiyonu (dönüşümü)** denir.

ÖRNEK 12.7. ▷
Bir bölüm fonksiyonunun kapalı olması gerekmediğini gösteren bir örnek verelim.

ÇÖZÜM: Örnek 12.5 gereğince her α için $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in I} X_\beta \to X_\alpha$ fonksiyonu bir bölüm fonksiyonu olmasına rağmen π_α kapalı fonksiyon değildir. (Örnek 10.2 e bakınız.)

Not
1. $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $U \in \mathcal{T}_f$ ise $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ olduğundan f bölüm fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan sürekli her fonksiyon bir bölüm fonksiyonu değildir.
2. Bir $U \subseteq Y$ nin $(Y, \mathcal{T}_f)$ bölüm uzayında kapalı olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(U)$ kümesinin $(X, \mathcal{T})$ uzayında kapalı olmasıdır.
3. Bir bölüm fonksiyonu açık ya da kapalı olmak zorunda değildir.

ÖRNEK 12.8. ▷
Bir bölüm fonksiyonunun açık ya da kapalı olması gerekmediğini gösteren bir örnek verelim.

ÇÖZÜM: Örnek 12.3 de tanımlanan f bölüm fonksiyonu göz önüne alalım. $(1/2, 1)$ aralığı $(I, \mathcal{T}_I)$ uzayında açık olmasına rağmen $f((1/2,1)) = \{1\}$ kümesi $(X, \mathcal{T}_f)$ uzayında açık değildir. Diğer yandan $[0, 1/3]$ aralığı $(I, \mathcal{T}_I)$ uzayında kapalı olmasına rağmen $f([0,1/3]) = \{0\}$ kümesi $(X, \mathcal{T}_f)$ uzayında kapalı değildir. Böylece $f : (I, \mathcal{T}_I) \to (X, \mathcal{T}_f)$ fonksiyonu bir bölüm fonksiyonu olmasına rağmen bu fonksiyon ne açık ne de kapalıdır.

Teorem 12.9. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve Y boş olmayan bir küme olmak üzere $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli kılan Y kümesi üzerindeki en ince topoloji $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisidir.

İSPAT: Not 12.2 gereğince f fonksiyonu süreklidir. $\mathcal{T}'$ topoljisi f fonksiyonunu sürekli kılan Y kümesi üzerinde herhangi bir topoloji olsun. $U \in \mathcal{T}'$ olsun. Bu durumda

$f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ dur. Böylece $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $U \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_f$ dir. ✔

ÖRNEK 12.10. ▶
$X = [0,1]$ ve $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ olsun. $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ şeklinde tanımlanan $f: X \to \mathbb{S}^1$ örten fonksiyonunun bir bölüm fonksiyonu olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $(\pi_1 \circ f)(t) = \cos 2\pi t$ ve $(\pi_2 \circ f)(t) = \sin 2\pi t$ fonksiyonları sürekli olduklarından f süreklidir. O halde $f: X \to \mathbb{S}^1$ örten ve süreklidir. Teorem 12.9 gereğince $\mathcal{T}_f$ topolojisi $\mathbb{S}^1$ üzerindeki f yi sürekli kılan en ince topolojidir. O halde f nin bir bölüm fonksiyonu olduğunu göstermek için $\mathbb{S}^1$ üzerindeki alt uzay topolojisinin $\mathcal{T}_f$ den daha ince olduğunu göstermeliyiz. Yani $V \in \mathcal{T}_f$ ise V nin $\mathbb{S}^1$ üzerindeki alt uzay topolojisine göre açık olduğunu göstermeliyiz.

$$|s-t| \leq \frac{1}{2}$$

özelliğine sahip her $s, t \in [0,1]$ için

$$d_2(f(s), f(t)) = 2|\sin \pi(t-s)|$$

dir. (Alıştırma 7 ye bakınız.)

$V \in \mathcal{T}_f$ ve $v \in V$ olsun.

$$\mathbb{S}^1 \cap B(v,\varepsilon) \subseteq V$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısının olduğunu gösterelim. $v = (1,0)$ ve $v \neq (1,0)$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

I. Durum: $v = (1,0)$ olsun. Bu durumda

$$v = (1,0) \in V \quad \text{ve} \quad f(0) = f(1) = (1,0) = v$$

olduğundan $0 \in f^{-1}(V)$ ve $1 \in f^{-1}(V)$ dir. $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $f^{-1}(V)$ kümesi $[0,1]$ alt uzayında açık olduğundan

$$[0,\delta) \subseteq f^{-1}(V) \quad \text{ve} \quad (1-\delta, 1] \subseteq f^{-1}(V)$$

olacak şekilde bir $0 < \delta < \frac{1}{2}$ sayısı vardır. $\varepsilon = 2\sin \pi\delta$ olsun. Bu durumda $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ise

$$d_2((1,0), (\cos\theta, \sin\theta)) = 2\sin\frac{1}{2}|\theta|$$

dır. Üstelik, $|\theta|$, 0 dan π ye artarken

$$d_2((1,0), (\cos\theta, \sin\theta))$$

değeri monoton olarak artar. Böylece $u \in \mathbb{S}^1 \cap B(v,\varepsilon)$ ise

$$|\theta| \leq 2\pi\delta$$

Not

Sürekli ve örten bir fonksiyon bir bölüm fonksiyonu olmayabilir. Örneğin, $\mathcal{T}$ kaba topoloji olmak üzere

$$\text{id}: (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$$

birim fonksiyonu sürekli ve örten olmasına rağmen bir bölüm fonksiyonu değildir. $\text{id}: (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonunun bir bölüm fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olmasıdır. (Alıştırma 1 e bakınız.)

olmak üzere

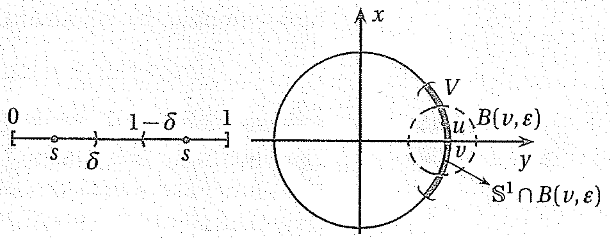
$$u = (\cos\theta, \sin\theta)$$

şeklindedir. Böylece $u \in \mathbb{S}^1 \cap B(v,\varepsilon)$ ise $0 \le s < \delta$ veya $1-\delta < s \le 1$ özelliğindeki bazı $s \in [0,1]$ için $u = f(s)$ dir. Bu durumda $s \in f^{-1}(V)$ ve böylece $u \in V$ elde edilir. O halde

$$\mathbb{S}^1 \cap B(v,\varepsilon) \subseteq V$$

dir. Bu durumda V kümesi $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{S}^1$ alt uzayında açıktır. (Şekil 12.1 ye bakınız.)

Şekil 12.1 $v = (1,0)$ hali



II. Durum: $v \neq (1,0)$ osun. Bu durumda $0 < t < 1$ özelliğindeki bazı t ler için $v = f(t)$ dir. Böylece $t \in f^{-1}(V)$ ve $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $f^{-1}(V)$ kümesi $[0,1]$ alt uzayında açık olduğundan

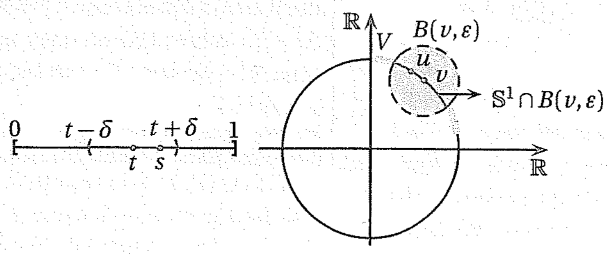
$$(t-\delta, t+\delta) \subseteq f^{-1}(V)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon = 2\sin\pi\delta$ olsun. Bu durumda $u \in \mathbb{S}^1 \cap B(v,\varepsilon)$ ise bazı $s \in (t-\delta, t+\delta)$ için $u = f(s)$ dir. Buradan $s \in f^{-1}(V)$ ve böylece $u \in V$ elde edilir. Bu durumda

$$\mathbb{S}^1 \cap B(v,\varepsilon) \subseteq V$$

olur. O halde V kümesi $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{S}^1$ alt uzayında açıktır. (Şekil 12.2 e bakınız.)

Şekil 12.2 $v \neq (1,0)$ hali



I. Durum ve II. Durum gereğince $V \in \mathcal{T}_f$ ise V kümesi $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{S}^1$ alt uzayında açıktır. O halde $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisi ile $\mathbb{S}^1$ üzerindeki alt uzay topolojisi aynıdır. Böylece f bir bölüm fonksiyonudur.✍

Teorem 12.11.

$(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(Y,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ örten, açık (kapalı) ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f bir bölüm fonksiyonudur.

İSPAT: Teorem 12.9 gereğince $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_f$ dir. Şimdi $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğunu gösterelim.

$U \in \mathcal{T}_f$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. f fonksiyonu açık ve örten olduğundan $U = f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_2$ dir. O halde $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_2$ olup f bir bölüm fonksiyonudur.✔

ÖRNEK 12.12. ▷ **Silindir**
$\mathbb{S}^1 \times [0,2\pi]$ silindirinin $\mathbb{R}^2$ nin $X = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ alt uzayının bir bölüm uzayı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f(x,y) = ((\cos x, \sin x), y)$ şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathbb{S}^1 \times [0,2\pi]$ örten fonksiyonunun bir bölüm fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$$(\pi_1 \circ f)(x,y) = \cos x, \quad (\pi_2 \circ f)(x,y) = \sin x, \quad (\pi_3 \circ f)(x,y) = y$$

fonksiyonları sürekli olduklarından f süreklidir. X uzayı kompakt ve $\mathbb{S}^1 \times [0,2\pi]$ bir Hausdorff uzayı olduğundan f kapalıdır. O halde Teorem 12.11 gereğince $\mathcal{T}_f$ topolojisi $\mathbb{S}^1 \times [0,2\pi]$ üzerindeki alt uzay topolojisi ile aynıdır. Diğer bir deyişle $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı olan $\mathbb{S}^1 \times [0,2\pi]$ silindiri $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı olan $X = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ uzayının bir bölüm uzayıdır.✍

ÖRNEK 12.13. ▷ **Tor**
$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ torunun $\mathbb{R}^2$ nin $X = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ alt uzayının bir bölüm uzayı olduğunu gösterelim.

Not
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere X üzerinde bir denklik bağıntısı $\sim$ ve bu bağıntıya göre denklik sınıflarının kümesi

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

olsun.

$$\rho(x) = [x]$$

şeklinde tanımlanan $\rho : X \to X/\sim$ fonksiyonuna (**doğal veya kanonik**) **izdüşüm fonksiyonu** denir. Açıkça, ρ fonksiyonu örtendir. Böylece $X\backslash\sim$ kümesi üzerinde bölüm topolojisini $\mathcal{T}_\rho$ yi oluşturabiliriz.

ÇÖZÜM: $f(x,y) = ((\cos x, \sin x), (\cos y, \sin y))$ şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ örten fonksiyonunun bir bölüm fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$$(\pi_1 \circ f)(x,y) = \cos x, \quad (\pi_2 \circ f)(x,y) = \sin x, \quad (\pi_3 \circ f)(x,y) = \cos y, \quad (\pi_4 \circ f)(x,y) = \sin y$$

fonksiyonları sürekli olduklarından f süreklidir. X uzayı kompakt ve $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bir Hausdorff uzayı olduğundan f kapalıdır. O halde Teorem 12.11 gereğince $\mathcal{T}_f$ topolojisi $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ üzerindeki alt uzay topolojisi ile aynıdır. Diğer bir deyişle $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı olan $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ toru $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı olan $X = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ uzayının bir bölüm uzayıdır.✍

Teorem 12.14. ▷
$(X,\mathcal{T}_1)$, $(Z,\mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olmak üzere Y üzerindeki bölüm topolojisi $\mathcal{T}_f$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{T}_1) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & (Y,\mathcal{T}_f) \arrow[d, "g"] \\ & (Z,\mathcal{T}_2) \end{tikzcd}$$

a) $g : (Y,\mathcal{T}_f) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonu süreklidir.
b) $g \circ f : (X,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ fonksiyonu süreklidir.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 12.9 gereğince f sürekli olduğundan $g \circ f$ fonksiyonu süreklidir.

b)⇒ a). $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_1$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_f$ olur. O halde g fonksiyonu süreklidir.✔

ÖRNEK 12.15. ▷ **Çember**
$X = [a, b]$ üzerinde ~ bağıntısını

" $a \sim b$ ve $x, y \in (a, b)$ için $x \sim y$ olması içingerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır"

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

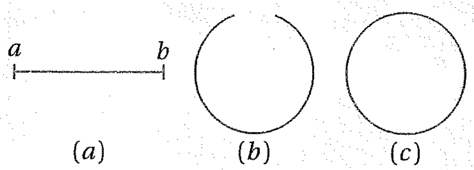
$$[a] = [b] \quad \text{ve} \quad x \neq a, b \text{ için} [x] = \{x\}$$

dir. Böylece

$$X/ \sim = \{\{a, b\}, \{x\} | x \in (a, b)\}$$

dir. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{R}^2$ nin alt uzayı olan $\mathbb{S}^1$ çemberi ile homeomorfiktir. (Örnek 12.10 ve Şekil 12.3 e bakınız.)✍

Şekil 12.3 $\mathbb{S}^1$ çemberi

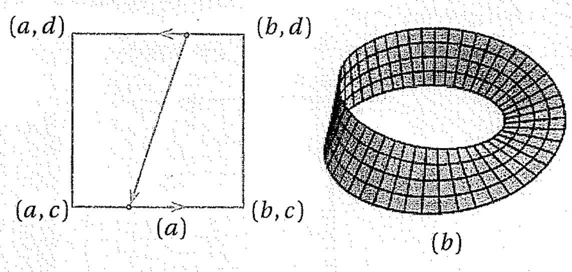


ÖRNEK 12.16. ▷ **Möbius Bandı**
$X = [a, b] \times [c, d]$ olsun ve ~ bağıntısını

"$(x, c) \sim (b - x, d)$ ve $(x, y) \neq (x, c)$, $(x, y) \neq (b - x, d)$ için $(x, y) \sim (x', y')$ olması için gerek ve yeter şart $(x, y) = (x', y')$ olmasıdır"

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı olan Möbius bandı ile homeomorfiktir. (Şekil 12.4 e bakınız.)✍

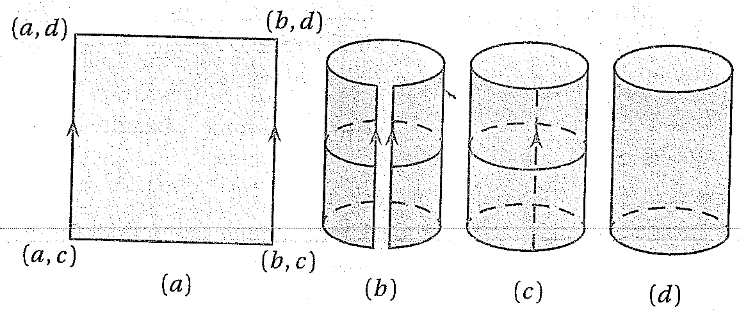
Şekil 12.4 Möbius bandı



ÖRNEK 12.17. ▷ **Silindir**
$X = [a, b] \times [c, d]$ olsun ve ~ bağıntısını

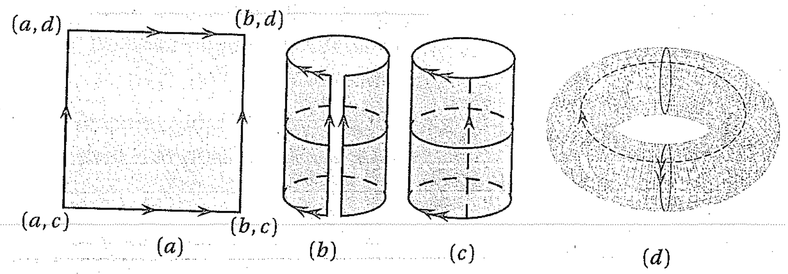
"$y \in [c, d]$ için $(a, y) \sim (b, y)$ ve $(x, y) \neq (a, y)$, $(x, y) \neq (b, y)$ için $(x, y) \sim (x', y')$ olması için gerek ve yeter şart $(x, y) = (x', y')$ olmasıdır" şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı olan $\mathbb{S}^1 \times [c,d]$ silindiri ile homeomorfiktir. (Şekil 12.5 a bakınız.)✍

Şekil 12.5 Silindir



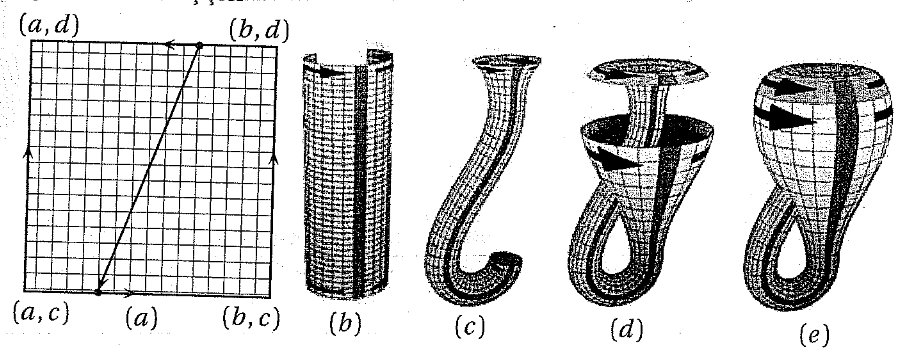
Örnek 12.18. ▷ **Tor**
$X = [a,b] \times [c,d]$ olsun ve $\sim$ bağıntısını "$(a,y) \sim (b,y)$ ve $(x,c) \sim (x,d)$" şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı olan $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$ toru ile homeomorfiktir. (Şekil 12.6 a bakınız.)✍

Şekil 12.6 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ toru



Örnek 12.19. ▷ **Klein Şişesi**
$X = [a,b] \times [c,d]$ olsun ve $\sim$ bağıntısını "$(a,y) \sim (b,y)$ ve $(x,c) = (b-x,d)$" şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı olan Klein şişesi ile homeomorfiktir. (Şekil 12.7 ye bakınız.)✍

Şekil 12.7 Klein şişesi



12.3. Alıştırmalar

1. $X = \{1,2,3,4,5\}$ ve $Y = \{a,b,c,d\}$ ve $f : X \to Y$ fonksiyonu

$$f(1) = f(2) = a,\ f(3) = b,\ f(4) = c,\ f(5) = d$$

şeklinde tanımlansın.

a) X üzerindeki topoloji ayrık topoloji ise $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisini bulunuz.

b) X üzerindeki topoloji kaba topoloji ise $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisini bulunuz.

2. $(X, \mathscr{P}(X))$ bir ayrık uzay ve $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisini bulunuz.

3. $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ birim fonksiyonunun bir bölüm fonksiyonu olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olması gerektiğini gösteriniz.

4. $p : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $p \circ s = \mathrm{id}_Y$ olacak şekilde sürekli bir $s : (Y, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ fonksiyonu varsa p nin bir bölüm fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

5. İki bölüm fonksiyonunun birleşiminin yine bir bölüm fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

6. R bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı üzerinde denklik bağıntısı olsun. Bu durumda R, $X \times X$ çarpım uzayında kapalı ve p izdüşüm fonksiyonu açıksa X/R bölüm uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösteriniz.

7. Örnek 12.10 de tanımlanan fonksiyon f olmak üzere

$$|s - t| \le \frac{1}{2}$$

özelliğindeki her $s, t \in [0,1]$ için

$$d_2(f(s), f(t)) = 2|\sin \pi(t - s)|$$

olduğunu gösteriniz.

8. $(X, \mathcal{T})$ kompakt bir topolojik uzay ve $\sim$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayının kompakt olduğunu gösteriniz.

12.4. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

a) $U \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(U) \subseteq X$ ve X üzerindeki topoloji ayrık topoloji olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi X ayrık uzayında açıktır. Böylece $U \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}_f = \mathscr{P}(Y)$ yani $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisi ayrık topolojidir.

b) X üzerindeki topoloji kaba topoloji olduğundan Y nin $f^{-1}(U) = \emptyset$ veya $f^{-1}(U) = X$ özelliğine sahip alt kümeleri $\mathcal{T}_f$ ye aittir. Bu durumda $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ve $f^{-1}(Y) = X$ olduğundan $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_f$ dir. Y nin $U \neq \emptyset$ ve $U \neq Y$ özelliğindeki U alt kümeleri için $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ ve $f^{-1}(U) \neq X$ olduğundan $f^{-1}(U) \notin \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}_f = \{\emptyset, Y\}$ dir. Yani $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisi kaba topolojidir.✔

ÇÖZÜM 2

$U \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(U) \subseteq X$ ve X üzerindeki topoloji ayrık topoloji olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi X ayrık uzayında açıktır. Böylece $U \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}_f = \mathscr{P}(Y)$ yani $\mathcal{T}_f$ bölüm topolojisi ayrık topolojidir.✔

ÇÖZÜM 3

$\Rightarrow$). id : $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ birim fonksiyonunun bir bölüm fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{id}}$ dir. id : $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_1)$ fonksiyonu sürekli ve X üzerinde id fonksiyonunu sürekli kılan en ince topoloji $\mathcal{T}_{\text{id}}$ olduğundan $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_{\text{id}}$ dir. $U \in \mathcal{T}_{\text{id}}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_{\text{id}}$ nin tanımı gereğince $U = \text{id}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. O halde $\mathcal{T}_{\text{id}} \subseteq \mathcal{T}_1$ dir. Böylece $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{id}} = \mathcal{T}_1$ dir.

$\Leftarrow$). Tersine $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olsun. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{id}}$ olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}_2$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{T}_1$ dir. Böylece $\text{id}^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}_1$ dir. O halde $U \in \mathcal{T}_{\text{id}}$ dir. Yani $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_{\text{id}}$ dir. $U \in \mathcal{T}_{\text{id}}$ olsun. Bu durumda $U = \text{id}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dir. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğundan $U \in \mathcal{T}_2$ olur. Böylece $\mathcal{T}_{\text{id}} \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. O halde $\mathcal{T}_{\text{id}} = \mathcal{T}_2$ yani id : $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ birim fonksiyonu bir bölüm fonksiyonudur.✔

ÇÖZÜM 4

Önce p nin örten olduğunu gösterelim. $y \in Y$ olsun. Bu durumda $s(y) \in X$ dir. Diğer yandan $p \circ s = \text{id}_Y$ olduğundan

$$(p \circ s)(y) = p(s(y)) = \text{id}_Y(y) = y$$

dir. O halde $z = s(y) \in X$ ve $p(z) = y$ dir. Böylece p örtendir.

$U \in \mathcal{T}_p$ olsun. Bu durumda

$$p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$$

dir. $(p \circ s)^{-1} = \text{id}_Y$ olduğundan $s^{-1}p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_2$ dir. Bu durumda $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_2$ dir. Böylece $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_2$ olur. Yani p fonksiyonu bir bölüm fonksiyonudur.✔

ÇÖZÜM 5

$f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ ve $g : (Y, \mathcal{T}_f) \to (Z, \mathcal{T}_g)$ iki bölüm fonksiyonu olsun. Bu durumda f ve g birer bölüm fonksiyonu olduğundan örtendirler. Böylece $g \circ f$ örtendir.

Şimdi $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_{g\circ f}$ olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}_{g\circ f}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_{g\circ f}$ nin tanımı gereğince

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_1$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_f$ dir. O halde $\mathcal{T}_g$ nin tanımı gereğince $U \in \mathcal{T}_g$ dir. Böylece

$$\mathcal{T}_{g\circ f} \subseteq \mathcal{T}_g \tag{12.1}$$

dir. $U \in \mathcal{T}_g$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_g$ nin tanımı gereğince $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_f$ dir. Böylece $\mathcal{T}_f$ nin tanımı gereğince

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$$

dir. O halde $\mathcal{T}_{g\circ f}$ nin tanımı gereğince $U \in \mathcal{T}_{g\circ f}$ dir. O halde

$$\mathcal{T}_g \subseteq \mathcal{T}_{g\circ f} \tag{12.2}$$

dir.

Böylece 12.1 ve 12.2 gereğince $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_{g\circ f}$ dir.✔

ÇÖZÜM 6

$p(x), p(y) \in \mathcal{T}_p$ ve $p(x) \neq p(y)$ olsun. Bu durumda $(x, y) \notin R$ dir. Böylece $(x, y) \in (X \times X) \setminus R$ dir. Diğer yandan R kapalı olduğundan $(X \times X) \setminus R$ kümesi açıktır. Böylece

$$(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus R$$

olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. Bu durumda $x \in U, y \in V$ ve

$$U \cap V = \emptyset$$

dur. p açık bir fonksiyon olduğundan $p(U), p(V) \in \mathcal{T}_p$ dir.

Üstelik, $p(x) \in p(U)$, $p(y) \in p(V)$ ve

$$p(U) \cap p(V) = \emptyset$$

dur. O halde X/R bölüm uzayı bir Hausdorff uzayıdır.✔

ÇÖZÜM 7

$$\cos 2\pi t - \cos 2\pi s = -2\sin\pi(t+s)\sin\pi(t-s)$$

ve

$$\sin 2\pi t - \sin 2\pi s = 2\cos\pi(t+s)\sin\pi(t-s)$$

olduğundan

$$(\cos 2\pi t - \cos 2\pi s)^2 = 4\sin^2\pi(t+s)\sin^2\pi(t-s)$$

ve

$$(\sin 2\pi t - \sin 2\pi s)^2 = 4\cos^2\pi(t+s)\sin^2\pi(t-s)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_2(f(s), f(t)) &= \sqrt{(\cos 2\pi t - \cos 2\pi s)^2 + (\sin 2\pi t - \sin 2\pi s)^2} \\ &= \sqrt{(\cos 2\pi t - \cos 2\pi s)^2 + (\sin 2\pi t - \sin 2\pi s)^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2\pi(t+s)\sin^2\pi(t-s) + 4\cos^2\pi(t+s)\sin^2\pi(t-s)} \\ &= \sqrt{4\sin^2\pi(t-s)\left(\sin^2\pi(t+s) + \cos^2\pi(t+s)\right)} \\ &= \sqrt{4\sin^2\pi(t-s)} = 2|\sin\pi(t-s)| \end{aligned}$$

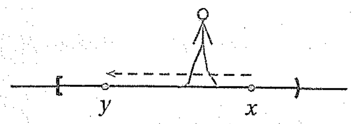
olur.✔

ÇÖZÜM 8

$\rho : X \to X/\sim$ (doğal veya kanonik) izdüşüm fonksiyonu sürekli ve örtendir Böylece $(X, \mathcal{T})$ uzayı kompakt olduğundan $\rho(X) = X/\sim$ bölüm uzayı kompakttır.✔

13. Bağlantılılık

ℝ de bir aralığın "tek parça" olması aralığın karekteristik özelliklerinden bir tanesidir. ℝ de bir aralığa ait bir x noktasından aralığa ait diğer bir y noktasına gitmek isteyen bir kişi aralığın tümleyenine ait hiç bir noktadan geçmeden (aralık dışına çıkmadan) y noktasına ulaşabilir. (Şekil 13.1 e bakınız.) Bunun nedeni ℝ de bir aralığın tek parça olmasıdır. Bu bölümde bir uzayın "tek parça" olmasının topolojiksel olarak ne anlama geldiğini inceleyeceğiz.



Şekil 13.1

13.1. Bağlantılı Uzaylar

Tanım 13.1. ▷ Açık ayrışım ve Kapalı ayrışım
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun.

$$X = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset$$

özelliğindeki X in U ve V küme çiftine $(X,\mathcal{T})$ uzayının bir ayrışımı denir ve $U|V$ ile gösterilir. Eğer U, V kümelerinin her ikiside açık ise $U|V$ ye açık ayrışım, U ve V kümelerinin her ikiside kapalı ise $U|V$ ayrışımına kapalı ayrışım denir.

Teorem 13.2. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $U|V$ de $(X,\mathcal{T})$ uzayın bir ayrışımı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $U|V$ ayrışımı açıktır. b) $U|V$ ayrışımı kapalıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). $U|V$ açık bir ayrışım olduğundan $X = U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dur. Bu durumda $U = X \setminus V$ ve $V = X \setminus U$ olur. Diğer yandan U ve V kümeleri açık olduğundan $U = X \setminus V$ ve $V = X \setminus U$ kümeleri kapalıdır. Bu durumda $U|V$ kapalı bir ayrışımdır.
b)⇒ a). $U|V$ kapalı bir ayrışım olduğundan $X = U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Bu durumda

$U = X\setminus V$ ve $V = X\setminus U$ olur. Diğer yandan U ve V kümeleri kapalı olduğundan $U = X\setminus V$ ve $V = X\setminus U$ kümeleri açıktır. Bu durumda $U|V$ açık bir ayrışımdır. ✔

TANIM 13.3. ▷
$(X,\mathcal{T})$ uzayının açık hiç bir ayrışımı yoksa $(X,\mathcal{T})$ uzayına bağlantılı uzay denir.

SONUÇ 13.4. ▷ $(X,\mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $(X,\mathcal{T})$ uzayının hiç bir kapalı ayrışımının olmamasıdır.

İSPAT: Teorem 13.2 gereğince ispat aşikardır. ✔

ÖRNEK 13.5. ▷
$X = \{a,b,c,d\}$ ve $\mathcal{T}_{4n} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ olmak üzere $X = U \cup V$ olsun. Bu durumda $U = X$ veya $V = X$ dir. Böylece $U \cap V = U$ veya $U \cap V = V$ dir. Bu durumda $U \cap V \neq \emptyset$ olur. Yani $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayının hiç bir açık ayrışımı yoktur. O halde $(X,\mathcal{T}_{4n})$ uzayı bağlantılıdır.

ÖRNEK 13.6. ▷
$X = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $U = \{a\}$, $V = \{b,c,d,e,f\}$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$ ve $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ dur. Diğeryandan $X = U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dur. O halde $U|V$, X in açık bir ayrışımıdır. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılı değildir.

Teorem 13.7 ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır.
b) $(X,\mathcal{T})$ uzayında $\emptyset$ ve X den farklı hem açık hem kapalı hiç bir alt küme yoktur.

İSPAT:

a)⇒ b). $(X,\mathcal{T})$ uzayında $\emptyset$ ve X kümelerinden farklı hem açık hem kapalı olan bir U alt kümesinin olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$U \cup (X\setminus U) = X,\ U \cap (X\setminus U) = \emptyset \text{ ve } U \neq \emptyset,\ X\setminus U \neq \emptyset$$

dur. Diğer yandan $X\setminus U$ kümesi açıktır. Böylece $U|(X\setminus U)$, $(X,\mathcal{T})$ nun açık bir ayrışımıdır. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılı olamaz. Bu ise (a) ile çelişir. O halde $(X,\mathcal{T})$ uzayının $\emptyset$ ve X den farklı hem açık hem de kapalı olan hiç bir alt kümesi yoktur.

b)⇒ a). $(X,\mathcal{T})$ uzayınının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda $(X,\mathcal{T})$ uzayının açık bir $U|V$ ayrışımı vardır. V kümesi açık olduğundan $X\setminus V$ kümesi kapalıdır. Diğer yandan $X = U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $U = X\setminus V$ ve $V = X\setminus U$ dur. $V \neq \emptyset$ olduğundan $U \neq X$ dir. Böylece U kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayının $\emptyset$ ve X den farklı hem açık hem kapalı olan bir alt kümesidir. Bu ise (b) ile çelişir. O halde $(X,\mathcal{T}$

uzayı bağlantılıdır.✔

Tanım 13.1, Tanım 13.3, Sonuç 13.4 ve Teorem 13.7 gereğince aşağıdaki notu yazabiliriz.

NOT 13.8.

a) Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.

i) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır.

ii) U_1 ve U_2, $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ özelliğinde iki açık küme ve $X = U_1 \cup U_2$ ise $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ dur.

iii) $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ olacak şekilde hiç bir hem açık hem kapalı U kümesi yoktur.

iv) U_1 ve U_2, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ özelliğinde iki açık küme ve $X = U_1 \cup U_2$ ise $U_1 = \emptyset$ veya $U_2 = \emptyset$ dur.

v) U_1 ve U_2, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ özelliğinde iki açık küme ve $X = U_1 \cup U_2$ ise $U_1 = X$ veya $U_2 = X$ dir.

vi) F_1 ve F_2, $F_1 \neq \emptyset$, $F_2 \neq \emptyset$ özelliğinde iki kapalı küme ve $X = F_1 \cup F_2$ ise $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ dur.

vii) F_1 ve F_2, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğinde iki kapalı küme ve $X = F_1 \cup F_2$ ise $F_1 = \emptyset$ veya $F_2 = \emptyset$ dur.

viii) F_1 ve F_2, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğinde iki kapalı küme ve $X = F_1 \cup F_2$ ise $F_1 = X$ veya $F_2 = X$ dir.

b) Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.

i) $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılı değildir.

ii) $X = U_1 \cup U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olacak şekilde $U_1 \neq \emptyset$ ve $U_2 \neq \emptyset$ özelliğinde iki açık küme vardır.

iii) $X = U_1 \cup U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olacak şekilde $U_1 \neq X$ ve $U_2 \neq X$ özelliğinde iki açık küme vardır.

iv) $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ olacak şekilde en az bir hem açık hem kapalı U kümesi vardır.

v) $X = F_1 \cup F_2$ ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde $F_1 \neq \emptyset$ ve $F_2 \neq \emptyset$ özelliğinde iki kapalı küme vardır.

vi) $X = F_1 \cup F_2$ ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde $F_1 \neq X$ ve $F_2 \neq X$ özelliğinde iki kapalı küme vardır.

ÖRNEK 13.9. ▷
$X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayın kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$$

dır. Bu durumda $\{b,c,d,e\} \neq \emptyset$, $\{b,c,d,e\} \neq X$ ve $\{b,c,d,e\}$ kümesi hem açık hem de kapalı olduğundan Teorem 13.7 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılı değildir.

ÖRNEK 13.10. ▷
$(X,\mathcal{T})$ kaba uzayının bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: X in hem açık hem kapalı alt kümeleri sadece X ve $\emptyset$ kümeleri olduğundan $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır.✍

ÖRNEK 13.11. ▷
X birden fazla elemanı varsa $(X,\mathscr{P}(X))$ uzayının bağlantılı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi $(X,\mathscr{P}(X))$ uzayında hem açık hem kapalı ve $\{x\} \neq \emptyset$, $\{x\} \neq X$ olduğundan bu uzay bağlantılı değildir.✍

ÖRNEK 13.12. ▷
a) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ uzayının bağlantılı olmadığını gösterelim.
b) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının bağlantılı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

a) $a \in \mathbb{R}$ olsun.
$$[a,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, a+n)$$
olduğundan $[a,\infty)$ aralığı bu uzayda açıktır. Diğer yandan
$$(-\infty, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a-n, a)$$
olduğundan $(-\infty,a)$ kümeside bu uzayda açıktır. O halde $\mathbb{R}\setminus(-\infty,a) = [a,\infty)$ kümesi kapalıdır. Bu durumda $[a,\infty)$ kümesi bu uzayda $\mathbb{R}$ ve $\emptyset$ kümelerinden farklı olan hem açık hem kapalı bir kümedir. Teorem 13.7 gereğince bu uzay bağlantılı değildir.

b) Benzer şekilde $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayının bağlantılı olmadığı gösterilir.✍

ÖRNEK 13.13. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM:

a) X sonlu bir küme olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X)$ olacağından X in birden fazla elemanı varsa $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı Örnek 13.11 gereğince bağlantılı değildir.

b) X sonsuz elemanlı bir küme olsun. $(X,\mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olmadığını kabul edelim. Teorem 13.7 gereğince $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ olacak şekilde $(X,\mathcal{T})$ uzayının hem açık hem kapalı bir U alt kümesi vardır. Bu durumda $X\setminus U \neq X$ ve $U \neq X$ dir. U kapalı olduğundan U sonlu ve U kümesi açık olduğundan $X\setminus U$ kümesi sonludur. Diğer yandan $X = U \cup (X\setminus U)$ olduğundan X sonludur. Bu ise X kümesinin sonsuz olması ile çelişir. O halde $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayı bağlantılıdır.

(a) ve (b) gereğince X birden fazla elemanı olan bir küme olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ sonlu tümleyenler uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart X kümesinin sonsuz olmasıdır.✍

ÖRNEK 13.14. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM:

a) X sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ olacağından X in birden fazla elemanı varsa $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı Örnek 13.11 gereğince bağlantılı değildir.

b) X sayılamaz bir küme olsun. $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olmadığını kabul edelim. Teorem 13.7 gereğince $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ olacak şekilde $(X, \mathcal{T})$ uzayının hem açık hem kapalı bir U alt kümesi vardır. Bu durumda $X \setminus U \neq X$ ve $U \neq X$ dir. U kapalı olduğundan U sayılabilir ve U kümesi açık olduğundan $X \setminus U$ kümesi sayılabilirdir. Diğer yandan $X = U \bigcup (X \setminus U)$ olduğundan X sayılabilirdir. Bu ise X kümesinin sayılamaz olması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayı bağlantılıdır.

(a) ve (b) gereğince X birden fazla elemanı olan bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart X kümesinin sayılabilir olmamasıdır.✍

ÖRNEK 13.15. ▷
X bir küme ve $a \in X$ olmak üzere $(X, \mathcal{T}_a)$ ve $(X, \mathcal{T}(a))$ uzaylarının bağlantılı olduklarını gösterelim.

ÇÖZÜM: $A \neq X, A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda ya $a \in A$ ya da $a \notin A$ dır. Böylece A kümesi $(X, \mathcal{T}_a)$ ve $(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzaylarında ya açık ya da kapalıdır. O halde bu uzayların her ikisininde hem açık hem kapalı alt kümeleri sadece X ve $\emptyset$ kümeleridir. O halde bu uzaylar bağlantılıdır.✍

13.2. Bağlantılı Alt Kümeler

TANIM 13.16. ▷ **Bağlantılı alt küme**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayı bağlantılı ise A ya $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı alt kümesi veya bağlantılı alt uzayı denir.☜

ÖRNEK 13.17. ▷
$\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ standart uzayında bağlantılı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$U = (-\infty, r) \bigcap \mathbb{Q} \quad \text{ve} \quad V = (r, \infty) \bigcap \mathbb{Q}$$

olsun. Bu durumda

$$U \bigcup V = \mathbb{Q} \quad \text{ve} \quad U \bigcap V = \emptyset$$

dur. $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ olduğundan $U|V$, $\mathbb{Q}$ nun açık bir ayrışımıdır. O halde $\mathbb{Q}$ alt uzayı bağlantılı değildir. Dolayısıyla, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ uzayının bağlantılı bir alt kümesi değildir.✍

Teorem 13.18. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) A kümesi bağlantılıdır.

b) $A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ özelliğindeki $(X, \mathcal{T})$ uzayının boş olmayan her U ve V açık (kapalı) kümeleri için $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ dur.

İSPAT:

a)⇒ b). $(X, \mathcal{T})$ uzayının boş olmayan U ve V açık (kapalı) kümeleri

$$A \subseteq U \cup V,\ A \cap U \neq \emptyset,\ A \cap V \neq \emptyset$$

özelliği sağlasın. $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince $A \cap U \in \mathcal{T}_A$ ve $A \cap V \in \mathcal{T}_A$ dır. Üstelik,

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

dır. A kümesi bağlantılı olduğundan

$$(A \cap U) \cap (A \cap V) \neq \emptyset$$

olur. Buradan $A \cap (U \cap V) \neq \emptyset$ elde edilir.

b)⇒ a). A kümesinin bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $U_1 \neq \emptyset, V_1 \neq \emptyset$ ve $A = U_1 \cup V_1$, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ olacak şekilde $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_A$ kümeleri vardır. $\mathcal{T}_A$ nın tanımı gereğince $U_1 = U \cap A$ ve $V_1 = V \cap A$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. O halde

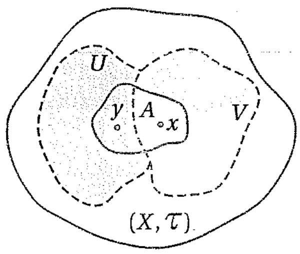
$$A = U_1 \cup V_1 = (U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cup V) \cap A$$

olduğundan $A \subseteq U \cup V$ olur. Diğer yandan $U_1 \neq \emptyset$ ve $V_1 \neq \emptyset$ olduğundan $U \cap A \neq \emptyset$ ve $V \cap A \neq \emptyset$ dur. $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ olduğundan

$$(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$$

olur. Buradan $(U \cap V) \cap A = \emptyset$ elde edilir. Bu ise (b) ile çelişir. O halde A kümesi bağlantılıdır.✓

SONUÇ 13.19. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve A, X in bağlantılı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ ve $U, V \in \mathcal{T}$ olmak üzere $A \subseteq U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ ise ya $A \subseteq U$ ya da $A \subseteq V$ dir.



Şekil 13.2

İSPAT: $A \not\subseteq U$ ve $A \not\subseteq V$ olduğunu kabul edelim. $A \not\subseteq U$ olduğundan $x \in A$ ve $x \notin U$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Böylece, $A \subseteq U \cup V$ olduğundan $x \in V$ dir. O halde $x \in V \cap A$ dır. Yani, $V \cap A \neq \emptyset$ dur. Benzer şekilde, $A \not\subseteq V$ olduğundan $U \cap A \neq \emptyset$ olur. (Şekil 13.2 e bakınız.) Diğer yandan, $U \cap V = \emptyset$ olduğundan

$$A \cap U \cap V = \emptyset$$

dur. Bu ise Teorem 13.18 ile çelişir. O halde ya $A \subseteq U$ ya da $A \subseteq V$ dir.✓

SONUÇ 13.20. ▷ $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere U kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayının hem açık hem kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda A bağlantılı ise ya $A \subseteq U$ ya da $A \subseteq X\setminus U$ dur.

İSPAT: $U = \emptyset$ veya $U = X$ ise açıkça ya $A \subseteq X\setminus U$ ya da $A \subseteq U$ dur. $U \neq \emptyset$ ve $U \neq X$ olsun. Bu durumda $U \neq \emptyset$, $X\setminus U \neq \emptyset$ ve $U, X\setminus U \in \mathcal{T}$ olur. Diğer yandan

$$A \subseteq U \cup (X\setminus U) \text{ ve } U \cap (X\setminus U) = \emptyset$$

dur. Sonuç 13.19 gereğince ya $A \subseteq U$ ya da $A \subseteq X\setminus U$ olur.✓

Teorem 13.16, Teorem 13.11, Sonuç 13.19 ve Sonuç 13.20 gereğince aşağıdaki notu yazabiliriz.

NOT 13.21. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı $(X,\mathcal{T})$ uzayının bir alt uzayı olsun.

a) $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.

- **i)** $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı bağlantılıdır. (A, X in bağlantılı alt kümesidir.)
- **ii)** $U \neq \emptyset$ ve $U \neq A$ olacak şekilde $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında hiç bir hem açık hem kapalı U kümesi yoktur.
- **iii)** U_1 ve U_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq U_1 \cup U_2$ özelliğine sahip iki açık küme ise $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$ dur.
- **iv)** U_1 ve U_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ ve $A \subseteq U_1 \cup U_2$ özelliğine sahip iki açık küme ise $U_1 \cap A = \emptyset$ veya $U_2 \cap A = \emptyset$ dur.
- **v)** U_1 ve U_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ ve $A \subseteq U_1 \cup U_2$ özelliğine sahip iki açık küme ise $A \subseteq U_1$ veya $A \subseteq U_2$ dir.
- **vi)** F_1 ve F_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında $F_1 \cap A \neq \emptyset$, $F_2 \cap A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq F_1 \cup F_2$ özelliğine sahip iki kapalı küme ise $F_1 \cap F_2 \cap A \neq \emptyset$ dur.
- **vii)** F_1 ve F_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$ ve $A \subseteq F_1 \cup F_2$ özelliğine sahip iki kapalı küme ise $F_1 \cap A = \emptyset$ veya $F_2 \cap A = \emptyset$ dur.
- **viii)** F_1 ve F_2 kümeleri $(X,\mathcal{T})$ uzayında $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$ ve $A \subseteq F_1 \cup F_2$ özelliğine sahip iki kapalı küme ise $A \subseteq U_1$ veya $A \subseteq U_2$ dir.

b) $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.

- **i)** $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayı bağlantılı değildir. (A, X in bağlantılı alt kümesi değildir.)
- **ii)** $U \neq \emptyset$ ve $U \neq A$ olacak şekilde $(A,\mathcal{T}_A)$ uzayında en az bir hem açık hem kapalı U kümesi vardır.
- **iii)** $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ ve $A \subseteq U_1 \cup U_2$ olacak şekilde $(X,\mathcal{T})$ uzayında U_1 ve U_2 açık kümeleri vardır.
- **iv)** $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$, $A \subseteq U_1 \cup U_2$ ve $A \nsubseteq U_1$, $A \nsubseteq U_2$ olacak şekilde $(X,\mathcal{T})$ uzayında U_1 ve U_2 açık kümeleri vardır.
- **v)** $F_1 \cap A \neq \emptyset$, $F_2 \cap A \neq \emptyset$, $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$ ve $A \subseteq F_1 \cup F_2$ olacak şekilde $(X,\mathcal{T})$ uzayında F_1 ve F_2 kapalı kümeleri vardır.
- **vi)** $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$, $A \subseteq F_1 \cup F_2$ ve $A \nsubseteq F_1$, $A \nsubseteq F_2$ olacak şekilde $(X,\mathcal{T})$ uzayında F_1 ve F_2 kapalı kümeleri vardır.✎

ÖRNEK 13.22. ▷
Bağlantılı kümelerin birleşiminin bağlantılı olmayabileceğini gösteren bir örnek verelim.

ÇÖZÜM: $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayı verilsin. Bu durumda her $x, y \in X$ için $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri bağlantılıdır. Diğeryandan $\{x, y\}$ kümesi bağlantılı değildir. Böylece bağlantılı kümelerin birleşimi bağlantılı olmak zorunda değildir.✍

Teorem 13.23. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\{A_i | i \in I\}$ kolleksiyonu $i \neq j$ için $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ özelliğine sahip X in bağlantılı alt kümelerin herhangi bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda, $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi bağlantılıdır.

İSPAT: $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesinin bağlantılı olmadığını varsayalım. Teorem 13.7 gereğince $\bigcup_{i\in I} A$ alt uzayının hem açık hem kapalı olan bir U alt kümesi $U \neq \emptyset$ ve $U \neq \bigcup_{i\in I} A_i$ olaca şekilde vardır. Sonuç 13.20 gereğince her bir $i \in I$ için $A_i \subseteq U$ veya $A_i \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus U$ dı $i \neq j$ için $A_i \subseteq U$ ve $A_j \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus U$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

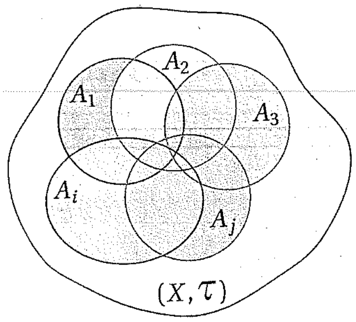
$$A_i \cap A_j \subseteq U \cap \left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus U\right) = \emptyset$$

olduğundan $A_i \cap A_j = \emptyset$ dur. Bu ise $i \neq j$ için $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ olması ile çelişir. Böyle her $i \in I$ için $A_i \subseteq U$ veya her $i \in I$ için $A_i \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus U$ olur. Bu durumda, $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq$ veya $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus U$ olur.

a) $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq U$ ise $U \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğundan $U = \bigcup_{i\in I} A_i$ olur.

b) $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus U$ ise $U \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ olduğundan $U = \emptyset$ olur.

(a) ve (b) gereğince $U = \bigcup_{i\in I} A_i$ veya $U = \emptyset$ dur. Bu ise $U \neq \emptyset$ ve $U \neq \bigcup_{i\in I} A_i$ olması çelişir. O halde, $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi bağlantılıdır. (Şekil 13.3 ye bakınız.)✔

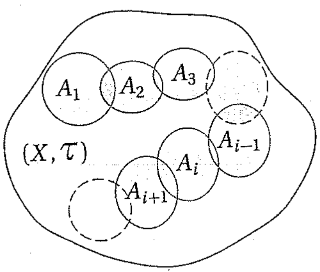


Şekil 13.3

SONUÇ 13.24. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\{A_i | i \in \mathbb{N}\}$ kolleksiyonu $i \in \mathbb{N}$ iç $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ özelliğine sahip $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı alt kümelerin herhangi kolleksiyonu olsun. Bu durumda, $\bigcup_{i\in \mathbb{N}} A_i$ kümesi bağlantılıdır.

İSPAT: Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olsun. Tümevarım yöntemini kullanarak her n için B_n kümesinin bağlantılı olduğunu gösterelim. $B_1 = A_1$ olduğundan B_1 kü bağlantılıdır. B_n kümesinin bağlantılı olduğunu kabul edelim. $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$

$$B_n \cap A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}$$



Şekil 13.4

$$= ((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_{n+1}) \cup (A_n \cap A_{n+1}) \neq \emptyset$$

olduğundan Teorem 13.23 gereğince B_{n+1} bağlantılıdır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için B_n kümesi bağlantılıdır. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için ya $B_m \subseteq B_n$ ya da $B_n \subseteq B_m$ olacağından her $m, n \in \mathbb{N}$ için $B_m \cap B_n \neq \emptyset$ dur. Teorem 13.23 gereğince $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ kümesi bağlantılıdır. Bu durumda $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ olduğundan $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ kümesi bağlantılıdır. (Şekil 13.4 ye bakınız.)✔

SONUÇ 13.25. ▷ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\{A_i | i \in I\}$ kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı alt kümelerinin bir kolleksiyonu olsun. $B \subseteq X$ kümesi bağlantılı ve her $i \in I$ için $B \cap A_i \neq \emptyset$ ise

$$B \cup \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right)$$

kümesi bağlantılıdır.

İSPAT: Her $i \in I$ için $B_i = B \cup A_i$ olsun. Her $i \in I$ için $B \cap A_i \neq \emptyset$ olduğundan B_i bağlantılıdır. $i \neq j$ için $B \subseteq B_i$ ve $B \subseteq B_j$ olduğundan $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ dur. Teorem 13.23 gereğince

$$\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (B \cup A_i) = B \cup \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right)$$

kümesi bağlantılıdır. (Şekil ?? ye bakınız.)✔

Teorem 13.26. ▷

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ kümesi bağlantılı olsun. Bu durumda $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ ise B kümesi bağlantılıdır.

İSPAT: $\overline{A_B}$, A kümesinin B uzayındaki kapanışı olmak üzere Teorem 5.69 gereğince

$$\overline{A} \cap B = \overline{A_B}$$

dir.

B kümesinin bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda $U \neq \emptyset$ ve $U \neq B$ olac[...] şekilde B alt uzayında hem açık hem kapalı bir U kümesi vardır. Sonuç 13.20 gereğin[...] $A \subseteq U$ veya $A \subseteq B \setminus U$ dur.

a) $A \subseteq U$ olsun. Bu durumda $\overline{A_B} \subseteq \overline{U_B}$ ve U kümesi B de kapalı olduğundan $\overline{U_B} =$ [...] ve böylece $\overline{A_B} \subseteq U$ olur. $\overline{A_B} = B$ olduğundan $B \subseteq U$ olur. Bu durumda $U \subseteq$ [...] olduğundan $U = B$ olur. Bu ise $U \neq B$ olması ile çelişir.

b) $A \subseteq B \setminus U$ olsun. Bu durumda U, B uzayında açık olduğundan $B \setminus U$ kümesi B u[...]yında kapalıdır. Böylece

$$\overline{A_B} \subseteq \overline{(B \setminus U)_B} = B \setminus U$$

olur. $\overline{A_B} = B$ olduğundan $B \subseteq B \setminus U$ olur. Buradan $U = \emptyset$ elde edilir. Bu ise U [...] olması ile çelişir.

O halde B kümesi bağlantılıdır.✔

SONUÇ 13.27. ▶ $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ kümesi bağlantılı olsun. Bu durumda $\overline{A}$ kümesi bağlantılıdır.

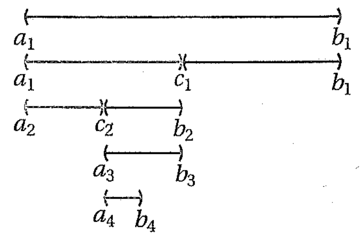
İSPAT: $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{A}$ olduğundan Teorem 13.26 gereğince $\overline{A}$ kümesi bağlantılıdır.✓

13.3. $\mathbb{R}$ nin Bağlantılı Alt Kümeleri

Teorem 13.28. ▶

$\mathbb{R}$ standart uzayında her I aralığı bağlantılıdır.

İSPAT: I aralığının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda I alt uzayında $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ve $I = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B kapalı (açık) kümeleri vardır. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olduğundan $a_1 \in A$ ve $b_1 \in B$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in I$ elemanları vardır. Üstelik, $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $a_1 \neq b_1$ dir. $a_1 < b_1$ olduğunu kabul edelim. ($a_1 > b_1$ olması halinde ispat benzer şekilde yapılır.) (a_1, b_1) aralığının orta noktasına c_1 diyelim ve (a_1, b_1) aralığını c_1 noktasından ikiye bölelim. (Şekil 13.5 e bakınız.) $a_1, b_1 \in I$ ve I bir aralık olduğundan $c_1 \in I$ dır. Bu durumda $A \cap B = \emptyset$ olduğundan c_1 noktası A ve B kümelerinden sadece bir tanesine aittir.



Şekil 13.5

a) $c_1 \in A$ ise (a_1, c_1) ve (c_1, b_1) aralıklarından sadece (c_1, b_1) aralığının sol uç noktası A kümesine ve sağ uç noktası B kümesine aittir.

b) $c_1 \in B$ ise (a_1, c_1) ve (c_1, b_1) aralıklarından sadece (a_1, c_1) aralığının sol uç noktası A kümesine ve sağ uç noktası B kümesine aittir.

(a) ve (b) gereğince (a_1, c_1) ve (c_1, b_1) aralıklarından sadece bir tanesinin sol uç noktası A kümesine ve sağ uç noktası B kümesine aittir. (a_1, c_1) ve (c_1, b_1) aralıklarından sol uç noktası A kümesine ve sağ uç noktası B kümesine ait olanına (a_2, b_2) diyelim. (a_2, b_2) aralığını orta noktasından ikiye bölelim. Benzer şekilde (a_2, b_2) aralığının ikiye bölünmesiyle elde edilen aralıklardan sadece bir tanesinin sol uç noktası A kümesine ve sağ uç noktası B kümesine aittir. Bu aralığa (a_3, b_3) diyelim. Bu şekilde devam edersek her $n \in \mathbb{N}$ için sol uç noktası A kümesine ve sağ uç noktasıda B kümesine ait olan ve

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) \subseteq (a_n, b_n)$$

özelliğine sahip aralıkların bir dizisini elde ederiz. Böylece terimleri A kümesinin elemanlarından oluşan bir (a_n) ve terimleri B kümesinin elemanlarından oluşan bir (b_n) dizisi elde ederiz. Açıkça (a_n) dizisi monoton artan ve b_1 ile üstten sınırlı, (b_n) dizisi de monoton azalan ve a_1 ile alttan sınırlıdır. O halde, bu diziler yakınsaktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

olduğundan (a_n) ve (b_n) dizileri aynı bir x noktasına yakınsar. A ve B kümeleri I alt uzayında kapalı olduğundan Teorem 9.9 gereğince $x \in A$ ve $x \in B$ dir. Bu ise $A \cap B = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde, I aralığı bağlantılıdır.✓

Teorem 13.29. ▶

$\mathbb{R}$ standart uzayının bağlantılı her I alt kümesi bir aralıktır.

İSPAT: I nın bir aralık olmadığını varsayalım. Bu durumda,

$$a, c \in I, \quad b \notin I \quad \text{ve} \quad a < b < c$$

olacak şekilde a, b, c reel sayıları vardır.

$$A = I \cap (-\infty, b) \quad \text{ve} \quad B = I \cap (b, \infty)$$

olsun. Bu durumda

$$I = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset \quad \text{ve} \quad A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

Şekil 13.6

olur. Üstelik, A ve B kümeleri I alt uzayında açıktır. Yani $A|B$, I alt uzayının açık bir ayrışımıdır. Dolayısıyla, I kümesi bağlantılı olamaz. Bu ise I nın bağlantılı olması ile çelişir. O halde, I kümesi bir aralıktır. (Şekil 13.6 ya bakınız.)✔

Teorem 13.28 ve Teorem 13.29 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 13.30. ▷ $\mathbb{R}$ standart uzayının bir I alt kümesinin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart I nın bir aralık olmasıdır.

13.4. Bağlantılılık ve Sürekli Fonksiyonlar

Teorem 13.31. ▷

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $Y = \{0, 1\}$ olmak üzere $(Y, \mathscr{P}(Y))$ ayrık uzayı verilsin. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır.

b) Sürekli ve örten hiç bir $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathscr{P}(Y))$ fonksiyonu yoktur.

İSPAT:

a)⇒ b). Sürekli ve örten bir $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathscr{P}(Y))$ fonksiyonu olduğunu kabul edelim. $\{0\}, \{1\}$ kümeleri $(Y, \mathscr{P}(Y))$ uzayında açık ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(\{0\})$ ve $f^{-1}(\{1\})$ kümeleri $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır. Üstelik, f örten olduğundan $f^{-1}(\{0\})$ ve $f^{-1}(\{1\})$ kümeleri boş kümeden farklıdır. Diğer yandan

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) \text{ ve } \{0\} \cap \{1\} = \emptyset$$

olduğundan

$$f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$$

dur. Bu durumda $f^{-1}(\{0\}) | f^{-1}(\{1\})$, X in açık bir ayrışımıdır. Bu ise $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olması ile çelişir. O halde sürekli ve örten hiç bir $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathscr{P}(Y))$ fonksiyonu yoktur.

b)⇒ a). $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda

$$X = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde boş kümeden farklı U ve V açık kümeleri vardır.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \in V \end{cases}$$

şeklinde bir $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ fonksiyonu tanımlayalım. U ve V kümeleri boş kümeden farklı olduğundan f örtendir. $(Y, \mathcal{P}(Y))$ uzayının açık kümeleri

$$\emptyset, \{0\}, \{1\} \text{ ve } \{0,1\}$$

dir.

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{0\}) = V, \quad f^{-1}(\{1\}) = U \text{ ve } f^{-1}(\{0,1\}) = X$$

kümeleri $(X, \mathcal{T})$ uzayında açık olduğundan f fonksiyonu süreklidir. O halde f sürekli ve örten bir fonksiyondur. Bu ise (b) ile çelişir. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı olmak zorundadır.✔

Teorem 13.32. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılı ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda bağlantılıdır.

İSPAT: $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının boş ve Y den farklı olan hem açık hem de kapalı bir U alt kümesi vardır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayının hem açık hem de kapalı olan bir alt kümesidir. Üstelik, f fonksiyonu örten ve $U \neq \emptyset$, $U \neq Y$ olduğundan $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ ve $f^{-1}(U) \neq X$ dir. Bu ise $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olması ile çelişir. Böylece, $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bağlantılı olmak zorundadır.✔

Not: $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından bir tanesi bağlantılı diğeri bağlantılı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

Her homeomorfizm ve tersi sürekli ve örten olduğundan Teorem 13.32 gereğince aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 13.33. ▶ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylaı homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayının bağlantılı olmasıdır.

Teorem 13.34. ▷ **Aradeğer Teoremi** $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı bir topolojik uzay, $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a, b \in X$ olmak üzere $f(a) \leq c \leq f(b)$ (veya $f(b) \leq c \leq f(a)$) ise $f(x_0) = c$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ vardır.

İSPAT: Teorem 13.32 gereğince $f(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin bağlantılı bir alt kümesidir. Sonuç 13.30 gereğince $\mathbb{R}$ nin bağlantılı alt kümeleri sadece aralıklar olduğundan $f(X)$ bir aralıktır. Diugeryandan $f(a), f(b) \in f(X)$ olacağından $[f(a), f(b)] \subseteq f(X)$ olur. Böylece $c \in [f(a), f(b)]$ olduğundan $c \in f(X)$ olur. Bu durumda $f(x_0) = c$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ vardır.✔

Not

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$f(a)f(b) \leq 0$$

ise $f(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığında en az bir kökü vardır.

SONUÇ 13.35. ▷ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(a) \leq c \leq f(b) \quad (\text{veya } f(b) \leq c \leq f(a))$$

özelliğindeki her $c \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = c$$

olacak şekilde en az bir $x \in [a, b]$ vardır.

ÖRNEK 13.36. ▷
$\cos(x) = x$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında bir kökünün olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f(x) = \cos(x) - x$ fonksiyonu sürekli ve

$$f(0)f(1) = (\cos(0) - 0)(\cos(1) - 1) = \cos(1) - 1 < 0$$

olduğundan

$$f(x) = \cos(x) - x = 0 \quad \text{yani} \quad \cos(x) = x$$

denkleminin $[0, 1]$ aralığında bir kökü vardır.

SONUÇ 13.37. ▷ $f : [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin en az bir sabit noktası vardır.

İSPAT: $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $g(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlayalım. g fonksiyonu açıkça süreklidir. Üstelik, $f(a) \geq a$ olduğundan

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

ve $f(b) \leq b$ olduğundan

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

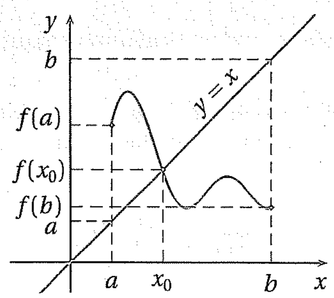
dır. Böylece $g(b) \leq 0 \leq g(a)$ (yani $0 \in g([a, b])$) olur. Sonuç 13.35 gereğince $g(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [a, b]$ vardır. Bu durumda

$$g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$$

olduğundan

$$f(x_0) = x_0$$

olur. Yani $x_0 \in [a, b]$ noktası f fonksiyonunun sabit bir noktasıdır. (Şekil 13.7 e bakınız.)✔



Şekil 13.7

Teorem 13.38. ▷
$a, b \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f([a, b])$ kümesi kapalı ve sınırlı bir aralıktır.

İSPAT: Sonuç 13.30 gereğince $[a, b]$ aralığı bağlantılı ve f sürekli olduğundan Teorem 13.34 gereğince $f([a, b])$ kümesi $\mathbb{R}$ de bir aralıktır. Diğer yandan, $[a, b]$ aralığı Teorem 11.31 gereğince kompakt ve f sürekli olduğundan Teorem 11.34 gereğince $f([a, b])$

kompakttır. Böylece, Teorem 11.29 gereğince $f([a,b])$ kapalı ve sınırlıdır. Dolayısıyla, $f([a,b])$ kapalı ve sınırlı bir aralıktır.✓

13.5. Çarpım Uzaylarının Bağlantılılığı

Teorem 13.39

$(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

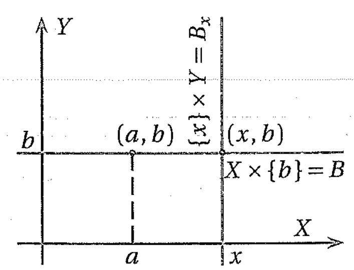
a) $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bağlantılıdır.

b) Her $\alpha \in J$ için $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bağlantılıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). Her $\alpha \in J$ için π_α fonksiyonu sürekli ve örten olduğundan Teorem 13.32 gereğince $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uzayı bağlantılıdır.

b)⇒ a). İlk önce iki bağlantılı uzayın çarpım uzayının bağlantılı olduğunu gösterelim. $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları bağlantılı ve (a,b) noktası $X \times Y$ çarpım uzayının herhangi bir noktası olsun. Bu durumda $X \times Y$ çarpım uzayının $B = X \times \{b\}$ alt uzayı $(X, \mathcal{T}_1)$ bağlantılı uzayı ile homeomorfiktir. O halde, $X \times Y$ çarpım uzayının $B = X \times \{b\}$ alt uzayı Sonuç 13.33 gereğince bağlantılıdır. Benzer şekilde her $x \in X$ için $X \times Y$ çarpım uzayının $B_x = \{x\} \times Y$ alt uzayı da $(Y, \mathcal{T}_1)$ bağlantılı uzayı ile homeomorfik olduğundan bağlantılıdır. (Şekil 13.8 ye bakınız.) Diğer yandan, her $x \in X$ için $B \cap B_x = \{(x,b)\}$ dir. Yani, her $x \in X$ için $B \cap B_x \neq \emptyset$ dur. Sonuç 13.25 gereğince $B \cup \left(\bigcup_{x\in X} B_x\right) = X \times Y$ uzayı bağlantılıdır.



Şekil 13.8

Tümevarım yöntemiyle sonlu sayıdaki bağlantılı uzayların çarpım uzayının bağlantılı olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi keyfi sayıdaki bağlantılı uzayların çarpım uzayının bağlantılı olduğunu gösterelim. Sabit bir $b = (b_\alpha)_{\alpha\in J} \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ noktası seçelim. J nin verilen sonlu bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ alt kümesi için $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının

$$X(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in J} \in X \mid \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ için } x_\alpha = b_\alpha\}$$

alt uzayını oluşturalım. Bu durumda

$$h((x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots, x_{\alpha_n})) = \begin{cases} y_\alpha = x_\alpha, & \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \\ y_\alpha = b_\alpha, & \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $h : X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \to X(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. İspatın ilk kısmı gereğince $X(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ alt uzayı bağlantılıdır. Bu durumda $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının bu şekildeki alt uzaylarının birleşimi olan

$$Y = \bigcup_{\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subseteq J} X(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

uzayı bağlantılıdır.

Şimdi $\overline{Y} = X$ olduğunu gösterelim. $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ ve $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \in U$ olmak üzere $U \in \mathscr{B}_ç$ ($\mathscr{B}_ç$ kolleksiyonu $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayının tabanı) olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $U_\alpha = X_\alpha$ olmak üzere $U = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ şeklinde yazılabilir.

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, & \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \\ b_\alpha, & \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \in X$ dir. Üstelik, $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \in X(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ olduğundan $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \in Y$ dir. Diğer yandan $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $y_\alpha = x_\alpha \in U_\alpha$ ve $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ için $y_\alpha = b_\alpha \in X_\alpha = U_\alpha$ olduğundan $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \in U$ dur. Böylece $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \in U \cap Y$ yani $U \cap Y \neq \emptyset$ olur. O halde $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \in \overline{Y}$ olur. Bu durumda $\overline{Y} = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dir. Sonuç 13.27 gereğince $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ çarpım uzayı bağlantılıdır.✔

Teorem 13.40. ▷
$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay ve $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılı ise f nin grafiği

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

kümesi $X \times Y$ uzayının bağlantılı bir alt kümesidir.

İSPAT: $H : X \to X \times Y$ fonksiyonu

$$H(x) = (x, f(x))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\pi_1 \circ H = \mathrm{id}_X, \quad \pi_2 \circ H = f$$

dir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & X \times Y \arrow[d, "\pi_1"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "f"'] & X \times Y \arrow[d, "\pi_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

id_X ve f fonksiyonları sürekli olduğundan Teorem 10.25 gereğince H fonksiyonu süreklidir. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılı olduğundan Teorem 13.32 gereğince

$$H(X) = \{H(x) | x \in X\} = \{(x, f(x)) | x \in X\} = G_f$$

kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında bağlantılıdır.✔

ÖRNEK 13.41. ▷
$\mathbb{R}^2$ nin $A = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ alt kümesinin bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\mathbb{R}$ bağlantılı olduğundan f nin grafiği $\mathbb{R}^2$ de bağlantılıdır. Bu durumda $G_f = A$ olduğundan A bağlantılıdır.

13.6. Bağlantılı Birleşenler

Teorem 13.42. ▷
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve

$$\mathscr{A}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U \text{ ve } U \text{ bağlantılı}\}$$

olmak üzere $C_x = \bigcup_{U \in \mathscr{A}_x} U$ olsun. Bu durumda

a) C_x kümesi x noktasını içeren bağlantılı bir kümedir.
b) C_x kümesi x noktasını içeren $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı maksimal alt kümesidir.
c) C_x kümesi kapalıdır.

İSPAT:

a) Her $U \in \mathscr{A}_x$ için $x \in U$ olduğundan $x \in C_x$ ve $x \in \bigcap_{U \in \mathscr{A}_x} U$ olduğundan $\bigcap_{U \in \mathscr{A}_x} U \neq \emptyset$ olur. Teorem 13.20 gereğince C_x kümesi bağlantılıdır.
b) $x \in U$ ve U bağlantılı ise $U \in \mathscr{A}_x$ olur. Buradan $U \subseteq C_x$ elde edilir. O halde, C_x kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayının x noktasını içeren bağlantılı maksimal alt kümesidir.
c) C_x kümesi bağlantılı olduğundan $\overline{C_x}$ kümeside Sonuç 13.27 gereğince bağlantılı ve $x \in \overline{C_x}$ dır. (b) gereğince $\overline{C_x} \subseteq C_x$ ve böylece $\overline{C_x} = C_x$ olur. Bu durumda C_x kümesi kapalıdır.✔

TANIM 13.43. ▷ **Bağlantılı birleşen**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathscr{A}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U \text{ ve } U \text{ bağlantılı}\}$ olsun. Bu durumda $C_x = \bigcup_{U \in \mathscr{A}_x} U$ kümesine $x \in X$ noktasının bağlantılı birleşeni veya $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir bağlantılı birleşeni denir.

ÖRNEK 13.44. ▷
$(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı ise her $x \in X$ noktasının bağlantılı birleşeninin X olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $x \in X$ olsun. X bağlantılı olduğundan $X \in \mathscr{A}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U \text{ ve } U \text{ bağlantılı}\}$ olur. Bu durumda

$$C_x = \bigcup_{U \in \mathscr{A}_x} U = X$$

olur.

ÖRNEK 13.45. ▷
$X = \{a, b, c\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı alt kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM: $\{a\}$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayında hem açık hem kapalı olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı değildir.

$$\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

dir.

a)

$$\mathcal{T}_{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

ve

$$\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}, \ \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \text{ ve } \{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_{\{a,b\}}$$

olduğundan $\{a,b\}$ alt uzayı bağlantılı değildir.

b)

$$\mathcal{T}_{\{a,c\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$$

ve

$$\{a,c\} = \{a\} \cup \{c\}, \ \{a\} \cap \{c\} = \emptyset \text{ ve } \{a\}, \{c\} \in \mathcal{T}_{\{a,c\}}$$

olduğundan $\{a,c\}$ alt uzayı bağlantılı değildir.

c)

$$\mathcal{T}_{\{b,c\}} = \{\emptyset, \{c\}, \{b,c\}\}$$

ve $(\{b,c\}, \mathcal{T}_{\{b,c\}})$ uzayının kapalı kümelerin kolleksiyonu

$$\mathscr{K}_{\{b,c\}} = \{\emptyset, \{b\}, \{b,c\}\}$$

dir. $\{b,c\}$ uzayının $\{b,c\}$ ve $\emptyset$ kümelerinden farklı hem açık hem kapalı alt kümesi olmadığından $\{b,c\}$ alt uzayı bağlantılıdır.

d) Diğer yandan tek elemanlı kümeler bağlantılı olduğundan $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ kümeleri bağlantılıdır.

(a)-(d) gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı alt kümeleri

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}$$

olur. Bu durumda

a noktasının bağlantılı birleşeni $C_a = \{a\}$ olur.

b noktasının bağlantılı birleşeni $C_b = \{b\} \cup \{b,c\} = \{b,c\}$ olur.

c noktasının bağlantılı birleşeni $C_c = \{c\} \cup \{b,c\} = \{b,c\}$ olur.

Bu durumda X uzayının bağlantılı birleşenleri $\{a\}$ ve $\{b,c\}$ dir.

$$X = \{a\} \cup \{b,c\} = C_a \cup C_b \quad \text{ve} \quad C_a \cap C_b = \{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$$

olduğuna dikkat ediniz.✍

ÖRNEK 13.46. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının $X = (0,1) \cup (2,3)$ alt uzayı verilsin. X in bağlantılı birleşenlerini bulalım.

ÇÖZÜM: $(0,1)$ kümesi X uzayında hem açık hem kapalı olduğundan X uzayı bağlantılı değildir. X in sadece $(a,b) \subseteq (0,1)$ ve $(c,d) \subseteq (2,3)$ şeklindeki alt kümeleri bağlantılıdır. Böylece

a) $x \in X$ için $x \in (0,1)$ ise x noktasının bağlantılı birleşeni $C_x = (0,1)$ dir.
b) $y \in (2,3)$ ise y noktasının bağlantılı birleşeni $C_y = (2,3)$ dür.

Bu durumda X uzayının bağlantılı birleşenleri $(0,1)$ ve $(2,3)$ dür.

$$X = C_x \cup C_y \quad \text{ve} \quad (0,1) \cap (2,3) = \emptyset$$

olduğuna dikkat ediniz.✍

Teorem 13.47. ▷

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $C_x = C_y$ veya $C_x \cap C_y = \emptyset$ dur.

İSPAT: $C_x, C_y \subseteq X$ olduğundan ya $C_x \cap C_y = \emptyset$ ya da $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ dur. $C_x \cap C_y = \emptyset$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda C_x ve C_y kümeleri Teorem 13.42 gereğince bağlantılı olduklarından Teorem 13.20 gereğince $C_x \cup C_y$ kümesi bağlantılıdır. Üstelik $x, y \in C_x \cup C_y$ olduğundan Teorem 13.42 gereğince

$$C_x \cup C_y \subseteq C_y \quad \text{ve} \quad C_x \cup C_y \subseteq C_x$$

olur. Bu durumda

$$C_x \cup C_y = C_y \quad \text{ve} \quad C_x \cup C_y = C_x$$

olur. Buradan $C_x = C_y$ elde edilir. O halde $C_x \cap C_y = \emptyset$ veya $C_x = C_y$ olmak zorundadır.✔

Not

Teorem 13.42 ve 13.47 gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayının bütün bağlantılı birleşenlerinin kolleksiyonu $(X, \mathcal{T})$ uzayının kapalı ve bağlantılı kümelerden oluşan bir ayrışımıdır. Bu ayrışımın elemanları $(X, \mathcal{T})$ uzayının maksimal bağlantılı alt kümeleri (bağlantılı birleşenleri) dir.

Teorem 13.48. ▷

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfik iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ ile $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları aynı sayıda bağlantılı birleşene sahiptir.

İSPAT: $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ bir homeomorfizm olsun.

$$\mathcal{H} : \{C_x \mid x \in X\} \to \{C_y \mid y \in Y\}$$

fonksiyonunu $\mathcal{H}(C_x) = C_{f(x)}$ şeklinde tanımlayalım.

a) $\mathcal{H}$ ın bire-bir olduğunu gösterelim. $C_x \neq C_y$ olsun. Bu durumda $z \in C_x$ ve $z \notin C_y$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $f(z) \in C_{f(y)}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $z \in f^{-1}(C_{f(y)})$ olur. f^{-1} fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 13.32 gereğince $f^{-1}(C_{f(y)})$ kümesi bağlantılıdır ve $f(y) \in C_{f(y)}$ olduğundan $y \in f^{-1}(C_{f(y)})$ dir. Teorem 13.42 gereğince $f^{-1}(C_{f(y)}) \subseteq C_y$ ve dolayısıyla $z \in C_y$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$$f(z) \notin C_{f(y)} \tag{13.1}$$

dir. Diğer yandan $x, z \in C_x$ olduğundan $f(x), f(z) \in f(C_x)$ ve Teorem 13.32 gereğince $f(C_x)$ kümesi bağlantılı olduğundan Teorem 13.42 gereğince $f(C_x) \subseteq C_{f(x)}$ dir. Böylece

$$f(z) \in C_{f(x)} \tag{13.2}$$

olur. O halde (13.1) ve (13.2) gereğince $C_{f(x)} \neq C_{f(y)}$ dir. Diğer bir deyişle, $H(C_x) \neq$

$H(C_y)$ dir. O halde, H fonksiyonu bire-bir dir.

b) Şimdi, $\mathscr{H}$ ın örten olduğunu gösterelim. $C_{y_0} \in \{C_y | y \in Y\}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu örten olduğundan $f(x_0) = y_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır. Yani $f(x_0) \in C_{f(x_0)} \cap C_{y_0}$ olur. Teorem 13.32 gereğince

$$C_{f(x_0)} = C_{y_0}$$

olacağından $H(C_{x_0}) = C_{f(x_0)} = C_{y_0}$ olur. O halde, H fonksiyonu örtendir.

(a) ve (b) gereğince $\mathscr{H}$ fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan $(X, \mathcal{T}_1)$ ile $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları aynı sayıda bağlantılı birleşene sahiptir.✔

Not

Teorem 13.48 gereğince X ve Y uzaylarının bağlantılı birleşen sayıları eşit değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

ÖRNEK 13.49. ▷
$\mathbb{R}$ standart uzayının $[1,2]$ ve $[0,1] \cup [2,3]$ alt uzaylarının homeomorfik olmadıklarını gösterelim.

ÇÖZÜM: $[1,2]$ alt uzayının sadece bir tane ve $[0,1] \cup [2,3]$ alt uzayının iki tane bağlantılı birleşeni olduğundan $[1,2]$ ve $[0,1] \cup [2,3]$ uzayları homeomorfik değildir.✍

ÖRNEK 13.50. ▷
$\mathbb{R}^2$ standart uzayının T ve C alt uzaylarının homeomorfik olmadıklarını gösterelim.

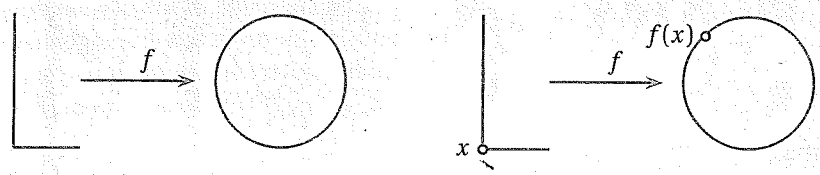
ÇÖZÜM: Bu uzayların homeomorfik olduklarını kabul edelim. Bu durumda bir $f: T \to C$ homeomorfizmi vardır. T nin köşe noktasına x diyelim. (Şekil 13.9 e bakınız.) Bu durumda $f: T\setminus\{x\} \to C\setminus\{f(x)\}$ fonksiyonu Sonuç 6.58 gereğince bir homeomorfizmdir. Diğer yandan, $T\setminus\{x\}$ uzayının üç tane bağlantılı birleşeni ve $C\setminus\{f(x)\}$ uzayının bir ya da iki tane bağlantılı birleşeni olduğundan Teorem 13.48 gereğince $T\setminus\{x\}$ ve $C\setminus\{f(x)\}$ uzayları homeomorfik olamazlar. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\mathbb{R}^2$ nin T ve C alt uzayları homeomorfik değildir.✍

Şekil 13.9

ÖRNEK 13.51. ▷
$\mathbb{R}^2$ standart uzayının L ve O alt uzaylarının homeomorfik olmadıklarını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu uzayların homeomorfik olduklarını kabul edelim. Bu durumda bir $f: L \to O$ homeomorfizmi vardır. L nin köşe noktasına x diyelim. (Şekil 13.10 e bakınız.) Bu durumda $f: L\setminus\{x\} \to O\setminus\{f(x)\}$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Diğer yandan, $L\setminus\{x\}$ uzayının iki tane bağlantılı birleşeni ve $O\setminus\{f(x)\}$ uzayının bir tane bağlantılı birleşeni olduğundan Teorem 13.48 gereğince $L\setminus\{x\}$ ve $O\setminus\{f(x)\}$ uzayları homeomorfik olamazlar. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\mathbb{R}^2$ nin L ve O alt uzayları homeomorfik değildir.✍

Şekil 13.10



TANIM 13.52. ▷ **Tamamen bağlantısız uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $(X,\mathcal{T})$ uzayının tek elemanlı kümelerden başka bağlı birleşeni yoksa $(X,\mathcal{T})$ uzayına tamamen bağlantısız uzay denir.

ÖRNEK 13.53. ▷
$(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Herhangi bir $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının birden fazla eleman içeren herhangi bir alt kümesi Örnek 13.11 gereğince bağlantılı olmadığından bu uzayın bağlantılı birleşenleri sadece X in tek elemanlı alt kümelerdir. Bu durumda $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı tamamen bağlantısızdır.

Not

Bağlantılı birleşenleri sadece tek elemanlı kümeler olan ayrık uzaydan farklı uzaylarda vardır. Teorem 13.32 bağlantılı birleşenler kapalı olmasına rağmen bunlar açık olmayabilir.

ÖRNEK 13.54. ▷
Bağlantılı birleşenleri sadece tek elemanlı kümeler olan ayrık uzaydan farklı bir uzay örneği verelim.

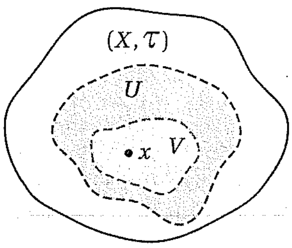
ÇÖZÜM: $\mathbb{R}$ standart uzayının $\mathbb{Q}$ alt uzayının birden fazla eleman içeren herhangi bir alt kümesi bağlantılı olmadığından bu uzayın bağlantılı birleşenleri sadece $\mathbb{Q}$ nun tek elemanlı alt kümelerdir. Böylece $\mathbb{Q}$ tamamen bağlantısızdır. Diğer yandan tek elemanlı kümeler bu uzayda açık olmadığından bu uzay ayrık bir uzay değildir. Benzer şekilde $\mathbb{R}$ standart uzayının $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alt uzayı tamamen bağlantısız olmasına rağmen $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ uzayı ayrık bir uzay değildir.

13.7. Yerel Bağlantılı Uzaylar

TANIM 13.55. ▷ **Yerel bağlantılı uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun.

a) $x\in U$ özelliğindeki her $U\in\mathcal{T}$ kümesi için $x\in V$ ve $V\subseteq U$ olacak şekilde bağlantılı bir $V\in\mathcal{T}$ kümesi varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına x noktasında yerel bağlantılıdır denir. (Şekil 13.11 e bakınız.) Diğer bir deyişle x noktasının bağlantılı kümelerden oluşan yerel bir tabanı varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına x noktasında yerel bağlantılıdır denir.

b) $(X,\mathcal{T})$ uzayı her $x\in X$ noktasında yerel bağlantılı ise $(X,\mathcal{T})$ uzayına yerel bağlantılı uzay denir. Diğer bir deyişle $\mathcal{T}$ nun bağlantılı kümelerden oluşan bir tabanı varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına yerel bağlantılı uzay denir.



Şekil 13.11

ÖRNEK 13.56. ▷
Herhangi bir $(X,\mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının yerel bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi bağlantılı ve

$$\mathscr{B} = \{\{x\} | x \in X\}$$

kolleksiyonu $\mathscr{P}(X)$ in bir tabanı olduğundan $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayı yerel bağlantılıdır.

ÖRNEK 13.57. ▷
$\mathbb{R}^2$ nin

$$B = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \middle| 0 < x \le 1 \right\} \quad \text{ve} \quad A = \left\{ (0, y) \middle| \frac{1}{2} \le y \le 1 \right\}$$

alt kümeleri verilsin. (Şekil 13.12 ye bakınız.)

a) $A \cup B$ uzayının bağlantılı olduğunu gösterelim.
b) $A \cup B$ uzayının yerel bağlantılı olmadığını gösterelim.

Not
Örnek 13.11 gereğince X kümesinin birden fazla elemanı varsa $(X, \mathscr{P}(X))$ ayrık uzayı bağlantılı değildir. O halde yerel bağlantılı bir uzay bağlantılı olmayabilir. Bağlantılı bir uzayda yerel bağlantılı olmayabilir.

ÇÖZÜM:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu sürekli ve $(0, 1]$ aralığı bağlantılı olduğundan Teorem 13.40 gereğince f nin grafiği olan B kümesi bağlantılıdır. Diğer yandan

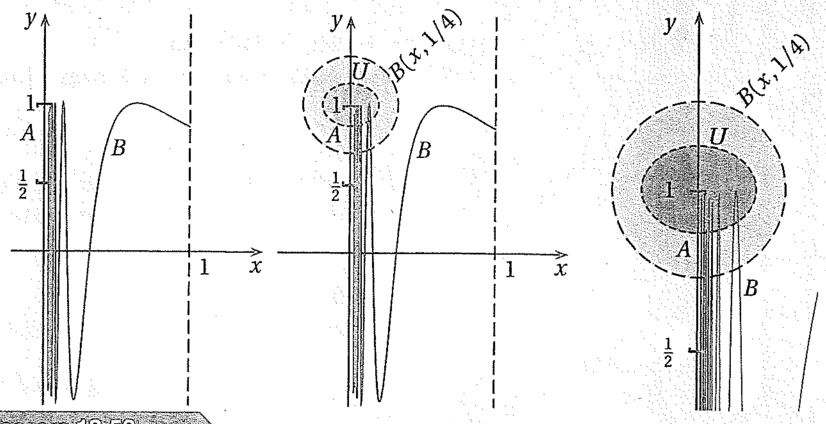
$$B \subseteq A \cup B \subseteq \overline{B}$$

olduğundan Teorem 13.26 gereğince $A \cup B$ uzayı bağlantılıdır.
b) $x = (0, 1)$ olsun.

$$x = (0, 1) \in U \subseteq B\left(x, \frac{1}{4}\right)$$

olacak şekilde hiç bir bağlantılı U açık kümesi olmadığından $A \cup B$ uzayı x noktasında yerel bağlantılı değildir. O halde $A \cup B$ uzayı yerel bağlantılı değildir.

Şekil 13.12



Teorem 13.58. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.
a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı yerel bağlantılıdır.
b) Her U açık kümesi için U nun bağlantılı birleşenleri $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır.

İSPAT:

a)⇒ b). U kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık olsun. C kümesi U nun bir bağlantılı birleşeni ve $\mathscr{B}$ de $\mathcal{T}$ nun bağlantılı kümelerden oluşan bir tabanı olsun. C nin açık olduğunu göstermeliyiz. $y \in C$ olsun. Bu durumda $C \subseteq U$ olduğundan $y \in U$ dur. U kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık ve $\mathscr{B}$ de $\mathcal{T}$ nun bir tabanı olduğundan

$$y \in V \subseteq U$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{B}$ kümesi vardır. C kümesi y noktasının bağlantılı birleşeni ve V kümesi y yi içeren bağlantılı bir küme olduğundan $V \subseteq C$ dir. Böylece Teorem 4.9 gereğince C kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açıktır.

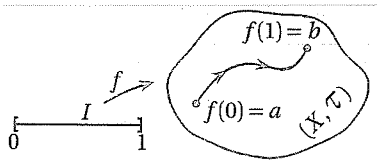
b)⇒ a). $x \in X$ olsun. U kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açık ve $x \in U$ olsun. Bu durumda, $x \in C$ olacak şekilde U alt uzayında bir C bağlantılı birleşeni vardır. (b) gereğince C kümesi $(X,\mathcal{T})$ uzayında açıktır. Böylece,

$$x \in C \subseteq U$$

dur. Tanım 13.55 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayı x noktasında yerel bağlantılıdır. $x \in X$ keyfi olduğundan $(X,\mathcal{T})$ uzayı yerel bağlantılıdır.✔

13.8. Yol Bağlantılı Uzaylar

TANIM 13.59. ▷ **Yol**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. $I = [0,1]$ olmak üzere sürekli her $f : I \to X$ fonksiyonuna X de bir yol denir. $f(0)$ noktasına f yolunun başlangıç noktası ve $f(1)$ noktasınada f yolunun bitiş noktası denir. $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ ise f ye a noktasını b noktasına birleştiren bir yol veya a dan b ye bir yol denir. (Şekil 13.13 e bakınız.)

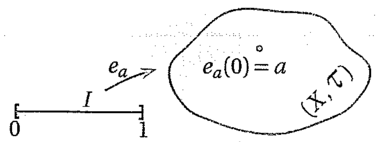


Şekil 13.13

ÖRNEK 13.60. ▷ **Sabit yol**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. Her $t \in X$ için

$$f(t) = a$$

şeklinde tanımlanan $f : I \to X$ sabit fonksiyonu X de bir yoldur. Bu şekilde tanımlanan f yoluna a değerli sabit yol denir ve genellikle e_a ile gösterilir. (Şekil 13.14 e bakınız.)✍

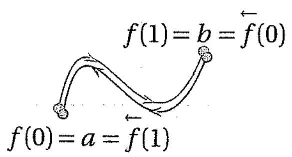


Şekil 13.14

ÖRNEK 13.61. ▷ **Bir yolun tersi**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f : I \to X$ fonksiyonu X de bir yol olsun. Bu durumda

$$g(t) = f(1-t)$$

şeklinde tanımlı $g : I \to X$ fonksiyonuda X de bir yoldur. Bu şekilde tanımlanan g yoluna f nin tersi denir ve genellikle $\overleftarrow{f}$ ile gösterilir. Böylece, f fonksiyonu a dan b ye bir yol ise $\overleftarrow{f}$ de b den a ya bir yoldur. (Şekil 13.15 e bakınız.)✍

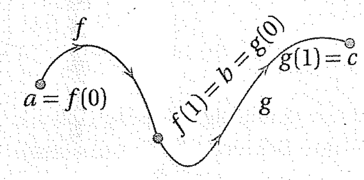


Şekil 13.15

ÖRNEK 13.62. ▷ **Yolların çarpımı**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f: I \to X$ ve $g: I \to X$ fonksiyonları sırasıyla a noktasından b noktasına ve b noktasından c noktasına iki yol olsun. $fg: I \to X$ fonksiyonu

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (Şekil 13.16 ye bakınız.) fg nin a dan c ye bir yol olduğunu gösterelim.



Şekil 13.16

ÇÖZÜM: f ve g fonksiyonları sürekli, $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ kümeleri I da kapalı ve

$$f\left(2\frac{1}{2}\right) = f(1) = b \text{ ve } g\left(2\frac{1}{2}-1\right) = g(0) = b$$

olduğundan Teorem 6.17 gereğince fg fonksiyonu süreklidir. Böylece fg fonksiyonu X de bir yoldur. Diğer yandan

$$(fg)(0) = f(0) = a \text{ ve } (fg)(1) = g(1) = c$$

olduğundan fg, a dan c ye bir yoldur. Bu şekilde tanımlanan fg yoluna f ve g yollarının çarpımı denir.✍

TANIM 13.63. ▷ **Yol bağlantılı uzay**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Her $a,b \in X$ için $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ olacak şekilde bir f yolu varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına yol bağlantılı uzay denir.☜

ÖRNEK 13.64. ▷
$I = [0,1]$ aralığının yol bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $a,b \in I$ olsun. Bu durumda

$$f(t) = tb + (1-t)a$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu I da bir yoldur. Üstelik, $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ olduğundan f yolu a dan b ye bir yoldur.✍

ÖRNEK 13.65. ▷
$X = \{0,1\}$ ve $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f: I \to X$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{0\}) = [0,1), \quad f^{-1}(X) = I$$

ve

$$\emptyset, \quad [0,1), \quad I$$

kümeleri I uzayında açık olduğundan f fonksiyonu süreklidir. O halde f fonksiyonu X de bir yoldur. Üstelik, $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olduğundan bu yol 0 dan 1 e bir yoldur. $(X, \mathcal{T})$ uzayının 0 ve 1 den farklı noktası olmadığından $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılıdır.✍

ÖRNEK 13.66. ▷
Herhangi bir $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayının yol bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $a, b \in X$ olsun.

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [0,1) \\ b, & t = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : I \to X$ fonksiyonu Örnek 6.8 gereğince süreklidir. Üstelik, $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ olduğundan f fonksiyonu a dan b ye bir yoldur. Böylece, $(X, \mathcal{T})$ kaba uzayı yol bağlantılıdır.✍

ÖRNEK 13.67. ▷
X birden fazla elemanı olan bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayının yol bağlantılı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: $a, b \in X$ olsun. $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ özelliğine sahip bir $f : I \to X$ yolunun olduğunu kabul edelim. f sürekli ve $\{a\}$ hem açık hem kapalı olduğundan $f^{-1}(\{a\})$ kümesi I uzayında hem açık hem de kapalıdır. Üstelik,

$$0 \in f^{-1}(\{a\}) \quad \text{ve} \quad 1 \notin f^{-1}(\{a\})$$

olduğundan

$$f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad f^{-1}(\{a\}) \neq I$$

dır. Bu ise I nın bağlantılı olması ile çelişir. O halde, a dan b ye hiç bir yol yoktur. Dolayısıyla, $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı yol bağlantılı olamaz.✍

Teorem 13.68. ▷
Yol bağlantılı her $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ uzayının bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $Y = \{0, 1\}$ olmak üzere Teorem 13.68 gereğince sürekli ve örten bir $g : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ fonksiyonu vardır. (Şekil 13.17 ya bakınız.) Böylece,

$$g(x) = 0 \quad \text{ve} \quad g(y) = 1$$

olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları vardır. Diğer yandan, $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılı olduğundan

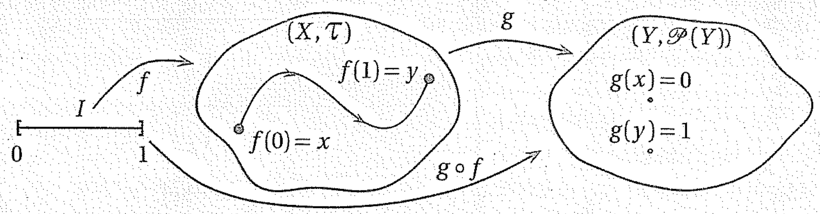
$$f(0) = x, \quad \text{ve} \quad f(1) = y$$

olacak şekilde bir $f : I \to X$ yolu vardır. Teorem 6.14 gereğince $g \circ f : I \to Y$ fonksiyonu sürekli ve

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(x) = 0, \quad (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(y) = 1$$

olduğundan $g \circ f$ örtendir. Teorem 13.31 gereğince I bağlantılı olamaz. Bu ise I bağlantılı olduğundan bir çelişkidir. O halde $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır.✔

Şekil 13.17



Not

Teorem 13.68 ın tersi her zaman doğru değildir. Yani bağlantılı bir uzay yol bağlantılı olmak zorunda değildir. (Örnek 13.77 ve Örnek 13.78 e bakınız.)

Teorem 13.69. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ve örten olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılı ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda yol bağlantılıdır.

İSPAT: $x, y \in Y$ olsun. Bu durumda $f(a) = x$ ve $f(b) = y$ olacak şekilde $a, b \in X$ noktaları vardır. $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılı olduğundan $g(0) = a$ ve $g(1) = b$ olacak şekilde bir $g : I \to X$ yolu vardır. f ve g fonksiyonları sürekli olduğundan Teorem 6.14 gereğince $f \circ g : I \to Y$ fonksiyonu süreklidir. Üstelik,

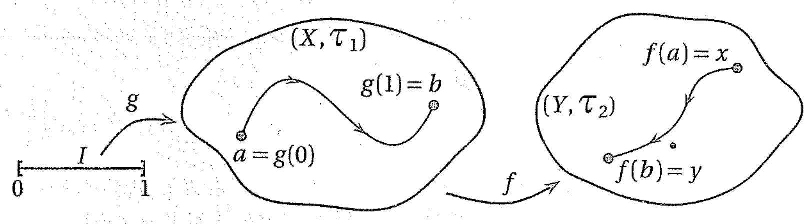
$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(a) = x$$

ve

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(b) = y$$

dir. O halde $f \circ g$ fonksiyonu x den y ye bir yoldur. Böylece, $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılıdır. (Şekil 13.18 e bakınız.)✔

Şekil 13.18



Her homeomorfizm ve tersi sürekli ve örten olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 13.70. ▷ $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayları homeomorfik olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılıdır. **b)** $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılıdır.

İSPAT: $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ topolojik uzayları homeomorfik olduklarından bir $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ homeomorfizmi vardır.

a)⇒ b). f fonksiyonu sürekli ve örten olduğundan Teorem 13.69 gereğince $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılı ise $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayıda yol bağlantılıdır.
b)⇒ a). f^{-1} fonksiyonu sürekli ve örten olduğundan Teorem 13.69 gereğince $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılı ise $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayıda yol bağlantılıdır.✔

Not

$(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzaylarından bir tanesi yol bağlantılı diğeri yol bağlantılı değilse bu uzaylar homeomorfik olamazlar.

Teorem 13.71.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

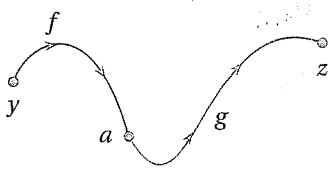
a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılıdır.
b) Her $x \in X$ için a ile x noktalarını birleştiren bir yol vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılı olduğundan $x \in X$ ise $a, x \in X$ olduğundan a ile x noktalarını birleştiren bir yol vardır.
b)⇒ a). $y, z \in X$ olsun. (b) gereğince her $x \in X$ için a ile x noktalarını birleştiren bir yol olduğundan $f(0) = y$, $f(1) = a$ ve $g(0) = a$, $g(1) = z$ olacak şekilde $f : I \to X$ ve $g : I \to X$ yolları vardır. $h : I \to X$ fonksiyonunu

$$h(t) = (fg)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f ve g yollarının çarpımı olsun. (Şekil 13.19 a bakınız.) Bu durumda Örnek 13.62 gereğince h fonksiyonu y den z ye bir yoldur. Böylece, $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılıdır.✔



Şekil 13.19

ÖRNEK 13.72.
$(X, \mathcal{T}(a))$ topolojik uzayının yol bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Bunun için her $b \in X$ noktası ile a noktasını birleştiren bir yolun olduğunu gösterelim.

$$f(t) = \begin{cases} b, & t = 1 \\ a, & t \in [0,1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : I \to X$ fonksiyonu göz önüne alalım. f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}(a)$ olsun. $U = \emptyset$ ise açıkça $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dur. $U \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $a \in U$ ve

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} [0,1), & b \notin U \\ I, & b \in U \end{cases}$$

dır. $\emptyset$, $[0,1)$ ve I kümeleri I uzayında açık olduklarından f fonksiyonu süreklidir. Üstelik, $f(0) = a$ ve $f(1) = b$ olduğundan f yolu a dan b ye bir yoldur. Teorem 13.71 gereğince bu uzay yol bağlantılıdır.

ÖRNEK 13.73. ▷
$(X, \mathcal{T}_a)$ topolojik uzayının yol bağlantılı olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: Bunun için her $b \in X$ noktası ile a noktasını birleştiren bir yolun olduğunu gösterelim. $f : I \to X$ fonksiyonunu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 1 \\ b, & t \in [0,1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. f nin sürekli olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{T}_a$ olsun. $U = \emptyset$ ise açıkça $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dur. $U \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U = X$ veya $a \notin U$ dur. $U = X$ ise $f^{-1}(U) = I$ dır. $a \notin U$ olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset, & b \notin U \\ [0,1), & b \in U \end{cases}$$

dur. $\emptyset$, $[0,1)$ ve I kümeleri I uzayında açık olduğundan f fonksiyonu süreklidir. Üstelik, $f(0) = b$ ve $f(1) = a$ olduğundan bu yol b den a ya bir yoldur. Teorem 13.71 gereğince bu uzay yol bağlantılıdır.✍

SONUC 13.74. ▷ Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ standart uzayı yol bağlantılıdır.

İSPAT: $0_{\mathbb{R}} = (0, 0, \cdots, 0)$ ve $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $h : I \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu

$$h(t) = (tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $k = 1, 2, \cdots, n$ için $(\pi_k \circ h)(t) = tx_k$ fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 10.25 gereğince h fonksiyonu süreklidir. Üstelik,

$$h(0) = (0, 0, \cdots, 0) = 0_{\mathbb{R}}$$

ve

$$h(1) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = x$$

dir. O halde, h fonksiyonu $0_{\mathbb{R}}$ den x noktasına bir yoldur. Böylece, $\mathbb{R}^n$ standart uzayı Teorem 13.71 gereğince yol bağlantılıdır.✓

13.9. Yol Bağlantılı Alt Kümeler

TANIM 13.75. ▷ **Yol bağlantılı alt küme**
$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(A, \mathcal{T}_A)$ alt uzayı yol bağlantılı ise A ya $(X, \mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı alt kümesi denir. Yani her $a, b \in A$ için

$$f(I) \subseteq A \quad \text{ve} \quad f(0) = a, \quad f(1) = b$$

olacak şekilde bir $f : I \to A$ sürekli fonksiyonu varsa A ya $(X, \mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı alt kümesi denir.☜

SONUÇ 13.76. ▶ $\mathbb{R}^n$ uzayında her $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ve her $r \in \mathbb{R}$ için $B(a,r)$ açık yuvarı yol bağlantılıdır.

İSPAT: $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B(a,r)$ olsun. $h : I \to B(a,r)$ fonksiyonunu

$$h(t) = t(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (1-t)(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$(\pi_n \circ h)(t) = tx_n + (1-t)a_n$$

olduğundan h fonksiyonu Teorem 10.25 gereğince süreklidir. Üstelik,

$$h(0) = a \quad \text{ve} \quad h(1) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = x$$

dir. O halde h fonksiyonu a noktasından x noktasına bir yoldur. Böylece $B(a,r)$ alt uzayı Teorem 13.71 gereğince yol bağlantılıdır. Dolayısıyla, $B(a,r)$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının yol bağlantılı bir alt kümesidir.✔

Not

Benzer şekilde, $\mathbb{R}^n$ nin her $x, y \in A$ ve $0 \le t \le 1$ özelliğindeki her $t \in \mathbb{R}$ için $tx + (1-t)y \in A$ özelliğine sahip her A alt kümesinin diğer bir deyişle $\mathbb{R}^n$ nin konveks her A alt kümesinin yol bağlantılı olduğu gösterilir.

ÖRNEK 13.77. ▶
$\mathbb{R}^2$ standart uzayının

$$A = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 1, y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{ve} \quad B = \left\{(x,0) \,\middle|\, \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$$

alt kümeleri verilsin.

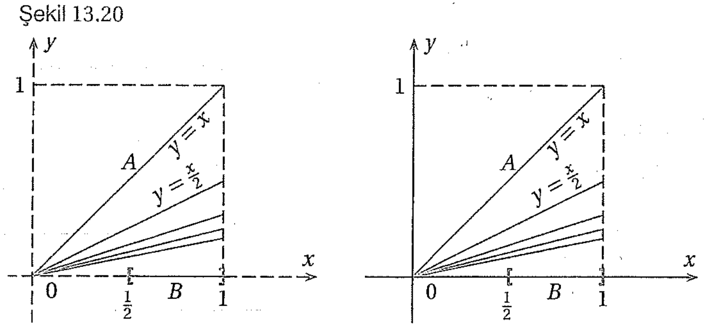
a) $A \cup B$ kümesinin bağlantılı olduğunu gösterelim.
b) $A \cup B$ kümesinin yol bağlantı olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM: Bu durumda A ve B kümeleri bağlantılıdır. Üstelik,

$$A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A} = A \cup ([0,1] \times \{0\})$$

olduğundan Teorem 13.26 gereğince $A \cup B$ kümesi bağlantılıdır. Diğer yandan A nın hiç bir noktasından B nin herhengi bir noktasına hiç bir yol olmadığından $A \cup B$ kümesi yol bağlantılı değildir. (Şekil 13.20 a bakınız.)✍

Şekil 13.20



Örnek 13.78. ▷
$\mathbb{R}^2$ standart uzayının

$$A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=([0,1]\times\{0\})\cup(A\times[0,1])\cup(\{0\}\times[0,1])$$

ve

$$C=B\setminus(\{0\}\times(0,1))$$

alt kümeleri verilsin. (Şekil 13.21 a bakınız.)

a) C nin bağlantılı olduğunu gösterelim.
b) C nin yol bağlantılı olmadığını gösterelim.

Çözüm:

a) B kümesi açıkça yol bağlantılıdır. Böylece Teorem 13.68 gereğince B kümesi bağlantılıdır.

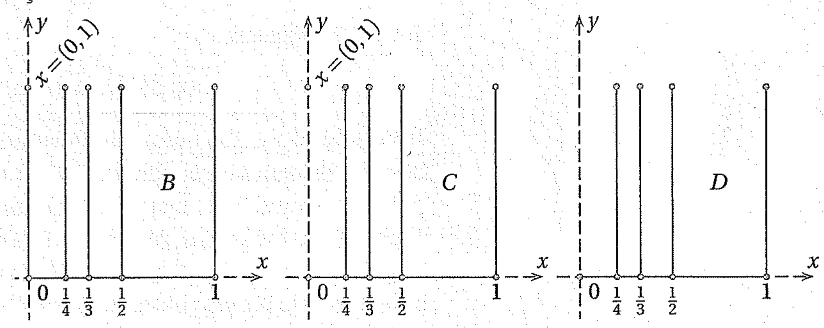
$$D=([0,1]\times\{0\})\cup(A\times[0,1])$$

kümesi bağlantılı ve

$$D\subseteq C\subseteq\overline{D}=D\cup(\{0\}\times[0,1])$$

olduğundan Teorem 13.26 gereğince C kümesi bağlantılıdır.

Şekil 13.21



b) Şimdi, C kümesinin yol bağlantılı olmadığını gösterelim. $x=(0,1)$ olsun. $f(0)=x$ özelliğinde herhangi bir yol $f:[0,1]\to C$ olsun. $f^{-1}(\{x\})$ kümesinin hem kapalı hem açık olduğunu gösterelim. $\{x\}$ kümesi kapalı ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(\{x\})$ kümesi kapalıdır. Şimdi, $f^{-1}(\{x\})$ kümesinin açık olduğunu gösterelim.

$$x\in V \quad \text{ve} \quad V\cap\{(z,0)\,|\,z\in\mathbb{R}\}=\emptyset$$

özelliğinde $\mathbb{R}^2$ de bir V açık kümesi seçelim. (Şekil 13.22 ye bakınız.) $x_0\in f^{-1}(\{x\})$ olsun. f sürekli olduğundan

$$x_0\in U \quad \text{ve} \quad f(U)\subseteq V$$

olacak şekilde $[0,1]$ uzayının tabanına ait bir U açık kümesi vardır. U kümesi $[0,1]$ uzayının tabanına ait olduğundan bağlantılıdır. Bu durumda, f fonksiyonu sürekli olduğundan $f(U)$ kümesi bağlantılıdır. $f(U) = \{x\}$ olduğunu gösterelim.

$$y = \left(\frac{1}{n}\right) \times \{t_0\} \in C$$

ve $x \neq y$ olmak üzere $y \in V$ olsun.

$$\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı seçelim. Budurumda $\mathbb{R}^2$ uzayının $(-\infty, r) \times \mathbb{R}$ ve $(r, \infty) \times \mathbb{R}$ kümelerini göz önüne alalım.

$$V \bigcap \{(z,0) | z \in \mathbb{R}\} = \emptyset$$

olduğundan

$$f(U) \bigcap \{(z,0) | z \in \mathbb{R}\} = \emptyset$$

olur. Diğeryan dan $f(U) \subseteq C$ ve

$$f(U) \bigcap \{(z,0) | z \in \mathbb{R}\} = \emptyset$$

olduğundan

$$f(U) \bigcap \{(r,z) | z \in \mathbb{R}\} = f(U) \bigcap (\{r\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$$

olur. Bu yüzden,

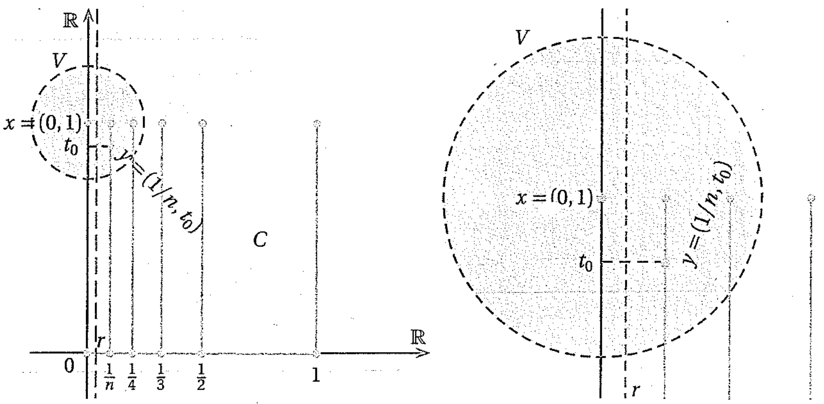
$$f(U) \subseteq ((-\infty, r) \times \mathbb{R}) \bigcup ((r, \infty) \times \mathbb{R})$$

dir. $f(U)$ bağlantılı ve

$$x \in f(U),\ x \in (-\infty, r) \times \mathbb{R} \text{ ve } y \in (r, \infty) \times \mathbb{R}$$

olduğundan $y \notin f(U)$ olur. Bu durumda $f(U) = \{x\}$ dir. O halde $U \subseteq f^{-1}(\{x\})$ dir. Böylece Teorem 4.9 gereğince $f^{-1}(\{x\})$ kümesi açıktır.
$f^{-1}(\{x\})$ kümesi $[0,1]$ uzayında hem açık hem kapalı, $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$ ve $[0,1]$ uzayı bağlantılı olduğundan Teorem 13.7 gereğince $f^{-1}(\{x\}) = [0,1]$ dir. Diğer bir deyişle $f([0,1]) = \{x\}$ dir. Böylece, x noktası ile $x \neq y$ özelliğindeki $y \in C$ noktalarını birleştiren hiç bir yol yoktur. O halde C uzayı yol bağlantılı değildir.✍

Şekil 13.22



Teorem 13.79. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\{A_i | i \in I\}$ kolleksiyonu $i \neq j$ için

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset$$

özelliğine sahip $(X,\mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı alt kümelerin bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi yol bağlantılıdır.

İSPAT: $a,b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ olsun. Bu durumda $a \in A_i$ ve $b \in A_j$ olacak şekilde $i,j \in I$ vardır.

a) $i = j$ ise $a,b \in A_i$ dir. A_i alt uzayı yol bağlantılı olduğundan a ile b noktalarını birleştiren bir yol vardır.

b) $i \neq j$ olsun. Bu durumda $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ olduğundan $c \in A_i \cap A_j$ olacak şekilde bir c noktası vardır. Bu durumda $a,c \in A_i$ ve $b,c \in A_j$ dir. A_i ve A_j yol bağlantılı olduğundan $f(0) = a$, $f(1) = c$ ve $g(0) = c$, $g(1) = b$ olacak şekilde $f: I \to A_i$ ve $g: I \to A_j$ yolları vardır. $f: I \to A_i$ ve $g: I \to A_j$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f: I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ ve $g: I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ fonksiyonlarıda süreklidir.
$fg: I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ fonksiyonunu

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f ve g yollarının çarpımı olsun.

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = c \text{ ve } h\left(\frac{1}{2}\right) = g(0) = c$$

olduğundan h fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan

$$h(0) = f(0) = a \text{ ve } h(1) = g(1) = b$$

dir. O halde fg fonksiyonu a noktasından b noktasına bir yoldur.

(a) ve (b) gereğince $\bigcup_{i\in I} A_i$ alt uzayı yol bağlantılıdır.✔

Teorem 13.80. U kümesi $\mathbb{R}^n$ standart uzayında açık bir küme olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U kümesi yol bağlantılıdır. b) U kümesi bağlantılıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). U yol bağlantılı olsun. Teorem 13.68 gereğince U bağlantılıdır.

b)⇒ a). U bağlantılı olsun. U nun yol bağlantılı olduğunu gösterelim. Sabit bir $a \in U$

noktası seçelim.

$$A = \{x \in U \mid f(I) \subseteq U \text{ olacak şekilde } a \text{ dan } x \text{ e bir } f \text{ yolu vardır}\}$$

olsun. Bu durumda, açıkça $a \in A$ dır. Böylece $A \neq \emptyset$ dur. Diğer yandan, A kümesi Teorem 13.71 gereğince yol bağlantılıdır.
$B = U \setminus A$ olsun. Bu durumda $A \cap B = \emptyset$ ve $U = A \cup B$ dir. $B = \emptyset$ olduğunu gösterirsek $A = U$ olur. Böylece U yol bağlantılı olur. Önce, A ve B kümelerinin açık olduğunu gösterelim. $x \in A$ olsun. Bu durumda a ile x noktalarını birleştiren bir f yolu vardır. $x \in U$ ve U açık olduğundan $B(x,\delta) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $y \in B(x,\delta)$ olsun. $B(x,\delta)$ alt uzayı Sonuç 13.76 gereğince yol bağlantılı olduğundan x noktasını y noktası ile birleştiren bir yol vardır. Örnek 13.62 gereğince y noktasını a noktası ile birleştiren $g(I) \subseteq U$ özelliğinde bir g yolu vardır. O halde, $y \in A$ dır. Böylece, $B(x,\delta) \subseteq A$ dır. Teorem 4.9 gereğince A kümesi açıktır.
Şimdi, B kümesinin açık olduğunu gösterelim. $b \in B$ olsun. $b \in U$ ve U açık olduğundan $B(b,\delta) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $B(b,\delta) \cap A = \emptyset$ olduğundan $B(b,\delta)$ nin hiç bir noktası a ile tamamen U nun içinde kalan bir yol ile birleştirilemez. Aksi halde, b ile a noktası bir yol ile birleştirilebilirdi. Böylece, $B(b,\delta)$ nın her elemanı B nin bir elemanıdır. Yani, $B(b,\delta) \subseteq B$ dir. O halde, B kümesi açıktır.
Bu durumda, $A \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ ve $U = A \cup B$ ve U bağlantılı olduğundan $B = \emptyset$ olur. Böylece, $A = U$ dur. A yol bağlantılı olduğundan U da yol bağlantılıdır.✓

13.10. Yol Birleşenler

Teorem 13.81.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve

$$\mathcal{A}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U \text{ ve } U \text{ yol bağlantılı}\}$$

olmak üzere $C'_x = \bigcup_{U \in \mathcal{A}_x} U$ olsun.

a) C'_x kümesi x noktasını içeren $(X, \mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı bir alt kümesidir.
b) C'_x kümesi x noktasını içeren $(X, \mathcal{T})$ uzayının maksimal yol bağlantılı alt kümesidir.

İSPAT:

a) $\{x\}$ yol bağlantılı ve $x \in \{x\}$ olduğundan $\{x\} \in \mathcal{A}_x$ dır. Dolayısıyla,

$$x \in \bigcup_{U \in \mathcal{A}_x} U = C'_x$$

dir. Böylece, $C'_x \neq \emptyset$ dur. Diğer yandan $\bigcap_{U \in \mathcal{A}_x} U = \{x\} \neq \emptyset$ olduğundan Teorem 13.79 gereğince C'_x yol bağlantılıdır.

b) $C'_x \subseteq B$ ve B yol bağlantılı olsun. $x \in C'_x$ olduğundan $x \in B$ dir. Böylece, $B \in \mathcal{A}_x$ dır. Doayısıyla, $B \subseteq C'_x$ dır. O halde, $C'_x = B$ dir. Diğer bir deyişle, C'_x kümesini kapsayan $(X, \mathcal{T})$ uzayının hiç bir yol bağlantılı alt kümesi yoktur. O halde, C'_x kümesi $(X, \mathcal{T})$

uzayının maksimal yol bağlantılı bir alt kümedir.✔

TANIM 13.82. ▷ **Yol bağlantılı birleşen**
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathscr{A}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U$ ve U yol bağlantılı$\}$ olsun. Bu durumda $C'_x = \bigcup_{U \in \mathscr{A}_x} U$ kümesine $x \in X$ noktasının yol bağlantılı birleşeni veya $(X,\mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı bir birleşeni denir.

Teorem 13.83. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $C'_x = C'_y$ veya $C'_x \cap C'_y = \emptyset$ dur.

İSPAT: $C'_x, C'_y \subseteq X$ olduğundan ya $C'_x \cap C'_y \neq \emptyset$ ya da $C'_x \cap C'_y = \emptyset$ dur. $C'_x \cap C'_y = \emptyset$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. $C'_x \cap C'_y \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda C'_x ve C'_y kümeleri Teorem 13.81 gereğince yol bağlantılı olduklarından Teorem 13.79 gereğince $C'_x \cup C'_y$ kümesi yol bağlantılıdır. Üstelik, $x, y \in C'_x \cup C'_y$ olduğundan Teorem 13.81 gereğince $C'_x \cup C'_y \subseteq C'_y$ ve $C'_x \cup C'_y \subseteq C'_x$ dir. Böylece,

$$C'_x \cup C'_y = C'_y \quad \text{ve} \quad C'_x \cup C'_y = C'_x$$

olur. O halde, $C'_x = C'_y$ dir.✔

Not
Teorem 13.81 ve Teorem 13.83 gereğince $(X,\mathcal{T})$ uzayının bütün yol bağlantılı birleşenlerinin kolleksiyonu $(X,\mathcal{T})$ uzayının maksimal yol bağlantılı kümelerden oluşan bir ayrışımıdır. Bu ayrışımın elemanları $(X,\mathcal{T})$ uzayının yol bağlantılı birleşenleridir.

Teorem 13.84. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) x ve y aynı bir yol bağlantılı birleşenin elemanıdır.
b) x ile y yi birleştiren bir yol vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). x ve y bir C'_z yol bağlantılı birleşenin elemanı olsun. Bu durumda z ile x ve z ile y yi birleştiren yollar vardır. Bu durumda Örnek 13.62 gereğince x ile y yi birleştiren bir yol vardır.

b)⇒ a). x ile y yi birleştiren bir yol olduğunu varsayalım. Teorem 13.81 gereğince $x \in C'_x$ dir. Her $z \in C'_x$ için x ile z yi birleştiren bir yol vardır. Diğer yandan Örnek 13.62 gereğince y ile z yi birleştiren bir yol vardır. Böylece, her $z \in C'_x$ için y ile z yi birleştiren bir yol vardır. Bu durumda, $C'_x \cup \{y\}$ kümesi yol bağlantılıdır. C'_x kümesi x noktasını içeren maksimal yol bağlantılı bir küme olduğundan $C'_x \cup \{y\} = C'_x$ olmak zorundadır. Diğer bir deyişle, $y \in C'_x$ dır. O halde, $x, y \in C'_x$ olduğundan x ve y aynı bir yol bağlantılı birleşenin elemanıdır.✔

Teorem 13.85. ▷
$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.
a) Her $x \in X$ için C'_x kümesi hem açık hem de kapalıdır.

b) Her $x \in X$ için $x \in U$ olacak şekilde açık ve yol bağlantılı bir U kümesi vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). $x \in X$ olsun. Teorem 13.81 gereğince $x \in C'_x$ ve C'_x kümesi yol bağlantılıdır. (a) gereğince C'_x kümesi açıktır.

b)⇒ a). $x \in X$ olsun. Teorem 13.81 gereğince C'_x kümesi $x \in C'_x$ özelliğindeki maksimal yol bağlantılı bir kümedir. C'_x kümesinin açık bir küme olduğunu gösterelim. $y \in C'_x$ olsun. Bu durumda, $C'_x = C'_y$ dir. Yani C'_x kümesi y noktasını içeren maksimal yol bağlantılı bir kümedir. (b) gereğince $y \in U$ olacak şekilde yol bağlantılı bir $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $U \subseteq C'_x$ dır. Böylece, Teorem 13.84 gereğince C'_x kümesi açıktır. Diğer yandan, yol bağlantılı birleşenler ayrık ve yol bağlantılı birleşenler $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir ayrışımını oluşturduğundan $X \setminus C'_x$ kümesi $(X, \mathcal{T})$ uzayının C'_x den farklı diğer yol bağlantılı birleşenlerin birleşimine eşittir. Yani $X \setminus C'_x = \bigcup_{C'_x \neq C'_y} C'_y$ dür. O halde, açık kümelerin birleşimi açık olduğundan $X \setminus C'_x$ kümesi açıktır. Dolayısıyla, C'_x kümesi kapalıdır.✔

Teorem 13.86 ▷

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılıdır.

b) $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı ve her $x \in X$ için $x \in U$ olacak şekilde yol bağlantılı bir U açık kümesi vardır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 13.68 gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılıdır. Üstelik, her $x \in X$ için $U = X \in \mathcal{T}$ ve $U = X$ kümesi yol bağlantılıdır.

b)⇒ a). $x \in X$ olsun. Bu durumda, Teorem 13.81 gereğince C'_x kümesi $x \in C'_x$ özelliğindeki maksimal yol bağlantılı kümedir. Teorem 13.85 gereğince C'_x kümesi açık ve kapalıdır. Üstelik, $x \in C'_x$ olduğundan $C'_x \neq \emptyset$ dur. $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı olduğundan Teorem 13.7 gereğince $X = C'_x$ olmak zorundadır. Bu durumda, C'_x yol bağlantılı olduğundan $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılıdır.✔

Teorem 13.86 nin bir sonucu olarak daha önce göstediğimiz aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

SONUÇ 13.87. ▷ U kümesi $\mathbb{R}^n$ de açık olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) U yol bağlantılıdır. **b)** U bağlantılıdır.

İSPAT:

a)⇒ b). Teorem 13.68 gereğince U yol bağlantılı ise bağlantılıdır.

b)⇒ a). U bağlantılı olsun. $x \in U$ ise U açık olduğundan $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. $B(x, r)$ kümesi Sonuç 13.76 gereğince yol bağlantı ve U alt uzayında açıktır. O halde her $x \in U$ noktası için U alt uzayında $x \in B(x, r)$ olacak şekilde bağlantılı ve açık bir $B(x, r)$ kümesi vardır. Teorem 13.86 gereğince U kümesi yol bağlantılıdır.✓

13.11. Alıştırmalar

1. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin.
   a) $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı bağlantılı ise $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayınında bağlantılı olduğunu gösteriniz.
   b) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılı fakat $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı bağlantılı olmayacak şekilde bir örnek veriniz.

2. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olmak üzere $(X,\mathcal{T}_1)$ ve $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayları verilsin
   a) $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılı ise $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayınında yol bağlantılı olduğunu gösteriniz.
   b) $(X,\mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılı fakat $(X,\mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılı olmayacak şekilde bir örnek veriniz.

3. $p_0=(0,-1), p_1=(0,1)$ ve $p=(0,4)$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin aşağıdaki alt uzaylarının homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.
$$X=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d_2(x,p_0)=1 \text{ veya } d_2(x,p_1)=1\},$$
$$Y=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d_2(x,p)=1\}.$$

4. $a<b,\ c<d$ olmak üzere a,b,c,d reel sayılar olsun. Bu durumda bağlantılılık kavramını kullanarak

   a) $(a,b)\not\cong[c,d)$ b) $(a,b)\not\cong[c,d]$ c) $[a,b)\not\cong[c,d]$

olduğunu gösteriniz.

5. $\mathbb{R}$ nin birden fazla elemanı olan sayılabilir bir alt uzayının bağlantılı olmadığını gösteriniz.

6. $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2$ de birim çember yani $\mathbb{S}^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ olsun.
   a) $\mathbb{S}^1\setminus\{(0,1)\}$ kümesi ile $(0,1)$ aralığının homeomorfik olduğunu gösteriniz.
   b) $\mathbb{S}^1\not\cong(0,1)$ ve $\mathbb{S}^1\not\cong[0,1]$ olduğu sonucunu elde ediniz.
   c) $\mathbb{S}^1\not\cong[0,1)$ olduğunu gösteriniz.
   d) $\mathbb{S}^1$ in herhangi bir aralık ile homeomorfik olmadığı sonucunu çıkartınız.

7. $\mathbb{R}^2$ nin $Y=\mathbb{S}^1\cup\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2=1\}$ alt uzayı verilsin.
   a) Y uzayının $\mathbb{S}^1$ uzayı ile homeomorfik olup olmadığını araştırınız.
   b) Y nin $\mathbb{R}$ deki herhangi bir aralık ile homeomorfik olup olmadığını araştırınız.

8. $\mathbb{R}^2$ nin $Z=\mathbb{S}^1\cup\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$ alt uzayı verilsin.
   a) Z uzayının $\mathbb{S}^1$ uzayı ile homeomorfik olup olmadığını araştırınız.
   b) Z nin herhangi bir aralık ile homeomorfik olmadığını gösteriniz.

9. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ standart uzaylarının homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.

10. $(X,\mathcal{T})$ birden fazla elemanı olan bir T_1-uzayı olsun. X in bağlantılı olmayan bir alt kümesinin olduğunu gösteriniz.

11. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{sağ})$ ve $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{sol})$ uzaylarının $\mathbb{R}$ ile homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.

12. $\mathbb{R}$ üzerinde
$$\mathcal{T}_1=\{(-\infty,x]\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,x)\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$$
ve
$$\mathcal{T}_2=\{[x,\infty)\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,\infty)\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$$
topolojileri verilsin.
   a) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ uzayının bağlantılı olup olmadığını araştırınız.
   b) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ uzayının bağlantılı olup olmadığını araştırınız.

13. $(X,\mathcal{T})$ bağlantılı bir uzay ve $(Y,\mathcal{P}(Y))$ bir ayrık uzay olsun.
   a) Sürekli her $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{P}(Y))$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz.
   b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu sürekli ise sabit olduğunu gösteriniz.

14. $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ bir bölüm fonksiyonu ve her $y\in Y$ için $f^{-1}(y)$ bağlantılı olsun. Bu durumda $(Y,\mathcal{T}_2)$ uzayı bağlantılı ise $(X,\mathcal{T}_1)$ in bağlantılı olduğunu gösteriniz.

15. $(X,\mathcal{T})$ sayılabilir tümleyenler uzayının yol bağlantılı olmadığını gösteriniz.

16. (X,d) en az iki elemanı olan bağlantılı bir metrik uzay ise X in sonlu olamayacağını gösteriniz.

17. $(X,\mathcal{T})$ bağlantılı bir topolojik uzay ve $\sim$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.
   a) $(X,\mathcal{T})$ bağlantılı ise $X/\sim$ bölüm uzayının bağlantılı oldu-

ğunu gösteriniz.

b) $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı ise $X/\sim$ bölüm uzayının yol bağlantılı olduğunu gösteriniz.

18. $(X, \mathcal{T})$ bağlantılı bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için f fonksiyonu U kümesi üzerinde sabit olacak şekilde $x \in U$ özelliğine sahip bir $U \in \mathcal{T}$ kümesi varsa f nin sabit olduğunu gösteriniz.

13.12. Alıştırma Çözümleri

ÇÖZÜM 1

a) $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında boş küme ve X den farklı hem açık hem kapalı bir U kümesi vardır. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan U kümesi $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında açık olur. Diğeryandan $X \setminus U$ kümesi $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayında açık olduğundan $X \setminus U$ kümesi $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında açıktır. Böylece U kümesi $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında kapalıdır. Yani U kümesi $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayında boş küme ve X den farklı olan hem açık hem de kapalı bir kümedir. Bu ise $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayının bağlantılı olması ile çelişir. O halde $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılıdır.

b) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$ alınırsa $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olur. Diğeryandan $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılı fakat $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı bağlantılı değildir.✔

ÇÖZÜM 2

a) $a, b \in X$ olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılı olduğundan

$$f(0) = a \quad \text{ve} \quad f(1) = b$$

olacak şekilde bir $f : I \to (X, \mathcal{T}_2)$ yolu vardır. Bu durumda $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olduğundan $f : I \to (X, \mathcal{T}_1)$ bir yoldur. Böylece $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılıdır.

b) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$ alınırsa $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ olur. Diğeryandan $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı yol bağlantılı fakat $(X, \mathcal{T}_2)$ uzayı yol bağlantılı değildir.✔

ÇÖZÜM 3

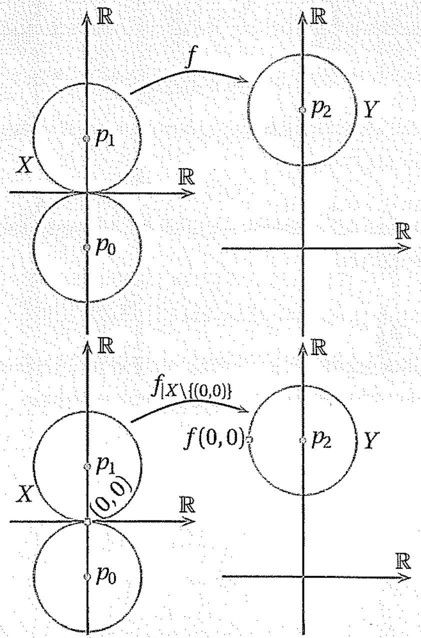
X ile Y nin homeomorfik olduklarını varsayalım. $f : X \to Y$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$X \setminus \{(0,0)\} \quad \text{ve} \quad Y \setminus \{f((0,0))\}$$

uzayları homeomorfiktir. Diğer yandan $X \setminus \{(0,0)\}$ uzayı bağlantılı olmamasına rağmen $Y \setminus \{f((0,0))\}$ uzayı bağlantılıdır. O halde Sonuç 13.33 gereğince

$$X \setminus \{(0,0)\} \quad \text{ve} \quad Y \setminus \{f((0,0))\}$$

uzayları homeomorfik olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece X ve Y uzayları homeomorfik değildir.✔



Şekil 13.23

ÇÖZÜM 4

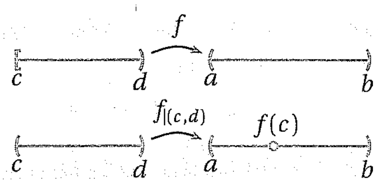
a) (a, b) ve $[c, d)$ nin homeomorfik olduklarını varsayalım.

$$f : [c, d) \to (a, b)$$

bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f : (c, d) \to (a, b) \setminus \{f(c)\}$$

bir homeomorfizmdir. Diğer yandan (c, d) uzayı bağlantılı olmasına rağmen $(a, b) \setminus \{f(c)\}$ uzayı bağlantılı değildir. (Şekil 13.24 ya bakınız.) Sonuç 13.33 gereğince (c, d) ve $(a, b) \setminus \{f(c)\}$ uzayları homeomorfik olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (a, b) ve $[c, d)$ uzayları homeomorfik değildir.



Şekil 13.24

b) (a,b) ve $[c,d]$ nin homeomorfik olduklarını varsayalım.

$$f:[c,d]\to(a,b)$$

bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f:(c,d]\to(a,b)\setminus\{f(c)\}$$

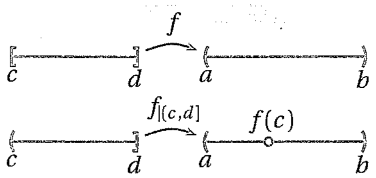
bir homeomorfizmdir. Diğer yandan $(c,d]$ uzayı bağlantılı olmasına rağmen

$$(a,b)\setminus\{f(c)\}$$

uzayı bağlantılı değildir. (Şekil 13.25 ye bakınız.) Sonuç 13.33 gereğince

$$(c,d] \text{ ve } (a,b)\setminus\{f(c)\}$$

uzayları homeomorfik olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (a,b) ve $[c,d]$ uzayları homeomorfik değildir.



Şekil 13.25

c) $[a,b)$ ve $[c,d]$ nin homeomorfik olduklarını varsayalım.

$$f:[c,d]\to[a,b)$$

bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f:(c,d)\to[a,b)\setminus\{f(c),f(d)\}$$

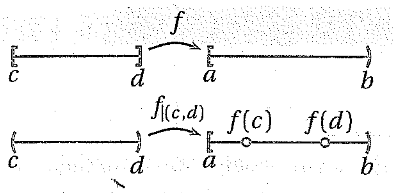
bir homeomorfizmdir. Diğer yandan (c,d) uzayı bağlantılı olmasına rağmen

$$[a,b)\setminus\{f(c),f(d)\}$$

uzayı bağlantılı değildir. (Şekil 13.26 ye bakınız.) Sonuç 13.33 gereğince

$$(c,d) \text{ ve } [a,b)\setminus\{f(c),f(d)\}$$

uzayları homeomorfik olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $[a,b)$ ve $[c,d]$ uzayları homeomorfik değildir.✔



Şekil 13.26

ÇÖZÜM 5

Sonuç 13.30 gereğince $\mathbb{R}$ nin bir A alt uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart A nın bir aralık olmasıdır. A kümesi $\mathbb{R}$ nin birden fazla elemanı olan sayılabilir bir alt uzayı olduğundan A bir aralık olamaz. Böylece, A bağlantılı olamaz.✔

ÇÖZÜM 6

a) Örnek 6.66 gereğince $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{S}^1\setminus\{(0,1)\}$ uzayları homeomorfiktir. Diğer yandan Alıştırma 23 ve 24 gereğince $\mathbb{R}$ ile $(0,1)$ aralığı homeomorfiktir. Böylece $\mathbb{S}^1\setminus\{(0,1)\}$ ile $(0,1)$ uzayları homeomorfiktir.

b) $\mathbb{S}^1$ ile $(0,1)$ in homeomorfik olduğunu varsayalım.

$$f:\mathbb{S}^1\to(0,1)$$

bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f:\mathbb{S}^1\setminus\{(0,1)\}\to(0,1)\setminus\{f((0,1))\}$$

bir homeomorfizmdir. (a) gereğince

$$(0,1)$$

ile

$$(0,1)\setminus\{f((0,1))\}$$

uzayları homeomorfik olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{S}^1$ ile $(0,1)$ uzayları homeomorfik değildir.

c) $[0,1)$ ile $\mathbb{S}^1$ in homeomorfik olduğunu varsayalım.

$$f:[0,1)\to\mathbb{S}^1$$

bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince $x\in(0,1)$ için

$$f:[0,1)\setminus\{x\}\to\mathbb{S}^1\setminus\{f(x)\}$$

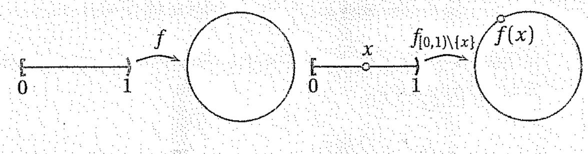
bir homeomorfizmdir. (Şekil 13.27 ye bakınız.) Bu ise,

$$\mathbb{S}^1\setminus\{f(x)\}$$

bağlantılı ve

$$[0,1)\setminus\{x\}$$

bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{S}^1$ ile $[0,1)$ uzayları homeomorfik değildir.



Şekil 13.27

d) Alıştırma 24 gereğince $\mathbb{R}$ deki herhangi bir aralık

$$(0,1),[0,1),[0,1] \text{ ve } \{0\}$$

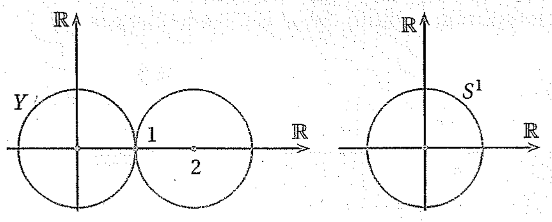
uzaylarından biri ile homeomorfiktir. $\mathbb{S}^1$ uzayı ile $(0,1),[0,1),[0,1]$ ve $\{0\}$ uzaylarının hiçbiri homeomorfik olmadığından $\mathbb{S}^1$ uzayı ile herhangi bir aralık homeomorfik olamaz.✔

ÇÖZÜM 7

a) Y ile $\mathbb{S}^1$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: Y \to \mathbb{S}^1$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f: Y\setminus\{(1,0)\} \to \mathbb{S}^1\setminus\{f((1,0))\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $\mathbb{S}^1\setminus\{f(x)\}$ bağlantılı ve $Y\setminus\{(1,0)\}$ bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{S}^1$ ile Y uzayları homeomorfik değildir. Şekil 13.28 ye bakınız.



Şekil 13.28

b) i) Y ile $(0,1)$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: Y \to (0,1)$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f: Y\setminus\{(-1,0)\} \to (0,1)\setminus\{f((-1,0))\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $Y\setminus\{(-1,0)\}$ uzayı bağlantılı ve

$$(0,1)\setminus\{f((-1,0))\}$$

uzayı bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece Y ile $(0,1)$ uzayları homeomorfik değildir.

ii) Y ile $[0,1)$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: Y \to [0,1)$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f: Y\setminus\{(-1,0),(3,0)\} \to [0,1\setminus\{f((-1,0)),f((3,0))\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $Y\setminus\{(-1,0),(3,0)\}$ uzayı bağlantılı ve

$$[0,1\setminus\{f((-1,0)),f((3,0))\}$$

uzayı bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece Y ile $[0,1)$ uzayları homeomorfik değildir.

iii) Y ile $[0,1]$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: [0,1] \to Y$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince $x \in (0,1)$ için

$$f: [0,1]\setminus\{x\} \to Y\setminus\{f(x)\}$$

bir homeomorfizmdir. $[0,1]\setminus\{x\}$ uzayı bağlantılı olmadığından Sonuç 13.33 gereğince $Y\setminus\{f(x)\}$ uzayıda bağlantılı değildir. O halde

$$f(x) = (1,0)$$

olmak zorundadır. (Aksi halde $Y\setminus\{f(x)\}$ bağlantılı olurdu.) Yani

$$f: [0,1]\setminus\{x\} \to Y\setminus\{(1,0)\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu durumda

$$f: [0,1]\setminus\{x,1\} \to Y\setminus\{(1,0),f(1)\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $[0,1]\setminus\{x,1\}$ nin iki bağlantılı birleşeni ve $Y\setminus\{(1,0),f(1)\}$ nin üç bağlantılı birleşeni olduğundan Teorem 13.48 gereğince bir çelişkidir. Böylece Y ile $[0,1]$ uzayları homeomorfik değildir.

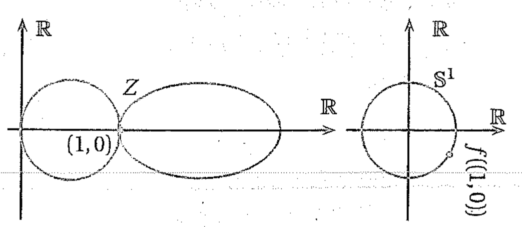
Alıştırma 24 gereğince $\mathbb{R}$ deki her hangi bir aralık $(0,1),[0,1),[0,1]$ ve $\{0\}$ uzaylarından biri ile homeomorfiktir. (i)-(iii) gereğince Y uzayı ile $(0,1),[0,1),[0,1]$ ve $\{0\}$ uzaylarının hiçbiri homeomorfik olmadığından Y uzayı ile herhangi bir aralık homeomorfik olamaz.✔

ÇÖZÜM 8

a) Z ile $\mathbb{S}^1$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: Z \to \mathbb{S}^1$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f: Z\setminus\{(1,0)\} \to \mathbb{S}^1\setminus\{f((1,0))\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $\mathbb{S}^1\setminus\{f(x)\}$ bağlantılı ve $Z\setminus\{(1,0)\}$ bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{S}^1$ ile Z uzayları homeomorfik değildir. (Şekil 13.29 e bakınız.)



Şekil 13.29

b) **i)** Z ile $(0,1)$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: Z\to(0,1)$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f: Z\setminus\{(-1,0)\}\to(0,1)\setminus\{f((-1,0))\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $Z\setminus\{(-1,0)\}$ uzayı bağlantılı ve

$$(0,1)\setminus\{f((-1,0))\}$$

uzayı bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece Z ile $(0,1)$ uzayları homeomorfik değildir.

ii) Z ile $[0,1)$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: Z\to[0,1)$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince

$$f: Z\setminus\{(-1,0),(5,0)\}\to[0,1\setminus\{f((-1,0)),f((5,0))\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $Z\setminus\{(-1,0),(3,0)\}$uzayı bağlantılı ve

$$[0,1\setminus\{f((-1,0)),f((5,0))\}$$

uzayı bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece Z ile $[0,1)$ uzayları homeomorfik değildir.

iii) Z ile $[0,1]$ in homeomorfik olduğunu varsayalım. $f: [0,1]\to Z$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda Sonuç 6.58 gereğince $x\in(0,1)$ için

$$f:[0,1]\setminus\{x\}\to Z\setminus\{f(x)\}$$

bir homeomorfizmdir. $[0,1]\setminus\{x\}$ uzayı bağlantılı olmadığından $Z\setminus\{f(x)\}$ uzayıda bağlantılı değildir. O halde

$$f(x)=(1,0)$$

dır. (Aksi halde $Z\setminus\{f(x)\}$ bağlantılı olurdu.) Yani

$$f:[0,1]\setminus\{x\}\to Z\setminus\{(1,0)\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu durumda

$$f:[0,1]\setminus\{x,1\}\to Z\setminus\{(1,0),f(1)\}$$

bir homeomorfizmdir. Bu ise, $[0,1]\setminus\{x,1\}$ nin iki bağlantılı birleşeni ve

$$Z\setminus\{(1,0),f(1)\}$$

nin üç bağlantılı birleşeni olduğundan Teorem 13.48 gereğince bir çelişkidir. Böylece Z ile $[0,1]$ uzayları homeomorfik değildir.

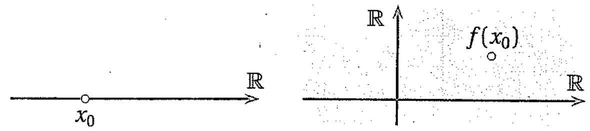
Alıştırma 24 gereğince ℝ deki her hangi bir aralık $(0,1),[0,1),[0,1]$ ve $\{0\}$ uzaylarından biri ile homeomorfiktir. (i)-(iii) gereğince Z uzayı ile

$$(0,1),[0,1),[0,1] \quad \text{ve} \quad \{0\}$$

uzaylarının hiçbiri homeomorfik olmadığından Z uzayı ile herhangi bir aralık homeomorfik olamaz.✔

ÇÖZÜM 9

ℝ ve $\mathbb{R}^2$ standart uzaylarının homeomorfik olduklarını varsayalım. Bu durumda bir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ homeomorfizmi vardır. $x_0\in\mathbb{R}$ olsun. Sonuç 6.58 gereğince $f:\mathbb{R}\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{f(x_0)\}$ bir homeomorfizmdir. Bu ise, $\mathbb{R}^2\setminus\{f(x_0)\}$ bağlantılı ve $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ bağlantılı olmadığından bir çelişkidir. Böylece ℝ ile $\mathbb{R}^2$ uzayları homeomorfik değildir. (Şekil 13.30 e bakınız.)✔



Şekil 13.30

ÇÖZÜM 10

$A\subseteq X$ sonlu olsun. Teorem 8.23 gereğince A bir T_1-uzayıdır. Diğer yandan, A sonlu olduğundan $\mathcal{T}_A=\mathcal{P}(A)$ dır. (Alıştırma 5 e bakınız.) Bu durumda Örnek 13.11 gereğince $(A,\mathcal{T}_A)$ bağlantılı değildir.✔

ÇÖZÜM 11

Örnek 13.12 gereğince $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ ve $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayları bağlantılı değildir. ℝ uzayı bağlantılı olduğundan Sonuç 13.33 gereğince $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sağ}})$ ve $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{sol}})$ uzayları ℝ ile homeomorfik değildir.✓

ÇÖZÜM 12

a) $\mathcal{T}_1 = \{(-\infty, x] | x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

dir. Bu durumda U kümesi hem açık hemde kapalı ise

$$U = \emptyset \text{ veya } U = \mathbb{R}$$

dir. Yani bu uzayda boş ve $\mathbb{R}$ den farklı hem açık hem kapalı hiç bir küme yoktur. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının bağlantılıdır.

b) $\mathcal{T}_2 = \{[x, \infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ uzayının kapalı kümelerinin kolleksiyonu

$$\mathcal{K}_1 = \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x] | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

dir. Bu durumda U kümesi hem açık hemde kapalı ise

$$U = \emptyset \text{ veya } U = \mathbb{R}$$

dir. Yani bu uzayda boş ve $\mathbb{R}$ den farklı hem açık hem kapalı hiç bir küme yoktur. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ uzayının bağlantılıdır.✓

ÇÖZÜM 13

a) $y \in f(X)$ olsun. Bu durumda $\{y\}$ ve $Y \setminus \{y\}$ kümeleri $(Y, \mathcal{P}(Y))$ uzayında açıktır. f sürekli olduğundan

$$f^{-1}(\{y\}) \text{ ve } f^{-1}(Y \setminus \{y\})$$

kümeleri $(X, \mathcal{T})$ uzayında açıktır. Üstelik,

$$\{y\} \cup Y \setminus \{y\} = Y \text{ ve } \{y\} \cap Y \setminus \{y\} = \emptyset$$

olduğundan

$$f^{-1}(\{y\}) \cup f^{-1}(Y \setminus \{y\}) = X \text{ ve } f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(Y \setminus \{y\}) = \emptyset$$

dir. Diğer yandan $y \in f(X)$ olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Böylece $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ dur. Bu durumda $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı olduğundan

$$f^{-1}(Y \setminus \{y\}) = \emptyset$$

olur. Bu durumda

$$f^{-1}(\{y\}) = X$$

olur. Yani her $x \in X$ için $f(x) = y$ dir. O halde f fonksiyonu sabitdir.

b) $\mathbb{R}$ standart uzayı bağlantılı ve $\mathbb{Z}$ ayrık uzay olduğundan (a) gereğince f sabit bir fonksiyon olur.✓

ÇÖZÜM 14

$(X, \mathcal{T}_1)$ in bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$X = U_1 \cup U_2 \text{ ve } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

olacak şekilde boş kümeden farklı $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_1$ kümeleri vardır. f bölüm fonksiyonu olduğundan

$$Y = f(X) = f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$$

dir. $y \in f(U_1) \cap f(U_2)$ olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(y) \cap U_1 \neq \emptyset \text{ ve } f^{-1}(y) \cap U_2 \neq \emptyset$$

dir.

$$f^{-1}(y) = (U_1 \cap f^{-1}(y)) \cup (U_2 \cap f^{-1}(y))$$

olduğundan

$$(U_1 \cap f^{-1}(y)) \quad \text{ve} \quad (U_2 \cap f^{-1}(y))$$

kümeleri $f^{-1}(y)$ nin bir ayrışımıdır. Bu ise $f^{-1}(y)$ nin bağlantılı olması ile çelişir. O halde $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$ dur. Böylece

$$f^{-1}(f(U_1)) = U_1$$

ve benzer şekilde

$$f^{-1}(f(U_2)) = U_2$$

dir. f bir bölüm fonksiyonu ve $f^{-1}(f(U_1))$ açık olduğundan $f(U_1)$ kümesi $(Y, \mathcal{T}_2)$ de açıktır. Benzer şekilde $f(U_1)$ kümesi de $(Y, \mathcal{T}_2)$ de açıktır. O halde $(Y, \mathcal{T}_2)$ uzayı bağlantılı değildir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $(X, \mathcal{T}_1)$ uzayı bağlantılıdır.✓

ÇÖZÜM 15

a) X sayılabilir olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ dir. Böylece $(X, \mathcal{T})$ ayrık uzay dır. Örnek 13.11 gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayı bağlantılı değildir. Böylece Teorem 13.68 gereğince $(X, \mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılı değildir.

b) X sayılabilir olmasın. X in yol bağlantılı olduğunu varsayalım. $a, b \in X$ ve $f : [0,1] \to X$ fonksiyonu a dan b ye bir yol olsun.

i) $f([0,1])$ kümesi sonlu ve

$$f([0,1]) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(\{a_1\}), f^{-1}(\{a_2\}), \cdots, f^{-1}(\{a_n\})$$

kümeleri boş olmayan kapalı ayrık kümeler dir ve $[0,1]$ aralığının açık bir örtüsünü oluştururlar. Bu ise $[0,1]$ uzayının bağlantılı olması ile çelişir. O halde $f([0,1])$ kümesi sonlu olamaz.

ii) $f([0,1])$ kümesi sayılabilir sonsuz olsun. Bu durumda

$$\mathcal{T}_{f([0,1])} = \mathcal{P}(f([0,1]))$$

dir. Diğer yandan Teorem 11.34 gereğince $f([0,1])$ kümesi kompakttır. Bu ise, Örnek 11.5 gereğince sonsuz bir ayrık uzay kompakt olmadığından bir çelişkidir. O halde $f([0,1])$ kümesi sayılabilir sonsuz olamaz.

(i) ve (ii) gereğince $f([0,1])$ kümesi sayılamazdır. $f([0,1])$ kümesi üzerindeki topoloji sayılabilir tümleyenler topolojisi ve $f([0,1])$ sayılamaz olduğundan Alıştırma 15 gereğince $f([0,1])$ kompakt değildir. Diğer yandan $f([0,1])$ kompakt olduğundan bu bir çelişkidir. O halde a ile b yi birleştiren bir yol yoktur.✓

ÇÖZÜM 16

X in en az iki elemanı olduğundan $a, b \in X$ noktaları vardır. Bu durumda

$$f(x) = d(a,x)$$

şeklinde tanımlı $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Alıştırma 17 gereğince süreklidir. Böylece (X,d) uzayı bağlantılı olduğundan Teorem 13.32 gereğince $f(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin bağlantılı bir alt kümesidir. Sonuç 13.30 gereğince $f(X)$ bir aralıktır. Diğeryandan

$$f(a) = d(a,a) = 0 \text{ ve } f(b) = d(a,b) > 0$$

olduğundan

$$[0, d(a,b)] \subseteq f(X)$$

dır. Bu durumda $f(X)$ sayılamazdır. O halde $f(X)$ sonlu değildir. Böylece X de sonlu değildir.✓

ÇÖZÜM 17

a) $\rho : X \to X \backslash \sim$ (doğal veya kanonik) izdüşüm fonksiyonu sürekli ve örtendir. Böylece $(X,\mathcal{T})$ uzayı bağlantılı olduğundan $\rho(X) = X\backslash \sim$ bölüm uzayı bağlantılıdır.

b) $\rho : X \to X \backslash \sim$ (doğal veya kanonik) izdüşüm fonksiyonu sürekli ve örtendir. Böylece $(X,\mathcal{T})$ uzayı yol bağlantılı olduğundan $\rho(X) = X\backslash \sim$ bölüm uzayı yol bağlantılıdır.✓

ÇÖZÜM 18

$x_0 \in X$ ve $f(x_0) = c$ diyelim.

$$U = \{x \in X \mid f(x) = c\} \text{ ve } V = \{x \in X \mid f(x) \neq c\}$$

olsun. $x_0 \in U$ olduğundan $U \neq \emptyset$ dur. Şimdi U ve V kümelerinin açık olduğunu gösterelim.

Önce U nun açık olduğunu gösterelim. $y \in U$ olsun. Bu durumda $y \in W$ ve f, W üzerinde sabit olacak şekilde bir $W \in \mathcal{T}$ vardır. $x \in W$ ise $x, y \in W$ olduğundan $f(x) = f(y)$ ve dolayısıyla $f(y) = c$ olduğundan $f(x) = c$ olur. Böylece $x \in U$ dur. O halde $W \subseteq U$ dur. Bu durumda her $y \in U$ için $y \in W$, $W \subseteq U$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{T}$ duğundan $U \in \mathcal{T}$ olur.

Şimdi de V nin açık olduğunu gösterelim. $y \in V$ olsun. Bu durumda $y \in W$ ve f, W üzerinde sabit olacak şekilde bir $W \in \mathcal{T}$ vardır. $x \in W$ ise $x, y \in W$ olduğundan $f(x) = f(y)$ olur. Dolayısıyla $f(y) \neq c$ olduğundan $f(x) \neq c$ olur. Böylece $x \in V$ dir. O halde $W \subseteq V$ dur. Bu durumda her $y \in V$ için $y \in W$, $W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{T}$ duğundan $V \in \mathcal{T}$ olur.

Diğeryandan

$$U \cup V = X, \quad U \cup V = \emptyset, \quad U \neq \emptyset$$

ve $(X,\mathcal{T})$ bağlantılı olduğundan $V = \emptyset$ olur. Bu durumda $U = X$ dir. O halde her $x \in X$ için $f(x) = c$ dir. Yani f sabit bir fonksiyondur.✓

Kaynakça

[1] Edmonton, A., General Topology, Addison Wesley Publishing Company 1970.

[2] Bourbaki, N., General Topology, Addison Wesley Publishing Company 1966.

[3] Bryant, V., Metric Spaces, Cambridge University Press 1985.

[4] Császár, A., General Topology, Adam Hilger Ltd. Bristol 1987.

[5] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Inc. Boston 1966.

[6] Fairchild, W. W. and Ionescutulcea, C., Topology, W. B. Saunders Company Philadelphia-London-Toronto 1971.

[7] Hocking, J. G. and Young G. S., Topology, General Publishing Company, Ltd., 30 19761.

[8] Lipschutz, L., General Topology, Schaum's outline Series 1965.

[9] Pitts, C. G. C., Introduction to Metric Spaces, Oliver and Body Edinburgh 1972.

[10] Sidney, A. M., Topology Without Tears, 2005.

[11] Steen, L. A. and J. Arthur Seebach, Jr., Counterexamples in Topology, Hold, Rinehart and Winston, Inc. New York 1970.

[12] Sutherland, W.A., Introduction to Metric and Topological Spaces, Oxford University Press 1975.

Dizin