TOPOLOJİ ÇALIŞMA SORULARI,

① $f : X \to Y$ bir fonksiyon, (Y, τ') bir top. uzay olsun.

$$\tau = \{ f^{-1}(G) \mid G \in \tau' \}$$

olduğuna göre (X, τ)'nun bir top. uzay old. gösteriniz.

② $X \neq \emptyset$, $p \in X$ olsun.

$\tau = \{X\} \cup \{ T \in \mathcal{P}(X) \mid p \notin T \}$ ailesinin X üzerinde bir top. old. gösteriniz.

③ X bir küme ve τ, X üzerinde sayılabilir tümleyenler topolojisi olsun. Λ, sayılabilir bir küme ve $\forall \alpha \in \Lambda$ için $U_\alpha \in \tau$ ise $\bigcap \{ U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \} \in \tau$ olduğunu gösteriniz.

④ (X, d) bir metrik uzay ve $\tau = \tau_d$, d ile belirlenen topoloji olsun. $\mathcal{U}$, X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere, $\mathcal{U} \subset \tau$ olduğunu gösteriniz.

⑤ $\mathcal{B} = \{ [p, q] \mid p \leq q,\ p, q \in \mathbb{Q} \}$ ailesinin, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz ve bu topolojinin,

i) $\mathcal{S} = \{ [p, q] \mid p < q,\ p, q \in \mathbb{Q} \}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde alttaban olduğu topoloji ile aynı olduğunu gösteriniz.

ii) $\mathcal{S}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olamayacağını gösteriniz.

(6) $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve $\mathcal{S}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5,6\}\}$ olmak üzere $\mathcal{S}$, X üzerinde bir topoloji alt tabanı mıdır? Eğer $\mathcal{S}$ bir alttaban ise, X üzerinde alttaban olduğu topolojiyi belirleyiniz.

(7) $X=\{a,b,c\}$, ve $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ o.ü. $\mathcal{N}(a)$, $\mathcal{N}(b)$, $\mathcal{N}(c)$ ve $\mathcal{N}(\{a,b\})$ komşuluk ailelerini belirleyiniz

(8) (X,τ) t.u, $\mathcal{B}(x)$, x'in bir komşuluklar tabanı ve $\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{B}'(x)\subset\mathcal{N}(x)$ ise, $\mathcal{B}'(x)$ ailesi de, x'in bir komşuluklar tabanıdır. Gösteriniz.

(9) (X,τ) t.u. ve $A\subset X$ açık ise $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ (?)

(10) $\mathring{A}'\neq(\overline{A})'$ olduğuna dair bir örnek veriniz.

(11) (X,τ) t.u. ve $A\subseteq X$ olsun.

$B=\{x\in X \mid A\in\mathcal{N}(x)\}$ ise $\mathring{A}=B$ olduğunu gösteriniz.

(12) $X=\{a,b,4,5,c\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{B}=\{\{4\},\{c,5\},\{a,b\}\}$ ailesinin taban olduğu topolojiyi bulunuz ve bu topolojiye göre,

$A=\{a,c,4\}$ kümesi için $\overline{A}$, A', $\mathring{A}$, δA ?

$\overline{A}=X$, $A'=\{b,5\}$, $\mathring{A}=\{4\}$, $\delta A=\{a,b,c,5\}$

$X = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde,

$\mathcal{S} = \{\{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,5\}\}$ ailesinin ürettiği topolojiyi bulunuz.

(14) $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi \Rightarrow \delta(A \cup B) = \delta A \cup \delta B$ (?)

(15) $A \cap \bar{B} = \phi$ ve $A \cup B$ açık ise $A \in \tau$'dur, kanıtlayınız.

(16) (X,τ) bir top. uzay ve X uzayında (a_n) dizisi

$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, b, b, \ldots)$ biçiminde ise,

$a_n \to b$'dir, gösteriniz.

(17) X üzerinde τ ve ϑ iki topoloji olsun.

$\vartheta \subset \tau \Rightarrow (x_n \xrightarrow{\tau} x) \Rightarrow (x_n \xrightarrow{\vartheta} x)$'dir, gösteriniz.

(18) (X,τ) t.u, $\mathcal{S}$, τ'nun bir alttabanı, (x_n), X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow (x_0 \in S \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $x_n \in S$'d

Kanıtlayınız.

(19) $f: (X,\tau) \to (Y,\vartheta)$ sürekli, $\tau \subset \tau'$, $\vartheta' \subset \vartheta$ ise

$f: (X,\tau') \to (Y,\vartheta')$ süreklidir, gösteriniz.

(20) (X,τ_1) ve (X,τ_2) top. uzayları ve $i: (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ birim fonk. verilsin.

i süreklidir $\Leftrightarrow \tau_2 \subset \tau_1$

Kanıtlayınız.

(21) (X,τ) ayrılabilir, $(Y,\mathcal{U})$ top-uzay, $f: X \to Y$ sürekli örten fonk- ise $(Y,\mathcal{U})$ da ayrılabilirdir, gösteriniz.

(22) Sürekli, açık ve örten bir fonksiyon, $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\vartheta)$ ol.
$(A\in\tau \Rightarrow f(A)\in\vartheta)$

Eğer $\mathcal{B}$ ailesi τ için bir taban ise,

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B\in\mathcal{B}\}$$

ailesi de, ϑ top. için bir tabandır, gösteriniz.

(23) (X,τ) top-uzay, $A\subset X$ olsun,

$\tau_A = \{U\cap A \mid U\in\tau\}$ ailesinin A üzerinde bir top. olduğ gösteriniz.

(24) $X=\{a,b,c,d,e\}$ üzerinde,

$\tau = \{\phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}, X\}$

ve $D=\{a,d,e\}$ olmak üzere, τ'nun D üzerine indirgediği τ_D topolojisini bulunuz.

(25) (X,τ) top-uzay, $A\subseteq B\subseteq X$ olsun.

$\tau_A = (\tau_B)_A$ olduğunu gösteriniz.

(26) $(X_1\times X_2, \mathcal{U} = \tau_1\times\tau_2)$ çarpım top. uzayı, $A = A_1\times A_2 \subset X_1\times X_2$ olsun. A yoğundur $\Longleftrightarrow$ A_1, X_1'de ve A_2, X_2'de yoğundur

Gösteriniz.