GENEL TOPOLOJİ

Gözden geçirilmiş
4. Baskı

Prof. Dr. Ali Bülbül

Hacettepe Üniversitesi Öğretim Üyesi

Ankara - 2014

GENEL TOPOLOJİ
Gözden Geçirilmiş 4. Baskı
Prof.Dr. Ali BÜLBÜL
bulbul@hacettepe.edu.tr

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM FAKÜLTESİ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ BÖLÜMÜ

ISBN: 978-975-491-386-6

Kitap İsteme Adresi
Hacettepe Üniversitesi
Kitap Satış Ofisi 06100, Sıhhiye/Ankara
Tel: (0312) 305 14 87

1. Baskı: 1000 Adet
2. Baskı: 750 Adet
3. Baskı: 500 Adet

Hacettepe Üniversitesi tarafından Hacettepe Üniversitesi Basımevi'ne
750 adet bastırılmıştır.

Sevgili Annem'in anısına,

ÖNSÖZ

Birinci baskısı 1994 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi yayınları arasında çıkan ve kısa sürede biten bu kitabın, yeni baskısını yapmak, tüm taleplere rağmen bugüne kadar mümkün olamamıştır. On yılı aşkın bir süre sonra da olsa, bazı düzeltmeler yapılarak ve "Tam Metrik Uzaylar ve Tamlaştırma" başlıklı yeni bir bölüm eklenerek, bütünüyle yeniden yazılan bu kitabın ikinci baskısını sevgili öğrencilerimize ve konu ile ilgilenen değerli okuyucularımıza nihayet sunabilmiş olmaktan büyük mutluluk duyuyorum.

Bu kitap esas itibarı ile, 1984–1999 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesinde verdiğim ve 2000 yılından bu yana da Hacettepe Üniversitesinde vermekte olduğum lisans düzeyindeki Genel Topoloji dersinin konularını kapsamaktadır. Ancak, yer yer ayrıntıları derste yapılamayan bazı konularla (ağlar, filtreler, vb.), Parakompaktlık ve Metriklenebilme Teoremleri ile Düzgün Uzaylar gibi lisans düzeyini aşan konulara da kısaca yer verilmiştir.

Amaç, Genel Topolojinin temel kavramlarını ve standart konularını tanıtmaktır. Özellikle hedeflenen amaç doğrultusunda, az da olsa bir katkı yapabilmiş olmak beni mutlu edecektir.

Bu kitabın birinci baskısının provalarını özenle okuyarak değerli uyarılarda bulunan, ancak maalesef şimdi aramızda bulunmayan çok değerli meslektaşım Prof. Dr. Doğan Çoker'i burada bir kez daha saygı ile anıyorum. Yazımı sırasında gereksinim duyduğum her türlü teknik yardımın yanında, bu baskının provalarını başından sonuna kadar dikkatle okuyarak, yazım hatalarının düzeltilmesini sağlayan bölümümüz öğretim görevlilerinden Dr. Şenol Dost'a teşekkür borçluyum. Ayrıca, bana her zaman huzurlu bir çalışma ortamı sağlayan eşime ve çocuklarıma da bir kez daha içtenlikle teşekkür ediyorum.

A. B.

Beytepe, Ankara,
Eylül 2004

YENİ BASKININ ÖNSÖZÜ

Bu baskı, birkaç küçük düzeltme dışında bir önceki baskı ile aynıdır. Kitabın tüm okuyucularına yararlı olmasını dilerim.

A. B.

Beytepe, Ankara,
Eylül 2014

BAZI SEMBOLLER

$\forall$:	her
$\exists$:	vardır
: veya ö.k. :	öyle ki
(a) $\Rightarrow$ (b) :	(a) varsa (b) vardır.
(a) $\Leftarrow$ (b) :	(b) varsa (a) vardır.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) :	(a) ve (b) birbirine denktir. Diğer bir ifade ile, (a)'nın olması için gerek ve yeter koşul (b) 'nin olmasıdır.
$:=$:	tanım olarak eşittir.
(a): $\Leftrightarrow$ (b) :	eşitliğin sol tarafındaki ifade (a), eşitliğin sağ tarafındaki ifade (b) ile tanımlanmıştır.
$\|X\|$:	X kümesinin gücü
$\mathcal{P}(X)$:	X'in güç kümesi veya kuvvet kümesi
(X, d) :	metrik uzay
(X, τ) :	topolojik uzay
τ_d :	d metriği ile üretilen metrik topoloji
τ_D :	ayrık (diskret) topoloji
τ_t :	ilkel (trivial) topoloji
τ_{BSO} :	bütünleyenleri sonlu kümeler topolojisi
τ_{BSA} :	bütünleyenleri sayılabilir kümeler topolojisi
$\mathcal{U}_\tau(x)$:	τ topolojisine göre x noktasının komşuluk ailesi
$\mathcal{B}$:	topolojik uzayın (topolojinin) tabanı
$\mathcal{B}(x)$:	topolojik uzayın x noktasındaki komşuluk tabanı
$(X, \mathfrak{D})$:	düzgün uzay
$\square$:	kanıtların sonu bu sembol ile belirtilecektir. Eğer kanıt verilmeyecekse bu sembol doğrudan ifadenin sonuna konulacaktır.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Analizdeki önemli temel kavramlardan iki tanesi, süreklilik ve yakınsaklıktır. Bu kavramların tanımları yakından incelendiğinde her ikisinde de esas rolü, uzayın noktaları arasındaki uzaklık kavramının üstlendiğini görürüz. Gerçekten hatırlanacağı gibi, **R**'de süreklilik ve yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bir fonksiyon ve $x_o \in \mathbf{R}$ bir nokta olsun. "Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı, $|x - x_o| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu f fonksiyonuna x_o noktasında süreklidir" denir.

Bunun gibi, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **R**'de bir dizi ve $x_o \in \mathbf{R}$ olsun. "Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için bir $n_o = n_o(\varepsilon)$ doğal sayısı, her $n \geq n_o$ için $|x_n - x_o| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bulubiliyorsa, bu $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisine x_o noktasına yakınsar" denir.

M. Fréchet 1906 yılında doktora tezi ile bugün metrik uzay olarak bilinen kavramı matematiğe kazandırdığında, oradaki (soyut) uzaklık kavramı, Öklid uzayındaki uzaklık kavramının özelliklerini sağlayacak şekilde verildiğinden, süreklilik ve yakınsaklık kavramları yukarıdaki tanımlara paralel olarak genel metrik uzaylara kolayca aktarılabilmiştir. Ancak en genel halde, yani metrik olmayan uzaylarda bu kavramlar nasıl tanımlanacaktı? Nitekim çok geçmeden herhangi bir küme üzerinde bu kavramları tanımlayabilmek için, bu kümenin "komşuluk" adı verilen ve belirli özellikleri sağlayan (komşuluk aksiyomları) altkümelerin yeterli olacağı anlaşıldı. Böylece "topolojik uzay" kavramı tanımlanmış oldu (F. Hausdorff, 1914).

Bu kitapta, topolojik uzay ve ona bağlı bir kısım temel kavramlar verildikten sonra, en genel halde topolojik uzaylar arasındaki "fonksiyonların sürekliliği" ve topolojik uzaylardaki "dizilerin yakınsaklığı" incelenecektir. Bu arada, topolojik uzaylarda yakınsaklık teorisini işlemek için, metrik uzaylardakinin aksine, dizilerin yeterli olmadığı ve bu teorinin amaca uygun işlenebilmesi için dizi kavramının genelleştirilmesi gerektiği görülecek ve "ağ" ve "filtre" adı verilen iki yeni kavram tanıtılacaktır.

İlk üç yarıyılda özellikle soyut matematik ve analiz dersleri ile ilgili temel bilgileri alan matematik lisans öğrencileri bu kitabı rahatlıkla izleyebilmelidirler. Kitabın içeriği, öğrencilerin düzeyi ve haftalık ders saatlerine de bağlı olmakla birlikte, Bölüm 11, Bölüm 12 ve Bölüm 13 ile diğer bölümlerdeki belki bazı ayrıntılar dışında matematik lisans öğrencileri için dördüncü yarıyıldan itibaren verilebilecek olan bir yarıyıl süreli Genel Topoloji derslerinin standart konularını kapsamaktadır.

Konuları toplu olarak göz önüne alınırsa, kümeler teorisi ile ilgili temel bilgileri içeren ilk bölümden sonra ikinci bölüm, topolojik uzaylara model oluşturduğu için metrik uzaylara ayrılmış, süreklilik ve yakınsaklık kavramları önce orada verilmiştir. Daha sonra sırasıyla, topolojik uzaylar, tabanlar ve sayılabilirlik, sürekli fonksiyonlar, çarpım ve bölüm uzayları, yakınsaklık, ayırma aksiyomları, kompaktlık, bağlantılılık, parakompaktlık ve metriklenebilme, tam metrik uzaylar ve tamlaştırma ve son olarak da düzgün uzaylar olmak üzere genel topolojinin başlıca konuları incelenmiştir.

Bu kitabın amacı, genel topolojinin temel kavramlarını tanıtmak ve başlıca teoremlerini kanıtları ile vermektir. Bu nedenle hemen bütün kanıtlamalar ayrıntıları ile verilmiş, tersi doğru olmayan ifadelere "uyarı"larla dikkat çekilmiş ve olabildiğince aksi örnekler verilmiştir. Ayrıca her bölümün sonunda, bir kısmı tamamlayıcı bilgiler niteliğinde olmak üzere yeteri kadar problem bırakılmış ve böylece konunun daha iyi anlaşılması sağlanmaya çalışılmıştır. Bu sayede öğrencilerin hem ileride alacakları üst düzey matematik dersleri için gerekli temel bilgileri öğrenmeleri; ve hem de, kendileri için çok önemli olan, dedüktif çıkarım yolu ile kanıtlama becerilerini geliştirmeleri sağlanmış olacaktır.

BÖLÜM 1

KÜMELER TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Bu ilk bölüm, daha sonraki bölümlerde sıkça kullanılacak olan kümeler teorisi ile ilgili temel bilgilere ayrılmıştır.

A. Kümeler

Matematikte tanımsız olarak verilen bazı temel kavramlar vardır. Bunlardan biri de kümedir. Küme denilince matematikte sezgisel olarak, eleman veya nokta adı verilen belirli bir takım objelerin (örneğin, sayıların veya fonksiyonların veya sıraların veya insanların vb.) bir topluluğu anlaşılır. Eğer a, bir A kümesinin elemanı ise $a\in A$; eğer elemanı değilse $a\notin A$ şeklinde yazılır. A bir küme, P bir özellik ve $a\in A$ ise a elemanının P özelliğini sağladığı, P(a) ile ifade edilir. Bir A kümesinin, P özelliğini sağlayan elemanlarının kümesi, $\{a\in A \mid P(a)\}$ ile gösterilir.

Bazı özel kümelerin yerleşmiş gösterimleri vardır. Örneğin:

$\varnothing$: Boş küme
N : Doğal sayılar kümesi
$\mathbf{N}_0$: = {0, 1, 2, 3, ... }
Z : Tam sayılar kümesi
Q : Rasyonel sayılar kümesi
R : Reel sayılar kümesi
$\mathbf{R}^+$: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbf{R}^n$: n-boyutlu Öklid uzayı
C : Kompleks sayılar kümesi

B. Kümeler İle Yapılan İşlemler

Herhangi A ve B kümeleri için,

$A \subset B$ $:\Leftrightarrow$ $\forall\, a\in A$ için $a\in B$ ise A, B'nin bir altkümesidir.
$A \supset B$ $:\Leftrightarrow$ $\forall\, b\in B$ için $b\in A$ ise A, B'nin bir üstkümesidir.
$A = B$ $:\Leftrightarrow$ $A \subset B$ ve $A \supset B$ ise A kümesi ile B kümesi aynıdır.
$A - B := \{ a \in A \mid a \notin B \}$, A fark B kümesi,
$A \cap B := \{ a \mid a \in A \text{ ve } a \in B \}$, A ile B'nin arakesiti veya kesişimi
$A \cup B := \{ a \mid a \in A \text{ veya } a \in B \}$, A ile B'nin birleşimi

şeklinde tanımlanırlar.

X bir küme ve $A\subset X$ bir altküme ise $X-A$ fark kümesine, A'nın X'e göre bütünleyeni denir ve bazen $\mathcal{C}_X A$ veya yanlış anlaşılmayacak ise kısaca $\mathcal{C}A$ ile gösterilir.

X bir küme, I bir indis kümesi ve her $i\in I$ için A_i, X'in bir altkümesi ise

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{ x \in X \mid x \text{ en az bir } A_i\text{'nin elemanıdır} \}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{ x \in X \mid x \text{ her bir } A_i\text{'nin elemanıdır} \}$$

şeklinde tanımlanırlar. Özel olarak, $\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing$ ve $\bigcap_{i\in\varnothing} A_i = X$ olduğu kanıtlanabilir.

Eğer $\mathcal{A} := \{A_i \mid i\in I\}$ ise $\bigcup_{i\in I} A_i$ ve $\bigcap_{i\in I} A_i$ yerine bazen sırasıyla, $\bigcup\mathcal{A}$ ve $\bigcap\mathcal{A}$ yazılır.

X bir küme, her $i\in I$ için $A_i \subset X$ ve $B \subset X$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{a)} & X - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (X - A_i) \\ \textbf{b)} & X - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (X - A_i) \end{array}\right\} \quad \text{De Morgan kuralları}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{c)} & B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (B\cap A_i) \\ \textbf{d)} & B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (B\cup A_i) \end{array}\right\} \quad \text{Dağılma kuralları}$$

Bir X kümesinin bütün altkümelerinin kümesi $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilir ve buna X'in *güç kümesi* veya *kuvvet kümesi* adı verilir.

X ve Y gibi iki kümenin *çarpım kümesi* veya *kartezyen çarpımı*,

$$X\times Y := \{ (x, y) \mid x\in X \text{ ve } y\in Y \}$$

şeklinde sıralı (x, y) ikililerinin kümesi olarak tanımlanır.

C. Fonksiyonlar

X ve Y iki küme olmak üzere X×Y'nin aşağıdaki iki özelliği sağlayan her $f \subset X\times Y$ altkümesine X kümesinden Y kümesine bir *fonksiyon* denir ve $f : X \to Y$ şeklinde yazılır:

(i) Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

(ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$ dir.

$(x, y) \in f$ yerine alışıldığı gibi $y = f(x)$ yazılır ve fonksiyonlar genel olarak x bilindiğinde $f(x)$'i belirlemeye yarayan bir kural olarak bilinir. Buradaki X kümesine, f fonksiyonunun *tanım kümesi*, Y kümesine de *değer kümesi* denir.

Özel olarak doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan, yani $f : \mathbf{N} \to X$ şeklindeki her fonksiyona X'de bir *dizi* denir. $f(n) := x_n$ ile gösterilerek, X'de bir dizi çoğu kez $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ veya kısaca (x_n) şeklinde yazılır.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x) = f(y)$ olduğunda $x = y$ elde ediliyorsa, bu f fonksiyonuna *bire-bir* (injektif) fonksiyon; eğer her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, böyle bir f fonksiyonuna da *örten* (sürjektif) fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu *bire-bir ve örten* ise böyle bir f fonksiyonuna bijektif fonksiyon adı verilir. Her A kümesi için $i_A : A \to A$, $i_A(a) = a$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyona, A kümesi üzerinde *özdeşlik fonksiyonu* denir.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. $g : A \to Y$, $g(x) := f(x)$ ile tanımlanan g fonksiyonuna, f fonksiyonunun A kümesine *daraltılmışı* (veya kısıtlanmışı) denir ve $f|A$ ile gösterilir.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset Y$ ise $f(A) := \{ f(a) \mid a \in A \}$ kümesine, A kümesinin f fonksiyonu altındaki *resim (görüntü) kümesi* ve $f^{-1}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ kümesine de, B'nin f altındaki *ters resim kümesi* adı verilir. Böylece her $f : X \to Y$ fonksiyonuna $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ şeklinde başka bir fonksiyon karşılık getirilmiş olur. $f^{-1}(\{y\})$ yerine kısaca $f^{-1}(y)$ yazılır. Eğer f fonksiyonu bire-bir ve örten ise her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ tek elemanlı bir küme olur. Bu durumda her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak biçimde bir tek $x \in X$ vardır ve $x = f^{-1}(y)$ yazılır. Bu şekilde elde edilen $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonuna *f'nin ters fonksiyonu* denir.

Eğer $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve her $i \in I$ için $A_i \subset X$ ve $B_i \subset Y$ iseler;

a) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

c) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

d) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

sağlanırlar.

e) Eğer $f : X \to Y$ bire-bir ise her A, B$\subset$X için $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$ dir.

f) Eğer $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ise her $B\subset Y$ için $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ dir. Fakat, eğer f bire-bir ve örten ise her $A \subset X$ için $f(X - A) = Y - f(A)$ sağlanır. Ayrıca,

g) Genel olarak, $A \subset f^{-1}(f(A))$ ve eğer f bire-bir ise $A = f^{-1}(f(A))$ dır.

h) Genel olarak, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ve eğer f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$ dir.

j) Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y\to Z$ herhangi iki fonksiyon iseler bunların *bileşkesi*, $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ şeklinde tanımlanır. Bunlara kuvvet kümeleri üzerinde karşılık gelen fonksiyonlar için $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ sağlanır.

D. Bir Küme Ailesinin Kartezyen Çarpımı

I bir indis kümesi ve her i$\in$I için X_i bir küme olsun. $(X_i)_{i\in I}$ küme ailesinin kartezyen çarpımı,

$$\prod_{i\in I} X_i := \{\, x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;\mid\; x(i) \in X_i,\ \forall\, i\in I \,\}$$

ile tanımlanır. x fonksiyonunun i$\in$I deki değeri $x(i) := x_i \in X_i$ ile gösterilir ve buna x'in *i. koordinatı* (veya i. bileşeni) denir. x noktası bileşenleri ile

$x = (x_i)_{i\in I}$ şeklinde yazılır. X_i kümesine de $\prod_{i\in I} X_i$ çarpım kümesinin *i. çarpanı* adı verilir. Eğer her $i\in I$ için $X_i = X$ ise $\prod_{i\in I} X_i$ yerine X^I yazılır.

Herhangi bir $k\in I$ için

$$p_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k \ , \quad p_k(x) = x_k$$

ile tanımlanan fonksiyona *k. izdüşüm fonksiyonu* (veya k. projeksiyon) adı verilir.

E. Bağıntılar

X bir küme olmak üzere, X×X'in her $R \subset X\times X$ altkümesine X kümesinde bir *bağıntı* denir. R ve S, X üzerinde iki bağıntı iseler

$$S \circ R := \{ (x, y) \in X\times X \mid \exists\, z \in X : (x, z) \in R \text{ ve } (z, y) \in S \}$$

$$R^n := R \circ R^{n-1}, \quad (n \geq 2) \quad \text{ve}$$

$$R^{-1} := \{(x, y) \in X\times X \mid (y, x) \in R \}$$

şeklinde tanımlanırlar.

$\Delta := \{(x, y) \in X\times X \mid x = y \}$ kümesine X×X'in *köşegeni* adı verilir. Eğer $(x, y)\in R$ ise bu durum bazen $x\, R\, y$ şeklinde de yazılır.

X üzerindeki bir R bağıntısı, eğer

(i) $\Delta \subset R$ özelliğine sahip ise bu bağıntıya *yansıma* özelliğine sahip,

(ii) $R = R^{-1}$ özelliğine sahip ise bu bağıntıya *simetrik*,

(iii) $R \circ R \subset R$ özelliğine sahip ise bu bağıntıya *geçişme* özelliğine sahip,

(iv) $R \cap R^{-1} = \Delta$ özelliğine sahip ise bu bağıntıya *ters simetri* (anti-simetri) özelliğine sahip bağıntı denir.

Bir X kümesi üzerindeki bir R bağıntısı (i)-(iii) özelliklerinin her üçüne de sahip ise bu R bağıntısına bir *denklik bağıntısı* denir. R, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $[x]:=\{\, y\in X \mid (x, y)\in R \,\}$ şeklinde tanımlanan kümeye, $x\in X$ elemanının bu denklik bağıntısına göre *denklik sınıfı* denir. Bu şekildeki denklik sınıflarının kümesi $X/R := \{\, [x] \mid x\in X \,\}$ ile gösterilir ve bu X/R kümesine, X'*in* R *bağıntısına göre bölüm kümesi* adı verilir. Ayrıca

$$q : X \to X/R , \quad q(x) := [x]$$

ile tanımlanan q fonksiyonuna da *bölüm fonksiyonu* denir.

Her $f : X \to Y$ fonksiyonu aşağıdaki gibi bir q örten, bir $\overline{f}$ bire-bir ve örten ve bir de j bire-bir fonksiyonuna ayrılabilir. Gerçekten, eğer R, X üzerinde

$$x \, R \, y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

ile tanımlanan denklik bağıntısı ise

$$q(x) := [x] , \quad \overline{f}([x]) := f(x) \quad \text{ve} \quad j(f(x)) := f(x)$$

olmak üzere,

$$X \xrightarrow{q} X/R \xrightarrow{\overline{f}} f(X) \xrightarrow{j} Y ,$$

fonksiyonları için $f = j \circ \overline{f} \circ q$ sağlanır.

F. Sıralama Bağıntıları

X kümesi üzerinde yukarıda verilen (i), (iii) ve (iv) özelliklerini sağlayan bir R bağıntısına X üzerinde bir *yarı-sıralama bağıntısı* ve böyle bir bağıntı ile X kümesine, yani (X,R) ikilisine de *yarı-sıralanmış bir küme* denir. Örneğin reel sayılar kümesi üzerindeki $\leq$ bağıntısı bir yarı-sıralama bağıntısıdır. Bu nedenle reel sayılardan alışıldığı için bir yarı-sıralama bağıntısı genel olarak $\leq$ işareti ile gösterilir.

X kümesi üzerindeki bir yarı-sıralama bağıntısı, her $x, y\in X$ çifti için $x \leq y$ veya $y \leq x$ özelliğini sağlıyorsa, bu yarı-sıralama bağıntısına bir *tam sıralama* (veya *lineer sıralama*) *bağıntısı* ve böyle bir bağıntı ile X kümesine, yani $(X,\leq)$ ikilisine de *tam sıralanmış bir küme* adı verilir. Örneğin $(\mathbf{R}, \leq)$ tam sıralanmış bir kümedir.

X kümesi üzerindeki her $\leq$ yarı-sıralama bağıntısına, $<$ ile gösterilen ve

$$x < y \ :\Leftrightarrow \ x \leq y \ \text{ ve } \ x \neq y$$

ile tanımlanan bir bağıntı karşılık getirilebilir. Bu $<$ bağıntısı, yansıma ve simetri özelliklerine sahip değildir. Ancak geçişme özelliğine sahiptir. Ayrıca her $x, y \in X$ için $x < y$ ise $y \not< x$ dir. Böyle bir bağıntıya bazen *kesin sıralama bağıntısı* denir.

$(X, \leq)$ yarı-sıralanmış bir küme ve $A \subset X$ bir altküme olsun. Eğer,

a) $x_o \in X$ ve her $x \in X$ için $x_o \leq x$ ise bu x_o elemanına X'in *en küçük elemanı* denir ve "minX" ile gösterilir.
b) $x_1 \in X$ ve her $x \in X$ için $x \leq x_1$ ise bu x_1 elemanına X'in *en büyük elemanı* denir ve "maksX" ile gösterilir.
c) $y_o \in X$ olsun. Eğer $x \leq y_o$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $x = y_o$ ise bu y_o elemanına X 'in bir *mimimal elemanı* denir.
d) $y_1 \in X$ olsun. Eğer $y_1 \leq x$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $y_1 = x$ ise bu y_1 elemanına X'in bir *maksimal elemanı* denir.
e) $x_o \in X$ ve her $x \in A$ için $x_o \leq x$ ise bu x_o elemanına A kümesinin bir *alt sınırı* denir.
f) $x_1 \in X$ ve her $x \in A$ için $x \leq x_1$ ise bu x_1 elemanına A kümesinin bir *üst sınırı* denir.
g) $\{x \in X \mid a \leq x, \forall a \in A\}$ kümesinin, varsa en küçük elemanına, A kümesinin *supremumu* denir ve supA ile gösterilir. Kolayca görülebileceği gibi, bir kümenin supremumu (eğer varsa) tektir. Eğer $\sup A \in A$ ise supA ile A'nın en büyük elemanı maksA aynıdır.
h) $\{x \in X \mid x \leq a, \forall a \in A\}$ kümesinin, varsa en büyük elemanına, A kümesinin *infimumu* denir ve infA ile gösterilir. Kolayca görülebileceği gibi, bir kümenin infimumu (eğer varsa) tektir. Eğer $\inf A \in A$ ise infA ile A'nın en küçük elemanı minA aynıdır.

Yarı-sıralanmış bir $(X, \leq)$ kümesinin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı varsa, bu X kümesine *iyi sıralanmıştır* denir. Bu durumda $\leq$ bağıntısına da bir *iyi sıralama bağıntısı* adı verilir. Doğal sıralamaları ile göz önüne alındığında, örneğin **N** doğal sayılar kümesi iyi sıralanmış bir kümedir, fakat **R** reel sayılar kümesi öyle değildir. İyi sıralanmış her küme tam sıralanmıştır (neden?).

j) $(X, \leq)$ tam sıralanmış bir küme ise kısalık için,

$[a, b] := \{ x \in X \mid a \leq x \leq b \}$

$[a, b) := \{ x \in X \mid a \leq x < b \}$

$(a, b] := \{ x \in X \mid a < x \leq b \}$

$(a, b) := \{ x \in X \mid a < x < b \}$

$(-\infty, b] := \{ x \in X \mid x \leq b \}$

$[a, \infty) := \{ x \in X \mid x \geq a \}$

ile gösterilirler.

$(X,\leq)$ yarı-sıralanmış bir küme olsun. Eğer X'in her sonlu altkümesinin bir supremumu ve bir infimumu varsa, bu $(X, \leq)$ yarı-sıralanmış kümesine bir *kafes* (*latis*) adı verilir. İki elemanlı her $\{x, y\}$ altkümesi için $x \vee y := \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ ile tanımlanır. Ayrıca $\sup\emptyset = 0$ ve $\inf\emptyset = 1$ ile gösterilir ve bu iki özel elemanın X'in sırasıyla en küçük ve en büyük elemanları olduğu görülür.

$(X, \leq)$ bir kafes olsun. Eğer X'in her altkümesinin bir supremumu ve bir infimumu varsa, bu X kümesine bir *tam kafes* denir.

Bazı kaynaklarda kafes tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir: $(X, \leq)$ yarı-sıralanmış bir küme olsun. Eğer X'in iki elemanlı her alt kümesinin bir supremumu ve bir infimumu varsa, bu X kümesine bir kafes denir. Tanımı böyle verilen bir kafesin en küçük ve en büyük elemanlarının bulunması gerekmez (bkz. [1], s. 6).

G. Zorn Lemması

Yarı-sıralanmış bir $(X,\leq)$ kümesinin tam sıralanmış her altkümesinin bir üst sınırı varsa, X'in bir maksimal elemanı vardır. □

Zorn Lemması kümeler teorisinin temel aksiyomlarından birisidir ve aşağıda ifadeleri verilen, Zermelo İyi Sıralama Teoremi ile Seçme Aksiyomuna denktir.

H. Zermelo İyi Sıralama Teoremi

Her küme iyi sıralanabilir. □

I. Seçme Aksiyomu

$(A_i)_{i\in I}$, $(I \neq \varnothing)$ *boş olmayan ve ikişer ikişer ayrık*[*)] *olan kümelerin bir ailesi ise*

$$f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i\,,\ \ f(i) \in A_i$$

şeklinde bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyona "seçme fonksiyonu" denir. □

Bu ifade ile, bir küme ailesinin kartezyen çarpımı karşılaştırılırsa, boş olmayan kümelerin bir $(A_i)_{i\in I}$, $(I \neq \varnothing)$ ailesi için $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ olur.

J. Kardinal Sayılar

X ve Y gibi iki küme arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa bu iki kümeye *eş güçlüdür* denir. "Kardinal sayılar" adı verilen öyle kümeler vardır ki, her X kümesi $|X|$ ile gösterilen bir tek *kardinal sayı* ile eş güçlüdür. Bu $|X|$ kardinal sayısına X kümesinin *gücü* denir.

Eğer $f : X \to Y$ şeklinde bire-bir bir fonksiyon varsa, $|X| \le |Y|$ olarak tanımlanır. Her X kümesi için daima $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ sağlanır.

N doğal sayılar kümesinin gücü $|\mathbf{N}| = \aleph_0$ ile gösterilir. Eğer bir X kümesi için $|X| \le \aleph_0$ ise bu X kümesine *sayılabilir küme*; aksi halde *sayılamaz küme* adı verilir. Buna göre, **Q** rasyonel sayılar kümesi sayılabilir bir küme,

---

*) Bu ifadedeki "ikişer ikişer ayrık olma" koşulu atılarak elde edilen yeni ifade de Seçme Aksiyomuna denktir. Bkz. [3], s. 23, Theorem 9.2.

fakat **R** reel sayılar kümesi sayılabilir bir küme değildir. **R**'nin gücü c ile gösterilir ve buna *kontinuum* adı verilir.

A ve B iki küme ve $A^B := \{ f \mid f: B \to A \}$ olmak üzere, $|A|^{|B|} := |A^B|$ ile tanımlanır. A bir küme ve $\mathbf{2}:=\{0, 1\}$ kümesi olmak üzere $2^{|A|}$ kardinal sayısı ayrı bir önem taşır.

$$2^{|A|} = |\mathbf{2}^A| = |\{0, 1\}^A|,$$

diğer bir ifade ile, $2^{|A|}$, $\{ f \mid f : A \to \{0, 1\}\}$ kümesinin gücü olarak tanımlandığından $2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$ dır. Gerçekten her $f\in \mathbf{2}^A$ için tek türlü belirli bir $B:=\{x\in A \mid f(x)=1\}\in \mathcal{P}(A)$ altkümesini karşılık getiren fonksiyon $\mathbf{2}^A$ ile $\mathcal{P}(A)$ arasında bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Bu f fonksiyonuna B'nin *karakteristik fonksiyonu* denir.

Özel olarak, $2^{\aleph_0} = c$ dir.

K. Tümevarım Yöntemi

Aşağıdaki teoremin ifadesi *tümevarım yöntemi* veya *matematiksel indüksiyon prensibi* olarak bilinir. Onu kanıtlamak için **N** doğal sayılar kümesinin iyi sıralanmış bir küme olduğu gerçeğini kullanıyoruz.

Teorem 1.1. *P(n), n = 1,2, ... için doğru veya yanlış olan bir ifade olsun. Eğer*

a) P(1) doğru ve

b) P(n)'nin doğru olması, P(n + 1)'in doğru olması sonucunu veriyorsa,

o taktirde her $n \in N$ için P(n) doğrudur.

Kanıt. $F := \{ n \in \mathbf{N} \mid P(n) \text{ yanlıştır} \}$ olarak tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise F kümesinin m ile göstereceğimiz bir en küçük elemanı vardır. a)'dan dolayı $m \neq 1$ dır. O halde $m>1$ olduğundan $m-1\in \mathbf{N}$ ve $m-1<m$ olduğundan $m-1\notin F$ dir. Şu halde P(m–1) doğrudur. b)'den dolayı buradan P(m) doğru olmalıdır. Bu ise $m\in F$ olması ile çelişir. Bu nedenle $F = \emptyset$ ve dolayısıyla her $n\in \mathbf{N}$ için P(n) doğrudur. □

BÖLÜM 2

METRİK UZAYLAR

Bu bölümde topolojik uzaylara model oluşturduğu için metrik uzaylardaki bazı temel kavramlar ve özellikle süreklilik ve yakınsaklık ile ilgili özet bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1. X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan her $d : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* adı verilir. $x, y, z \in X$ için

M-1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

M-2) $d(x, y) = d(y, x)$, (simetri)

M-3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (üçgen eşitsizliği)

Üzerinde bir d metriği tanımlanmış olan X kümesine bir *metrik uzay* denir ve (X, d) ile gösterilir.

Uyarı 2.1. Tanım 2.1'de M-1) koşulu yerine,

$$\text{M-1)}^* : \quad x = y \Rightarrow d(x, y) = 0,$$

yazılarak elde edilen M-1)*, M-2), M-3) koşullarını sağlayan d fonksiyonuna ise X üzerinde bir *yarı-metrik* adı verilir.

Örnek 2.1. a) $\mathbf{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\ldots,n\}$ kümesi üzerinde

$$e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

bir metriktir. Bu e metriğine, $\mathbf{R}^n$'nin *doğal metriği veya Öklid metriği* ve bununla $\mathbf{R}^n$ kümesine de n-*boyutlu Öklid uzayı* adı verilir. Aksi açıkça belirtilmediği sürece, metrik uzay olarak $\mathbf{R}^n$, ($n \geq 1$) bu metrik ile gözönüne alınır.

n = 1 için $\mathbf{R}^1$ yerine kısaca $\mathbf{R}$ yazılır. Bu halde $\mathbf{R}$'nin doğal metriği e, $e(x, y) = |x - y|$, $(x, y \in \mathbf{R})$ şeklinde reel doğru üzerinde bilinen ''*mutlak değer metriği* '' ne dönüşür.

b) $\mathbf{R}^n$'de ayrıca,

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \quad \text{ve} \quad d_2(x, y) := \text{maks}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

birer metriktirler. Bunlara bazen sırasıyla, $\mathbf{R}^n$'de *mutlak değer metriği* ve *maksimum metriği* denir. Bu iki metrik de $\mathbf{R}$ üzerinde $\mathbf{R}$'nin doğal (mutlak değer) metriğine dönüşür.

c) X bir küme olmak üzere, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$,

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ile tanımlı ρ fonksiyonu X üzerinde bir metriktir (gösteriniz). Bu metriğe *ayrık metrik* veya diskret metrik ve bu metrik ile (X, ρ) metrik uzayına da *ayrık metrik uzay* adı verilir.

d) (X, *d*) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Bu durumda $d_M := d|M\times M$ daraltılmış fonksiyonu M üzerinde bir metriktir. Bu metriğe *d* ile M üzerinde üretilen *altmetrik* ve bu metrik ile M kümesine, yani (M, d_M) ikilisine de (X, *d*)'nin bir *altmetrik uzayı* denir.

Tanım 2.2. (X, *d*) bir metrik uzay, $x\in X$ bir nokta ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda

$$K(x,\varepsilon) := \{\, y\in X \mid d(x, y) < \varepsilon \,\}$$

ile tanımlanan kümeye x *merkezli ve* ε *yarıçaplı açık top* adı verilir.

Tanım 2.3. (X, *d*) bir metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer

$$\forall\ x \in G \ \text{ için } \ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(x)>0, \ \text{öyle ki} \ \ K(x,\varepsilon) \subset G$$

koşulu sağlanıyorsa, bu G altkümesine bu metrik uzayda *açık küme* denir.

Eğer bir $F\subset X$ altkümesinin $X-F$ bütünleyeni açık ise bu F kümesine *kapalı küme* adı verilir.

Örnek 2.2. a) Bir metrik uzayda her açık top bir açık kümedir.

b) Bir metrik uzayda sonlu elemanlı her küme kapalıdır.

Bu iki iddianın kanıtlanması alıştırma olarak bırakılmıştır. Bkz. P.8 ve P.9.

Teorem 2.1. *Bir (X, d) metrik uzayındaki açık kümeler ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

a) $\varnothing$ *ve X açıktır.*

b) İki açık kümenin arakesiti de açıktır.

c) Açık kümelerin herhangi bir ailesinin birleşimi de açıktır.

Kanıt. a) $x\in\varnothing$ olacak şekilde hiçbir x noktası bulunmadığından her $x\in\varnothing$ ve $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon) \subset \varnothing$ olduğu doğrudur. Şu halde $\varnothing$ açıktır. Diğer yandan her $x\in X$ için, $\varepsilon>0$ ne olursa olsun, $K(x,\varepsilon) \subset X$ olduğundan X de açıktır.

b) G_1 ve $G_2 \subset X$ açık ve $x \in G_1 \cap G_2$ olsun. Buradan $x \in G_1$ ve $x \in G_2$ olduğundan, açık küme tanımına göre

$$\exists\ \varepsilon_1 > 0 \text{ ve } \varepsilon_2 > 0, \text{ öyle ki } K(x,\varepsilon_1) \subset G_1 \text{ ve } K(x,\varepsilon_2) \subset G_2$$

sağlanırlar. Eğer $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olarak seçilirse, $K(x,\varepsilon) = K(x,\varepsilon_1) \cap K(x,\varepsilon_2) \subset G_1 \cap G_2$ olduğu görülür.

c) $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ açık kümelerin herhangi bir ailesi ve $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ise en az bir $\lambda_o \in \Lambda$ için $x \in G_{\lambda_o}$ dır. Fakat G_{λ_o} açık olduğundan

$$\exists\ \varepsilon > 0, \text{ ö.k. } K(x,\varepsilon) \subset G_{\lambda_o} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

yazılabilir. Şu halde açık küme tanımına göre $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ açıktır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Örnek 2.3. a) **R**'de Öklid metriğine göre bir $x \in \mathbf{R}$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık top $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığıdır. Buna göre, **R**'deki her (a, b) açık aralığının veya (a, ∞) ve $(-\infty, b)$ tipindeki bütün aralıkların açık kümeler olduğu görülür.

b) Bir metrik uzayda sonsuz sayıdaki açık kümelerin arakesitinin yine açık olması gerekmez. Gerçekten,

$$A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1,2, \ldots$$

kümeleri Öklid metriğine göre **R**'de açık, fakat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

kümesi **R**'de bir açık küme değildir.

c) (X, ρ) ayrık metrik uzay ise herhangi bir $x \in X$ için $K(x,1) = \{x\}$ dir. Bu nedenle X kümesindeki tek elemanlı her küme bu uzayda açıktır. Diğer yandan, her küme kendisinin içindeki noktaların oluşturduğu tek noktalı kümelerin birleşimi olarak yazılabileceğinden, X'in her altkümesi ayrık metriğe göre bir açık kümedir.

Açık kümelerin Teorem 2.1'de verilen özelliklerinin ileride bir topolojik uzaydaki açık kümelerin tanımı için kullanılacağı görülecektir.

Tanım 2.4. (X, d) bir metrik uzay, $x\in X$ ve $U \subset X$ bir altküme olsun. Eğer uygun bir $\varepsilon>0$ sayısı için $K(x,\varepsilon)\subset U$ sağlanıyorsa, bu U kümesine x noktasının bir *komşuluğu* denir.

Bu tanımdan hemen görüleceği gibi, özel olarak $K(x,\varepsilon)$ da x noktasının bir komşuluğudur. Bu komşuluğa bazen x'in *ε-komşuluğu* denir.

Bir x noktasının bütün komşuluklarının kümesini $\mathcal{U}(x)$ ile gösterelim. Buna x'in *komşuluk ailesi* veya *komşuluk sistemi* denir.

Teorem 2.2. *(X, d) bir metrik uzay ise herhangi bir $x\in X$ noktasındaki $\mathcal{U}(x)$ komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

a) Her $U\in \mathcal{U}(x)$ için $x\in U$ dir.
b) Her $U\in \mathcal{U}(x)$ ve her $V \supset U$ için $V\in \mathcal{U}(x)$ dir.
c) Her $U_1 , U_2 \in \mathcal{U}(x)$ için $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ dir.
d) Her $U\in \mathcal{U}(x)$ için öyle bir $V\in \mathcal{U}(x)$ vardır ki, her $y\in V$ için $U\in \mathcal{U}(y)$ dir.

Kanıt. a), b) ve c) komşuluk tanımı ile kolayca görülür. Biz şimdi d)'nin sağlandığını gösterelim:

$U\in \mathcal{U}(x)$ olsun. Şu halde uygun bir $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon) \subset U$ olur. İstenen özelliğe sahip V olarak, $V:=K(x,\varepsilon)\in \mathcal{U}(x)$ alınabilir. Çünkü $K(x,\varepsilon)$ açık olduğundan, açık küme tanımına göre, her $y\in K(x,\varepsilon)$ için,

$$\exists\ \delta > 0 \text{ , ö.k. } K(y, \delta) \subset K(x,\varepsilon) \subset U \Rightarrow U\in \mathcal{U}(y)$$

elde edilir. □

Buna göre bir metrik uzaydaki açık kümeler, aşağıdaki gibi komşuluklar yardımıyla da karakterize edilebilir:

Teorem 2.3. *(X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq G \subset X$ olsun. Bu durumda*

G açıktır $\Leftrightarrow$ G kendisinin her noktasının bir komşuluğudur.

Kanıt. "$\Rightarrow$" G açık ve $x \in G$ ise açık küme tanımından

$$\exists \ \varepsilon > 0, \quad \text{ö.k.} \quad K(x,\varepsilon) \subset G$$

yazılabilir. Bu ise komşuluk tanımına göre, G'nin, x noktasının bir komşuluğu olduğunu ifade eder.

"$\Leftarrow$" Eğer G, kendisinin her noktasının bir komşuluğu ise yine komşuluk tanımından

$$\forall \ x \in G \ \text{ için } \ \exists \ \varepsilon_x > 0, \ \text{ö.k.} \ K(x,\varepsilon_x) \subset G$$

yazılabilir. Bu ise açık küme tanımına göre, G'nin bir açık küme olduğunu ifade eder. □

Tanım 2.5. (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun.

a) Eğer her $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon)$ ile A'nın arakesiti boş değilse, bu x noktasına A'nın bir *değme noktası* denir. Bu durumda

$$\overline{A} := \{ x \in X \mid x, \text{ A'nın bir değme noktasıdır} \}$$

kümesine de A'nın *kapanışı* adı verilir.

b) Eğer uygun bir $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon)$, A'nın tamamen içinde kalıyorsa, bu x noktasına A'nın bir *iç noktası* denir. Bu durumda

$$\overset{o}{A} := \{ x \in X \mid x, \text{ A'nın bir iç noktasıdır} \}$$

kümesine de A'nın *içi* (veya *çekirdeği*) adı verilir.

c) Eğer her $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon)-\{x\}$ ile A'nın arakesiti boş değilse, bu x noktasına A'nın bir *yığılma noktası* denir. Bu durumda

$$A' := \{ x \in X \mid x, \text{ A'nın bir yığılma noktasıdır} \}$$

kümesine de A'nın *türev kümesi* adı verilir.

d) Eğer her $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon)$'nın hem A ve hem de $X - A$ bütünleyeni ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına A'nın bir *sınır noktası* denir . Bu durumda

$$\partial A := \{ x \in X \mid x, \text{ A'nın bir sınır noktasıdır} \}$$

kümesine de A'nın *sınırı* adı verilir.

e) Eğer uygun bir $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon) \cap A =\{x\}$ ise bu x noktasına A'nın bir *ayrık noktası* (veya *izole noktası*) ve eğer uygun bir $\varepsilon>0$ için $K(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ ise bu x noktasına da A'nın bir *dış noktası* denir.

Örnek 2.4. **R**'deki mutlak değer metriğine göre,

a) $A := [0,1] \cup\{2\}\subset \mathbf{R}$ için $\overset{o}{A} = (0, 1)$, $\overline{A} = [0,1] \cup\{2\}$, $\partial A = \{0, 1, 2\}$ ve $A' = [0,1]$ dır.

b) $A := \{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2, ... \}\subset \mathbf{R}$ için ise $\overset{o}{A} = \emptyset$, $\overline{A} = \{0\}\cup A$, $\partial A = \overline{A}$ ve $A' =\{0\}$ olur.

c) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ rasyonel sayılar kümesi için, $\mathbf{Q}^o = \emptyset$, $\partial\, \mathbf{Q} = \mathbf{R}$ ve $\mathbf{Q}' = \mathbf{R}$ dir.

Teorem 2.4. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ bir alt küme ise*

a) $\overline{A} = \bigcap \{ F \subset X \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı} \}$,

b) $\overset{o}{A} = \bigcup \{ G \subset X \mid G \subset A \text{ ve } G \text{ açık} \}$

eşitlikleri sağlanırlar.

Kanıt. Alıştırma olarak bırakılmıştır. Bkz. P.10. □

Tanım 2.6. (X, *d*) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A, B \subset X$ ise A ile B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$d(A, B) := \inf \{ d(x, y) \mid x\in A,\ y\in B \}$$

ile tanımlanır. Eğer $A=\{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise $d(\{x\}, B)$ yerine $d(x, B)$ yazılır.

Teorem 2.5. *(X, d) bir metrik uzay, $x\in X$ ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Bu durumda,*

a) $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$

b) $x \in \overset{o}{A} \iff d(x, X - A) > 0, \quad (A\neq X)$

c) $x \in \partial A \iff d(x, X - A) = 0 = d(x, A)$

denklikleri sağlanırlar.

Kanıt. a) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ için $K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ a \in A$, ö.k. $d(x, a) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \inf \{ d(x, a) \mid a \in A \} = 0$

$:\Leftrightarrow d(x, A) = 0$

b) ve c)'nin kanıtı alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Tanım 2.7. (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. Eğer,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ \delta = \delta(\varepsilon, x_o) > 0, \text{ öyle ki } d(x, x_o) < \delta \text{ olduğunda}$$

$$\rho(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa, f *fonksiyonuna* x_o *noktasında süreklidir* denir.

Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir veya kısaca *süreklidir* denir.

Örnek 2.5. a) (X, d), (Y, ρ), (Z, δ) metrik uzaylar ve $f : X \to Y$ ile $g : Y \to Z$ sürekli iseler $g \circ f : X \to Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

b) $\mathbf{R}$ mutlak değer metriği ile gözönüne alınırsa,

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ , \quad a_i \in \mathbf{R}$$

fonksiyonu da süreklidir.

c) (X, d) bir metrik uzay ve $f, g : X \to \mathbf{R}$ fonksiyonları sürekli iseler aşağıdaki fonksiyonlar da süreklidirler:

$$f + g : X \to \mathbf{R}, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$f \,.\, g : X \to \mathbf{R}, \quad (f \,.\, g)(x) := f(x).\, g(x),$$
$$|f| : X \to \mathbf{R}, \quad |f|(x) := |f(x)|,$$
$$h : X \to \mathbf{R}, \quad h(x) := \text{maks}\,\{f(x), g(x)\},$$
$$k : X \to \mathbf{R}, \quad k(x) := \min\,\{f(x), g(x)\}.$$

Eğer her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ ise

$$\frac{1}{f} : X \to \mathbf{R}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)}$$

fonksiyonu da süreklidir.

Komşuluk kavramı yardımıyla süreklilik tanımına denk olarak aşağıdaki teoremde verilen ifade elde edilir:

Teorem 2.6. *(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f 'nin bir $x_o \in X$ noktasında sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $f(x_o)$'ın her V komşuluğu için, x_o'ın, $f(U) \subset V$ koşulunu sağlayan bir U komşuluğunun bulunmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" f, $x_o \in X$'de sürekli ve V, $f(x_o)$'ın bir komşuluğu olsun. Komşuluk tanımına göre uygun bir $\varepsilon>0$ için $K(f(x_o),\varepsilon) \subset V$ sağlanır. f , $x_o \in X$ 'de sürekli olduğundan

$$\exists\ \delta = \delta(\varepsilon,x_o) > 0, \text{ öyle ki, } \quad d(x, x_o)< \delta \quad \text{olduğunda} \quad \rho(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu ise her $x \in K(x_o,\delta)$ için $f(x) \in K(f(x_o),\varepsilon) \subset V$ sağlandığını ifade eder. Diğer bir ifade ile $f(K(x_o,\delta)) \subset V$ dir. Şu halde, $U = K(x_o,\delta)$, x_o'ın istenen koşulu sağlayan bir komşuluğudur.
"$\Leftarrow$" $f(x_o)$'ın her V komşuluğu için, x_o'ın, $f(U) \subset V$ koşulunu sağlayan bir U komşuluğu bulunsun. f fonksiyonunun $x_o \in X$ noktasında sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. $\varepsilon>0$ keyfi verilsin. $K(f(x_o),\varepsilon)$, $f(x_o)$'ın bir komşuluğu olduğundan, hipoteze göre x_o noktasınının, $f(U) \subset K(f(x_o),\varepsilon)$ koşulunu sağlayan bir U komşuluğu vardır. Buradan komşuluk tanımına gore

$$\exists\ \delta = \delta(\varepsilon,x_o) > 0, \quad \text{öyle ki} \quad K(x_o,\delta) \subset U$$

yazılabilir. O halde $f(K(x_o,\delta)) \subset f(U) \subset K(f(x_o),\varepsilon)$ sağlanır. Bu ise

$$d(x, x_o) < \delta \text{ koşulunu sağlayan her } x \in X \text{ için, } \rho(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$$

koşulunun sağlandığını ifade eder. Şu halde f , x_o'da süreklidir. □

Tanım 2.8. (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ öyle ki, } x, y \in X \text{ ve } d(x, y) < \delta \text{ olduğunda } \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna X üzerinde *düzgün süreklidir* denir.

Örnek 2.6. a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, $(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$, $\mathbf{R}$ üzerinde düzgün süreklidir. Çünkü keyfi olarak verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ olarak seçilirse, $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in \mathbf{R}$ için,

$$|f(x) - f(y)| = |ax - ay| = |a|.|x - y| < |a|.\delta = \varepsilon$$

sağlanır.

b) (X, d) bir metrik uzay ve $\varnothing \neq A \subset X$ ise $f(x) := d(x, A)$ ile tanımlı $f: X \to \mathbf{R}$ fonksiyonu düzgün süreklidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} d(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\} &\leq \inf\{d(x, y) + d(y, z) \mid z \in A\} \\ &= d(x, y) + \inf\{d(y, z) \mid z \in A\} \\ &= d(x, y) + d(y, A), \quad (y \in X) \end{aligned}$$

olduğundan, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, yani $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ dir. Benzer şekilde, $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ elde edilir. İkisi birlikte

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

sonucunu verir. Şu halde $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinde, $\delta = \varepsilon$ olarak seçilirse, $d(x, y) < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ için,

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < \varepsilon$$

sağlanır.

Uyarı 2.2. Tanımları karşılaştırıldığında hemen görüleceği gibi, bir metrik uzay üzerinde düzgün sürekli olan her fonksiyon süreklidir. Fakat bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin, analiz derslerinden bilindiği gibi, $g(x) = x^2$ fonksiyonu **R** üzerinde süreklidir, fakat (**R**'nin tümü üzerinde) düzgün sürekli değildir.

Tanım 2.9. (X, d) bir metrik uzay ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun. Eğer

$$\exists\ r > 0, \text{ öyle ki, } \forall\ x, y \in A \text{ için } d(x, y) < r$$

sağlanıyorsa, A altkümesine bu metrik uzayda *sınırlıdır* denir.

Uyarı 2.3. Bazı kitaplarda; bir metrik uzayda "*sınırlı küme*" tanımı aşağıdaki gibi verilir: (X, *d*) metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Önce A kümesinin *çapı,*

$$ç(A) := \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \}$$

ile tanımlanır. Daha sonra da, eğer A kümesinin çapı sonlu ise bu A kümesine sınırlıdır denir. Kolayca görüleceği gibi, bu şekilde verilen tanım ile, Tanım 2.9'da verilen sınırlılık tanımı biribirine denktir.

Teorem 2.7. *$I = [0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan her $f : I \to \mathbf{R}$ fonksiyonu düzgün süreklidir.*

Kanıt. $f : I \to \mathbf{R}$ sürekli ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f her $p \in I$ noktasında sürekli olduğundan,

(2.1) $\quad \exists\ \delta_p > 0$, ö.k. $|x - p| < \delta_p$ olduğunda $|f(x) - f(p)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

sağlanır. Her $p \in I$ için $S_p := I \cap \left(p - \dfrac{\delta_p}{2},\ p + \dfrac{\delta_p}{2}\right)$ olarak tanımlanırsa, $\{S_p \mid p \in I\}$, I 'nın bir "*açık örtümü*" olur. $I = [0,1]$ "*kompakt*" olduğundan, bu açık örtümün de sonlu bir altörtümü vardır. Şu halde

$$\exists\ p_1, \ldots, p_n \in I, \text{ öyle ki, } \quad I = S_{p_1} \cup S_{p_2} \cup \ldots \cup S_{p_n}$$

yazılabilir. Buradan

$$\delta := \min \left\{ \frac{\delta_{p_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{p_n}}{2} \right\}$$

ile tanımlı δ istenen koşulu sağlar. Çünkü $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in I$ için

$$\exists\ k \in \{1,2, \ldots, n\}, \text{ ö.k. } \quad x \in S_{p_k} \quad \Rightarrow \quad |x - p_k| < \frac{1}{2}\delta_{p_k} < \delta_{p_k}$$

olduğundan

$$|y - p_k| \leq |y - x| + |x - p_k| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{p_k} < \frac{1}{2}\delta_{p_k} + \frac{1}{2}\delta_{p_k} = \delta_{p_k}$$

elde edilir. (2.1) bağıntısı ile buradan

$$| f(x) - f(p_k) | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad | f(y) - f(p_k) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Buradan da üçgen eşitsizliği ile

$$| f(x) - f(y) | \leq | f(x) - f(p_k) | + | f(p_k) - f(y) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 2.4. a) Yukarıdaki Teoremde geçen **R**'de "açık örtüm" ve "kompakt" gibi kavramların, analiz derslerinden bilindiği kabul edilmiştir. Bu kavramların genel topolojik uzaylardaki tanımları ileride verilecektir (bkz. Bölüm 9). Bu kavramları hiç öğrenmemiş olan okuyucuların ise bu kavramları öğrendikten sonra bu kanıtı yeniden okumalarını öneririz.

b) "Kompaktlık" kavramını öğrendikten sonra, yukarıdaki teoremin kanıtına paralel olarak, "*Bir kompakt metrik uzay üzerinde tanımlı olan reel değerli her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir*" ifadesi de kolayca gösterilebilir. Bu çok önemli bir temel bilgidir.

Tanım 2.10. (X, d) bir metrik uzay, (x_n), X'de bir dizi ve $x \in X$ olsun.
a) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_o = n_o(\varepsilon)$ doğal sayısı,

$$\forall \; n \geq n_0 \quad \text{için} \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa bu (x_n) dizisine, x noktasına yakınsar denir ve kısaca $x_n \to x$ şeklinde yazılır. Bu durumda (x_n) dizisine (X, d) metrik uzayında yakınsak ve x noktasına da bu (x_n) *dizisinin bir limit noktası* adı verilir.

b) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \in \mathbf{N}$ doğal sayısı için,

$$\exists \; m \in \mathbf{N}, \quad m \geq n, \quad \text{öyle ki} \quad d(x_m, x) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa; diğer bir ifadeyle, x'in her komşuluğunda dizinin sonsuz sayıda terimi bulunuyorsa, bu x noktasına, (x_n) *dizisinin bir yığılma noktası* denir.

Teorem 2.8. *Bir metrik uzayda yakınsak her dizinin tek bir limit noktası vardır.*

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) X'de yakınsak bir dizi olsun. $x_n \to x$, $x_n \to y$ ve $x \neq y$ kabul edelim. O halde $d(x, y)>0$ dır. $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x, y)$ olarak alınırsa, yakınsaklık tanımı ile buradan

$$x_n \to x \ :\Leftrightarrow \ \exists \ n_1 \in \mathbf{N}, \text{ ö.k. } \forall \ n \geq n_1 \ \text{ için } \ d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$x_n \to y \ :\Leftrightarrow \ \exists \ n_2 \in \mathbf{N}, \text{ ö.k. } \forall \ n \geq n_2 \ \text{ için } \ d(x_n, y) < \varepsilon$$

yazılabilir. Şimdi eğer $N := \text{maks}\{n_1, n_2\}$ olarak seçilirse, her $n \geq N$ için

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) < d(x, y)$$

çelişkisine varılır. O halde kabulümüz yanlış, $x = y$ olmalıdır. □

Tanımları karşılaştırıldığında kolayca görüleceği gibi, bir dizinin her limit noktası, o dizinin aynı zamanda bir yığılma noktasıdır. Fakat aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi, bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.7. **R** doğal mutlak değer metriği ile gözönüne alındığında,

a) $x_n = \frac{1}{n}$, ($n = 1,2, \ldots$) dizisi yakınsak ve limiti 0 dır.

b) $x_n = (-1)^n$, ($n = 1,2, \ldots$) dizisinin bir limiti yoktur. Diğer bir ifade ile, bu dizi yakınsak değildir. Fakat -1 ve $+1$ noktalarının her ikisi de bu dizinin birer yığılma noktalarıdır.

Diziler metrik uzaylarda çok önemli bir problem çözme aracıdır. Örneğin kapalı küme, dolayısıyla açık küme ve süreklilik gibi bazı temel kavramlar diziler yardımıyla belirlenebilmektedir.

Teorem 2.9. *(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay,* $\emptyset \neq A \subset X$ *ve* $f : X \to Y$ *bir fonksiyon ise*

a) $x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \exists \ (x_n) \subset A$, $n = 1,2, \ldots$ *, öyle ki,* $x_n \to x$ *dır.*

b) f *fonksiyonu bir* $x \in X$ *noktasında süreklidir* $\Leftrightarrow$ *(X, d) metrik uzayında* $x_n \to x$ *koşulunu sağlayan her* (x_n) *dizisi için, (Y,ρ)'da* $f(x_n) \to f(x)$ *sağlanır.*

Kanıt. a) "$\Rightarrow$" $x \in \overline{A} \;\Rightarrow\; \forall\, n \in \mathbf{N}$ için $K(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbf{N} \text{ için } \exists\; x_n \in A,\ \text{ö.k. } d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x_n \to x$$

elde edilir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{n_o} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_o \in \mathbf{N}$ mevcut olduğundan, her $n \geq n_o$ için $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_o} < \varepsilon$ sağlanır.

"$\Leftarrow$" Her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \in A$ ve $x_n \to x$ koşulunu sağlayan bir (x_n) dizisi mevcut olsun. Bu durumda yakınsaklık tanımı ile,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_o \in \mathbf{N},\ \text{ö.k. } \forall\, n \geq n_o \text{ için } d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall\, n \geq n_o \text{ için } x_n \in K(x, \varepsilon) \cap A$$

elde edilir. Şu halde

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \in \overline{A}$$

dir.

b) "$\Rightarrow$" f, $x \in X$ noktasında sürekli ve (x_n), (X, d)'de $x_n \to x$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. (Y, ρ)'da $f(x_n) \to f(x)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Önce f, $x \in X$'de sürekli olduğundan

(2.2) $\quad \exists\; \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, öyle ki, $d(x, y) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

koşulu sağlanır. Diğer yandan $x_n \to x$ verildiğinden, yukarıdaki $\delta > 0$ sayısı için

$$\exists\; n_o = n_o(\delta) \in \mathbf{N},\ \text{ö.k. } \forall\, n \geq n_o \text{ için } d(x, x_n) < \delta$$

yazılabilir. Buradan (2.2) bağıntısı ile,

$$\forall\, n \geq n_o \text{ için } \rho(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x)$$

elde edilir.

"$\Leftarrow$" f, $x \in X$ noktasında sürekli değilse, sağ tarafın sağlanamayacağını göstermek yeter. Şu halde f, $x \in X$'de sürekli olmasın. Bu durumda öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki,

$$\forall\ \delta > 0 \text{ için } \exists\ y = y(\delta) \in X, \text{ ö.k. } d(x, y) < \delta, \text{ fakat } \rho(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

koşulu sağlanır. Buna göre, her $n \in \mathbf{N}$ için $\delta_n = \frac{1}{n}$ olarak alınırsa, her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\exists\ x_n \in X, \text{ ö.k. } d(x, x_n) < \frac{1}{n}, \text{ fakat } \rho(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon \tag{2.3}$$

yazılabilir. Bu ise (2.3)'de elde edilen (x_n) dizisi için, (X, d) metrik uzayında $x_n \to x$, fakat (Y, ρ)'da $f(x_n) \to f(x)$ olmadığını ifade eder. Böylece kanıt tamamlanır. □

Sonuç 2.1. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ ise*

a) A kapalıdır $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$ dır.

b) A kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $(x_n) \subset A$, öyle ki $x_n \to x$ ise $x \in A$ dır.

Kanıt. a) $\overline{A}$ ve kapalı küme tanımları kullanılarak yapılabilir. Alıştırma olarak bırakılmıştır.

b) A kapalı ve $(x_n) \subset A$ dizisi için $x_n \to x$ olsun. a) şıkkı ile, $A = \overline{A}$ olduğundan, Teorem 2.9 a)'ya göre $x \in \overline{A}$ ve dolayısyla $x \in A$ dır. Tersine, $x \in \overline{A}$ keyfi verilsin. Teorem 2.9 a)' ya göre

$$\exists\ (x_n) \subset A,\ n = 1,2, \ldots\ , \text{ öyle ki } x_n \to x$$

yazılabilir. Hipoteze göre buradan $x \in A$ elde edilir. O halde $A = \overline{A}$ ve $\overline{A}$ kapalı olduğundan A da kapalıdır. □

Örnek 2.8. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x.y = 1\}$ kümesi $\mathbf{R}^2$'de kapalıdır. Çünkü kolayca görüleceği gibi, A kümesindeki yakınsak her dizinin limiti de yine A kümesinde kalmaktadır.

Tanım 2.11. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\exists\ n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \text{ öyle ki } \forall\ m, n \geq n_o \text{ için } d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa, bu (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* adı verilir.

Örnek 2.9. a) Bir metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

b) $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$'deki doğal metriğin ürettiği altmetrik ile gözönüne alınırsa

$$x_o = 1 \quad \text{ve} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

ile tanımlı (x_n) dizisi $\mathbf{Q}$'de bir Cauchy dizisidir. Bu dizi $\mathbf{Q}$'de yakınsak değildir, fakat $\mathbf{R}$'de $\sqrt{2}$'ye yakınsar.

c) $\mathbf{R}$'deki her Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu ifade $\mathbf{R}$'nin temel özelliklerinden biridir.

Teorem 2.10. *(X, d) bir metrik uzay, (x_n) X'de bir Cauchy dizisi ve x_o , (x_n) dizisinin bir yığılma noktası ise $x_n \to x_o$ dır.*

Kanıt. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan, her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\exists\ n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \text{ öyle ki, } \forall\ m , n \geq n_o \quad \text{için} \quad d(x_m , x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Diğer yandan, x_o, (x_n)'nin bir yığılma noktası olduğundan, yukarıdaki $\varepsilon > 0$ ve $n_o \in \mathbf{N}$ doğal sayısı için

$$\exists\ n^* \geq n_o \quad (n^* \in \mathbf{N}) , \text{ öyle ki,} \quad d(x_{n^*}, x_o) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Buradan her $n \geq n^*$ için

$$d(x_n , x_o) \leq d(x_n , x_{n^*}) + d(x_{n^*} , x_o) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Şu halde $x_n \to x_o$ dır. □

Tanım 2.12. X bir küme, (Y, ρ) bir metrik uzay, $f : X \to Y$ ve $f_n : X \to Y$, $(n=1,2, ...)$ X'den Y'ye fonksiyonlar olsunlar. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\exists\ n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \text{ öyle ki, } \forall\ n \geq n_o \text{ ve } \forall\ x \in X \quad \text{için} \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa, bu $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonun *düzgün yakınsar* denir.

Teorem 2.11. *(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f_n : X \to Y$, $(n = 1,2, \dots)$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer bu $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ dizisi bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna düzgün yakınsar ise f fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt. $x_o \in X$ herhangi bir nokta olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsadığından, her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\exists\ n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \text{öyle ki},\ \forall\ n \geq n_o\ \text{ve}\ \forall\ x \in X\ \text{için}\ \ \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. $m > n_o$ olarak seçilen bir doğal sayı ise üçgen eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(x_o)) &\leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f_m(x_o)) + \rho(f_m(x_o)), f(x_o)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \rho(f_m(x), f_m(x_o)) + \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, f_m 'nin x_o'da sürekliliği yazılırsa, $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ için

$$\exists\ \delta > 0\ ,\ \text{öyle ki},\ \ d(x, x_o) < \delta\ \ \text{olduğunda}\ \ \rho(f_m(x), f_m(x_o)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Şu halde, $d(x,x_o)<\delta$ koşulunu sağlayan her $x\in X$ için $\rho(f(x), f(x_o))< \varepsilon$ olmaktadır. Bu nedenle f, $x_o\in X$ noktasında süreklidir. $x_o\in X$ keyfi alındığından f, X üzerinde süreklidir. □

Örnek 2.10. $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$, $(n = 1,2, \dots)$ fonksiyon dizisi ve

$$f : [0, 1] \to \mathbf{R}\ ,\quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu verildiğinde, kolayca görüleceği gibi, her $x\in[0,1]$ noktası için $f_n(x) \to f(x)$ sağlanır. Bu özelliği sağlayan (f_n) fonksiyon dizisine, f fonksiyonuna "*noktasal yakınsar*" denir. Fakat bu (f_n) dizisi, $[0,1]$ kapalı aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsamaz (bkz. Teorem 2.11). Çünkü (f_n) fonksiyon dizisinin bütün terimleri $[0,1]$'de sürekli olmalarına rağmen, f fonksiyonu bu aralıkta sürekli değildir. Ancak yine bu fonksiyon dizisinin, [0,1) yarı-açık aralığında $f(x) = 0$ sabit fonksiyonuna düzgün yakınsadığı ise apaçıktır.

Problemler

P. 1. Örnek 2.1 a) ve b)'de verilen $e(x, y)$, $d_1(x, y)$ ve $d_2(x, y)$ fonksiyonlarının herbirinin $\mathbf{R}^n$'de birer metrik olduklarını gösteriniz

(Y.g.: a) için

$$\sqrt{\sum (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{\sum y_i^2}$$

Minkowski eşitsizliğini kullanınız).

P. 2. d ve d^*, X üzerinde iki metrik ise aşağıdaki fonksiyonların da X üzerinde birer metrik olduğunu gösteriniz.

a) $d_1(x, y) = k.\, d(x, y)\,, \quad k \in \mathbf{R}^+$

b) $d_2(x, y) = d(x, y) + d^*(x, y)$

c) $d_3(x, y) = \text{maks}\,\{ d(x, y)\,, d^*(x, y) \}$

d) $d_4(x, y) = \min\,\{1, d(x, y) \}$

e) $d_5(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

f) $d_6(x, y) = \min\,\{1\,, \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \}$

P. 3. $\mathbf{H} = \{ x = (x_1, x_2, \ldots \ ) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$ dizi uzayında

$$d\,(x, y) := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$$

’nin bir metrik olduğunu gösteriniz. Bu metrik ile **H** dizi uzayına, reel *Hilbert uzayı* adı verilir.

P. 4. I = [0, 1] aralığı olmak üzere, I üzerinde tanımlı bütün reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesi

$$C(\,I\,) := \{ f \mid f : I \to \mathbf{R} \}$$

ile gösterilir. Aşağıda verilen fonksiyonların C(I) üzerinde birer metrik olduğunu gösteriniz.

a) $d(f, g) = \sup\{\, |f(x) - g(x)| \mid x \in I \,\}$

b) $\rho(f, g) = \int_0^1 | f(x) - g(x) |\, dx$

P. 5. $\mathbf{R}^2$ üzerinde Örnek 2.1 a)’da verilen

$$e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Öklid metriği ile Örnek 2.1 b)’de verilen

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \text{ ve } d_2(x, y) = \text{maks}\{|x_1 - y_1| , |x_2 - y_2|\}$$

metriklerinin aynı açık küme ailesini tanımladıklarını gösteriniz. Bu özelliği sağlayan, diğer bir ifade ile, tanımladıkları açık küme aileleri aynı olan metriklere "*denk metrikler*" adı verilir.

P. 6. (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) iki metrik uzay ise $X_1 \times X_2$ kartezyen çarpımı üzerinde $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ için

$$d\,'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

$$d\,''(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (\,d_2(x_2, y_2))^2} \quad \text{ve}$$

$$d\,'''(x, y) = \text{maks}\{\, d_1(x_1, y_1),\ d_2(x_2, y_2) \,\}$$

fonksiyonlarının denk metrikler tanımladıklarını gösteriniz.

P. 7. $(X_n, d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ metrik uzaylar dizisi olmak üzere, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ çarpım kümesi üzerinde

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \quad ; \quad \left(x = (x_n), \ \ y = (y_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \right)$$

ile bir metrik tanımlandığını gösteriniz.

P. 8. Bir metrik uzaydaki her açık topun bir açık küme olduğunu gösteriniz.

P. 9. Bir metrik uzayda sonlu elemanlı her kümenin kapalı olduğunu gösteriniz.

P. 10. Teorem 2.4'ü kanıtlayınız.

P. 11. Örnek 2.5 a), b), c)'de verilen fonksiyonların sürekli olduklarını gösteriniz.

P. 12. **a)** Her $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ için

$$d(x, y) := |x_1 - y_1|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonunun $\mathbf{R}^2$'de bir yarı-metrik olduğunu gösteriniz. Bu d fonksiyonunun bir metrik olmadığına dikkat ediniz.

b) Bir X kümesi üzerinde tanımlı bir f reel değerli fonksiyonu için tanımlanan

$$d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$$

fonksiyonunun X üzerinde bir yarı-metrik olduğunu gösteriniz. Bu d_f ne zaman bir metrik olur?

P. 13. (X, d) bir metrik uzay, $f : X \to \mathbf{R}$ ve $d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$ olduğuna göre

$$f : (X, d) \to \mathbf{R} \text{ süreklidir } \Leftrightarrow \text{ } (X, d_f)\text{'deki her açık küme } (X, d)\text{'de açıktır.}$$

Gösteriniz.

P. 14. (X, d) bir metrik uzay olsun

a) Eğer $x, y, u, v \in X$ ise

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

sağlandığını gösteriniz.

b) (x_n), (y_n) X'de iki dizi ve $x_n \to x$, $y_n \to y$ ise **R**'de $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$ sağlandığını gösteriniz.

P. 15. (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ sabit bir nokta ise

$$f_a : X \to \mathbf{R} \ , \quad f_a(x) := d(x, a)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun sürekli olduğunu gösteriniz.

P. 16. X bir reel lineer uzay (vektör uzayı) olmak üzere X üzerinde

$$N : X \to \mathbf{R} \ , \quad N(x) := \|x\|$$

şeklinde, her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{R}$ için

(i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyon varsa, bu X lineer uzayına bir "*normlu lineer uzay*" ve $\|x\|$ sayısına da "x'in *normu*" adı verilir.

X normlu bir lineer uzay ise $d(x,y) := \|x - y\|$, X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe "*norm ile üretilen metrik*" adı verilir.

P. 17. X bir lineer uzay ve $\| . \|_1$ ve $\| . \|_2$, X üzerinde iki norm olsunlar. Eğer her $x \in X$ için

$$\| x \|_1 \leq C . \| x \|_2 \quad \text{ve} \quad \| x \|_2 \leq C' . \| x \|_1$$

olacak şekilde C ve C' sabit sayıları bulunabiliyorsa, bu iki normun, yani bunların ürettikleri metriklerin aynı açık küme ailesini tanımlayacaklarını gösteriniz. Bu özelliği sağlayan iki norma "*denk normlar*" adı verilir.

P. 18. $\mathbf{R}^n$ üzerinde bileşenler cinsinden toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre aşağıdaki ifadelerin birer norm olduklarını gösteriniz.

a) $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

b) $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

c) $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_2 :=$ maks $\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.

Bu normların ürettikleri metriklerin sırasıyla Örnek 2.1 a) ve b)'deki metrikler oldukları görülür.

P. 19. (X, *d*) bir metrik uzay olmak üzere X üzerindeki sınırlı ve sürekli reel değerli bütün fonksiyonların

$$C^*(X) := \{ f \mid f : X \to \mathbf{R} \text{ sınırlı ve sürekli } \}$$

kümesinin,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{ve} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

işlemlerine göre bir lineer uzay ve

$$\|f\| := \sup\{ |f(x)| \mid x \in X \}$$

nin de, $C^*(X)$ üzerinde bir norm olduğunu gösteriniz. Bu norma $C^*(X)$ üzerinde "*supremum normu*" adı verilir.

BÖLÜM 3

TOPOLOJİK UZAYLAR

Bir önceki bölümde görüldüğü gibi, metrik uzaylar arasındaki fonksiyonların sürekliliği ve metrik uzaylardaki dizilerin yakınsaklığı, bazı özellikleri sağlayan ve "komşuluk" adı verilen altkümeler yardımıyla belirlenebilmektedir. Tanımı dikkatlice incelendiğinde görüleceği gibi, komşuluk kavramının temelinde ise "açık küme" kavramı yatar. Gerçekten, bir metrik uzayda verilen bir noktanın bir komşuluğu, o noktayı içeren bir açık kümenin (açık topun) bir üst kümesi olarak tanımlanmaktadır. Şu halde "süreklilik" ve "yakınsaklık" kavramlarını en genel halde tanımlayabilmek için öncelikle gerekli olan temel kavram, açık kümedir. Bunun için de en uygun yol, metrik uzaylardaki açık kümelerin Teorem 2.1'de verilen özelliklerini, en genel halde, açık kümelerin tanımı için temel almaktır.

Tanım 3.1. X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan her $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ailesine X üzerinde bir *topoloji* denir.

(T-1) $\varnothing$, $X \in \tau$

(T-2) $\forall\, G_1 , G_2 \in \tau \;\Rightarrow\; G_1 \cap G_2 \in \tau$

(T-3) $\forall\, (G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_{\lambda\in\Lambda} \in \tau$, (Burada Λ herhangi bir indis kümesidir).

Üzerinde bir topoloji tanımlanmış olan her X kümesine bir *topolojik uzay* denir ve çoğu kez (X,τ) ile gösterilir. Bu durumda, X'in elemanlarına bu topolojik uzayın *noktaları* ve τ'nun elemanlarına da bu topolojik uzayın *açık kümeleri* adı verilir.

Örnek 3.1. a) (X,d) bir metrik uzay olsun. Teorem 2.1'e göre, bu uzaydaki açık kümelerin

$$\tau_d := \{\, G \subset X \;\mid\; \forall\, x\in G \text{ için } \exists\, \varepsilon_x>0, \text{ ö.k. } K(x, \varepsilon_x) \subset G \,\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde d metriği ile üretilen *metrik topoloji* denir. Şu halde her metrik uzay, metrik topoloji ile bir topolojik uzaydır. Aksi açıkça belirtilmediği taktirde bir metrik uzay, topolojik uzay olarak metrik topoloji ile göz önüne alınır. Özel olarak $\mathbf{R}^n$'de

$$e\,(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Öklid metriği ile üretilen metrik topoloji τ_e^n ile gösterilir ve buna *Öklid topolojisi* veya $\mathbf{R}^n$'nin *doğal topolojisi* denir. $\mathbf{R}$'nin τ_e ile gösterilen doğal topolojisine bazen *açık aralıklar topolojisi* de denir. Aksi açıkça belirtilmediği sürece $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{R}^n$ topolojik uzay olarak doğal topolojileri ile göz önüne alınır.

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde $\tau_d = \tau$ olacak şekilde bir d metriği varsa, bu (X,τ) topolojik uzayına *metriklenebilir topolojik uzay* adı verilir.

b) $X = \{a, b\}$ olmak üzere $\mathcal{S} = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *Sierpinski topolojisi* ve $(X,\mathcal{S})$ topolojik uzayına da *Sierpinski uzayı* denir. Bu topolojik uzay metriklenemez. Gerçekten eğer X üzerinde $\tau_d = \mathcal{S}$ koşulunu sağlayan bir d metriği mevcut olsaydı,

$$K(b, \frac{d(a,b)}{2}) = \{b\} \in \tau_d ,$$

ve dolayısıyla $\{b\} \in \mathcal{S}$ olması gerekirdi. Oysa $\{b\} \notin \mathcal{S}$ dir.

c) **R**'de τ_e Öklid topolojisi dışında sıkça kullanılan başlıca topolojiler şunlardır:

$\tau_{\text{sağ}} := \{\mathbf{R}, \varnothing\} \cup \{ (a,\infty) \mid a \in \mathbf{R} \}$ "*sağ topoloji*"

$\tau_{\text{sol}} := \{\mathbf{R}, \varnothing\} \cup \{ (-\infty,b) \mid b \in \mathbf{R} \}$ "*sol topoloji*"

d) X herhangi bir küme olmak üzere;

(i) $\tau_t := \{X, \varnothing\}$, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *ilkel (indiskret) topoloji* ve (X, τ_t) topolojik uzayına da *ilkel uzay* adı verilir.

(ii) $\tau_D := \mathcal{P}(X)$, yani X'in bütün altkümelerinin ailesi de X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *ayrık (diskret) topoloji* ve (X, τ_D) topolojik uzayına da *ayrık (diskret)* uzay adı verilir.

(iii) $\tau_{BSO} := \{ G \subset X \mid X - G \text{ sonlu} \} \cup \{\varnothing\}$,
"*Bütünleyenleri Sonlu Kümeler Topolojisi*" ve

$\tau_{BSA} := \{ G \subset X \mid X - G \text{ sayılabilir} \} \cup \{\varnothing\}$,
"*Bütünleyenleri Sayılabilir Kümeler Topolojisi*"

olarak tanımlanırlar. Bunların gerçekten birer topoloji olduklarını gösteriniz.

Uyarı 3.1. Bir topolojik uzayda açık kümelerin herhangi bir ailesinin arakesitinin de açık olması gerekmez. Örneğin $(\mathbf{R},\tau_e)$ topolojik uzayında her $\varepsilon>0$ için $(-\varepsilon, \varepsilon) \in \tau_e$ olmasına rağmen $\bigcap_{\varepsilon>0}(-\varepsilon,\varepsilon) = \{0\} \notin \tau_e$ dir. Aynı şekilde açık kümelerin sayılabilir arakesiti de açık olmayabilir. Örneğin aynı uzayda her $n \in \mathbf{N}$ için $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \in \tau_e$, fakat $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \{0\} \notin \tau_e$ dir.

Tanım 3.2. X bir küme ve τ_1 ile τ_2 X üzerinde iki topoloji olsunlar. Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ise τ_2 , τ_1 '*den daha incedir* veya τ_1, τ_2 '*den daha kabadır* denir.

Uyarı 3.2. a) Herhangi bir X kümesi üzerindeki bütün topolojilerin en kabası τ_t ilkel topoloji, en incesi de τ_D ayrık topolojidir. Bir kümenin her altkümesi, o küme üzerindeki ayrık topolojiye göre açık olduğundan, tek elemanlı bütün altkümeleri de açık, yani ayrık topolojik uzayda tek elemanlı bütün kümeler açıktır. Diğer yandan, eğer bir topolojik uzayın bütün tek elemanlı kümeleri o uzayda açık iseler, topoloji tanımındaki (T3) koşulu nedeni ile, o uzayın bütün altkümeleri de açık ve dolayısıyla o topolojik uzay bir ayrık topolojik uzaydır. Bu nedenle, bir topolojik uzayın ayrık olduğunu göstermek için, o uzaydaki tek elemanlı herhangi bir kümenin (ve dolayısıyla bütün tek elemanlı kümelerin) açık olduğunu göstermek yeter.

b) Bir küme üzerindeki herhangi iki topolojinin mutlaka karşılaştırılabilir olması gerekmez. Örneğin **R** üzerindeki $\tau_{sağ}$ ve τ_{sol} topolojileri karşılaştırılamazlar.

c) Bir X kümesi üzerindeki bütün topolojiler kümesinde "$\subset$" ince olma bağıntısı bir yarı-sıralama bağıntısıdır.

R üzerinde verilen başlıca topolojiler arasında bir karşılaştırma yapılacak olursa, okun yönü kabadan inceye doğru çizildiğinde yandaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_D & \\
 & \tau_e \arrow[u] & \\
\tau_{sağ} \arrow[ur] & & \tau_{sol} \arrow[ul] \\
 & \tau_t \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

τ_{BSO} ve τ_{BSA} 'yı bu diyagrama nasıl yerleştirirdiniz?

Uyarı 3.3. X bir küme, Λ herhangi bir indis kümesi ve her $\lambda\in\Lambda$ için τ_λ, X üzerinde bir topoloji ise $\tau = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ da X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji, her bir τ_λ topolojisinden daha kaba; ve bu özelliği sağlayanların en incesidir. O nedenle bu topolojiye, $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *topoloji ailesinin infimumu* (en büyük alt sınırı) denir.

Diğer yandan, bir küme üzerindeki herhangi iki topolojinin birleşiminin yine bir topoloji olması gerekmez. Örneğin **R**'de $\tau_{sağ}\cup\tau_{sol}$ bir topoloji değildir. Oysa

$$\tau_{sağ}\cap\tau_{sol} = \{\mathbf{R}, \varnothing\}$$

ilkel topolojidir.

Tanım 3.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer A'nın bütünleyeni $X - A$ açık ise A kümesine bu uzayda *kapalıdır* denir.

Uyarı 3.4. (X,τ) bir topolojik ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin bu uzayda kapalı olması bazen, A "τ-kapalıdır"; ve açık olması, yani $A\in \tau$ olması da, A "τ-açıktır" şeklinde ifade edilecektir.

Teorem 3.1. *(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{K}$ bu uzayın kapalı kümeler ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

1. a) X ve $\varnothing \in \mathcal{K}$ dır.
b) K_1 ve $K_2 \in \mathcal{K}$ ise $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$ dır.
c) $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{K}$ ise $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \in \mathcal{K}$ dır.

2. Bir $A\subset X$ için, A açıktır $\Leftrightarrow$ $X - A$ kapalıdır.

Tersine olarak, X herhangi bir küme ve $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ yukarıdaki 1.a), b), c) koşullarını sağlayan bir altküme ailesi ise X üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, bu $\mathcal{K}$ ailesi o topolojinin kapalı kümeler ailesidir.

Kanıt. 1. a) X ve $\varnothing$ açık, $X = X - \varnothing$ ve $\varnothing = X - X$ olduğundan X ve $\varnothing$ kapalıdır.
1.b) ve 1.c) kapalı küme tanımı ve De Morgan formülleri kullanılarak kolayca elde edilir. Ayrıca 1.b)'den, sonlu sayıda kapalı kümenin birleşiminin de kapalı olduğu ifadesi kolayca elde edilir.

2. $X - (X - A) = A$ olduğundan, eğer $A\in\tau$ ise $X - A$ τ-kapalı ve $X - A$ τ-kapalı ise $A\in\tau$ dır. Teoremin son kısmını elde etmek için, X bir küme ve $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$, 1.a), b), c) koşullarını sağlayan bir aile ise

$$\tau := \{G \subset X \mid X - G \in \mathcal{K}\}$$

şeklinde tanımlanan altküme ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğu ve bu topolojiye göre kapalı kümeler ailesinin $\mathcal{K}$ ile aynı olduğu kolayca gösterilebilir. Bkz. P.6. □

Uyarı 3.5. Metrik uzayların aksine herhangi bir topolojik uzayda tek elemanlı kümelerin kapalı olması gerekmez. Örneğin iki veya daha fazla elemanlı bir X kümesini $\tau_t = \{X, \varnothing\}$ ilkel topolojisi ile göz önüne alırsak, bu uzayda tek elemanlı kümeler kapalı değildir, çünkü bütünleyenleri açık değildir. Bu tip kümeler bu uzayda açık da değildir. Ancak bilindiği gibi, bir metrik uzayda tek elemanlı kümeler ve dolayısıyla bütün sonlu elemanlı kümeler kapalıdır.

Tanım 3.4. 1) (X,τ) bir topolojik uzay, $x\in X$ ve $U\subset X$ olsun. Eğer $x\in G\subset U$ olacak şekilde bir $G\in\tau$ varsa, bu U altkümesine bu uzayda x noktasının bir *komşuluğu* denir.

$x\in X$ noktasının τ topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan aile $\mathcal{U}_\tau(x)$ veya topolojiyi belirtmenin gerekmediği durumlarda kısaca $\mathcal{U}(x)$ ile gösterilir ve buna x'in *komşuluk ailesi* ya da *komşuluk sistemi* denir.

2) (X,τ) bir topolojik uzay, $M\subset X$ ve $U\subset X$ olsun. Eğer $M\subset G\subset U$ olacak şekilde bir $G\in\tau$ varsa, bu U altkümesine bu uzayda M kümesinin bir komşuluğu denir.

Buna göre, bir topolojik uzayda, bir noktayı içeren her açık küme o noktanın bir komşuluğudur. Gerçekten, G açık ve $x\in G$ ise $x\in G\subset G$ yazılabilir. Diğer yandan her komşuluk bir açık küme içerdiğinden, bir noktanın bütün komşulukları yerine çoğu kez sadece açık komşuluklarını göz önüne almak yeterlidir.

Teorem 3.2. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ ise $\mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

1. a) $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ise $x\in U$ dir.

b) $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ve $U\subset V$ ise $V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ dir.

c) $U, V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ise $U\cap V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ dir.

d) $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ise öyle bir $V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ vardır ki, her $y\in V$ için $U\in\mathcal{U}_\tau(y)$ dir.

2. $G\subset X$ ise

$$G\in\tau \iff \forall x\in G\ \exists U_x\in\mathcal{U}_\tau(x)\,,\ \text{ö.k. } x\in U_x\subset G$$

sağlanır.

Tersine olarak, $X\neq\varnothing$ bir küme ve her $x\in X$ için bir $\varnothing\neq\mathcal{U}_x\subset\mathcal{P}(X)$ altküme ailesi, 1.a), b), c), d) koşullarını sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, her $x\in X$ için bu $\mathcal{U}_x$ ailesi, o topoloji için, x noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur.

Kanıt. 1. a), b), c) özellikleri komşuluk tanımından hemen elde edilirler.
1. d)'yi göstermek için, $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ise komşuluk tanımından, $x\in G\subset U$ olacak şekilde bir $G\in\tau$ vardır. Şu halde $V:=G$ olarak tanımlanabilir. Gerçekten, $x\in G$ ve $G\in\tau$ olduğundan $G\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ve her $y\in G$ için $G\in\mathcal{U}_\tau(y)$ dir. Fakat $G\subset U$ olduğundan, 1.b)'ye göre $U\in\mathcal{U}_\tau(y)$ dir.

2. "$\Rightarrow$" $G\in\tau$ ise G her noktasının bir komşuluğu olduğundan, her $x\in G$ için $U_x=G$ istenen koşulu sağlar.
"$\Leftarrow$" Her $x\in G$ için $x\in U_x\subset G$ olacak şekilde bir $U_x\in\mathcal{U}_\tau(x)$ mevcut olsun. Komşuluk tanımına göre, her $x\in G$ için, $x\in O_x\subset U_x$ olacak şekilde bir $O_x\in\tau$ vardır. Buradan,

$$G=\bigcup_{x\in G}\{x\}\subset\bigcup_{x\in G}O_x\subset G \quad\Rightarrow\quad G=\bigcup_{x\in G}O_x\,,\quad (O_x\in\tau)$$

elde edilir. Şu halde G, bazı açık kümelerin birleşimi olduğundan açıktır.

Teoremin ikinci kısmını göstermek için, X herhangi bir küme ve her $x\in X$ için 1.a), b), c) ve d) koşullarını sağlayan boştan farklı bir $\mathcal{U}_x\subset\mathcal{P}(X)$ altküme ailesinin verildiğini kabul edelim. Eğer böyle bir topoloji gerçekten mevcut olacak ise 2.'deki ifade bize onun nasıl inşa edileceği hakkında fikir vermektedir. Buna göre,

$$\tau:=\{G\subset X \mid \forall\, x\in G \text{ için } \exists\, U_x\in\mathcal{U}_x \text{ ö.k. } x\in U_x\subset G\}$$

ailesinin istenen özelliği sağlayan topoloji olduğu gösterilebilir. Gerçekten, $\varnothing\in\tau$ olduğu apaçıktır. Her $x\in X$ için $U_x\in\mathcal{U}_x$ ne olursa olsun $x\in U_x\subset X$ sağlandığından $X\in\tau$ dir. G, $H\in\tau$ olsun. $G\cap H\in\tau$ olduğunu göstermek için, $x\in G\cap H$ keyfi verilsin. $x\in G$ ve $x\in H$ dır.
τ'nun tanımından

$$\exists\, U_x, V_x\in\mathcal{U}_x \text{ ö.k. } x\in U_x\subset G \text{ ve } x\in V_x\subset H$$

dır. Buradan $x\in U_x\cap V_x\subset G\cap H$ elde edilir. 1.c)'ye göre $U_x\cap V_x\in\mathcal{U}_x$ olduğundan $G\cap H\in\tau$ bulunur. Son olarak $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subset\tau$ ve $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_{\lambda\in\Lambda}$ ise en az bir $\lambda\in\Lambda$ için $x\in G_\lambda$ ve τ'nun tanımından

$$\exists\, U_x\in\mathcal{U}_x \text{ ö.k. } x\in U_x\subset G_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_{\lambda\in\Lambda}$$

elde edilir. Şu halde $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_{\lambda\in\Lambda}\in\tau$, dolayısıyla τ, X üzerinde bir topolojidir.

Şimdi de, $\mathcal{U}_x=\mathcal{U}_\tau(x)$ olduğunu gösterelim: Her $U\in\mathcal{U}_x$ için $U^*:=\{y\in X \mid U\in\mathcal{U}_y\}$ olarak tanımlayalım. Bu U^* kümesinin, $U^*\in\tau$ ve

$x\in U^*\subset U$ koşullarını sağladığını gösterebiliriz: $U\in \mathcal{U}_x$ olduğundan $x\in U^*$ dır (U^* tanımı). Aynı nedenle, her $y\in U^*$ için $U\in \mathcal{U}_y$ olduğundan 1.d) 'ye göre

$$\exists\, V\in \mathcal{U}_y \text{ ö.k. } \forall\, z\in V \text{ için } U\in \mathcal{U}_z \quad (U^* \text{ tanımı}) \;\Rightarrow\; z\in U^*$$

elde edilir. Şu halde $V\subset U^*$ ve τ 'nun tanımı dolayısıyla $U^*\in\tau$ dır. Diğer yandan her $y\in U^*$ için $U\in \mathcal{U}_y$ ve dolayısıyla $y\in U$, yani $U^*\subset U$ olur. Sonuç olarak, $U^*\in\tau$ ve $x\in U^*\subset U$ elde edildiğinden $U\in \mathcal{U}_\tau(x)$ dir. Böylece $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_\tau(x)$ olduğu gösterilmiş olur. $\mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{U}_x$ olduğunu göstermek ise daha kolaydır. Gerçekten, her $U\in \mathcal{U}_\tau(x)$ için, komşuluk tanımından, uygun bir $G\in\tau$ için $x\in G\subset U$ ve τ 'nun tanımından da

$$\exists\, V_x\in \mathcal{U}_x \text{ ö.k. } x\in V_x\subset G$$

yazılabilir. Şu halde $V_x \subset G \subset U$ ve 1.b)'den dolayı $U\in \mathcal{U}_x$ dir. Böylece $\mathcal{U}_\tau(x)\subset\mathcal{U}_x$ ve dolayısıyla $\mathcal{U}_x=\mathcal{U}_\tau(x)$ olduğu gösterilmiş ve kanıt tamamlanmıştır. □

Uyarı 3.6. Bir X kümesinin Teorem 3.2'deki 1.a), b) ve c) özelliklerine benzer özellikler sağlayan bir altküme ailesine, X üzerinde bir "*filtre*" adı verilir (bkz Bölüm 7). Özel olarak, bir topolojik uzayın bir noktasındaki komşuluk ailesine "*komşuluk filtresi*" denir.

Tanım 3.5. (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x\in X$ olsun.

a) Eğer x'in her komşuluğunun A ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına A'nın bir *değme noktası* denir.

$$\overline{A} := \{\, x\in X \mid \forall\, U\in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ için } U\cap A \neq \emptyset \,\}$$

kümesine de A'nın *kapanışı* adı verilir.

b) Eğer x'in uygun bir komşuluğu A'nın içinde kalıyorsa, bu x noktasına A'nın bir *iç noktası* denir.

$$\overset{\circ}{A} := \{\, x\in X \mid \exists\, U\in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ ö.k. } x\in U\subset A \,\}$$

kümesine de A'nın *içi* (veya *çekirdeği*) adı verilir.

c) Eğer x'in her komşuluğunda A'nın x'den başka en az bir noktası daha varsa, bu x noktasına A'nın bir *yığılma noktası* denir.

$$A' := \{\, x\in X \mid \forall\, U\in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ için } (U - \{x\})\cap A \neq \emptyset \,\}$$

kümesine de A'nın *türev kümesi* adı verilir.

d) Eğer x'in her komşuluğunun hem A ve hem de X – A bütünleyeni ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir.

$$\partial A := \{\, x \in X \mid \forall\, U \in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ için } U \cap A \neq \varnothing \text{ ve } U \cap (X - A) \neq \varnothing \,\}$$

kümesine de A'nın *sınırı* adı verilir.

e) Eğer x'in A kümesi ile arakesiti boş olan en az bir komşuluğu varsa, bu x noktasına A'nın bir *dış noktası* ve son olarak,

f) Eğer x'in A ile arakesiti sadece x noktasından oluşan, yani $U^* \cap A = \{x\}$ olan bir U^* komşuluğu varsa, bu x noktasına da A'nın bir *ayrık noktası* (veya *izole noktası*) adı verilir.

Uyarı 3.7. a) (X, *d*) bir metrik uzay olsun. X kümesi τ_d metrik topoloji ile (X,τ_d) topolojik uzayı olarak göz önüne alındığında, Tanım 3.5'de verilen kavramların metrik uzaylardaki paralel kavramlarla tam bir uygunluk halinde olduğu görülür (bkz. Tanım 2.5).

b) Tanım 3.5'de verilen kavramların tanımları karşılaştırıldığında, herhangi bir topolojik uzayda, herhangi bir A altkümesi için

$$\overset{o}{A} \subset A \subset \overline{A}\ ; \quad \partial A \subset \overline{A}\ ; \quad A' \subset \overline{A}$$

bağıntılarının sağlandığı kolayca elde edilir.

Y. Teorem 3.1. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise*

$\overline{A} \subset \overline{B}$ *ve* $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$ *sağlanır.*

Kanıt. Tanım 3.5 a) ve b)'den hemen elde edilir. □

Teorem 3.3. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.*

a) $X - \overline{A} = (X - A)^o$

b) $\overset{o}{A} = \bigcup \{\, G \mid G \subset A \text{ ve } G \text{ açık} \,\}$

c) $\overline{A} = \bigcap \{\, F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı} \,\}$

d) $\partial A = \partial(X - A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)} = \overline{A} - \overset{o}{A}$

Kanıt. a)

$$x \in X - \overline{A} \iff x \notin \overline{A} \iff \exists\, U_x \in \mathcal{U}_\tau(x),\ \text{ö.k.}\ U_x \cap A = \varnothing$$

$$\iff \exists\, U_x \in \mathcal{U}_\tau(x),\ \text{ö.k.}\ U_x \subset X - A \iff x \in (X - A)^{o}$$

elde edilir. Şu halde $X - \overline{A} = (X - A)^{o}$ dır.

b) $\overset{o}{A} = \varnothing$ ise A'nın içinde boştan farklı bir açık küme bulunmaz. Şu halde A'nın içindeki açık kümelerin hepsi boş ve dolayısıyla onların birleşimi de boştur.

$\overset{o}{A} \neq \varnothing$ ise Tanım 3.5 b) kullanılarak

$$x \in \overset{o}{A} :\Rightarrow \exists\, U_x \in \mathcal{U}_\tau(x),\ \text{ö.k.}\ x \in U_x \subset A \Rightarrow \exists\, G_x \in \tau,\ \text{ö.k.}\ x \in G_x \subset U_x \subset A$$

$$\Rightarrow \exists\, G_x \in \tau,\ \text{ö.k.}\ x \in G_x \subset A \Rightarrow x \in \bigcup \{ G \mid G \subset A \text{ ve } G \text{ açık} \},$$

sağlanır.Tersine,

$$x \in \bigcup \{ G \mid G \subset A \text{ ve } G \text{ açık} \} \Rightarrow \exists\, G_x \in \tau,\ \text{ö.k.}\ x \in G_x \subset A \Rightarrow$$

$x \in \overset{o}{A}$ elde edilir, çünkü $G_x \in \mathcal{U}_\tau(x)$ dir. Böylece

$$\overset{o}{A} = \bigcup \{ G \mid G \subset A \text{ ve } G \text{ açık} \}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Bu özellik $\overset{o}{A}$'nin, A kümesinin içindeki en geniş açık küme olduğunu gösterir.

c) Eğer $\overline{A} = \varnothing$ ise $A = \varnothing$, ve bu durumda boş küme, A 'yı içeren bir kapalı küme olacağından eşitliğin sağ tarafı da boştur.

Eğer $\overline{A} \neq \varnothing$ ise önce $x \in \overline{A}$ fakat $x \notin \bigcap \{ F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı} \}$ kabul edelim. Bu durumda $A \subset F$ koşulunu sağlayan en az bir F kapalı kümesi için $x \notin F$ dir. Buradan $x \in X - F$ ve $X - F$ açık olduğundan x 'in bir komşuluğu olur. Diğer yandan $A \subset F$ olduğundan $X - F \subset X - A$, yani $(X - F) \cap A = \varnothing$ elde edilir. Bu ise $x \in \overline{A}$ olması ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlış, yani her $x \in \overline{A}$ için $x \in \bigcap \{ F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı} \}$ dır. Bu ise $\overline{A} \subset \bigcap \{ F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı} \}$ olduğunu gösterir.

Şimdi de $x \in \bigcap\{F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı}\}$ fakat $x \notin \overline{A}$ olduğunu kabul edelim. Tanım 3.5 a)'ya göre buradan

$$\exists\, U \in \mathcal{U}_\tau(x), \quad \text{ö.k.} \quad U \cap A = \varnothing$$

yazılabilir. U bir komşuluk olduğundan $x \in G \subset U$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır. Buradan $G \cap A = \varnothing$, yani $A \subset X - G$, $X - G$ kapalı ve $x \notin X - G$ elde edilir. Böylece A'yı içeren fakat x'i içermeyen bir $F := X - G$ kapalı kümesinin bulunduğu gösterilmiş olur. Bu ise x'in, A kümesini içeren bütün kapalı kümelerin arakesitinde bulunması ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlış, yani her $x \in \bigcap\{F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı}\}$ için $x \in \overline{A}$ dir. Bu ise $\bigcap\{F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı}\} \subset \overline{A}$ olduğunu, yani A'yı içeren bütün kapalı kümelerin arakesitinin $\overline{A}$ içinde bulunduğunu gösterir. Böylece istenen eşitlik

$$\overline{A} = \bigcap\{F \mid A \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı}\}$$

gösterilmiş olur.

Bu özellik, $\overline{A}$'nın, A kümesini içeren en dar kapalı küme olduğunu gösterir.

d) $\partial A = \varnothing$ ise Tanım 3.5'den

$$\partial A = \partial(X - A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$$

sağlandığı görülür.

$\partial A \neq \varnothing$ ise yine Tanım 3.5 göz önüne alınarak

$$x \in \partial A \iff x \in \overline{A} \text{ ve } x \in \overline{(X - A)} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$$

olduğu görülür. Buradaki A, $X - A$ bütünleyeni ile değiştirilirse

$$x \in \partial(X - A) \iff x \in \overline{(X - A)} \cap \overline{(X - (X - A))} = \overline{(X - A)} \cap \overline{A}$$

elde edilir. Şu halde $\partial A = \partial(X - A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$ dır.

Şimdi de $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (X - \overset{\circ}{A})$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X-A)}$ olduğundan, $\overline{A} \cap \overline{(X-A)} = \overline{A} - \overset{o}{A}$ olduğunu, bunun için de $\overline{X-A} = X - \overset{o}{A}$ olduğunu göstermek yeter. Bu ise a) şıkkındaki bağıntıda, A yerine X – A yazmakla elde edilir. Gerçekten,

$$X - \overline{A} = (X-A)^o \;\Rightarrow\; X - \overline{X-A} = (X-(X-A))^o = \overset{o}{A}$$

$$\Rightarrow\; \overline{X-A} = X - \overset{o}{A}$$

olduğu görülür. Şu halde

$$\partial A = \partial(X-A) = \overline{A} \cap \overline{(X-A)} = \overline{A} - \overset{o}{A}$$

dır. Böylece teoremin kanıtı tamamlanır. □

Sonuç 3.1. Bir topolojik uzayın herhangi bir A altkümesinin kapanışı ve içi arasında

$$\overline{A} = X - (X-A)^o \quad \text{ve} \quad \overset{o}{A} = X - \overline{(X-A)}$$

bağıntıları sağlanır. Gerçekten, Teorem 3.3 a)'daki eşitliğin her iki yanının bütünleyeni alınırsa birincisi; aynı eşitlikte A yerine X–A yazmakla da ikincisi elde edilir.

Teorem 3.4. *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.*

a) A *kapalıdır* $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow A' \subset A \Leftrightarrow \partial A \subset A$

b) A *açıktır* $\Leftrightarrow A = \overset{o}{A} \Leftrightarrow \partial A \cap A = \varnothing$

c) $\overline{A} = A \cup A' = \partial A \cup A$

d) $\overset{o}{A} = A - \partial A$

e) $\partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ *hem açık ve hem de kapalıdır.*

f) ∂A *kapalıdır.*

Kanıt. Tanım 3.5 ve Teorem 3.3 kullanılarak kolayca görülebilecek olan bu eşitliklerin kanıtları okuyucuya bırakılmıştır. Bkz. P.7. □

Uyarı 3.8. Metrik uzayların aksine,

1) Uyarı 3.5'de belirtildiği gibi, herhangi bir topolojik uzayda tek elemanlı kümelerin kapalı olmaları gerekmez. İlkel uzayın dışında, örneğin $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\} \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

topolojisini göz önüne alalım. Bu (X,τ) topolojik uzayında, $\{b\} \subset X$ tek elemanlı kümesinin kapanışı hesaplanırsa, $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$ olduğu görülür. Şu halde $\{b\}$ kümesi bu uzayda kapalı değildir (neden?).

2) Herhangi bir topolojik uzayda, bir kümenin türev kümesinin de kapalı olması gerekmez. Örneğin yukarıdaki (X,τ) topolojik uzayında, $A:= \{a, b, c\} \subset X$ altkümesi için $A' = \{b, d, e\}$ dır. Fakat A', bu uzayda kapalı değildir, çünkü $X - A' = \{a, c\}$ açık değildir.

Teorem 3.5. *(X, τ) bir topolojik uzay ve*

$$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \ , \ \phi(A) := \overline{A}$$

olarak tanımlansın. Bu ϕ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

K-a) $A \subset \phi(A)$

K-b) $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$

K-c) $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$

K-d) $\phi(\varnothing) = \varnothing$

Bunlardan başka, herhangi bir $F \subset X$ altkümesi için

K-e) *F kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\phi(F) = F$ dır.*

Tersine olarak, X herhangi bir küme ve $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, yukarıdaki K-a), K-b), K-c), K-d) özelliklerini sağlayacak şekilde verilen bir dönüşüm olsun. Bu durumda, X kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, herhangi bir $A \subset X$ altkümesinin o topolojiye göre kapanışı $\overline{A} = \phi(A)$ dır.

Kanıt. Önce (X,τ) bir topolojik uzay ise yukarıdaki dönüşümün verilen özelliklere sahip olduğunu gösterelim.

Tanım 3.5 a)'ya göre her $A \subset X$ için $A \subset \overline{A}$, yani K-a) sağlanır. K-b) için, Y. Teorem 3.1'e göre $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ dır. Diğer yandan, $\overline{A} \subset \overline{A}$ ve Teorem 3.3 c)'ye göre $\overline{A}$ kapalıdır. Fakat $\overline{\overline{A}}$, $\overline{A}$ 'yi içeren en dar kapalı küme olduğundan $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ dır. Şu halde $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ sağlanır.

K-c) için, $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ olduğundan Y. Teorem 3.1'e göre $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ ve $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ ve dolayısıyla $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ dır. Diğer yandan $A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$ ve dolayısıyla $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ dır. Fakat $\overline{A} \cup \overline{B}$ iki kapalı kümenin birleşimi olarak kapalı ve $A \cup B$'yi içerdiğinden onun kapanışını da içerir, yani $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ dır. Böylece $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ elde edilir.

K-d)'yi göstermek için, K-a) ile $\varnothing \subset \overline{\varnothing}$, diğer yandan $\varnothing \subset \varnothing$ ve $\varnothing$ kapalı olduğundan $\overline{\varnothing} \subset \varnothing$ dır. İkisi birlikte $\overline{\varnothing} = \varnothing$ olduğunu gösterir.

Şimdi de K-e)'yi gösterelim: $F \subset X$ kapalı ise Teorem 3.4 a), $\overline{F} = \phi(F) = F$ 'yi verir. Tersine, eğer $\overline{F} = F$ ise Teorem 3.3 c)'ye göre $\overline{F}$ kapalı olduğundan F de kapalıdır.

Teoremin ikinci kısmını göstermek için, X herhangi bir küme ve $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $A \to \phi(A)$ Teoremdeki K-a), K-b), K-c), K-d) özelliklerini sağlayan bir dönüşüm ise

$$\mathcal{A} = \{ F \subset X \mid \phi(F) = F \}$$

ailesinin X üzerindeki bir topolojinin kapalı kümeler ailesi olduğu ve bu topolojiye göre bir $A \subset X$ altkümesinin kapanışının da $\overline{A} = \phi(A)$ olduğu gösterilebilir. Bunun için önce $\mathcal{A}$ ailesinin, X üzerindeki bir topolojinin kapalı kümeler ailesi olduğunu, yani Teorem 3.1. 1.a), b), c) koşullarını sağladığını gösterelim:

K-d)'ye göre $\phi(\varnothing) = \varnothing$ olduğundan $\varnothing \in \mathcal{A}$, ve K-a) ile de $X \subset \phi(X) \subset X$, dolayısıyla $\phi(X) = X$, yani $X \in \mathcal{A}$ dır.

$F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{A}$ ise K-c) kullanılarak tümevarımla n adımda

$$\phi(F_1 \cup \ldots \cup F_n) = \phi(F_1) \cup \ldots \cup \phi(F_n) = F_1 \cup \ldots \cup F_n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{A}$$

elde edilir.

Şimdi de Teorem 3.1. 1.c)'yi gösterelim: Bunun için önce $A \subset B$ ise $\phi(A) \subset \phi(B)$ olduğunu göstereceğiz. (Burada Y. Teorem 3.1'i kullanamayız, çünkü X üzerinde henüz bir topoloji yoktur). $A \subset B$ ise $B = A \cup (B - A)$ ve K-c) ile $\phi(B) = \phi(A) \cup \phi(B - A)$ ve dolayısıyla $\phi(A) \subset \phi(B)$ dır. Şimdi, eğer $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{A}$ ise

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \subset F_\lambda,\ (\forall \lambda \in \Lambda) \ \Rightarrow\ \phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) \subset \phi(F_\lambda),\ (\forall \lambda \in \Lambda) \ \Rightarrow$$

$$\phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \phi(F_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \ \Rightarrow\ \phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$$

elde edilir. Diğer yandan $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \subset \phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda)$ K-a) 'nın sonucudur. Şu halde

$\phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$, ve bu nedenle $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{A}$ dır. Böylece $\mathcal{A}$'nın X

üzerindeki bir topolojinin kapalı kümeler ailesi olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak, bir $A \subset X$ altkümesinin bu topolojiye göre kapanışı $\overline{A}$'nin $\phi(A)$ olduğunu, yani $\overline{A} = \phi(A)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için ise $\phi(A)$'nın, $\mathcal{A}$ ailesinin, A kümesini içeren en dar elemanı olduğunu göstermek yeter.

$A \subset \phi(A)$ ve $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$, sırasıyla K-a) ve K-b) 'den dolayı sağlandığından $\phi(A)$, $\mathcal{A}$'nın A kümesini içeren bir elemanıdır. Eğer bir $F \in \mathcal{A}$ için de, $A \subset F$ sağlanıyorsa, $\phi(A) \subset \phi(F) = F$, yani $\phi(A) \subset F$ elde edilir. Şu halde $\phi(A)$, $\mathcal{A}$'nın gerçekten de A'yı içeren en dar elemanıdır. Böylece teoremin kanıtı tamamlanır. □

Bir X kümesi üzerinde Teorem 3.5'de verilen K-a), K-b), K-c), K-d) koşullarını sağlayan $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $A \to \phi(A)$ dönüşümüne "*Kuratowski kapanış dönüşümü*" denir.

Teorem 3.6. *(X, τ) bir topolojik uzay ve*

$$\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad \psi(A) := \overset{o}{A}$$

olarak tanımlansın. Bu ψ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

I-a) $\psi(A) \subset A$

I-b) $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$

I-c) $\psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B)$

I-d) $\psi(X) = X$

Bunlardan başka, herhangi bir $G \subset X$ *altkümesi için*

I-e) G *açıktır* $\Leftrightarrow$ $\psi(G) = G$ *dır.*

Tersine olarak, X *herhangi bir küme ve* $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$*, yukarıdaki I-a), I-b), I-c), I-d) özelliklerini sağlayacak şekilde verilen bir dönüşüm olsun. Bu durumda* X *kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, herhangi bir* $A \subset X$ *altkümesinin o topolojiye göre içi* $\overset{o}{A} = \psi(A)$ *dır.*

Kanıt. Teorem 3.5'in kanıtına benzer şekilde; önce (X,τ) bir topolojik uzay ise Tanım 3.5 b) ve Teorem 3.3 b) kullanılarak yukarıdaki dönüşümün istenen özellikleri sağladığı elde edilir.

Tersine olarak, X herhangi bir küme ve $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ yukarıdaki I-a), I-b), I-c), I-d) özelliklerini sağlayan bir dönüşüm ise

$$\tau = \{G \subset X \mid \psi(G) = G\}$$

şeklinde tanımlanan altküme ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğu ve bu topolojinin istenen özelliği sağladığı gösterilebilir. Bkz. P.8. □

Tanım 3.6. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A := \{ A \cap G \mid G \in \tau \}$$

ailesi A kümesi üzerinde bir topolojidir (bkz P.9). Bu topolojiye τ'nun A altkümesi üzerinde ürettiği *altuzay topolojisi* ve bu topoloji ile A altkümesine, yani (A,τ_A) topolojik uzayına da (X,τ)'nun bir *altuzayı* denir.

Aksi açıkça belirtilmediği sürece, bir topolojik uzayın herhangi bir altkümesi, topolojik uzay olarak bu altuzay topolojisi ile göz önüne alınacaktır.

Örnek 3.2. (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ bir altküme ve $d_A : A \times A \to [0, \infty)$,

$$d_A(x, y) := d(x, y)$$

şeklinde tanımlanırsa (A, τ_{d_A}), (X, τ_d)'nin bir altuzayı, yani $\tau_{d_A} = (\tau_d)_A$ dır.

Çözüm: Önce her $G \in \tau_{d_A}$ için $G = A \cap H$ olacak biçimde bir $H \in \tau_d$ 'nin bulunduğunu gösterelim. $G \in \tau_{d_A}$ olduğundan $G \subset A$ ve

$$\forall \; x \in G \text{ için } \exists \, \varepsilon_x > 0, \text{ ö.k. } K_{d_A}(x, \varepsilon_x) \subset G \quad \Rightarrow \quad G = \bigcup_{x \in G} K_{d_A}(x, \varepsilon_x)$$

yazılabilir. Burada $K_{d_A}(x, \varepsilon_x) = \{ y \in A \mid d_A(x,y) < \varepsilon_x \}$ dır. Şimdi de

$$H := \bigcup_{x \in G} K_d(x, \varepsilon_x) \in \tau_d$$

olarak tanımlayalım. Her $x \in G$ için

$$A \cap K_d(x, \varepsilon_x) = K_{d_A}(x, \varepsilon_x)$$

olduğu kolayca görülebileceğinden

$$A \cap H = \bigcup_{x \in G} (A \cap K_d(x, \varepsilon_x)) = \bigcup_{x \in G} K_{d_A}(x, \varepsilon_x) = G$$

elde edilir. Şu halde $\tau_{d_A} \subset (\tau_d)_A$ dır.

Diğer yandan, eğer $G \in (\tau_d)_A$ ise bir $\overset{*}{H} \in \tau_d$ için $G = A \cap \overset{*}{H}$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$x \in G \;\Rightarrow\; x \in \overset{*}{H} \in \tau_d \;\Rightarrow\; \exists \, \varepsilon_x > 0, \text{ ö.k. } x \in K_d(x, \varepsilon_x) \subset \overset{*}{H} \;\Rightarrow$$

$$x \in A \cap K_d(x, \varepsilon_x) \subset A \cap \overset{*}{H} = G \;\Rightarrow\; x \in K_{d_A}(x, \varepsilon_x) \subset A \cap \overset{*}{H} = G$$

yazılabilir. Şu halde $G \in \tau_{d_A}$, yani $(\tau_d)_A \subset \tau_{d_A}$ dır. Böylece $\tau_{d_A} = (\tau_d)_A$ elde edilmiş olur.

Örnek 3.3. $(\mathbf{R}, \tau_e)$ topolojik uzayını göz önüne alalım. Bu uzayın $A := [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbf{R}$ altkümesi üzerindeki altuzayında, $0 < \eta, \varepsilon < 1$ olmak üzere,

$$K_{e_A}(0, \eta) = [0, \eta) = (-\eta, \eta) \cap A \in \tau_{e_A} \quad \text{ve}$$

$$K_{e_A}(1,\varepsilon) = (1 - \varepsilon, 1] = (1- \varepsilon, 1+\varepsilon) \cap A \in \tau_{e_A}$$

olduğu görülür. Şu halde $[0, \eta)$ ve $(1 - \varepsilon, 1]$ yarı-açık aralıkları (A,τ_{e_A}) altuzayında açıktırlar. Oysa bilindiği gibi bu aralıklar üst uzayda, yani $(\mathbf{R},\tau_e)$'de, ne açık ne de kapalıdır.

Diğer yandan, $[0, 1] \subset A$, bu altuzayda hem açık ve hem de kapalıdır (neden?) ve yine bu altuzayda $[0, 1]$ altkümesinin sınırı boştur. Oysa $[0, 1]$, üst uzayda kapalı ve üst uzaydaki sınırı, iki elemanlı $\{0, 1\}$ kümesidir.

Örnek 3.4. Bir ayrık topolojik uzayın her altuzayı da ayrık; bir ilkel topolojik uzayın her altuzayı da ilkeldir.

Y. Teorem 3.2. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset B \subset X$ olsun. Bu durumda $\tau_A = (\tau_B)_A$ dır.*

Kanıt. Önce $H\in \tau_A$ olsun. Buradan $H \subset A$ ve

$$\exists\, G\in \tau \quad \text{ö.k.} \quad H = A \cap G \quad \Rightarrow \quad H =(A \cap B)\cap G =A \cap(B\cap G),$$

ve $B\cap G\in \tau_B$ olduğundan $H\in (\tau_B)_A$ elde edilir. Şu halde $\tau_A \subset (\tau_B)_A$ dır.

Diğer yandan, eğer $O\in (\tau_B)_A$ ise $O \subset A$ ve

$$\exists\, H\in \tau_B \quad \text{ö.k.} \quad O = A \cap H \quad \Rightarrow \quad \exists\, G\in \tau \quad \text{ö.k.} \quad H = B \cap G$$

yazılabilir. Ayrıca $A \subset B$ olduğundan

$$O = A \cap H = A\cap(B\cap G) = (A\cap B)\cap G = A\cap G \in \tau_A \quad \Rightarrow \quad O\in \tau_A$$

elde edilir. Şu halde $(\tau_B)_A \subset \tau_A$ dır. Böylece $\tau_A = (\tau_B)_A$ olduğu gösterilmiş olur. □

Bir (X,τ) topolojik uzayının bir (A,τ_A) altuzayındaki açık kümeler, X'deki açık kümelerin A ile arakesiti olarak tanımlanmıştır. Hepsi değil ama, altuzaydaki çoğu kavramlar yapı olarak buna benzer biçimde karşımıza çıkarlar. Bunların başlıcaları aşağıdaki Teorem 3.7'de verilmiştir. Ancak, biçimsel olarak bu kurala uymayan kavramlar da vardır. Örneğin bir kümenin içi ve sınırı ile ilgili bir aksi örnek aşağıdaki Uyarı 3.9'da görülebilir.

(X,τ) bir topolojik uzay ve $E \subset A \subset X$ olsun. Aşağıda, eğer E kümesinin kapanışı, içi ve sınırının hangi uzaya göre alındığının açıkça belirtilmesi gerekiyorsa, sırasıyla

$$(\overline{E})_A \ , \ (\overline{E})_X \ , \ (\overset{o}{E})_A \ , \ (\overset{o}{E})_X \ , \ (\partial E)_A \ \text{ve} \ (\partial E)_X$$

şeklinde yazılacaktır.

Teorem 3.7. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. (A,τ_A) altuzayında aşağıdakiler sağlanır:*

a) $H \subset A$ için, $H \in \tau_A$ dır $\Leftrightarrow$ $\exists G \in \tau$ ö.k. $H = A \cap G$ dır.

b) $F \subset A$ için, F τ_A-kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\exists K \subset X$ τ-kapalı ö.k. $F = A \cap K$ dır.

c) $E \subset A$ için, $(\overline{E})_A = A \cap (\overline{E})_X$ dır.

d) Eğer $x \in A$ ise $V \in \mathcal{U}_{\tau_A}(x)$ dır $\Leftrightarrow$ $\exists U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ ö.k. $V = A \cap U$

Kanıt. a) Altuzay tanımının apaçık bir sonucudur. Diğer şıklardaki kavramların buna olan biçimsel benzerliğini vurgulamak için burada yeniden yazılmıştır.

b) $F \subset A$ olsun.

$$F \ \tau_A\text{-kapalıdır} \ :\Leftrightarrow \ A - F \in \tau_A \ \text{dır} \ :\Leftrightarrow \ \exists\, G \in \tau \ \text{ö.k.} \ A - F = A \cap G$$

$$\Rightarrow \ \exists\, G \in \tau \ \text{ö.k.} \ F = A - (A \cap G) = A \cap (X - G) \ \Rightarrow$$

$$K := X - G \ \tau\text{-kapalıdır ve } F = A \cap K \ \text{dır.}$$

Tersine, bir $K \subset X$ τ-kapalı kümesi, $F = A \cap K$ olacak şekilde mevcut ise

$$A - F = A - (A \cap K) = (X - K) \cap A$$

dır. Ayrıca $X - K \in \tau$ olduğundan, $A - F \in \tau_A$ ve dolayısıyla F τ_A-kapalıdır.

c) Bu Teoremin b) şıkkı ve Teorem 3.3 c) kullanılırsa,

$$(\overline{E})_A = \bigcap_{\substack{E\subset F \\ F\ \tau_A\text{-kapalı}}} F = \bigcap_{\substack{E\subset A\cap K \\ K\ \tau\text{-kapalı}}} (A\cap K) = A\cap\Big(\bigcap_{\substack{E\subset K \\ K\ \tau\text{-kapalı}}} K\Big) = A\cap(\overline{E})_X$$

elde edilir.

d) "$\Rightarrow$" $x\in A$ ve $V\in \mathcal{U}_{\tau_A}(x)$ olsun. Komşuluk tanımı ile buradan,

$$\exists\, H\in\tau_A \text{ ö.k. } x\in H\subset V \quad\Rightarrow\quad \exists\, G\in\tau \text{ ö.k. } x\in H = A\cap G\subset V$$

elde edilir. Şimdi, eğer $U:= V\cup G$ olarak tanımlanırsa, $x\in G\subset U$ olduğundan $U\in \mathcal{U}_\tau(x)$ dır. Ayrıca, $V\subset A$ olduğundan $V\cap A = V$ dır, ve bu nedenle

$$U\cap A = (V\cup G)\cap A = (V\cap A)\cup(A\cap G) = V\cup H = V$$

sağlanır.

"$\Leftarrow$" $x\in A$ ve bir $U\in \mathcal{U}_\tau(x)$ için $V = A\cap U$ olsun. Buradan

$$\exists\, G\in\tau \text{ ö.k. } x\in G\subset U \quad\Rightarrow\quad x\in A\cap G\subset A\cap U = V$$

yazılabilir. $A\cap G\in\tau_A$ olduğundan $V\in \mathcal{U}_{\tau_A}(x)$ dır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 3.9. Bir (X,τ) topolojik uzayının bir (A,τ_A) altuzayındaki bir $E\subset A$ altkümesinin içi ve sınırı, E'nin üst uzaydaki içi ve sınırı ile A kümesinin arakesiti olarak yazılamaz. Örneğin, $X = \mathbf{R}^2$, $\tau = \tau_e^2$ ve $E = A =$ x-ekseni olsun. Bu durumda $(\overset{o}{E})_A = A$ olmasına rağmen, $(\overset{o}{E})_X = \varnothing$ tur. Şu halde $(\overset{o}{E})_A \neq A\cap(\overset{o}{E})_X = \varnothing$ tur. Fakat kolayca görülebileceği gibi, genel olarak

$$(\overset{o}{E})_A \supset A\cap(\overset{o}{E})_X$$

bağıntısı daima sağlanır. Aynı örnekte, $(\partial E)_A = \varnothing$, fakat $(\partial E)_X = A$ dır. Görüldüğü gibi $(\partial E)_A \neq A\cap(\partial E)_X$ dır. Fakat yine kolayca görüleceği gibi, genel olarak

$$(\partial E)_A \subset A\cap(\partial E)_X$$

bağıntısı her zaman geçerlidir.

Uyarı 3.10. (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve τ_A, A üzerindeki altuzay topolojisi ise $\tau_A \cup \{X\}$ ailesi de X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji genel olarak τ ile karşılaştırılamaz. Ancak eğer $A \in \tau$ ise $\tau_A \cup \{X\} \subset \tau$ sağlanır.

Problemler

P.1. $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ doğal sayılar kümesi üzerinde her $n \in \mathbf{N}$ için

$$G_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

olarak tanımlanıyor.

a) $\tau = \{G_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{\varnothing\}$ ailesinin $\mathbf{N}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

b) $(\mathbf{N}, \tau)$ topolojik uzayında $A = \{4, 7, 11, 12\}$ ve $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$ kümelerinin kapanışlarını belirleyiniz.

c) $A = \{4, 13, 28, 37\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesini belirleyiniz.

d) $\mathbf{N}$ 'nin $A' = \mathbf{N}$ koşulunu sağlayan altkümelerini belirleyiniz.

P.2. X bir küme, $A \subset X$ ve τ, X üzerinde bir topoloji ise

$$\tau^* := \{ U \cup (V \cap A) \mid U, V \in \tau \}$$

ailesinin de X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz. Bu τ^* topolojisine "τ 'nun A üzerine basit genişletilmişi" adı verilir.

P.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ ise genel olarak

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{ve} \quad \overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset (A \cup B)^o$$

bağıntılarının sağlandığını gösteriniz. Bu bağıntılarda eşitliğin gerekmediğini gösteren birer örnek veriniz.

P.4. $(\mathbf{R},\tau_e)$ topolojik uzayında boş olmayan ve $\overset{\circ}{A} = A' = \varnothing$ özelliğini sağlayan altkümeler var mıdır? (Y.g.: Sonlu altkümeleri düşününüz).

P.5. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ ise X üzerindeki τ_d metrik topolojisine göre A kümesinin kapanışı için,

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad d(x, A) = 0$$

sağlandığını gösteriniz. Burada $d(x, A) := \inf \{ d(x, a) \mid a \in A \}$ dır. Bkz. Bölüm 2, Teorem 2.5 a)).

P.6. Teorem 3.1'in ikinci kısmının kanıtını tamamlayınız.

P.7. Teorem 3.4'ü kanıtlayınız.

P.8. Teorem 3.6'yı kanıtlayınız.

P.9. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ise $\tau_A := \{A \cap G \mid G \in \tau\}$ ailesinin A üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

P.10. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ise

a) $\tau_A \subset \tau \quad \Leftrightarrow \quad A \in \tau$,

b) τ_A-kapalı her küme, τ-kapalıdır $\quad \Leftrightarrow \quad$ A, τ-kapalıdır

denkliklerinin sağlandığını gösteriniz.

P.11. (X,τ) bir topolojik uzay ve $E \subset A \subset X$ ise

$$(\overset{\circ}{E})_X = (\overset{\circ}{E})_A \cap (\overset{\circ}{A})_X$$

sağlandığını gösteriniz.

P.12. (X,τ) bir topolojik uzay ve $w \notin X$ olsun. Eğer

$$X^* := X \cup \{w\} \quad \text{ve} \quad \tau^* := \{ G \cup \{w\} \mid G \in \tau \} \cup \{\varnothing\}$$

olarak tanımlanırsa, τ^*'ın X^* üzerinde bir topoloji olduğunu ve $(\tau^*)_X = \tau$ sağlandığını gösteriniz.

P.13. **X** bir küme τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki topoloji ve $A \subset X$ bir altküme olsun. Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ise $(\overline{A})_{\tau_2} \subset (\overline{A})_{\tau_1}$ sağlandığını gösteriniz.

P.14. X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere,

$$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad \phi(A) := \begin{cases} A, & A \text{ sonlu} \\ X, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

ile tanımlı ϕ dönüşümünün X üzerinde bir Kuratowski kapanış dönüşümü olduğunu gösteriniz (bkz. Teorem 3.5). Bu dönüşüm yardımıyla X üzerinde üretilen topolojiyi, bütünleyenleri sonlu kümeler topolojisi τ_{BSO} ile karşılaştırınız.

P. 15. X bir küme ve $w \in X$ sabit bir nokta ise

$$\tau := \{\ G \subset X \mid w \notin G \ \text{ veya } \ w \in G \ \text{ ise } X - G \text{ sonlu } \}$$

ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz. Bu (X,τ) topolojik uzayın bazı ilginç özellikleri ileride görülecektir (bkz. Bölüm 9, P.14, P.15, P.16).

(Bu (X,τ) topolojik uzayına *Fort uzayı* adı verilir).

BÖLÜM 4

TOPOLOJİK UZAYLARDA TABANLAR VE SAYILABİLİRLİK

Bilindiği gibi bir lineer uzayın (vektör uzayı) bütün vektörleri, bu uzayın "taban (baz)" adı verilen özel bir altkümesi ile belirlenebilmektedir. Buna benzer şekilde, bir topolojik uzayın açık küme ailesi, yani topolojisi ile, herhangi bir noktasındaki komşuluk ailesi de, bu ailelerin birer altailesi yardımıyla belirlenebilirler. Bu özelliği sağlayan bir altaileye, sırasıyla, "o topolojik uzayın (veya topolojisinin) bir tabanı (bazı)" veya "o noktadaki bir komşuluk tabanı" adı verilir. Böylece, bir tabanının veya her noktasındaki bir komşuluk tabanının verilmesi ile de, uzayın topolojisi tam olarak belirlenmiş olur.

Tanım 4.1. (X,τ) bir topolojik uzay, $x\in X$ ve $\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{U}_\tau(x)$ olsun. Eğer

$$\forall\, U\in \mathcal{U}_\tau(x) \quad \text{için} \quad \exists\, V\in \mathcal{B}(x) \quad \text{ö.k.} \quad V\subset U$$

sağlanıyorsa, bu $\mathcal{B}(x)$ ailesine bu topolojik uzayda x noktasının bir *komşuluk tabanı* denir.

Örnek 4.1. a) (X, *d*) bir metrik uzay ve $x\in X$ ise

$$\mathcal{B}(x) = \{\ K(x,r)\ \mid\ r > 0\ \}$$

ailesi (X,τ_d) topolojik uzayında x noktasının bir komşuluk tabanıdır. Gerçekten $U\in \mathcal{U}_{\tau_d}(x)$ herhangi bir komşuluk ise uygun bir $G\in\tau_d$ için $x\in G\subset U$ dur. Buradan,

$$\exists\ \varepsilon_x>0 \quad \text{ö.k.} \quad x\in K(x,\varepsilon_x) \subset G \subset U$$

yazılabilir. Böylece $K(x,\varepsilon_x)\in\mathcal{B}(x)$ için $x\in K(x,\varepsilon_x)\subset U$ elde edilmiş olur. Benzer düşünce ile,

$$\mathcal{B}_1(x) = \{\ K(x,q)\ \mid\ q > 0 \text{ rasyonel }\} \text{ ve } \mathcal{B}_2(x) = \{\ K(x,\frac{1}{n})\ \mid\ n = 1, 2, ...\ \}$$

sayılabilir ailelerinin de bu uzayda $x\in X$ noktasının birer komşuluk tabanı olduğu gösterilebilir. ($\mathcal{B}_2(x)$ için bkz. Örnek 4.2).

b) Bir topolojik uzayda bir noktanın komşuluk ailesi ve bir noktanın bütün açık komşuluklarının ailesi o noktada birer komşuluk tabanıdır.

c) (X,τ) bir topolojik uzay, $x\in X$ ve $\mathcal{B}(x)$, x noktasında bir komşuluk tabanı ise $\{\ \overset{o}{V}\ \mid\ V\in\mathcal{B}(x)\ \}$ ailesi de x noktasında bir komşuluk tabanıdır.

d) $X\neq\emptyset$ bir küme ve $x\in X$ olsun. $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ ailesi X üzerindeki τ_D ayrık topolojiye göre x noktasının bir komşuluk tabanıdır. τ_t ilkel topolojisine göre x noktasının bir tek komşuluk tabanı $\{X\}$ dir (neden?).

Uyarı 4.1. (X,τ) bir topolojik uzay, $x\in X$ ve $\mathcal{B}(x)$, x noktasında bir komşuluk tabanı ise x noktasının bu uzaydaki bütün komşuluklarının ailesi,

$$\mathcal{U}_\tau(x) = \{\ U\subset X\ \mid\ \exists\ V\in\mathcal{B}(x) \text{ ö.k. } V\subset U\ \}$$

şeklinde $\mathcal{B}(x)$ 'in elemanlarının bütün üst kümeleri alınarak elde edilir.

Teorem 4.1. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. x noktasındaki herhangi bir komşuluk tabanı $\mathcal{B}(x)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1. *a) Her $U\in\mathcal{B}(x)$ için $x\in U$ dur.*
   b) Her $U, V\in\mathcal{B}(x)$ için $W\subset U\cap V$ olacak şekilde en az bir $W\in\mathcal{B}(x)$ vardır.

c) Her $U\in\mathcal{B}(x)$ için öyle bir $V\in\mathcal{B}(x)$ vardır ki, her $y\in V$ için $y\in W\subset U$ olacak şekilde en az bir $W\in\mathcal{B}(y)$ bulunabilir.

2. $G\subset X$ ise

$$G\in\tau \;\Leftrightarrow\; \forall x\in G \;\; \exists V_x\in\mathcal{B}(x) \text{ ö.k. } x\in V_x\subset G$$

sağlanır.

Tersine, $X\neq\emptyset$ bir küme ve her $x\in X$ için bir $\mathcal{B}_x\subset\mathcal{P}(X)$ ailesi 1.a), b), c) koşullarını sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda, X kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, bu $\mathcal{B}_x$ ailesi o topolojiye göre x noktasında bir komşuluk tabanı oluşturur.

Kanıt. 1. a) $U\in\mathcal{B}(x)$ ise bu U öncelikle x'in bir komşuluğu olduğundan $x\in U$ dur.

b) $U,V\in\mathcal{B}(x)$ ise öncelikle $U, V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ dir. Bu nedenle Teorem 3.2 c)'ye göre $U\cap V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ dir. $\mathcal{B}(x)$, x noktasında bir komşuluk tabanı olduğundan Tanım 4.1'e göre buradan

$$\exists\, W\in\mathcal{B}(x) \text{ ö.k. } W\subset U\cap V$$

elde edilir.

c) $U\in\mathcal{B}(x)$ olsun. U, x'in bir komşuluğu olduğundan $x\in G\subset U$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır. Buradaki bu G kümesi de x noktasının bir komşuluğu olur. O halde komşuluk tabanı tanımına göre, $V\subset G$ olacak şekilde bir $V\in\mathcal{B}(x)$ vardır. İşte bu V istenen özelliği sağlar. Gerçekten, her $y\in V$ için, $y\in G$ ve G açık olduğundan $G\in\mathcal{U}_\tau(y)$ dir. Buradan yine komşuluk tabanı tanımına göre,

$$\exists\, W\in\mathcal{B}(y) \text{ ö.k. } y\in W\subset G\subset U$$

elde edilir.

2. "$\Rightarrow$" $G\in\tau$ ve $x\in G$ ise $G\in\mathcal{U}_\tau(x)$ olduğundan Tanım 4.1'e göre

$$\exists\, V_x\in\mathcal{B}(x) \text{ ö.k. } x\in V_x\subset G$$

elde edilir.

"$\Leftarrow$" Her $x\in G$ için $x\in V_x\subset G$ olacak şekilde bir $V_x\in\mathcal{B}(x)$ varsa,

$$G=\bigcup_{x\in G}\{x\}\subset\bigcup_{x\in G}\overset{\circ}{V}_x\subset G \quad\Rightarrow\quad G=\bigcup_{x\in G}\overset{\circ}{V}_x$$

açık elde edilir.

Tersine, $X\neq\emptyset$ bir küme ve her $x\in X$ için bir $\emptyset\neq\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi 1.a), b), c) özelliklerini sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda her $x\in X$ için, X 'in altkümelerinin

$$\mathcal{U}_x := \{ U\subset X \mid \exists\, V_x\in \mathcal{B}_x \text{ ö.k. } V_x\subset U \}$$

şeklinde tanımlanan bir ailesinin, X üzerinde bir topolojinin x noktasındaki komşuluk ailesini oluşturduğu gösterilebilir. Bunun için bu ailenin Teorem 3.2'deki 1. a), b), c), d) koşullarını gerçeklediğini göstermek yeter. Şimdi bunu yapalım:

Her $U\in \mathcal{U}_x$ için, $\mathcal{U}_x$'in tanımından $V_x \subset U$ olacak şekilde bir $V_x\in \mathcal{B}_x$ mevcuttur. $\mathcal{B}_x$ ailesi yukarıdaki 1.a) koşulunu sağladığından $x\in V_x$ ve o nedenle de $x\in U$ dur. Bu ise $\mathcal{U}_x$'in Teorem 3.2 a)'yı sağladığını ifade eder.

$\mathcal{U}_x$'in Teorem 3.2 b)'yi sağladığını göstermek için, $U\in \mathcal{U}_x$ ve $U\subset V$ olsun. $\mathcal{U}_x$'in tanımına göre $V_x \subset U$ olacak şekilde bir $V_x\in \mathcal{B}_x$ mevcut olduğundan $V_x \subset U \subset V$ dir. V, $\mathcal{B}_x$'in bir elemanını içerdiğinden, yine $\mathcal{U}_x$'in tanımına göre $V\in \mathcal{U}_x$ dir.

Şimdi de $\mathcal{U}_x$'in Teorem 3.2 c)'yi sağladığını gösterelim: $U, V\in \mathcal{U}_x$ olsun. $\mathcal{U}_x$'in tanımına göre

$$\exists\, U_x, V_x\in \mathcal{B}_x \text{ ö.k. } U_x\subset U \text{ ve } V_x\subset V$$

sağlanır. $\mathcal{B}_x$ ailesi yukarıdaki 1.b) koşulunu sağladığından

$$\exists\, W_x\in \mathcal{B}_x \text{ ö.k. } W_x\subset U_x \cap V_x$$

yazılabilir. Buradan $W_x\subset U_x\cap V_x\subset U\cap V$ ve $\mathcal{U}_x$'in tanımına göre $U\cap V\in \mathcal{U}_x$ dir.

Son olarak $\mathcal{U}_x$'in Teorem 3.2 d) koşulunu sağladığını gösterelim: $U\in \mathcal{U}_x$ olsun. $\mathcal{U}_x$'in tanımına göre $U_x\subset U$ olacak şekilde bir $U_x\in \mathcal{B}_x$ vardır. Diğer yandan $\mathcal{B}_x$ yukarıdaki 1.c) koşulunu sağladığından, öyle bir $V_x\in \mathcal{B}_x$ vardır ki, her $y\in V_x$ için, $y\in W\subset U_x$ olacak şekilde bir $W\in \mathcal{B}_y$ mevcuttur. Buradan $U_x\in \mathcal{U}_y$ dir. Ayrıca $U_x\subset U$ olduğundan $U\in \mathcal{U}_y$ dir. Diğer yandan $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ olduğundan, aynı zamanda $V_x\in \mathcal{U}_x$ dir. Şu halde her $U\in \mathcal{U}_x$ için öyle bir bir $V_x\in \mathcal{U}_x$'in mevcut olduğu gösterilmiş olmaktadır ki, her $y\in V_x$ için $U\in \mathcal{U}_y$ dir. Bu ise $\mathcal{U}_x$ ailesinin Teorem 3.2 d) koşulunu sağladığını ifade eder.

Böylece her $x\in X$ için $\mathcal{U}_x$ ailesinin Teorem 3.2'deki a), b), c), d) koşullarını sağladığı gösterilmiş olur. Şu halde o teoreme göre, X üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, her $x\in X$ için $\mathcal{U}_x$ ailesi o topolojiye göre x noktasının komşuluk ailesidir. $\mathcal{B}_x$ ailesinin o topolojiye göre x noktasında bir komşuluk tabanı olduğu ise $\mathcal{U}_x$'in tanımından hemen görülmektedir. Böylece bu teoremin kanıtı tamamlanır. □

Tanım 4.2. Bir topolojik uzayın her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa, bu topolojik uzaya *birinci sayılabilir uzay* veya kısaca bir *A_1-uzayı* denir.

Örnek 4.2. (X, *d*) bir metrik uzay ise (X, τ_d) bir A_1-uzayıdır. Gerçekten, her $x \in X$ için

$$\mathcal{B}(x) = \{\ K(x, \frac{1}{n}) \ \mid\ n = 1, 2, \ldots\ \}$$

sayılabilir ailesinin x noktasında bir komşuluk tabanı olduğu kolayca gösterilebilir: $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}_{\tau_d}(x)$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $U \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x)$ herhangi bir komşuluk ise önce komşuluk tanımına göre, uygun bir $G \in \tau_d$ için $x \in G \subset U$ dur. Buradan τ_d'nin tanımına göre

$$\exists\ \varepsilon_x > 0 \quad \text{ö.k.} \quad K(x, \varepsilon_x) \subset G \subset U$$

yazılabilir. Ayrıca, $\frac{1}{n} < \varepsilon_x$ olacak şekilde bir n doğal sayısı daima mevcut olduğundan

$$K(x, \frac{1}{n}) \subset K(x, \varepsilon_x) \subset U$$

sağlanır. Böylece her $U \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x)$ komşuluğunun verilen $\mathcal{B}(x)$ ailesinin bir elemanını içerdiği gösterilmiş olur. Şu halde her metrik, uzay metrik topoloji ile birinci sayılabilir bir topolojik uzaydır.

Uyarı 4.2. Her topolojik uzayın bir A_1-uzayı olması gerekmez. Örneğin X sayılamaz güçte bir küme olmak üzere (X, τ_{BSO}) bir A_1-uzayı değildir. Bunu göstermek için aksini kabul edelim. (X, τ_{BSO}) bir A_1-uzayı, $x \in X$ ve

$$\mathcal{V}(x) = \{\ V_n \mid n = 1, 2, \ldots\ \},$$

x noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı olsun. Her $n \in \mathbf{N}$ için $\overset{o}{V}_n \in \tau_{BSO}$ olduğundan $X - \overset{o}{V}_n$ sonludur. Bu nedenle,

$$A := \bigcup_{n\in N} (X - \overset{o}{V}_n)$$

şeklinde tanımlanan A kümesi, sayılabilir sayıda sonlu kümenin birleşimi olduğundan sayılabilir bir kümedir. X'in gücü sayılamaz olduğundan $x \neq y$ olacak şekilde bir $y\in X-A$ vardır. $X-\{y\}\in \tau_{BSO}$ ve $x\in X-\{y\}$ olduğundan $X-\{y\}$, τ_{BSO} topolojisine göre x noktasının bir komşuluğudur. Diğer yandan $\mathcal{V}(x)$ bu topolojiye gore x noktasında bir komşuluk tabanı olduğundan

$$\exists\, k\in \mathbf{N} \text{ ö.k. } V_k \subset X - \{y\} \quad \Rightarrow \quad y \in X - V_k \quad \Rightarrow \quad y\notin V_k$$

sağlanmalıdır. Diğer yandan

$$y \in X - A = X - \bigcup_{n\in \mathbf{N}} (X - \overset{o}{V}_n) = \bigcap_{n\in \mathbf{N}} \overset{o}{V}_n \quad \Rightarrow \quad y \in \bigcap_{n\in \mathbf{N}} \overset{o}{V}_n$$

olduğundan $y \in \overset{o}{V}_k \subset V_k$ olmalıdır. Bu ise $y\notin V_k$ ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlış, yani (X,τ_{BSO}) bir A_1-uzayı değildir.

Teorem 4.2. *(X,τ) bir A_1-uzayı ise her $x\in X$ noktasında $V_{n+1} \subset V_n$, $(n = 1, 2,\dots)$ koşulunu sağlayan açık komşuluklardan oluşan sayılabilir bir*

$$\mathcal{V}(x) = \{ V_n \ / \ n = 1,2, \dots \}$$

komşuluk tabanı vardır.

Kanıt. (X,τ) bir A_1-uzayı, $x\in X$ ve $\mathcal{B}(x) = \{ B_n \mid n = 1, 2, \dots \}$, x noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı olsun.

$$V_1 := \overset{o}{B}_1 ,$$

$$V_2 := \overset{o}{B}_1 \cap \overset{o}{B}_2$$

$$V_3 := \overset{o}{B}_1 \cap \overset{o}{B}_2 \cap \overset{o}{B}_3$$

. . . .

$$V_n := \overset{o}{B}_1 \cap \overset{o}{B}_2 \cap \dots \cap \overset{o}{B}_n$$

. . . .

şeklinde her $n\in \mathbf{N}$ için bir V_n tanımlanarak elde edilen

$$\mathcal{V}(x) = \{ V_n \mid n=1,2, \dots \}$$

sayılabilir ailesinin x noktasında, istenen koşulları sağlayan bir komşuluk tabanı olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten tanımları gereği her $n\in\mathbf{N}$ için V_n , x 'in bir açık komşuluğudur ve $V_{n+1}\subset V_n$ sağlanır. Ayrıca, $\mathcal{B}(x)$ x 'de bir komşuluk tabanı olduğundan her $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ için $x\in B_m\subset U$ olacak şekilde bir $m\in\mathbf{N}$ vardır. Buradan $V_m\in\mathcal{V}(x)$ için, $x\in V_m\subset U$ elde edilir. Çünkü

$$V_m := \overset{o}{B}_1\cap \overset{o}{B}_2\cap \ldots \cap \overset{o}{B}_m \subset B_m\subset U$$

dir. Şu halde $\mathcal{V}(x)$, x noktasında istenen koşulları sağlayan bir komşuluk tabanıdır. □

Tanım 4.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}\subset\tau$ olsun. Eğer her açık küme, $\mathcal{B}$ 'nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile,

$$\forall\, G\in\tau \;\text{ için }\; \exists\, \mathcal{B}'\subset\mathcal{B} \;\text{ ö.k. }\; G=\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, bu $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisi için bir *taban* (veya *baz*) adı verilir.

Örneğin $\mathcal{B}=\{\, K(x,\varepsilon)\mid x\in X,\ \varepsilon>0\,\}$ ailesi (X, d) metrik uzayında τ_d metrik topolojisi için bir tabandır. Gerçekten her $G\in\tau_d$ için, τ_d 'nin tanımından dolayı

$$\forall\, x\in G \;\text{ için }\; \exists\, \varepsilon_x>0 \;\text{ ö.k. }\; K(x,\varepsilon_x)\subset G$$

sağlandığından,

$$G=\bigcup_{x\in G} K(x,\varepsilon_x)\ , \qquad (\,K(x,\varepsilon_x)\in\mathcal{B})$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.3. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}\subset\tau$ olsun. $\mathcal{B}$'nin τ için bir taban olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her $G\in\tau$ ve her $x\in G$ için*

$$\exists\, B_x\in\mathcal{B} \;\text{ ö.k. }\; x\in B_x\subset G$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\mathcal{B}$ ailesi τ için bir taban, $G\in\tau$ ve $x\in G$ olsun. $\mathcal{B}$ taban ve $G\in\tau$ olduğundan,

$$\exists\, \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \ \text{ ö.k. } \ G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B$$

yazılabilir. $x \in G$ olduğundan buradan en az bir $B_x \in \mathcal{B}'$ için $x \in B_x \subset G$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" Her $G \in \tau$ ve her $x \in G$ için

$$\exists\, B_x \in \mathcal{B} \ \text{ ö.k. } \ x \in B_x \subset G$$

sağlansın. Buradan

$$G = \bigcup_{x\in G}\{x\} \subset \bigcup_{x\in G} B_x \subset G \quad \Rightarrow \quad G = \bigcup_{x\in G} B_x\,, \quad (B_x \in \mathcal{B})$$

elde edilir. Şu halde $\mathcal{B}' = \{ B_x \in \mathcal{B} \mid x \in B_x \subset G,\ x \in G \}$ için $G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B$ dir. □

Uyarı 4.3. Bir X kümesinin altkümelerinden oluşan herhangi bir ailenin, X üzerindeki bir topolojinin tabanı olması gerekmez. Örneğin $X = \{a, b, c\}$ kümesinin $\{a, b\}$ ve $\{a, c\}$ altkümelerinden oluşan $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ ailesi, X üzerinde bir topolojinin tabanı olamaz. Gerçekten, eğer bu $\mathcal{B}$ ailesi X üzerinde bir τ topolojisinin tabanı olsaydı, $\mathcal{B} \subset \tau$ olacağından, $\{a, b\}$, $\{a, c\} \in \tau$ ve dolayısıyla $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in \tau$ olması ve bu $\{a\}$ kümesinin de, $\mathcal{B}$'nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabilmesi gerekirdi. Oysa görüldüğü gibi bu olanaksızdır. Bu nedenle verilen bir X kümesinin altkümelerinin, hangi koşulları sağlayan bir ailesinin X üzerinde bir topolojinin tabanı olabileceği, sorusu sorulabilir. Bunun için gerekli ve yeterli koşullar aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 4.4. *X bir küme ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. $\mathcal{B}$'nin X üzerindeki bir topolojinin tabanı olabilmesi için gerek ve yeter koşul,*

a) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, *ve*

b) Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için

$$\exists\, B_x \in \mathcal{B} \ \text{ ö.k. } \ x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$$

sağlanmasıdır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\mathcal{B}$, X kümesi üzerinde bir τ topolojisinin tabanı olsun. $X\in\tau$ olduğundan,

$$\exists\ \mathcal{B}'\subset\mathcal{B}\ \text{ ö.k. }\ X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}B,$$

$\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ olduğundan $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}B\subset\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B\subset X$ ve buradan da $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B$ elde edilir. Bu ise $\mathcal{B}$'nin yukarıdaki a) koşulunu sağlandığını gösterir.

Şimdi de $B_1, B_2\in\mathcal{B}$ ve $x\in B_1\cap B_2$ olsun. ($B_1\cap B_2=\varnothing$ ise istenen koşulun sağlandığı apaçıktır. Neden?). $B_1\cap B_2\in\tau$ olacağından, Teorem 4.3'e göre

$$\exists\ B_x\in\mathcal{B}\ \text{ ö.k. }\ x\in B_x\subset B_1\cap B_2$$

elde edilir ki, bu da $\mathcal{B}$'nin yukarıdaki b) koşulunun sağlandığını gösterir.
"$\Leftarrow$" $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$ ailesi yukarıdaki a) ve b) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\mathcal{T}:=\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}B\ \mid\ \mathcal{B}'\subset\mathcal{B}\}$$

ailesinin X kümesi üzerinde, $\mathcal{B}$'yi taban kabul eden bir topoloji olduğu gösterilebilir. Gerçekten $\mathcal{B}'=\varnothing$ için $\bigcup_{B\in\varnothing}B=\varnothing$ olduğundan $\varnothing\in\mathcal{T}$ ve $\mathcal{B}'=\mathcal{B}$ için de a)'dan dolayı $X\in\mathcal{T}$ dır. Şu halde $\mathcal{T}$ ailesi (T-1) koşulunu sağlar.

(T-2) koşulunu sağladığını göstermek için, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subset\mathcal{B}$ olmak üzere $\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1}B,\ \bigcup_{C\in\mathcal{B}_2}C\in\mathcal{T}$ olsun. Buradan

$$(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1}B)\cap(\bigcup_{C\in\mathcal{B}_2}C)=\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1}\bigcup_{C\in\mathcal{B}_2}(B\cap C)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $B,C\in\mathcal{B}$ olduğundan b)'ye göre, her $x\in B\cap C$ için, $x\in B_x\subset B\cap C$ olacak şekilde bir $B_x\in\mathcal{B}$ vardır. Buradan

$$B\cap C=\bigcup_{x\in B\cap C}B_x,\quad (B_x\in\mathcal{B})$$

elde edilir. O halde $B\cap C$ kümesi de, $\mathcal{B}$'nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabilmektedir. Böylece $\mathcal{T}$ ailesine ait herhangi iki elemanın arakesitinin de yine $\mathcal{T}$'ya ait olduğu, yani $\mathcal{T}$ ailesinin (T-2) koşulunu da sağladığı görülür.

Şimdi de (T-3) koşulunun sağlandığını gösterelim: Bunun için Λ bir indis kümesi ve her $\lambda\in\Lambda$ için $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}$ olmak üzere $\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_\lambda} B\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{T}$ olsun. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}$ olduğundan,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_\lambda} B\} = \bigcup_{B\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda} B \in \mathcal{T}$$

olduğu görülür.. Bu da $\mathcal{T}$ ailesinin (T-3) koşulunu da sağladığını gösterir. Şu halde $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topolojidir. $\mathcal{B}$ ailesinin bu topoloji için bir taban olduğu ise $\mathcal{T}$'nun tanımından açıkça görülmektedir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Yukarıdaki teoremde olduğu gibi, bir $\mathcal{B}$ tabanının verilmesi ile belirlenen topolojiye bazen, "$\mathcal{B}$ ile *üretilen topoloji*" denir. Bu durum, yani $\mathcal{B}$ 'nin $\mathcal{T}$ 'nun bir tabanı olması, $\mathcal{T} = <\mathcal{B}>$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem bir topolojik uzayın bir tabanı ile, bir noktasındaki komşuluk tabanı arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 4.5. *(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}\subset\tau$ olsun. $\mathcal{B}$'nin τ için bir taban olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her $x\in X$ için, $\mathcal{B}_x=\{ B\in\mathcal{B} \mid x\in B \}$ ailesinin x noktasında bir komşuluk tabanı olmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bir topolojik uzay, bir $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesi τ için bir taban ve $x\in X$ olsun. $\mathcal{B}_x$'in elemanları, x noktasını içeren taban elemanları olarak tanımlandıklarından x'in açık komşuluklarıdır. Ayrıca eğer U, x'in herhangi bir komşuluğu ve G, $x\in G \subset U$ koşulunu sağlayan bir açık küme ise $\mathcal{B}$, τ için bir taban olduğundan, $x \in B \subset G$ olacak şekilde bir $B\in\mathcal{B}$ vardır. İşte bu B için, $B\in\mathcal{B}_x$ ve $B\subset U$ sağlanır. Şu halde, $\mathcal{B}_x$ ailesi, x noktasında bir komşuluk tabanıdır.
"$\Leftarrow$" Her $x\in X$ için $\mathcal{B}_x$ ailesi, x noktasında bir komşuluk tabanı olsun. Eğer $G\in\tau$ ise her $x\in G$ için $G\in\mathcal{U}_\tau(x)$ olduğundan

$$\exists\, B_x\in\mathcal{B}_x \quad \text{ö.k.} \quad x\in B_x\subset G$$

sağlanır. Buradan,

$$G = \bigcup_{x\in G} B_x\,, \qquad (B_x\in\mathcal{B}_x\subset\mathcal{B})$$

şeklinde yazılabilir. Şu halde verilen $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesi τ için bir tabandır. Ayrıca eğer $\varnothing \notin \mathcal{B}$ ise $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x$ olduğu görülür. □

Örnek 4.3. (X, *d*) bir metrik uzay ise her $x\in X$ için $\mathcal{B}_x := \{ K(x,\varepsilon) \mid \varepsilon>0 \}$ ailesi τ_d metrik topolojisine göre x noktasında bir komşuluk tabanı ve bunların birleşimi

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x = \bigcup_{x\in X} \{ K(x,\varepsilon) \mid \varepsilon>0 \} = \{ K(x,\varepsilon) \mid x\in X , \varepsilon>0 \},$$

bilindiği gibi τ_d için bir tabandır.

Bir X kümesi üzerindeki her taban (Teorem 4.4'deki a) ve b) koşullarını sağlayan altküme ailesi), X üzerinde bir tek topoloji üretir. Ancak, farklı tabanlar da aynı topolojiyi üretebilir. Diğer bir ifade ile, aynı topolojinin farklı tabanlarının da bulunabileceği açıktır. Örneğin her topoloji gibi, τ_d metrik topolojisi de, aşikar olarak kendisi için aynı zamanda bir tabandır. Fakat yukarıda görüldüğü gibi, bütün açık toplar ailesi $\mathcal{B}=\{ K(x,\varepsilon) \mid x\in X , \varepsilon>0 \}$, bu topolojinin kendisinden farklı bir tabanıdır.

Tanım 4.4. Bir X kümesi üzerinde aynı topolojiyi üreten iki tabana, *denk tabanlar* denir.

Örnek 4.4. Her $x=(x_1, x_2)\in \mathbf{R}^2$ ve $\varepsilon>0$ için

$$K(x,\varepsilon) = \{y=(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} < \varepsilon \}$$

ve

$$D(x,\varepsilon) = \{y=(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{maks}\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} < \varepsilon \}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{B}_1 = \{ K(x,\varepsilon) \mid x\in \mathbf{R}^2, \ \varepsilon>0 \} \quad \text{ve} \quad \mathcal{B}_2 = \{ D(x,\varepsilon) \mid x\in \mathbf{R}^2, \ \varepsilon>0 \}$$

aileleri $\mathbf{R}^2$'de denk tabanlardır, çünkü her ikisi de $\mathbf{R}^2$'nin doğal topolojisini üretir.

Teorem 4.6. *X bir küme, $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}^*$ X üzerinde iki taban olsunlar. $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}^*$'in denk olmaları için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:*

a) Her $B\in\mathcal{B}$ ve her $x\in B$ için, $x\in B^* \subset B$ olacak şekilde bir $B^*\in\mathcal{B}^*$ vardır.

b) Her $B^*\in\mathcal{B}^*$ ve her $x\in B^*$ için, $x\in B\subset B^*$ olacak şekilde bir $B\in\mathcal{B}$ vardır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\tau = <\mathcal{B}>$, $\tau^* = <\mathcal{B}^*>$ ve $\tau = \tau^*$ olsun. a) ve b)'nin sağlandığını göstereceğiz:

Eğer $B\in\mathcal{B}$ ve $x\in B$ ise $\tau = \tau^*$ olduğundan $x\in B\in\tau^*$ dır. Buradan Teorem 4.3'e göre,

$$\exists\, B^*\in\mathcal{B}^* \text{ ö.k. } x\in B^*\subset B$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki a) koşulu sağlanır.

Eğer $B^*\in\mathcal{B}^*$ ve $x\in B^*$ ise yine $\tau = \tau^*$ olduğundan $x\in B^*\in\tau$ dır. Buradan yine Teorem 4.3'e göre,

$$\exists\, B\in\mathcal{B} \text{ ö.k. } x\in B\subset B^*$$

elde edilir. Bu da yukarıdaki b) koşulunun sağlandığını gösterir.

"$\Leftarrow$" Şimdi de yukarıdaki a) ve b) koşulları sağlanırsa, $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}^*$ tabanlarının ürettikleri $\tau = <\mathcal{B}>$ ve $\tau^* = <\mathcal{B}^*>$ topolojilerinin aynı olduğunu göstereceğiz:

Eğer $G\in\tau$ ve $x\in G$ ise $\mathcal{B}$, τ için bir taban olduğundan, uygun bir $B_x\in\mathcal{B}$ için $x\in B_x\subset G$ sağlanır. a)'dan dolayı buradan

$$\exists\, B^*_x\in\mathcal{B}^* \text{ ö.k. } x\in B^*_x\subset B_x\subset G$$

yazılabilir. Buradan da,

$$G = \bigcup_{x\in G} B^*_x \quad , \quad (B^*_x\in\mathcal{B}^*\subset\tau^*)$$

elde edilir. Şu halde $G\in\tau^*$, ve bu nedenle de $\tau\subset\tau^*$ dır.

Diğer yandan, eğer $H\in\tau^*$ ve $x\in H$ ise $\mathcal{B}^*$, τ^* için bir taban olduğundan, uygun bir $B^*_x\in\mathcal{B}^*$ için $x\in B^*_x\subset H$ sağlanır. b)'den dolayı,

$$\exists\, B_x \in \mathcal{B} \quad \text{ö.k.} \quad x \in B_x \subset B_x^* \subset H$$

yazılabilir. Buradan da,

$$H = \bigcup_{x\in H} B_x\,, \qquad (\, B_x \in \mathcal{B} \subset \tau\,)$$

elde edilir. Şu halde $H \in \tau$ ve bu nedenle de $\tau^* \subset \tau$ dır. Böylece $\tau = \tau^*$ olduğu gösterilmiş ve kanıt tamamlanmıştır. □

Tanım 4.5. Bir topolojik uzayın (yani topolojisinin) sayılabilir bir tabanı varsa, bu topolojik uzaya *ikinci sayılabilir uzay* veya kısaca bir *A_2-uzayı* denir.

Örnek 4.5. $(\mathbf{R}^n, \tau_e^n)$ bir A_2-uzayıdır.

Çözüm. **Q** rasyonel sayılar kümesi olmak üzere, $\mathbf{R}^n$'nin, bütün koordinatları rasyonel sayılar olan, diğer bir ifade ile, **Q** kümesinin kendisi ile n-defa kartezyen çarpımı olan

$$\mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times \dots \times\mathbf{Q} = \{\, q = (\,q_1, q_2, \dots, q_n\,) \ \mid\ q_i \in \mathbf{Q}\ ,\ i = 1, 2, \dots , n\ \}$$

altkümesini göz önüne alalım. Bu küme sayılabilir olduğundan

$$\mathcal{B} = \{\, K(q,r) \ \mid\ q \in \mathbf{Q}^n\,,\ r > 0 \text{ rasyonel } \}$$

ailesi de sayılabilirdir. Bu $\mathcal{B}$ ailesinin τ_e^n için bir taban olduğunu göstereceğiz: Bu ailenin elemanları açık kümeler olduğundan, Teorem 4.3'e göre, her $G \in \tau_e^n$ ve her $x \in G$ için

$$\exists\, K(q,r) \in \mathcal{B} \quad \text{ö.k.} \quad x \in K(q,r) \subset G$$

olduğunu göstermek yeter. Bunun için $G \in \tau_e^n$ ve $x = (x_1, x_2, \dots ,x_n\,) \in G$ olsun. Buradan,

$$\exists\ \varepsilon>0 \quad \text{ö.k.} \quad x \in K(x,\varepsilon) \subset G$$

sağlanır. Diğer yandan, her reel sayının istenildiği kadar yakınında daima bir rasyonel sayı bulunabileceğinden, her $i = 1, 2, \dots , n$ için

$$\exists \ q_i \in \mathbf{Q} \quad \text{ö.k.} \quad |x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{n}}$$

ve

$$\exists \ r \in \mathbf{Q} \quad \text{ö.k.} \quad \frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{2\varepsilon}{3}$$

yazılabilir. Bu şekilde elde edilen $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbf{Q}^n$ ve $r \in \mathbf{Q}$ ile tanımlanan $K(q,r) \in \mathcal{B}$ için

$$x \in K(q,r) \subset K(x,\varepsilon) \subset G$$

sağlanır. Gerçekten

$$e(x, q) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2 \right\}^{1/2} < \left\{ n.\frac{\varepsilon^2}{9n} \right\}^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3} < r$$

olduğundan $x \in K(q,r)$ dir. Diğer yandan, her $z \in K(q,r)$ için

$$e(x, z) \leq e(x, q) + e(q, z) < \frac{\varepsilon}{3} + r < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

yani $z \in K(x,\varepsilon)$ dir. Şu halde $K(q,r) \subset K(x,\varepsilon)$ dir. Böylece $K(q,r) \in \mathcal{B}$ için,

$$x \in K(q,r) \subset G$$

sağlandığı gösterilmiş ve çözüm tamamlanmıştır.

Teorem 4.7. *Her A_2-uzayı bir A_1-uzayıdır.*

Kanıt. (X,τ) bir A_2-uzayı ve $\mathcal{B} = \{ B_n \mid n = 1, 2, ...\}$ bu uzayın sayılabilir bir tabanı olsun. Her $x \in X$ için

$$\mathcal{B}_x := \{ B_{n_k} \in \mathcal{B} \mid x \in B_{n_k}, k = 1, 2, ...\}$$

ailesi bu uzayda x noktasının bir komşuluk tabanıdır (bkz. Teorem 4.5). $\mathcal{B}$ sayılabilir ve $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B}_x$ de sayılabilirdir. Böylece (X,τ) topolojik uzayının her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanının bulunduğu gösterilmiş olur. Şu halde (X,τ) bir A_1-uzayıdır. □

Yukarıdaki teoreme göre, X sayılamaz bir küme ise (X,τ_{BSO}) bir A_2-uzayı olamaz, çünkü Uyarı 4.2'de görüldüğü gibi bu uzay bir A_1-uzayı değildir.

Uyarı 4.4 a) Teorem 4.7'nin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin X sayılamaz bir küme olmak üzere, (X,τ_D) ayrık topolojik uzayı bir A_1-uzayıdır, çünkü her $x\in X$ için $\mathcal{B}_x=\{\{x\}\}$ tek elemanlı ailesi bu uzayda x noktasının bir komşuluk tabanıdır. Fakat bu uzay bir A_2-uzayı değildir, çünkü bu uzayın en dar tabanı $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x\in X \}$ ailesidir (neden? Bkz. P.9), ancak bu aile sayılamazdır.

b) Her metrik uzayın metrik topolojisi ile bir A_2-uzayı olması gerekmez. Örneğin X sayılamaz olmak üzere, (X,ρ) ayrık metrik uzayının metrik topolojisi $\tau\rho$ ayrık topoloji olduğundan $(X,\tau\rho)$ bir A_2-uzayı olamaz. Oysa her metrik uzayın metrik topolojisi ile bir A_1-uzayı olduğunu görmüştük (bkz. Örnek 4.2).

Tanım 4.6. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}\subset\tau$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$'nin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ için bir taban oluşturuyorsa, bu $\mathcal{S}$ ailesine τ'nun (veya aynı anlamda olmak üzere (X,τ)'nun) bir *alttabanı* denir.

Örnek 4.6. $\mathcal{S} = \{ (- \infty , b) \mid b\in \mathbf{R} \}\cup\{ (a , \infty) \mid a\in \mathbf{R} \} \subset \tau_e$ sınırsız açık aralıklar ailesi τ_e için bir alttabandır. Gerçekten de, bu ailenin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinin ailesinin

$$\{\mathbf{R}\} \cup \{\varnothing\} \cup \mathcal{S} \cup\{(a, b) \mid a, b\in \mathbf{R},\ a < b \}$$

olduğu ve bunun da τ_e için bir taban oluşturduğu kolayca görülür.

Uyarı 4.3'de görüldüğü gibi, bir X kümesinin altkümelerinden oluşan herhangi bir ailenin, X üzerindeki bir topolojinin tabanı olması gerekmez. Ancak, X'in altkümelerinin herhangi bir $\mathcal{A}\subset \mathcal{P}(X)$ ailesinin elemanlarını (açık kümeler olarak) içeren, X üzerindeki en kaba topoloji araştırılabilir.

Teorem 4.8. *Bir X kümesi için her $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ altküme ailesi X üzerindeki bir topolojinin bir alttabanıdır.*

Kanıt. $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, X'in altkümelerinin herhangi bir ailesi olsun. Bu ailenin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{\lambda\in S} A_\lambda \mid A_\lambda \in \mathcal{A},\ S \subset \Lambda,\ S \text{ sonlu} \right\}$$

ailesinin X üzerindeki bir topolojinin tabanı olduğu gösterilebilir. Bunun için $\mathcal{B}$'nin, Teorem 4.4'deki a) ve b) koşullarını sağladığını göstermek yeter.

$S = \varnothing$ sonlu ve $\bigcap_{\lambda\in\varnothing} A_\lambda = X$ olduğundan $X \in \mathcal{B}$ dir. Bu nedenle

Teorem 4.4 a) sağlanır. Diğer yandan, eğer

$$\bigcap_{\lambda\in S_1} A_\lambda,\ \bigcap_{\lambda\in S_2} A_\lambda \in \mathcal{B} \qquad \text{ve} \qquad x \in (\bigcap_{\lambda\in S_1} A_\lambda)\cap(\bigcap_{\lambda\in S_2} A_\lambda)$$

ise S_1, $S_2 \subset \Lambda$ sonlu olduklarından, $S_1 \cup S_2 \subset \Lambda$ sonlu olup,

$$x \in \bigcap_{\lambda\in S_1\cup S_2} A_\lambda = (\bigcap_{\lambda\in S_1} A_\lambda)\cap(\bigcap_{\lambda\in S_2} A_\lambda)$$

dır. Bu ise Teorem 4.4 b)'nin sağlandığını gösterir, çünkü $\bigcap_{\lambda\in S_1\cup S_2} A_\lambda \in \mathcal{B}$ dir.

Şu halde $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topolojinin tabanıdır. Alttaban tanımına göre de, $\mathcal{A}$ bu topolojinin bir alttabanıdır. □

Uyarı 4.5. **a)** Bir X kümesi üzerinde, bir alttabanı $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi olan topoloji, $\mathcal{A}$ ailesini içeren, diğer bir ifade ile, $\mathcal{A}$'nın elemanlarını açık kümeler olarak bulunduran X üzerindeki en kaba topolojidir. Bu şekilde elde edilen topolojiye bazen, "*$\mathcal{A}$ ailesi ile üretilen topoloji*" denir. Bu durum, yani $\mathcal{A}$'nın τ'nun bir alttabanı olması, $\tau = \ll\mathcal{A}\gg$ ile gösterilecektir.

b) Bir küme ailesi ile üretilen topoloji kavramı yardımıyla, bir X kümesi üzerinde verilen bir $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *topoloji ailesinin supremumu*, yani bütün τ_λ ($\lambda \in \Lambda$ topolojilerinden daha ince olan topolojilerin en kabası, tanımlanabilir. Gerçekten de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$ ailesi ile üretilen

$$\tau = \ll \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda \gg$$

topolojisi böyle bir topolojidir. Örneğin **R** üzerinde

$$\sup(\tau_{sağ}, \tau_{sol}) = \ll \tau_{sağ} \cup \tau_{sol} \gg = \tau_e$$

Öklid topolojisidir.

Tanım 4.7. $(X, \leq)$ tam sıralanmış bir küme olsun. X üzerinde

$$\mathcal{S} = (\bigcup_{a \in X} \{ x \in X \mid x < a \}) \cup (\bigcup_{a \in X} \{ x \in X \mid a < x \})$$

ailesi ile üretilen topolojiye *sıralama topolojisi* denir. Bu topoloji ile $(X, \leq)$ kümesine de bir *sıralama uzayı* adı verilir.

Reel doğrunun doğal topolojisi, aynı zamanda **R**'deki doğal sıralamaya göre sıralama topolojisidir.

Tanım 4.8. (X,τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer $\overline{M} = X$ ise bu M altkümesine (X,τ) topolojik uzayında *yoğundur* denir.

Örnek 4.7. $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbf{R},\tau_e)$ topolojik uzayında yoğundur. Gerçekten, farklı iki reel sayı arasında daima bir rasyonel sayının bulunduğu, analiz derslerinden iyi bilinen bir sonuçtur.

Y. Teorem 4.1. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ olsun. M 'nin (X,τ) 'da yoğun olması için gerek ve yeter koşul, her $\varnothing \neq G \in \tau$ için $M \cap G \neq \varnothing$ olmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\overline{M} = X$ olsun. Eğer bir $G^* \in \tau$ için $M \cap G^* = \varnothing$ ise buradan

$$M \subset X - G^* \text{ kapalı} \quad \Rightarrow \quad X = \overline{M} = X - G^* \quad \Rightarrow \quad G^* = \varnothing$$

elde edilir. Şu halde her $\varnothing \neq G \in \tau$ için $M \cap G \neq \varnothing$ olmak zorundadır.
"$\Leftarrow$" Her $\varnothing \neq G \in \tau$ için $M \cap G \neq \varnothing$ olsun. Eğer $\overline{M} \neq X$ ise $\varnothing \neq X - \overline{M} \in \tau$ ve $M \cap (X - \overline{M}) = \varnothing$ olur ki bu da hipotezle çelişir. Şu halde $\overline{M} = X$ olmak zorundadır. □

Tanım 4.9. Bir topolojik uzayın sayılabilir güçte yoğun bir altkümesi varsa, bu topolojik uzaya *ayrılabilir (separabl) uzay* denir.

Örnek 4.8 a) $(\mathbf{R},\tau_e)$ topolojik uzayı ayrılabilirdir, çünkü **Q** rasyonel sayılar kümesi bu uzayda sayılabilir güçte yoğun bir altkümedir.

b) $(\mathbf{R},\tau_D)$ ayrık uzayı ayrılabilir değildir, çünkü bu uzayın bir tek yoğun altkümesi **R** 'nin kendisidir (neden?) ve bilindiği gibi **R** sayılamazdır.

Teorem 4.9. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\varnothing \neq A \in \tau$ olsun. Eğer bir $M \subset X$ için $\overline{M} = X$ ise $M \cap A$ kümesi de (A, τ_A) altuzayında yoğundur.*

Kanıt. $\overline{M} = X$ ve $\varnothing \neq A \in \tau$ verilmiş olsun. Y. Teorem 4.1'e gore, her $\varnothing \neq H \in \tau_A$ için $(M \cap A) \cap H \neq \varnothing$ olduğunu göstermek yeter. Keyfi bir $\varnothing \neq H \in \tau_A$ için $H = H^* \cap A$ olacak şekilde bir $\varnothing \neq H^* \in \tau$ vardır. $\overline{M} = X$ ve $\varnothing \neq H^* \cap A \in \tau$ olduğundan, $M \cap (H^* \cap A) \neq \varnothing$ olur. Buradan,

$$(M \cap A) \cap H = (M \cap A) \cap (H^* \cap A) = M \cap (H^* \cap A) \neq \varnothing$$

elde edilir. □

Sonuç 4.1. *Bir ayrılabilir uzayın boş olmayan açık altkümeleri üzerindeki altuzayları da ayrılabilirdir.*

Kanıt. (X,τ) ayrılabilir, $M \subset X$ sayılabilir yoğun bir altküme ve $\varnothing \neq A \subset X$ açık bir altküme ise Teorem 4.9'a göre $M \cap A \subset A$, (A, τ_A) altuzayında sayılabilir (neden?) ve yoğun bir altkümedir. □

Tanım 4.10. Bir topolojik uzayın herhangi bir $\mathcal{P}$ özelliği bu uzayın her altuzayı için de sağlanıyorsa, bu $\mathcal{P}$ özelliğine bir *kalıtsal özellik* veya kısaca *K-özelliği* adı verilir.

Teorem 4.10. *Birinci sayılabilirlik ve ikinci sayılabilirlik özellikleri birer K-özelliğidir.*

Kanıt. Önce (X,τ) birinci sayılabilir uzay, $A \subset X$ herhangi bir altküme ve $x \in A$ olsun.

$$\mathcal{B}(x) = \{ V_n \mid n = 1, 2, ... \},$$

(X,τ)'da x noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanı ise

$$\mathcal{B}_A(x) := \{ A \cap V_n \mid n = 1, 2, ... \},$$

sayılabilir ailesinin de, (A,τ_A) altuzayında x noktasının bir komşuluk tabanı olduğu gösterilebilir. Gerçekten, açıkça görüldüğü gibi $\mathcal{B}_A(x)$'in elemanları altuzayda x noktasının komşuluklarıdır. Ayrıca eğer W, x noktasının altuzayda herhangi bir komşuluğu ise bir $V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ için $W = A\cap V$ dir. Diğer yandan, $\mathcal{B}(x)$, x noktasının üst uzayda bir komşuluk tabanı olduğundan

$$\exists\ V_k\in\mathcal{B}(x) \quad \text{ö.k.} \quad x\in V_k\subset V,$$

ve buradan da $A\cap V_k\in\mathcal{B}_A(x)$ için $x\in A\cap V_k \subset A\cap V = W$ sağlanır. Şu halde $\mathcal{B}_A(x)$, (A,τ_A) altuzayında x noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanıdır. Dolayısıyla (A,τ_A) da bir A_1-uzayıdır.

Şimdi de, (X,τ) ikinci sayılabilir uzay, $A \subset X$ herhangi bir altküme ve

$$\mathcal{B} = \{\ B_n \ \mid\ n = 1, 2, ...\ \},$$

bu uzayın sayılabilir bir tabanı ise

$$\mathcal{B}_A = \{\ A\cap B_n \ \mid\ n = 1, 2, ...\ \},$$

sayılabilir ailesinin de τ_A altuzay topolojisi için bir taban olduğu kolayca görülür. Gerçekten açıkça görüldüğü gibi $\mathcal{B}_A \subset \tau_A$ dır. Ayrıca eğer $G\in\tau_A$ ise $G \subset A$ ve bir $H\in\tau$ için $G=A\cap H$ dır. Buradan, her $x\in G$ için $x\in H$ ve $\mathcal{B}$, τ için bir taban olduğundan

$$\exists\ B_k\in\mathcal{B} \quad \text{ö.k.} \quad x\in B_k\subset H$$

yazılabilir. Buradan da $A\cap B_k \in\mathcal{B}_A$ için, $x \in A\cap B_k \subset A\cap H = G$ elde edilir. Şu halde $\mathcal{B}_A$, τ_A altuzay topolojisi için sayılabilir bir taban ve dolayısıyla (A,τ_A) da bir A_2-uzayıdır. □

Uyarı 4.6. Birinci- ve ikinci sayılabilirlik özeliklerinin aksine, "ayrılabilir uzay olma" özelliği bir K-özelliği değildir. Diğer bir ifade ile, ayrılabilir bir topolojik uzayın her altuzayının da ayrılabilir olması gerekmez. Örneğin, (X,τ) herhangi bir topolojik uzay ve $w\notin X$ olsun.

$$X^* := X\cup\{w\}\ , \quad \tau^* := \{\ G \cup\{w\} \ \mid\ G\in\tau\ \}\cup\{\varnothing\}$$

şeklinde tanımlanırsa, kolayca görüleceği gibi, τ^*, X^* üzerinde bir topolojidir ve $(\tau^*)_X = \tau$ dır. Ayrıca Y. Teorem 4.1'e göre, $\overline{\{w\}}= X^*$ olduğu da kolayca görülür. Şu halde (X^*,τ^*) topolojik uzayı ayrılabilirdir. Bu nedenle, eğer başlangıçta, X sayılamaz bir küme ve $\tau=\tau_D$ ayrık topoloji olarak seçilirse, yukarıdaki gibi elde edilen (X^*,τ^*) ayrılabilir topolojik uzayının X altkümesi üzerindeki altuzay topolojisi, $(\tau^*)_X = \tau_D$ ayrık topoloji olacaktır. Fakat X sayılamaz olduğundan, Örnek 4.8 b) deki gibi kolayca görüleceği gibi (X,τ_D) ayrık altuzayı ayrılabilir değildir, çünkü bu uzaydaki bir tek yoğun altküme X'in kendisidir.

Teorem 4.11. *Her A_2-uzayı ayrılabilirdir.*

Kanıt. (X,τ) bir A_2-uzayı ve $\mathcal{B} = \{B_n \mid n = 1, 2, ...\}$, bu uzayın sayılabilir bir tabanı olsun. Genelliği bozmayacağı için B_n'lerin herbirini boştan farklı kabul edebiliriz. Şimdi de her $n\in\mathbf{N}$ için bir $b_n\in B_n$ seçilerek (bkz. Bölüm 1, Seçme aksiyomu) sayılabilir güçte bir

$$M = \{ b_n \mid b_n\in B_n ,\ n\in\mathbf{N} \}$$

kümesi elde edilir. Bu M kümesi için $\overline{M} = X$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten, eğer $\varnothing\neq G\in\tau$ ve $x\in G$ ise $\mathcal{B}$, τ için taban olduğundan, bir $B_m\in\mathcal{B}$ için, $x\in B_m\subset G$ ve buradan da

$$b_m\in M\cap B_m\subset M\cap G \quad\Rightarrow\quad M\cap G\neq\varnothing$$

elde edilir. Şu halde Y. Teorem 4.1'e göre $\overline{M} = X$ dir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 4.7. Her metrik uzayın, metrik topoloji ile bir ayrılabilir topolojik uzay olması gerekmez. Örneğin, sayılamaz güçte bir X kümesi üzerinde ayrık metriğin ürettiği topoloji, bilindiği gibi ayrık topoloji olup, bu uzay ayrılabilir değildir. Ayrıca bilindiği gibi, her metrik uzayın, metrik topolojisi ile bir A_2-uzayı olması da gerekmez (bkz. Uyarı 4.4 b). Buna karşılık aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 4.12. *Her ayrılabilir metrik uzay bir A_2-uzayıdır.*

Kanıt. (X,τ_d) ayrılabilir metrik uzay ve $M\subset X$ sayılabilir güçte yoğun bir altküme olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B} := \{ K(m,r) \mid m\in M,\ r\in\mathbf{Q},\ r>0 \}\subset\tau_d$$

sayılabilir açık küme ailesinin τ_d metrik topolojisi için bir taban olduğu gösterilebilir. Bunun için $G\in\tau_d$ ve $x\in G$ ise önce $K(x,\varepsilon)\subset G$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı vardır. $M\subset X$ yoğun, yani $\overline{M} = X$ olduğundan,

$$\exists\ m\in M \quad \text{ö.k.} \quad m\in K(x,\frac{\varepsilon}{3})$$

yazılabilir. Diğer yandan $\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{2\varepsilon}{3}$ olacak şekilde seçilen bir $r\in \mathbf{Q}$ pozitif rasyonel sayısı için,

$$x\in K(m,r) \subset K(x,\varepsilon) \subset G$$

sağlandığı görülür. Gerçekten $d(m,x)<\frac{\varepsilon}{3}< r$ ve her $y\in K(m,r)$ için $d(m,y) < r$ olduğundan

$$d(x,y) \le d(x,m) + d(m,y) < \frac{\varepsilon}{3} + r < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde edilir. Şu halde $y\in K(x,\varepsilon)$ dir. Böylece elde edilen $K(m,r)\in \mathcal{B}$ için, $x\in K(m,r) \subset G$ sağlandığı gösterilmiş olur ve kanıt biter. □

Özetlersek, burada tanıtılan sayılabilirlik özellikleri arasında,

$$\text{Ayrılabilir uzay} \quad \Leftarrow \quad A_2\text{-uzayı} \quad \Rightarrow \quad A_1\text{-uzayı}$$

sağlanır. Ancak buradaki oklar genel olarak tersine çevrilemez. Örneğin $(\mathbf{R},\tau_{BSO})$ ayrılabilir bir uzay (neden?), $(\mathbf{R},\tau_D)$ ayrık uzayı ise bir A_1-uzayıdır. Fakat bu uzayların hiçbiri bir A_2-uzayı değildir.

Problemler

P.1 a) $(\mathbf{R},\tau_{sağ})$ ve $(\mathbf{R},\tau_{sol})$ topolojik uzaylarının birer A_1-uzayı olduklarını gösteriniz.

b) $(\mathbf{R},\tau_{sağ})$ ve $(\mathbf{R},\tau_{sol})$ topolojik uzaylarının birer A_2-uzayı olduklarını gösteriniz. Bu uzaylar aynı zamanda birer ayrılabilir uzay mıdır?

P.2. $x\in\mathbf{R}$ olmak üzere $\mathcal{B}_x := \{\, [x, y) \mid x < y,\ y\in\mathbf{R} \,\}$ ailesinin **R** üzerinde bir topolojinin x noktasında bir komşuluk tabanı oluşturduğunu gösteriniz (bkz. Teorem 4.1). Bu topolojiye *Sorgenfrey topolojisi* adı verilir. Bu topolojiyi $\tau_{[-)}$ ile gösterirsek, $(\mathbf{R},\tau_{[-)})$ topolojik uzayı A_1-uzayı ve ayrılabilir uzay olma özelliklerinden hangilerini sağlar?

Benzer şekilde, $x\in\mathbf{R}$ olmak üzere $\mathcal{B}_x := \{\, (y, x] \mid y < x,\ y\in\mathbf{R} \,\}$ ailesi de **R** üzerinde bir topolojinin x noktasında bir komşuluk tabanı oluşturur. Sorgenfrey topolojisine paralel olarak bu topolojiyi de $\tau_{(-]}$ ile gösterirsek, $(\mathbf{R},\tau_{(-]})$ topolojik uzayının A_1-uzayı ve ayrılabilir uzay olma özelliklerini sağlayıp sağlamadıklarını araştırınız.

$\tau_{[-)}$ ile $\tau_{(-]}$ topolojilerini **R**'nin doğal topolojisi ile karşılaştırınız.

P.3. Reel sayılar doğrusu üzerindeki hangi tip aralıklar Sorgenfrey topolojisine göre açıktırlar?

P.4. Aşağıdaki kümelerden herbirinin Sorgenfrey topolojisine göre kapanışlarını belirleyiniz.

Q rasyonel sayılar kümesi, **Z** tam sayılar kümesi

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\},\quad B = \{-\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\},$$

P.5. $(\mathbf{R}, \tau_{BSO})$ topolojik uzayının ayrılabilir olduğunu gösteriniz. Bu uzay neden bir A_2-uzayı olamaz (bkz. Uyarı 4.2 ve Teorem 4.7)

P.6. Bir topolojik uzayda bir noktanın sonlu sayıda komşuluktan oluşan bir komşuluk tabanı varsa, o noktanın bir tek komşuluktan oluşan bir komşuluk tabanı da vardır. Gösteriniz.

P.7. $\mathbf{R}^2$'nin kapalı üst yarı-düzlemini $\Gamma = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$ ile gösterelim. Açık üst yarı-düzlemin her noktasında, o noktayı merkez kabul eden ve tamamen Γ içinde kalan bütün açık daireleri, o noktadaki komşuluk tabanı elemanları olarak açıklayalım. x-ekseni üzerindeki her z noktasında ise D, x-eksenine z noktasında teğet olan bir açık daire olmak üzere, $\{z\}\cup D$ şeklindeki kümeler z noktasındaki komşuluk tabanı elemanları olarak açıklansın.

a) Γ'nın her noktasında yukarıdaki gibi açıklanan komşuluk tabanı elemanları Γ üzerinde bir topoloji açıklar. Gösteriniz (bkz. Teorem 4.1).

b) Bu şekilde açıklanan topolojiyi, $\mathbf{R}^2$'nin doğal topolojisinin kapalı üst yarı-düzlemi üzerindeki altuzay topolojisi ile karşılaştırınız.

c) Yukarıda açıklanan topoloji ile Γ uzayında, bir kümenin kapanışı ve içini belirleyiniz.

Yukarıda açıklanan topoloji ile Γ kapalı üst yarı-düzlemine *Moore düzlemi* adı verilir.

P.8. $\mathbf{R}^I := \{ f \mid f : [0, 1] \to \mathbf{R} \}$, $I = [0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış bütün reel değerli fonksiyonların kümesi olmak üzere,

a) Her $f \in \mathbf{R}^I$, her sonlu $S \subset I$ ve her $\delta > 0$ sayısı için

$$U(f, S, \delta) := \{ g \in \mathbf{R}^I \mid |g(x) - f(x)| < \delta ,\ \forall x \in S \}$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan kümelerin

$$\mathcal{B}_f = \{ U(f, S, \delta) \mid \delta > 0 ,\ S \subset I \text{ sonlu} \}$$

ailesinin, $\mathbf{R}^I$ üzerinde bir topolojinin $f \in \mathbf{R}^I$ noktasında bir komşuluk tabanı oluşturduğunu gösteriniz.

b) Her $f \in \mathbf{R}^I$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$V(f, \varepsilon) := \{ g \in \mathbf{R}^I \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon ,\ \forall x \in I \}$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan kümelerin

$$\mathcal{V}_f := \{ V(f, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \}$$

ailesinin $\mathbf{R}^I$ üzerinde bir topolojinin $f \in \mathbf{R}^I$ noktasında bir komşuluk tabanı oluşturduğunu gösteriniz.

Yukarıdaki a) ve b) şıklarında tanımlanan topolojileri karşılaştırınız.

P.9. (X, τ_D) topolojik uzayının bir tabanı $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X \}$ dir. Gösterilebilir ki bu uzayın en dar tabanı, bu $\mathcal{B}$ tek noktalı kümeler ailesidir. Diğer bir ifade ile, eğer bir $\mathcal{B}^* \subset \tau_D$ ailesi de τ_D için bir taban ise $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ olduğu görülür. Tam olarak ifade etmek gerekirse,

$$\mathcal{B}^* \subset \tau_D \text{ ailesi } \tau_D \text{ için bir tabandır} \iff \mathcal{B} \subset \mathcal{B}^* \text{ dır.}$$

P.10. Her $n \in \mathbf{N}$ için $S_n = \{n, n+1, \dots \}$ şeklinde tanımlansın.

$$\mathcal{B} := \{ B \subset \mathbf{N} \mid \exists\, n \in \mathbf{N},\ S_n \subset B \}$$

ailesinin **N** doğal sayılar kümesi üzerinde bir topolojinin tabanını oluşturduğunu gösteriniz. (Y.g.: Bkz. Teorem 4.4).

P.11. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ bu uzaydaki kapalı kümelerin bir ailesi olsun. Eğer (X,τ)'daki her kapalı küme bu $\mathcal{A}$'nın bazı elemanlarının arakesiti olarak yazılabiliyorsa, bu $\mathcal{A}$ ailesine, (X,τ) topolojik uzayınnın *kapalı kümeler ailesi için bir tabandır* denir.

a) (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ bu uzaydaki kapalı kümelerin bir ailesi olsun.

$\mathcal{A}$, bu uzayın kapalı kümeler ailesi için bir tabandır

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} = \{ X - A \mid A \in \mathcal{A} \}$ bu uzayın açık kümeler ailesi için bir tabandır

b) X bir küme ve $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. $\mathcal{A}$'nın X üzerindeki bir topolojinin kapalı kümeler ailesi için bir taban olabilmesi için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

(i) Her $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ için $A_1 \cup A_2$, $\mathcal{A}$'nın bazı elemanlarının arakesiti şeklinde yazılabilir.

(ii) $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \varnothing$ olur.

Gösteriniz. (Y.g.: Bkz. a) şıkkı ve Teorem 4.4)

P.12. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{A} = \{\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\}\}$ altküme ailesi ile üretilen topolojiyi belirleyiniz

P.13. **R** üzerinde, uzunlukları 1 olan bütün kapalı aralıkların ailesi,

$$\mathcal{A} = \{ [x, x+1] \mid x \in \mathbf{R} \}$$

ile üretilen topolojiyi belirleyiniz.

P.14. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki ayrık topoloji için tek elemanlı altkümelerden hiçbirini içermeyen bir alttaban bulunuz.

P.15. (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{S}$, τ için bir alttaban ve $A \subset X$ ise $\mathcal{S}_A := \{A \cap S \mid S \in \mathcal{S}\}$ ailesinin A üzerindeki τ_A altuzay topolojisi için bir alttaban olduğunu gösteriniz.

BÖLÜM 5

TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde topolojik uzaylar arasında sürekli fonksiyonlar tanımlanacak ve başlıca özellikleri incelenecektir. Metrik uzaylar arasındaki fonksiyonların sürekliliği tanımlanırken orada başlıca rolü "uzaklık" kavramının oynadığını görmüştük. Teorem 2.6'da, bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğinin komşuluklar yardımıyla belirlenebildiği gösterilmişti. O teoremin ifadesi, burada en genel hal için, bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğinin tanımı olarak alınacaktır.

Tanım 5.1. (X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

a) Eğer her $V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$ için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{U}_{\tau}(x)$ mevcut ise bu f fonksiyonuna, x *noktasında süreklidir* denir.

b) Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna, X üzerinde süreklidir veya kısaca *süreklidir* denir.

Uyarı 5.1. (X, d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ ve $x \in X$ ise f 'nin metrik uzaylar arasında verilen Tanım 2.7 anlamındaki sürekliliği; bu metriklerin ürettiği metrik topolojilere göre Tanım 5.1 a) anlamındaki sürekliliğine denktir. Gerçekten, f fonksiyonu $x \in X$ noktasında d ve ρ metriklerine göre Tanım 2.7 anlamında sürekli olsun ve $V \in \mathcal{U}_{\tau_\rho}(f(x))$ keyfi verilsin. Önce komşuluk tanımından, $f(x) \in G \subset V$ olacak şekilde bir $G \in \tau_\rho$ vardır. Diğer yandan τ_ρ'nun tanımı hatırlanırsa, $K(f(x),\varepsilon) \subset G$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı vardır. f, $x \in X$ noktasında d ve ρ metriklerine göre Tanım 2.7 anlamında sürekli verildiğinden, bu $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon,x) > 0, \quad \text{ö.k.} \quad d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

sağlanır. Bu ise $f(K(x,\delta)) \subset K(f(x),\varepsilon) \subset G \subset V$ olduğunu ifade eder. Şu halde $K(x,\delta) \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x)$ için $f(K(x,\delta)) \subset V$ sağlanmaktadır. Bu durum, f 'nin $x \in X$ noktasında τ_d ve τ_ρ metrik topolojilerine göre Tanım 5.1 a) anlamında sürekli olduğunu gösterir. Tersine olarak, f fonksiyonu $x \in X$ noktasında τ_d ve τ_ρ metrik topolojilerine göre Tanım 5.1 a) anlamında sürekli olsun ve $\varepsilon>0$ keyfi verilsin. $K(f(x),\varepsilon) \in \mathcal{U}_{\tau_\rho}(f(x))$ olup, Tanım 5.1 a)'dan dolayı

$$\exists\, U \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x), \quad \text{ö.k.} \quad f(U) \subset K(f(x),\varepsilon)$$

sağlanır. $U \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x)$ olduğundan, yine komşuluk tanımı hatırlanırsa, önce $x \in H \subset U$ olacak şekilde bir $H \in \tau_d$ kümesi ve τ_d 'nin tanımı dolayısıyla da, $x \in K(x,\delta) \subset H$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Buradan

$$f(K(x,\delta)) \subset f(H) \subset f(U) \subset K(f(x),\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad f(K(x,\delta)) \subset K(f(x),\varepsilon)$$

elde edilir. Bu ise $x \in X$ ve $\varepsilon>0$ verildiğinde, onlara bağlı olarak bulunan yukarıdaki $\delta>0$ için

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

koşulunun sağlandığını, yani f 'nin $x \in X$ noktasında d ve ρ metriklerine göre Tanım 2.7 anlamında sürekli olduğunu gösterir. Böylece iddia edilen denklik kanıtlanmış olur.

Teorem 5.1. *(X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x\in X$ ise aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) f, x noktasında süreklidir.

b) Her $V\in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$ için $f^{-1}(V)\in \mathcal{U}_{\tau}(x)$ dir.

c) Her $W\in \mathcal{B}(f(x))$ için $f(V)\subset W$ olacak şekilde bir $V\in \mathcal{B}(x)$ vardır. Burada $\mathcal{B}(f(x))$ ve $\mathcal{B}(x)$ sırasıyla $f(x)$ ve x noktalarındaki birer komşuluk tabanını göstermektedir.

Kanıt. Okuyucuya bırakılmıştır. Bkz. P.1. □

Teorem 5.2. *(X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x\in X$ ise aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) f, X üzerinde süreklidir.

b) Her $H\in\tau^*$ için $f^{-1}(H)\in\tau$ dir.

c) Her $A\subset Y$ τ^*-kapalı için $f^{-1}(A)\subset X$ τ-kapalıdır.

d) Her $A\subset X$ için $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ dir.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b): $H\in\tau^*$ olsun. Her $x\in f^{-1}(H)$ için $f(x)\in H$ ve $H\in\tau^*$ olduğundan $H\in\mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$ dir. a)'dan dolayı f, $x\in X$ 'de sürekli olduğundan

$$\exists\, U\in\mathcal{U}_{\tau}(x) \quad \text{ö.k} \quad f(U)\subset H \quad\Rightarrow\quad x\in U\subset f^{-1}(H)$$

yazılabilir. Buna göre x, $f^{-1}(H)$'nın bir iç noktasıdır. Böylece $f^{-1}(H)$'nın her noktasının bir iç nokta olduğu elde edilir. Şu halde $f^{-1}(H)\in\tau$ dır.

b) $\Rightarrow$ c): Her $A\subset Y$ τ^*-kapalı için $Y-A\in\tau^*$, ve b)'den dolayı $f^{-1}(Y-A)\in\tau$ dır. Fakat $f^{-1}(Y-A) = X-f^{-1}(A)$ olduğundan $X-f^{-1}(A)\in\tau$ ve dolayısıyla, $f^{-1}(A)$ X'de τ-kapalıdır.

c) $\Rightarrow$ d): $A\subset X$ olsun. $f(A)$'yi içeren her kapalı kümenin $f(\overline{A})$'yi de içerdiğini göstermek yeter. $K\subset Y$, $f(A)\subset K$ koşulunu sağlayan herhangi bir τ^*-kapalı küme ise c)'den dolayı $f^{-1}(K)$, X'de τ-kapalıdır. Buradan

$$A\subset f^{-1}(K) \quad\Rightarrow\quad \overline{A}\subset\overline{f^{-1}(K)} = f^{-1}(K) \quad\Rightarrow\quad f(\overline{A})\subset f(f^{-1}(K))\subset K$$

yazılabilir. Şu halde

$$f(\overline{A})\subset\bigcap\{K \mid f(A)\subset K \text{ ve } K \text{ kapalı}\} = \overline{f(A)}$$

dir.

d) $\Rightarrow$ a): $x\in X$ herhangi bir nokta ve V, $f(x)$ 'in bir komşuluğu olsun.

$$U := X - \overline{X - f^{-1}(V)}$$

olarak tanımlanırsa, bu U kümesinin x'in $f(U) \subset V$ koşulunu sağlayan bir komşuluğu olduğu gösterilebilir. Önce d)'den $f(\overline{X - f^{-1}(V)}) \subset \overline{f(X - f^{-1}(V))}$ olduğunu kullanarak $x\in U$ olduğunu gösterelim. Bunun için $x \notin \overline{X - f^{-1}(V)}$ olduğunu göstermek yeter. Aksini varsayalım, yani $x \in \overline{X - f^{-1}(V)}$ olsun. Buradan $f(x) \in f(\overline{X - f^{-1}(V)}) \subset \overline{f(X - f^{-1}(V))}$ olması gerekir. Fakat V, $f(x)$'in bir komşuluğu ve $f(x)\in \overline{f(X - f^{-1}(V))}$ olduğundan $V\cap(f(X - f^{-1}(V)) \neq \varnothing$ olmalıdır. Halbuki

$$V\cap(f(X - f^{-1}(V)) = V\cap(f(f^{-1}(Y - V)) \subset V\cap(Y - V)) = \varnothing$$

sağlanır. O halde $x \notin \overline{X - f^{-1}(V)}$, dolayısıyla $x\in U$ ve U açık olduğundan x'in bir komşuluğudur.

Diğer yandan $f(U) \subset V$ sağlanır. Çünkü her $z\in f(U)$ için

$$\exists\, y\in U, \ \text{ö.k.} \ z = f(y) \ \Rightarrow \ y \notin \overline{X - f^{-1}(V)} \ \Rightarrow \ y \in f^{-1}(V)$$
$$\Rightarrow \ z = f(y)\in V$$

elde edilir. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur. □

Örnek 5.1. a) (X,τ) ve (Y,τ^*) herhangi iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$, $f(x)=y_o$ sabit ise f süreklidir. Diğer bir ifade ile, topolojilere bağlı olmadan, iki topolojik uzay arasındaki her sabit fonksiyon süreklidir.

b) $X \neq \varnothing$ bir küme ve τ_1 ile τ_2, X üzerinde iki topoloji iseler,

$$i : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)\,, \quad i(x) := x$$

özdeşlik fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $\tau_2 \subset \tau_1$ olmasıdır.

c) (X,τ_D) ayrık uzay ve (Y,τ^*) herhangi bir topolojik uzay ise her $f : (X,\tau_D) \to (Y,\tau^*)$ fonksiyonu süreklidir.

d) (X,τ) herhangi bir topolojik uzay ve (Y,τ_t) ilkel uzay ise her $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_t)$ fonksiyonu süreklidir.

e) $X \neq \varnothing$ bir küme, τ_1 ile τ_2, X üzerinde iki topoloji, (Y,τ^*) bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\tau_2 \subset \tau_1$ ve f, τ_2-τ^* sürekli, (yani $f : (X,\tau_2) \to (Y,\tau^*)$ sürekli) ise f, τ_1-τ^* süreklidir.

Çözüm. a) $H \subset Y$ herhangi bir açık küme ise iki hal söz konusudur: $y_o \in H$ veya $y_o \notin H$ dır. Eğer $y_o \in H$ ise $f^{-1}(H) = X$; eğer $y_o \notin H$ ise $f^{-1}(H) = \varnothing$ olur. Şu halde her iki durumda da herhangi bir açık kümenin ters görüntüsü açık olduğundan Teorem 5.2 b)'ye göre f süreklidir.

b) Yine Teorem 5.2'ye göre,

$$i : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2) \text{ süreklidir} \iff \text{Her } H \in \tau_2 \text{ için } i^{-1}(H) = H \in \tau_1 \text{ dir}$$
$$\iff \tau_2 \subset \tau_1 \text{ dir.}$$

c) $H \subset Y$ herhangi bir açık küme olsun. X 'deki topoloji ayrık olduğundan, X'in her altkümesi açık, dolayısıyla $f^{-1}(H)$ kümesi de X'de açıktır. Şu halde, bir ayrık topolojik uzay üzerinde tanımlı her fonksiyon süreklidir.

d) $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_t)$ fonksiyonu nasıl tanımlanırsa tanımlansın, $f^{-1}(Y) = X$ ve $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ olup, X üzerindeki her topolojiye göre açık olduğundan Teorem 5.2 b)'ye göre f daima süreklidir. Şu halde, resim uzayı ilkel topoloji ile göz önüne alınırsa, tanım uzayı üzerindeki topoloji ne olursa olsun her fonksiyon süreklidir.

e) $f : X \to Y$, τ_2-τ^* sürekli, yani $f : (X,\tau_2) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ve $\tau_2 \subset \tau_1$ ise Teorem 5.2 b)'ye göre, her $H \in \tau^*$ için $f^{-1}(H) \in \tau_2$ ve $\tau_2 \subset \tau_1$ olduğundan da $f^{-1}(H) \in \tau_1$ olur. Şu halde f, τ_1-τ^* süreklidir.

Sonuç olarak, bir küme üzerinde verilen topolojiler inceldikçe, o küme üzerinde tanımlanabilecek sürekli fonksiyonların sayısı artmakta ve ayrık topolojiye ulaşılınca artık her fonksiyon sürekli olmaktadır. Tersine, bir küme üzerinde verilen topolojiler kabalaştıkça, o küme üzerinde tanımlanabilecek sürekli fonksiyonların sayısı azalmakta ve ilkel topolojiye ulaşılınca sadece sabit fonksiyonlar sürekli olmaktadır.

Teorem 5.3. *a) (X,τ), $(Y,\mathcal{Y})$, $(Z,\mathcal{Z})$ topolojik uzayları verilsin. Eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ ve $g:(Y,\mathcal{Y})\to(Z,\mathcal{Z})$ sürekli ise $gof:(X,\tau)\to(Z,\mathcal{Z})$, $(gof)(x)=g(f(x))$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.*

b) $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ sürekli ve $A\subset X$ ise f'nin A' ya daraltılmışı

$$f/A:(A,\tau_A)\to(Y,\mathcal{Y})\,,\quad (f/A)(a)=f(a)\ ,\quad (a\in A)$$

da süreklidir.

c) $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ sürekli ise $f:(X,\tau)\to(f(X),\mathcal{Y}_{f(X)})$ de süreklidir.

Kanıt. a) $W\subset Z$ herhangi bir açık küme olsun. Önce $g:(Y,\mathcal{Y})\to(Z,\mathcal{Z})$ sürekli olduğundan Teorem 5.2 b)'ye göre $g^{-1}(W)\in\mathcal{Y}$ ve $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ sürekli olduğundan da $f^{-1}(g^{-1}(W))\in\tau$ dır. Fakat

$$(gof)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$$

olduğu göz önüne alınırsa buradan $(gof)^{-1}(W)\in\tau$ elde edilir. Şu halde yine Teorem 5.2 b)'ye göre gof süreklidir.

b) $H\subset Y$ herhangi bir açık küme olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ sürekli olduğundan $f^{-1}(H)\in\tau$ dır. Buradan

$$(f|A)^{-1}(H)=A\cap f^{-1}(H)\in\tau_A$$

elde edilir. Şu halde $f|A:(A,\tau_A)\to(Y,\mathcal{Y})$ süreklidir.

c) $G\subset f(X)$, altuzayda herhangi bir açık küme, yani $G\in\mathcal{Y}_{f(X)}$ ise uygun bir $H\in\mathcal{Y}$ için $G=f(X)\cap H$ biçiminde yazılabilir. Buradan

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(f(X)\cap H)=f^{-1}(f(X))\cap f^{-1}(H)=X\cap f^{-1}(H)=f^{-1}(H)$$

elde edilir. $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ sürekli ve $H\in\mathcal{Y}$ olduğundan $f^{-1}(H)\in\tau$ dır. Şu halde $f:(X,\tau)\to(f(X),\mathcal{Y}_{f(X)})$ süreklidir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 5.2. Teorem 5.3. b)'deki ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup(\mathbf{R}-\mathbf{Q})$, ve

$$f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,,\qquad f(x):=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$$

fonksiyonunun **Q** ve **R** – **Q** ’ya daraltılmışları $f|\mathbf{Q}$ ve $f|\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ sırasıyla 1 ve 0 sabit fonksiyonları olduklarından süreklidirler, fakat f fonksiyonu **R** ’nin hiçbir noktasında sürekli değildir.

Aşağıdaki teorem, bir fonksiyonun sürekliliği ile, onun altuzaylara daraltılmışlarının süreklilikleri arasındaki ilişkileri vermektedir.

Teorem 5.4. *(X,τ) ve (Y,τ^*) herhangi iki topolojik uzay olsun.*

a) $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ kapalı altkümeler ve $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ise

$f : X \to Y$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $f|A_i : A_i \to Y$ süreklidir.

b) $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, X ’de bir açık küme ailesi ve $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ise

$f : X \to Y$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\lambda\in\Lambda$ için $f/G_\lambda : G_\lambda \to Y$ süreklidir.

Kanıt. a) “$\Rightarrow$” Bkz. Teorem 5.3. b).

“$\Leftarrow$” $B \subset Y$ kapalı ise

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} \left[f^{-1}(B) \cap A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (f \mid A_i)^{-1}(B)$$

şeklinde yazılabileceğinden, $f|A_i$ fonksiyonlarının her birinin sürekli olması, $(f|A_i)^{-1}(B)$’lerin önce A_i altuzaylarında kapalı olduklarını ve A_i kümelerinin de X’de kapalı olmaları, $f^{-1}(B)$’nin de X’de, sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak kapalı olduğunu gösterir. O halde f süreklidir.

b) “$\Rightarrow$” Bkz. Teorem 5.3. b).

“$\Leftarrow$” $H \subset Y$ açık ise

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(H) \cap X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left[f^{-1}(H) \cap G_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (f \mid G_\lambda)^{-1}(H)$$

şeklinde yazılabileceğinden, $f|G_\lambda$ fonksiyonlarının her birinin sürekli olması, $(f|G_\lambda)^{-1}(H)$’ların önce G_λ altuzaylarında açık olduklarını ve G_λ kümelerinin de X’de açık olmaları, $f^{-1}(H)$ kümesinin de X’de, açık kümelerin birleşimi olarak, açık olduğunu gösterir. O halde f süreklidir. □

Teorem 5.5. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{S} \subset \tau^*$, τ^* 'ın bir alttabanı ise*

$$f \text{ süreklidir } \Leftrightarrow \text{ Her } S \in \mathcal{S} \text{ için } f^{-1}(S) \in \tau \text{ dır.}$$

Kanıt. "$\Rightarrow$" f sürekli ise $\mathcal{S} \subset \tau^*$ olduğundan, Teorem 5.2. b)'ye göre her $S \in \mathcal{S}$ için $f^{-1}(S) \in \tau$ olur.
"$\Leftarrow$" $H \subset Y$ herhangi bir açık küme olsun. $\mathcal{S} \subset \tau^*$, τ^* 'ın bir alttabanı olduğundan

$$H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda,i} \right), \quad (S_{\lambda,i} \in \mathcal{S} \text{ , } n \in \mathbf{N})$$

biçiminde yazılabilir. Burada Λ herhangi bir indis kümesidir. Buradan,

$$f^{-1}(H) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_{\lambda,i}) \right), \quad (S_{\lambda,i} \in \mathcal{S} \text{ , } n \in \mathbf{N})$$

elde edilir. Hipoteze göre her $S \in \mathcal{S}$ için $f^{-1}(S) \in \tau$ olduğundan, $f^{-1}(H)$ kümesi de X'de açık olmalıdır. Şu halde f süreklidir. □

Uyarı 5.3. Her taban aynı zamanda bir alttaban olarak göz önüne alınabileceğinden, Teorem 5.5'in ifadesinde "alttaban" yerine "taban" yazılarak elde edilen ifade de doğrudur.

Teorem 5.6. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise*

$$f \text{ süreklidir } \Leftrightarrow \text{ Her } N \subset Y \text{ için } f^{-1}(N^{o}) \subset (f^{-1}(N))^{o} \text{ dir.}$$

Kanıt. "$\Rightarrow$" f sürekli ve $N \subset Y$ olsun. N^{o}, Y'de açık olduğundan Teorem 5.2.b)'ye göre, $f^{-1}(N^{o})$ X'de açıktır. Diğer yandan, $N^{o} \subset N$ olduğundan $f^{-1}(N^{o}) \subset f^{-1}(N)$ dir. Fakat $f^{-1}(N)$'nin içindeki en geniş açık küme $(f^{-1}(N))^{o}$ olduğundan $f^{-1}(N^{o}) \subset (f^{-1}(N))^{o}$ olmalıdır.
"$\Leftarrow$" Tersine olarak, sağ taraf sağlansın. Eğer $G \subset Y$ herhangi bir açık küme ise $G = G^{o}$ olduğundan

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G^{o}) \subset (f^{-1}(G))^{o} \subset f^{-1}(G) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(G) = (f^{-1}(G))^{o}$$

elde edilir. Şu halde $f^{-1}(G)$ X'de açıktır. Dolayısıyla Teorem 5.2.b)'ye göre f süreklidir.□

Uyarı 5.4. (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay olsun. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ fonksiyonunun sürekli olması, her $G\subset X$ açık altkümesi için $f(G)$ resim kümesinin de Y'de açık olmasını; ya da, X'deki her kapalı kümenin resminin de Y'de kapalı olmasını gerektirmez. Örneğin, $X=\{a, b\}$ olmak üzere

$$i:(X,\tau_D)\to(X,\tau_t)\,,\quad i(x)=x$$

özdeşlik fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan, $\{a\}\subset X$, τ_D ayrık topolojisine göre hem açık ve hem de kapalı bir küme olup $i(\{a\})=\{a\}$ sağlanır. Fakat resim kümesi olarak $\{a\}$, τ_t ilkel topolojisine göre ne açık ve ne de kapalıdır. Aşağıdaki tanımda bununla bağlantılı olarak iki yeni kavram verilmektedir.

Tanım 5.2. (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $G\in\tau$ için $f(G)\in\tau^*$ ise bu f fonksiyonuna bir *açık fonksiyon*;

b) Eğer her $A\subset X$ kapalı altkümesi için $f(A)$ resim kümesi de Y'de kapalı ise bu f fonksiyonuna bir *kapalı fonksiyon* adı verilir.

Uyarı 5.5. Bir fonksiyonun sürekli, açık veya kapalı olması birbirlerinden bağımsızdır. Örneğin,

a) X en az iki elemanlı bir küme olmak üzere yukarıdaki iki topolojik uzay arasında tanımlanan $i:(X,\tau_D)\to(X,\tau_t)$, $i(x)=x$ özdeşlik fonksiyonu sürekli, fakat ne açık ne de kapalı bir fonksiyondur. Benzer şekilde, ancak bu defa topolojilerin yerlerini değiştirirsek, aynı

$$i:(X,\tau_t)\to(X,\tau_D)\,,\quad i(x)=x$$

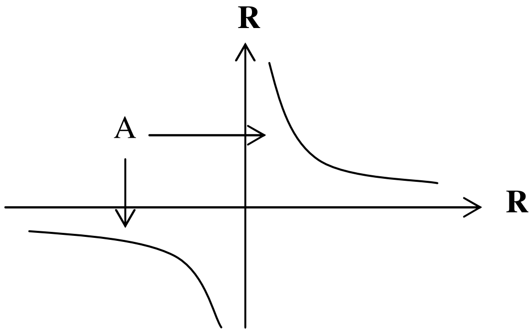
fonksiyonu hem açık hem de kapalıdır, fakat sürekli değildir.

b) $$p_1:(\mathbf{R}^2,\tau_e^2)\to(\mathbf{R},\tau_e)\,,\quad p_1(x_1,x_2)=x_1$$

birinci izdüşüm fonksiyonu sürekli ve açık, fakat kapalı değildir. Gerçekten

$$A:=\{\,(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid x_1.x_2=1\,\}$$

kümesi $(\mathbf{R}^2, \tau_e^2)$'de kapalı (bkz. Örnek 2.8) olmasına rağmen, görüntü kümesi $p_1(\mathrm{A}) = \mathbf{R}-\{0\}$, $(\mathbf{R}, \tau_e)$'de kapalı değildir. Bkz. Şek. 5.1.



Şekil 5.1

c) $f : (\mathbf{R}, \tau_e) \to (\mathbf{R}, \tau_e)$, $f(x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$ sabit)

sabit fonksiyonu sürekli ve kapalı, fakat açık değildir (neden ?).

Teorem 5.7. *(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ bir fonksiyon ise*

a) f açıktır $\Leftrightarrow$ Her $A \subset X$ için $f(A^o) \subset (f(A))^o$ dir.

b) f kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $A \subset X$ için $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ dir.

Kanıt. a) "$\Rightarrow$" f açık ve $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ olsun. $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$ açık, $\overset{\circ}{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$ ve f açık olduğundan $f(\overset{\circ}{\mathrm{A}})$ açık ve $f(\overset{\circ}{\mathrm{A}}) \subset f(\mathrm{A})$ dır. Fakat $f(\mathrm{A})$'nın içindeki en geniş açık küme $(f(\mathrm{A}))^{\circ}$ olduğundan, $f(\overset{\circ}{\mathrm{A}}) \subset (f(\mathrm{A}))^{\circ}$ olmalıdır.

"$\Leftarrow$" $\mathrm{G} \subset \mathrm{X}$ herhangi bir açık küme olsun. Hipoteze göre, $f(\overset{\circ}{\mathrm{G}}) \subset (f(\mathrm{G}))^{\circ}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathrm{G} = \overset{\circ}{\mathrm{G}} \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{G}) = f(\overset{\circ}{\mathrm{G}}) \subset (f(\mathrm{G}))^{\circ} \subset f(\mathrm{G}) \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{G}) = (f(\mathrm{G}))^{\circ}$$

elde edilir. Şu halde $f(\mathrm{G})$ açık, dolayısıyla f fonksiyonu açıktır.

b) "$\Rightarrow$" f kapalı ve $A \subset X$ bir altküme olsun. $A \subset \overline{A}$, $\overline{A}$ kapalı ve f kapalı olduğundan, $f(\overline{A})$ kapalı ve $f(A) \subset f(\overline{A})$ dir. Fakat $f(A)$'yı içeren en dar kapalı küme $\overline{f(A)}$ olduğundan $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ olmalıdır.

"$\Leftarrow$" $K \subset X$ herhangi bir kapalı küme olsun. Hipoteze göre, $\overline{f(K)} \subset f(\overline{K})$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$K = \overline{K} \quad \Rightarrow \quad f(K) = f(\overline{K}) \supset \overline{f(K)} \supset f(K) \quad \Rightarrow \quad f(K) = \overline{f(K)}$$

elde edilir. Şu halde $f(K)$ kapalı, dolayısıyla f fonksiyonu kapalıdır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Tanım 5.3. (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna, bu topolojik uzaylar arasında bir *homeomorfizm* (veya *topolojik eş yapı dönüşümü*) adı verilir:

(i) f bire-bir ve örtendir,
(ii) f süreklidir,
(iii) f^{-1} süreklidir.

Eğer herhangi iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizm varsa, bu iki topolojik uzaya *homeomorf* veya *denk topolojik uzaylar* denir.

Uyarı 5.6. **a)** Tanım 5.3. (iii)'deki "f^{-1} sürekli" koşulu yerine "f açık" veya "f kapalı" koşulu da kullanılabilirdi. Gerçekten, iki topolojik uzay arasındaki bire-bir ve örten bir fonksiyon için, "f^{-1} sürekli", "f açık" ve "f kapalı" koşullarının denk olduğu kolayca gösterilebilir. Bkz. P.6.

b) X en az iki elemanlı küme olmak üzere,

$$i : (X,\tau_D) \to (X,\tau_t)\ , \quad i(x) = x$$

özdeşlik fonksiyonu bir homeomorfizm değildir. Çünkü i bire-bir, örten ve süreklidir, fakat açık değildir.

c) (X,τ_1) ve (X,τ_2) topolojik uzaylarının homeomorf olması, özdeşlik fonksiyonunun bir homeomorfizm olmasını gerektirmez. Örneğin, $X=\{a, b\}$ kümesi $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b\}\}$ topolojileri ile göz önüne alınırsa,

$$f : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)\ , \quad f(a) = b \quad \text{ve} \quad f(b) = a$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan, (X,τ_1) ve (X,τ_2) topolojik uzayları homeomorftur. Fakat $i : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$, $i(x) = x$ özdeşlik dönüşümü bir homeomorfizm değildir, çünkü örneğin $i(\{a\}) = \{a\} \notin \tau_2$ olduğundan i açık değildir.

Teorem 5.8. *(X,τ), $(Y,\mathcal{Y})$, $(Z,\mathcal{Z})$ topolojik uzayları verilsin. Eğer $f : (X,\tau) \to (Y,\mathcal{Y})$ ve $g : (Y,\mathcal{Y}) \to (Z,\mathcal{Z})$ birer homeomorfizm iseler, $g{\circ}f : (X,\tau) \to (Z,\mathcal{Z})$, $(g{\circ}f)(x) = g(f(x))$ bileşke fonksiyonu da bir homeomorfizmdir.*

Kanıt. $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun. f bire-bir olduğundan $f(x_1) \neq f(x_2)$; ve g bire-bir olduğundan $(g{\circ}f)(x_1) \neq g(f(x_2))$ dir. Şu halde $g{\circ}f$ bire-bir dir.

$z \in Z$ herhangi bir eleman olsun. g örten olduğundan $g(y) = z$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. f örten olduğundan da $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buna göre $g(f(x)) = g(y) = z$ elde edilir. Şu halde $g{\circ}f$ örtendir.

f ve g sürekli olduklarından Teorem 5.3 a)'ya göre $g{\circ}f$ bileşke fonksiyonu da süreklidir. Diğer yandan, $(g{\circ}f)^{-1} = f^{-1}{\circ}g^{-1}$ ve f^{-1} ile g^{-1} sürekli olduklarından aynı nedenle $(g{\circ}f)^{-1}$ süreklidir. Şu halde $g{\circ}f$ bir homeomorfizmdir. □

Teorem 5.9. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon ise aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) f bir homeomorfizmdir.

b) f^{-1} bir homeomorfizmdir.

c) Her $A \subset X$ için $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ dir.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b): $f : X \to Y$ bir homeomorfizm ise $f^{-1} : Y \to X$, $f^{-1}(y) := x$, öyle ki $f(x) = y$ ters fonksiyonunun da yine bir homeomorfizm olduğunu gösterelim: Önce f örten olduğundan

$$f(X) = Y \;\Rightarrow\; X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(Y) \;\Rightarrow\; X = f^{-1}(Y) \;\Rightarrow\; f^{-1} \text{ örten}$$

dir. Diğer yandan, $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ ve $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$, yani $x_1 \neq x_2$ dir. Fakat f 'nin bire-bir olduğu göz önünde bulundurulursa buradan, $f^{-1}(y_1) = x_1 \neq x_2 = f^{-1}(y_2)$ elde edilir. Şu halde f^{-1} de bire-bir olur. Ayrıca $(f^{-1})^{-1} = f$ dir. Çünkü herhangi bir $x \in X$ için $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ dir. Buradan $f(x) = y$ elde edilir. Şu halde $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ dir. Buna göre, f ve f^{-1} sürekli olduklarından f^{-1} ve

$(f^{-1})^{-1}$ de süreklidir. Böylece f^{-1} ters fonksiyonunun da bir homeomorfizm olduğu gösterilmiş olur.

b) $\Rightarrow$ c): $(f^{-1})^{-1} = f$ sürekli olduğundan Teorem 5.2. d)'ye göre her $A \subset X$ için $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ sağlanır. Diğer yandan b)'ye göre f^{-1} sürekli ve f bire-bir olduğundan, aynı teoreme göre

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f^{-1}(f(A))} = \overline{A}$$

dir. Buradan her iki tarafın f altındaki resmi alınırsa, f örten olduğundan $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ elde edilir. Böylece $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ olduğu gösterilmiş olur.

c) $\Rightarrow$ a): Her $A \subset X$ için $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ise Teorem 5.2.d)'ye göre f süreklidir. Diğer yandan f bire-bir ve örten verildiğinden f 'nin bir açık fonksiyon olduğunu göstermek yeter. Bunun için $G \subset X$ açık ve $y \in f(G)$ olsun. Buradan bir $x \in G$ için $f(x) = y$ dir. $x \notin X - G$ ve $X - G$ kapalı olduğundan $x \notin \overline{X-G}$ dir. f 'nin bire-bir olduğu göz önüne alınırsa, c) 'den dolayı buradan $y = f(x) \notin f(\overline{X-G}) = \overline{f(X-G)}$ elde edilir. Şu halde

$$\exists\, V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x)),\ \text{ö.k. } V \cap f(X-G) = \varnothing \ \Rightarrow\ y = f(x) \in V \subset Y - f(X-G)$$

sağlanır. Fakat f bire-bir ve örten olduğundan $Y - f(X - G) = f(G)$ dir. Buradan $y \in V \subset f(G)$ ve böylece y'nin $f(G)$'nin bir iç noktası olduğu görülür. Şu halde $f(G)$ açık ve dolayısıyla f açıktır. Sonuç olarak f bire-bir, örten, sürekli ve açık olduğundan bir homeomorfizmdir. □

Teorem 5.10. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon ise aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) f bir homeomorfizmdir.

b) Her $A \subset X$ için $f(\overset{o}{A}) = (f(A))^o$ dir.

Kanıt. Alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. Bkz. P.7 □

Teorem 5.11. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir homeomorfizm ise aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) $\mathcal{B}$, τ için bir tabandır.

b) $\mathcal{B}^* = \{ f(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$, τ^* için bir tabandır.

Kanıt. Alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. Bkz. P.8 □

Tanım 5.4. Bir topolojik uzayın bir $\mathcal{P}$ özelliği topolojik dönüşümler (homeomorfizmler) altında değişmiyorsa, bu $\mathcal{P}$ özelliğine bir *topolojik özellik* veya kısaca bir *T-özelliği* denir.

Örnek 5.2. **"**A_1-uzayı olma", "A_2-uzayı olma" ve "ayrılabilir uzay olma" özellikleri birer topolojik özelliktir. Bkz. P.10.

Topolojik dönüşümler topolojik uzayların hem noktaları ve hem de açık küme aileleri arasında karşılıklı bire-bir eşleme kuran dönüşümlerdir. Bu nedenle topolojik olarak denk olan iki topolojik uzaya topolojik bakımdan birbirine eşit, yani aynı uzay gözü ile bakılabilir.

X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer X'in Y'ye homeomorf olmasını $X \simeq Y$ ile gösterirsek, "$\simeq$" bağıntısının aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu görürüz:

(i) $X \simeq X$ dir.

(ii) $X \simeq Y$ ise $Y \simeq X$ dir.

(iii) $X \simeq Y$ ve $Y \simeq Z$ ise $X \simeq Z$ dir.

Bunun için, bir topolojik uzaydan kendisi üzerine tanımlanan özdeşlik dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu, her homeomorfizmin tersinin de bir homeomorfizm olduğunu ve iki homeomorfizmin bileşkesinin de yine bir homeomorfizm olduğunu göz önünde bulundurmak yeter. Şu halde topolojik uzayların herhangi bir kümesi üzerinde yukarıdaki "$\simeq$" (homeomorf olma) bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İki topolojik uzayın (topolojik olarak) denk olduğunu, diğer bir ifade ile, homeomorf olduğunu göstermek için, bu uzaylar arasında en az bir homeomorfizm bulunduğunu göstermek gerekir. Ancak tersine olarak, iki topolojik uzayın, topolojik olarak denk olmadıklarını, diğer bir ifade ile homeomorf olmadıklarını göstermek için ise bu uzaylardan birinin sahip olduğu, fakat diğerinin sahip olmadığı bir "topolojik özelliğin"(Tanım 5.4) bilinmesi yeterlidir.

Uyarı 5.7. [0,1] kapalı aralığı **R**'ye homeomorf değildir. Bunu göstermek için "*bir topolojik uzay üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli her fonksiyon maksimum değerini alır*" özelliğinin bir topolojik özellik olduğunu göstermek yeter. Çünkü, eğer bu iki topolojik uzay arasında bir homeomorfizm bulunsa idi, [0,1]'de tanımlı reel değerli ve sürekli her fonksiyon maksimum değerini aldığından, **R** üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli her fonksiyonun da maksimum değerini alması gerekirdi. Oysa bu doğru değildir. Örneğin, $f(x) = x$, **R** üzerinde tanımlı sürekli ve reel değerli bir fonksiyondur, fakat **R** üzerinde maksimum değerini almaz.

Şimdi de yukarıdaki özelliğin bir topolojik özellik olduğunu gösterelim: Bunun için, X ve Y homeomorf iki topolojik uzay ve $h : X \to Y$ bir homeomorfizm olsun. X üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli her fonksiyonun maksimum değerini aldığını kabul edelim. $f : Y \to \mathbf{R}$, Y üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli bir fonksiyon ise foh, X üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli bir fonksiyondur. Kabulümüze göre, foh, X üzerindeki, diyelim bir $x_o \in X$ noktasında maksimum değerini alır. Bu durumda kolayca görüleceği gibi, f fonksiyonu da $h(x_o) \in Y$ noktasında maksimum değerini alır. Bkz. P.11.

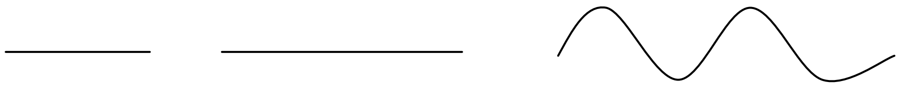
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "foh"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

Sezgisel olarak, yumuşak malzemeden yapılmış cisimlerin, örneğin bir telin, uzatılması, kısaltılması, eğilmesi ve bükülmesi gibi bazı şekil değişiklikleri, o cismin geometrik özelliklerini (uzunluk, eğrilik, burulma) elbette ki değiştirir, ancak topolojik özelliklerini değiştirmez. Diğer bir ifade ile, elde edilen şekiller birbirine homeomorftur. Örneğin, [0,1] kapalı aralığı $h_1(x) = 2x + 2$ fonksiyonu ile [2, 4] aralığına homeomorf; aynı aralık

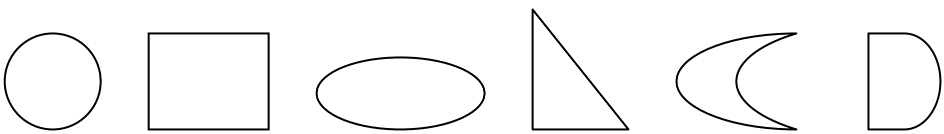
$$h_2(x) = (\cos\frac{\pi}{2}x, \sin\frac{\pi}{2}x)$$

fonksiyonu ile birim çemberin birinci $\frac{1}{4}$'lük bölgede kalan yay parçasına homeomorftur. Diğer bir ifade ile, [0,1] aralığı, [2,4] aralığı ile birim çemberin yukarıda sözü edilen yay parçası topolojik olarak aynıdırlar.

Bunun gibi aşağıdaki şekiller de birbirlerine homeomorf, yani topolojik olarak aynıdırlar:



Aynı nedenle, aşağıdaki şekiller de topolojik olarak aynıdırlar:



Benzer örnekler $\mathbf{R}^3$'den de verilebilir: Şaşırtıcıdır ama, örneğin bir tor (simit), bir kahve fincanı ve bir dikiş iğnesi topolojik olarak aynıdırlar. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki, sezgisel olarak homeomorf olduğunu düşündüğümüz şekiller arasındaki bir homeomorfizmi açıkça yazmak her zaman kolay olmayabilir.

Bunun yanında aşağıdaki A ve B şekilleri homeomorf olamazlar. Çünkü eğer aralarında h gibi bir homeomorfizm olsaydı, birinci şekildeki x noktasının $h(\mathrm{x})$ görüntüsü, ikinci şekil olan B karesinin bir noktası olacaktı. Bu durumda ayrıca, h'nin $\mathrm{A}-\{\mathrm{x}\}$'e daraltılmışı olan $h|(\mathrm{A}-\{\mathrm{x}\})$'in de, h'nin $\mathrm{B}-\{h(\mathrm{x})\}$'e daraltılmışı olan $h|(\mathrm{B}-\{h(\mathrm{x})\})$ kümesine homeomorf olması gerekirdi. Oysa bu olanaksızdır. Çünkü $\mathrm{A}-\{\mathrm{x}\}$ iki parçalı olmasına rağmen, $\mathrm{B}-h(\mathrm{x})$ tek parçalı bir şekildir. Halbuki ileride göreceğimiz gibi (bkz. Bölüm10, Bağlantılılık) homeomorfizmler "tek parçalılığı" da korurlar.

A B

Şimdi de **R**'de bazı homeomorfizm örnekleri verelim:

Örnek 5.3. a) **R**'deki herhangi bir (a, b) açık aralığı (0, 1) açık aralığına homeomorftur. Örneğin $f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ fonksiyonu (a, b)'den (0, 1)'e bir homeomorfizmdir.

b) **R**'de (a, ∞) tipindeki bütün aralıklar birbirlerine homeomorfturlar. Örneğin (a, ∞) ile (b, ∞) arasındaki bir homeomorfizm $f(x) = b + (x - a)$ dır.

c) $(1, \infty)$ aralığı $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ile (0, 1)'e homeomorftur.

d) $(-\infty, -a)$ aralığı $f(x) = -x$ ile (a, ∞) aralığına homeomorftur.

e) $(-\infty, \infty)$ aralığı, yani **R**, $f(x) = \arctan x$ ile $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ aralığına homeomorftur. Dolayısıyla **R**, her bir açık aralığa homeomorftur.

Özetle, sınırsızlar dahil, **R**'deki bütün açık aralıklar birbirlerine homeomorfturlar.

f) **R**'de birden fazla nokta içeren kapalı ve sınırlı aralıklar birbirlerine homeomorfturlar. Örneğin [a, b] aralığı $f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ fonksiyonu ile [0, 1] aralığına homeomorftur. Ancak Uyarı 5.7'de gösterildiği gibi **R**, örneğin [0, 1] kapalı aralığına homeomorf değildir.

Tanım 5.5. (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay olsun. Eğer bir $f : X \to f(X) \subset Y$ fonksiyonu bire-bir, sürekli ve $f^{-1}: f(X) \to X$ ters fonksiyonu da sürekli ise diğer bir ifade ile f, X ile $f(X)$ görüntüsü arasında bir homeomorfizm ise bu f fonksiyonuna, (X,τ)'dan (Y,τ^*) içine bir *gömme fonksiyonu* denir. Burada $f(X)$ altuzay topolojisi ile göz önüne alınmıştır.

Böyle bir f fonksiyonu varsa, X, f ile Y içine gömülmüştür denir. Buna göre, eğer (X,τ), (Y,τ^*)'in bir altuzayına homeomorf ise X, Y içine gömülmüş olur.

Örnek 5.4 a) (X,τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ ise $i : M \to X$, $i(x) = x$ özdeşlik fonksiyonu bir gömme fonksiyonudur.

b) $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{R}^2$ kendi doğal topolojileri ile göz önüne alındığında, $c \in \mathbf{R}$ sabit olmak üzere,

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \ , \ f(x) := (x, c)$$

fonksiyonu bir gömme fonksiyonudur. Aynı şekilde $f(x):=(x^3,0)$ fonksiyonu da bir gömme fonksiyonudur.

Problemler

P. 1. Teorem 5.1'i kanıtlayınız.

P. 2. $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $N \subset Y$ için $\overline{f^{-1}(N)} \subset f^{-1}(\overline{N})$ dir. Gösteriniz

P. 3. (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $N \subset Y$ ve $f : X \to N$ olsun. Bu durumda aşağıdaki denkliği gösteriniz.

$$f : (X,\tau) \to (N,\tau^*_N) \text{ süreklidir } \Leftrightarrow \ f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*) \text{ süreklidir.}$$

P. 4. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir altküme ise τ_A altuzay topolojisinin A üzerinde $i : A \to X$, $i(x) = x$ özdeşlik fonksiyonunu sürekli yapan en kaba topoloji olduğunu gösteriniz.

P. 5. $X \neq \varnothing$ bir küme, τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki topoloji ve $i : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$, $i(x) = x$ özdeşlik fonksiyonu ise

- **a)** i açıktır $\Leftrightarrow$ $\tau_1 \subset \tau_2$ dir.
- **b)** i süreklidir $\Leftrightarrow$ $\tau_2 \subset \tau_1$ dir.
- **c)** i homeomorfizmdir $\Leftrightarrow$ $\tau_1 = \tau_2$ dir. Gösteriniz.

P. 6. (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ bir fonksiyon ise

a) f bir homeomorfizmdir $\Leftrightarrow$ f bire-bir, örten, sürekli ve açıktır.

b) f bir homeomorfizmdir $\Leftrightarrow$ f bire-bir, örten, sürekli ve kapalıdır.

P. 7. Teorem 5.10'nu kanıtlayınız.

P. 8. Teorem 5. 11'i kanıtlayınız.

P. 9. (X,τ) bir topolojik uzay ise

$$H_\tau(X) := \{\ f \mid f : (X,\tau) \to (X,\tau) \text{ bir homeomorfizmdir. } \}$$

kümesinin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğunu gösteriniz. Bu gruba bu *topolojik uzayın (kendi üzerine) homeomorfizmler grubu* adı verilir.

P. 10. "A_1-uzayı olma", "A_2-uzayı olma" ve "ayrılabilir uzay olma" özelliklerinin birer topolojik özellik olduğunu gösteriniz.

P. 11. *"Bir topolojik uzay üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli her fonksiyon bu uzayda maksimum değerini alır"* özelliğinin bir topolojik özellik olduğunu gösteriniz. Bkz.Uyarı 5.7.

P. 12. (X,τ) ayrılabilir bir uzay ve (Y,τ^*) herhangi bir topolojik uzay olsun. Eğer $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ve örten ise (Y,τ^*) topolojik uzayının da ayrılabilir olduğunu gösteriniz.

P. 13. *Yarı-sürekli Fonksiyonlar:*

(X,τ) bir topolojik uzay, $x_o \in X$, $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $f : X \to \mathbf{R}$ olsun. Bu durumda

a) f, *x_o noktasında üstten yarı-süreklidir* denir $:\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ U \in \mathcal{U}_\tau(x_o),\ \ \text{ö.k.}\ \ \forall\ x \in U \ \text{ için}\ \ f(x) < f(x_o) + \varepsilon$$

b) f, *x_o noktasında alttan yarı-süreklidir* denir $:\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ U \in \mathcal{U}_\tau(x_o),\ \ \text{ö.k.}\ \ \forall\ x \in U \ \text{ için}\ \ f(x) > f(x_o) - \varepsilon$$

şeklinde tanımlanırlar. Buna göre aşağıdaki ifadelerin denk olduklarını gösteriniz:

(i) f, x_o noktasında üstten yarı-süreklidir.
(ii) Her $a > f(x_o)$ için $x_o \in f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ dır.
(iii) $f : (X,\tau) \to (\mathbf{R},\tau_{sol})$, x_o noktasında süreklidir.

Aynı şekilde aşağıdaki ifadeler de birbirine denktirler:

(i) f, x_o noktasında alttan yarı-süreklidir.
(ii) Her $a < f(x_o)$ için $x_o \in f^{-1}(a, \infty) \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ dır.
(iii) $f : (X,\tau) \to (\mathbf{R},\tau_{sağ})$, x_o noktasında süreklidir.

P. 14. (X,τ) bir topolojik uzay, her $\lambda \in \Lambda$ için f_λ, X üzerinde reel değerli ve alttan yarı-sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ mevcut ise

$$f(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

fonksiyonunun da X üzerinde alttan yarı-sürekli bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(Y. g.: $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $f(x) = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ olduğundan

$$\exists\ \lambda^* \in \Lambda,\ \text{ö.k.}\quad f(x) - \varepsilon < f_{\lambda^*}(x) \leq f(x).$$

Şimdi de f_{λ^*} fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki alttan yarı-sürekliliğini kullanınız).

P. 15. (X,τ) üzerinde reel değerli ve sürekli her fonksiyonun alttan yarı-sürekli olduğunu gösteriniz.

P. 16. X bir küme ve $A \subset X$ herhangi bir altküme olsun.

$$\chi_A : X \to \mathbf{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona A'nın *karakteristik fonksiyonu* denir.

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir altküme olsun. Bu durumda,

a) A'nın karakteristik fonksiyonu süreklidir $\Leftrightarrow$ A, (X,τ)'da hem açık ve hem de kapalıdır.

b) A'nın karakteristik fonksiyonu alttan yarı-süreklidir $\Leftrightarrow$ A, (X,τ)'da açıktır.

c) A'nın karakteristik fonksiyonu üstten yarı-süreklidir $\Leftrightarrow$ A, (X,τ)'da kapalıdır.

Gösteriniz.

BÖLÜM 6

FONKSİYONLARLA ÜRETİLEN TOPOLOJİLER, ÇARPIM VE BÖLÜM UZAYLARI

X bir küme, (Y,τ^*) bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunu sürekli yapan X üzerindeki en kaba topoloji araştırılabilir. Benzer şekilde, (X,τ) bir topolojik uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise bu f fonksiyonunu sürekli yapan Y üzerindeki en ince topoloji araştırılabilir. Bunlardan birincisi bizi "izdüşel topoloji", ikincisi ise "tümel topoloji" olarak adlandıracağımız topolojilere götürür. Ayrıca bu problemler, Λ bir indis kümesi ve $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere, (Y,τ^*) topolojik uzayı yerine, $(Y_\lambda, \tau^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzay ailesi; veya (X,τ) topolojik uzayı yerine, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzay ailesi alınarak, sırasıyla $f_\lambda : X \to Y_\lambda$ ve $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ şeklindeki fonksiyon ailelerine genelleştirilebilir. Çarpım ve bölüm topolojileri de bu şekilde tanımlanan topolojilerin birer özel hali olarak elde edilirler.

A. İzdüşel Topoloji

Teorem 6.1. *X bir küme, (Y,τ^*) bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise*

$$\tau_f = \{f^{-1}(H) \mid H\in\tau^*\} \subset \mathcal{P}(X)$$

ailesi X üzerinde f fonksiyonunu sürekli yapan en kaba topolojidir.

Kanıt. (T-1) $\varnothing\in\tau^*$ olduğundan $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing\in\tau_f$; ve $Y\in\tau^*$olduğundan da $f^{-1}(Y) = X\in\tau_f$ dir.

(T-2) $G_1, G_2 \in\tau_f$ ise $H_1, H_2\in\tau^*$ olmak üzere $G_1 = f^{-1}(H_1)$ ve $G_2 = f^{-1}(H_2)$ dir. Buradan

$$G_1\cap G_2 = f^{-1}(H_1) \cap f^{-1}(H_2) = f^{-1}(H_1\cap H_2)\in\tau_f$$

elde edilir, çünkü $H_1\cap H_2\in\tau^*$ dır.

(T-3) $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, τ_f 'nin elemanlarının herhangi bir ailesi ise her $\lambda\in\Lambda$ için $G_\lambda = f^{-1}(H_\lambda)$ olacak şekilde bir $H_\lambda\in\tau^*$ vardır. Buradan

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(H_\lambda) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\Big)\in\tau_f$$

elde edilir, çünkü $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \in\tau^*$ dır. Şu halde τ_f , X üzerinde bir topolojidir.

Diğer yandan her $H\in\tau^*$ için $f^{-1}(H)\in\tau_f$ olarak tanımlandığından $f : (X,\tau_f) \to (Y,\tau^*)$ süreklidir. Eğer $\mathcal{T}$, X üzerinde f 'yi sürekli yapan başka bir topoloji ise diğer bir ifade ile, $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ise her $H\in\tau^*$ için $f^{-1}(H)\in\mathcal{T}$ sağlanır. Buna göre eğer $G\in\tau_f$ ise uygun bir $H\in\tau^*$ için $G = f^{-1}(H)$ olduğundan $G\in\mathcal{T}$, yani $\tau_f \subset \mathcal{T}$ olmak zorundadır. □

Tanım 6.1. X bir küme, (Y,τ^*) bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli yapan X üzerindeki en kaba topoloji olan

$$\tau_f = \{f^{-1}(H) \mid H\in\tau^*\} \subset \mathcal{P}(X)$$

topolojisine, f fonksiyonu (ve (Y,τ^*) topolojik uzayı) ile X üzerinde üretilen *izdüşel topoloji* veya *başlangıç topolojisi* denir.

Örnek 6.1. (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $i : A \to X$, $i(x)=x$ özdeşlik fonksiyonu ise i 'nin A üzerinde ürettiği izdüşel topoloji

$$\tau_i = \{\, i^{-1}(G) \mid G\in\tau \,\} = \{\, A\cap G \mid G\in\tau \,\} = \tau_A \,,$$

yani τ 'nun A üzerinde ürettiği altuzay topolojisi ile aynıdır.

Teorem 6.2. *(X,τ), $(Y,\mathcal{Y})$, $(Z,\mathcal{Z})$ topolojik uzayları ile $f\colon (X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ ve $g\colon (Y,\mathcal{Y})\to(Z,\mathcal{Z})$ fonksiyonları verildiklerinde, eğer Y üzerinde verilen $\mathcal{Y}$ topolojisi, g ve $(Z,\mathcal{Z})$ ile üretilen izdüşel topoloji ise*

$$f \text{ süreklidir} \iff g\circ f \text{ süreklidir.}$$

Kanıt. "$\Rightarrow$" f sürekli olsun. Y 'nin topolojisi $\mathcal{Y}$, g *ve* $(Z,\mathcal{Z})$ ile üretilen izdüşel topoloji olduğundan g de süreklidir. Şu halde $g\circ f$ süreklidir.

"$\Leftarrow$" $g\circ f$ sürekli olsun. $\mathcal{Y}$, g *ve* $(Z,\mathcal{Z})$ ile üretilen izdüşel topoloji olduğundan her $G\in\mathcal{Y}$ için $G = g^{-1}(H)$ olacak şekilde bir $H\in\mathcal{Z}$ vardır. Buradan

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(H)) = (g\circ f)^{-1}(H)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

ve $g\circ f$ sürekli olduğundan da $f^{-1}(G) = (g\circ f)^{-1}(H)\in\tau$ elde edilir. Şu halde f süreklidir. □

Tanım 6.1 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Tanım 6.2. X bir küme, $(Y_\lambda, \tau^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ve her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda : X \to Y_\lambda$ bir fonksiyon olsun. Her bir f_λ fonksiyonunu sürekli yapan X üzerindeki topolojilerin en kabasına, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ fonksiyon ailesi ile X üzerinde üretilen *izdüşel topoloji* (veya *zayıf topoloji)* denir. Buna göre,

$$\mathcal{S} = \{ \; f_\lambda^{-1}(H_\lambda) \;\; | \;\; H_\lambda \in \tau_\lambda^* \; , \;\; \forall \, \lambda \in \Lambda \, \}$$

ailesi bu topolojinin bir alttabanıdır.

Teorem 6.3. *X bir küme,* $(Y_\lambda, \tau_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$ *topolojik uzayların bir ailesi ve her* $\lambda\in\Lambda$ *için* $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ *bir fonksiyon olsun. Eğer X,* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *fonksiyon ailesi ile üretilen izdüşel topolojiye sahip ise herhangi bir* (Y,τ^*) *topolojik uzayı ve* $f : Y \rightarrow X$ *fonksiyonu için,*

$$f \text{ süreklidir} \;\; \Leftrightarrow \;\; \text{Her } \lambda\in\Lambda \text{ için } \; f_\lambda \, o \, f \; \text{ süreklidir.}$$

Kanıt. "$\Rightarrow$" f sürekli olsun. X, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ fonksiyon ailesi ile üretilen izdüşel topolojiye sahip ise her bir f_λ sürekli ve dolayısıyla her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda \, o \, f$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

"$\Leftarrow$" Her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda \, o \, f$ bileşke fonksiyonu sürekli olsun . Eğer $G\subset X$, X üzerinde $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi ile üretilen izdüşel topolojinin bir alttaban elemanı ise uygun bir $\lambda\in\Lambda$ için $G = f_\lambda^{-1}(G_\lambda)$ olacak şekilde bir $G_\lambda \in \tau_\lambda^*$ vardır. Buradan,

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\, f_\lambda^{-1}(G_\lambda)) = (f_\lambda o f)^{-1}(G_\lambda) \in \tau^*,$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\lambda o f"'] & X \arrow[d, "f_\lambda"] \\ & Y_\lambda \end{tikzcd}$$

elde edilir. Şu halde Teorem 5.5 'e göre f süreklidir. □

B. Çarpım Uzayı

Sonlu sayıdaki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı bilindiği gibi,

$$X_1\times X_2\times \ldots \times X_n = \{ \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;|\; x_i\in X_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \, \}$$

şeklindeki sıralı n-liler kümesi olarak tanımlanır. Bu tanım benzer şekilde sayılabilir sonsuz çoklukta elemanı olan bir küme ailesinin çarpımına da kolayca genelleştirilebilir. Örneğin X_1, X_2, ... ,X_n, ... olmak üzere, bu ailenin kartezyen çarpımı

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times \ldots = \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_i \in X_i,\ i=1,2, \ldots\}$$

şeklinde diziler kümesi olarak tanımlanır. Fakat indis kümesi sayılamaz güçte bir küme, örneğin Λ sayılamaz ise $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesinin kartezyen çarpımının elemanları, yukarıdaki gibi numaralanıp yazılamayacağından, böyle genel bir küme ailesinin kartezyen çarpımının tanımı, aşağıda verilen Tanım 6.3'deki gibi yapılmaktadır (bkz. s.5).

Tanım 6.3. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ boş olmayan kümelerin herhangi bir ailesi ise bu ailenin kartezyen çarpımı

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \{ x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid x(\lambda) \in X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \}$$

şeklinde tanımlanır. $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ yerine bazen $\prod X_\lambda$ yazılır.

Bu tanımla verilen genel kartezyen çarpımın, Λ indis kümesinin, $\Lambda=\{1, 2, \ldots ,n\}$ sonlu veya $\Lambda=\mathbf{N}$ sayılabilir sonsuz olması özel halinde, yukarıda verilen, sırasıyla sonlu çarpım ve sayılabilir çarpımla aynı olacağı gösterilebilir.

Uyarı 6.1. a) Eğer her $\lambda \in \Lambda$ için $X_\lambda \neq \varnothing$ ise $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \varnothing$ olduğu seçme aksiyomunun bir sonucudur. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

b) Eğer her $\lambda \in \Lambda$ için $X_\lambda = X$ ise $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X^\Lambda$, yani Λ'dan X'e tanımlanmış bütün fonksiyonların kümesidir.

Bir $x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ elemanı, $x(\lambda) := x_\lambda$ olmak üzere genel olarak alışıldığı gibi $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ şeklinde gösterilir. Buradaki $x_\lambda \in X_\lambda$ elemanına x noktasının *λ. koordinatı* (veya λ. bileşeni) denir. X_λ kümesine de, $\prod X_\lambda$ çarpım kümesinin *λ. çarpanı* adı verilir.

Ayrıca, çarpım kümesinden her bir çarpana, yani her $\lambda\in\Lambda$ için

$$p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda, \quad p_\lambda(x) := x_\lambda$$

şeklinde tanımlanan özel fonksiyona da, λ. *izdüşüm fonksiyonu* veya (*λ. projeksiyon)* denir.

Teorem 6.4. *Her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$, $p_\lambda(x) := x_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu örten bir fonksiyondur.*

Kanıt. $\mu\in\Lambda$ keyfi bir eleman olsun. Eğer $\Lambda=\{\mu\}$ ise p_μ izdüşüm fonksiyonu X_μ üzerinde özdeşlik fonksiyonuna dönüşür ki aşikar olarak örtendir. Eğer $x_\mu\in X_\mu$ ve $\Lambda-\{\mu\}\neq\emptyset$ ise seçme aksiyomuna göre

$$c : \Lambda-\{\mu\} \to \bigcup_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\mu}} X_\lambda \quad ; \quad c(\lambda)\in X_\lambda$$

şeklinde bir fonksiyon (seçme fonksiyonu) vardır. Buna göre,

$$x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \quad ; \quad x(\lambda) := \begin{cases} x_\mu, & \lambda=\mu \\ c(\lambda), & \lambda\neq\mu \end{cases}$$

ile tanımlanan $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ için $p_\mu(x) = x_\mu$ sağlanır. □

Bu hazırlıklardan sonra bir $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\lambda}$ topolojik uzaylar ailesi verildiğinde, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde “çarpım topolojisi” adı verilen bir topoloji aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 6.4. $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde, $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$, $p_\lambda(x)= x_\lambda$ izdüşüm fonksiyonlarının $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi ile üretilen izdüşel topolojiye *çarpım topolojisi* ve bu topoloji ile $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kümesine de *çarpım* uzayı denir.

Bundan böyle $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kümesinden topolojik uzay olarak söz edildiğinde, aksi açıkça belirtilmediği sürece, çarpım topolojisi ile göz önüne alınacaktır.

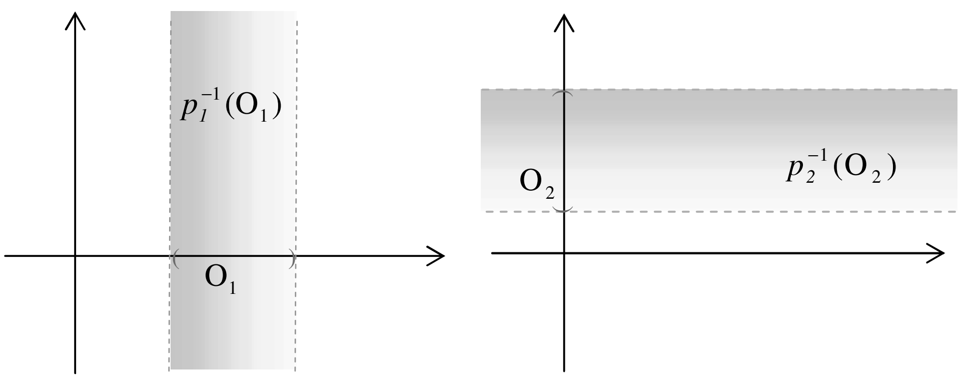
$O_\lambda \subset X_\lambda$ olmak üzere $p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ şeklindeki bir altküme,

$$p_\lambda^{-1}(O_\lambda) = \{\, x\in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid p_\lambda(x) = x_\lambda \in O_\lambda \,\},$$

çarpım kümesinin, λ. koordinatı O_λ'da bulunan noktalarından oluşur. Bu nedenle,

$$p_\lambda^{-1}(O_\lambda) = O_\lambda \times \prod_{\mu\neq\lambda} X_\mu$$

şeklinde de gösterilebilir ve bu tip bir kümeye bazen "O_λ tabanlı bir silindir" adı verilir. Aşağıdaki şekilde, $\mathbf{R}^2$'de O_1 ve O_2 tabanlı silindirler gösterilmiştir.



Şekil 6.1

Çarpım topolojisinin tanımına göre, bu topoloji $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kümesi üzerinde $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ izdüşüm fonksiyonları ile üretilen izdüşel topoloji olduğundan,

$$\mathcal{S} = \{\, p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \mid O_\lambda \in \tau_\lambda ,\ \forall\, \lambda\in\Lambda \,\}$$

silindirler ailesi çarpım topolojisinin bir alttabanını oluşturur (bkz. Tanım 6.2). Bu alttaban elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan tabana, çarpım topolojisinin "*doğal tabanı*" adı verilir. Buna göre doğal tabanın elemanları

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i}) = O_{\lambda_1} \times \ldots \times O_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_1,\ldots,\lambda_n} X_\lambda ,$$

veya $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ için $O_\lambda = X_\lambda$ olmak üzere sağ taraf, sonlu sayıda $\lambda \in \Lambda$ dışında uzayın tamamına eşit olan açık kümelerin çarpımı anlamında, kısaca $\prod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ şeklinde gösterilmekte ve çarpım topolojisinin doğal tabanı bazen,

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \tau_\lambda \text{ ve sonlu sayıda } \lambda\in\Lambda \text{ dışında } O_\lambda = X_\lambda \}$$

şeklinde yazılmaktadır. Buna göre bir $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ noktasındaki bir komşuluk tabanı da Teorem 4.5 ile

$$\mathcal{B}(x) = \{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{U}_{\tau_\lambda}(x_\lambda) \text{ ve sonlu sayıda } \lambda\in\Lambda \text{ dışında } U_\lambda = X_\lambda \}$$

şeklinde yazılabilir.

Uyarı 6.2. $(X_1,\tau_1), \ldots , (X_n,\tau_n)$ gibi sonlu sayıda topolojik uzayın verilmesi halinde, $\prod_{i=1}^{n} X_i$ üzerindeki çarpım topolojisinin doğal tabanı basitçe,

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{i=1}^{n} O_i \mid O_i \in \tau_i \ , \ i = 1, 2, \ldots , n \}$$

biçimine dönüşür.

Uyarı 6.3. $\mathbf{R}^n$ üzerinde, $(\mathbf{R},\tau_e)$'nin n-defa çarpımı ile elde edilen çarpım topolojisi ile, $\mathbf{R}^n$'nin doğal metriği ile üretilen metrik topoloji aynıdır. Gerçekten $x = (x_1, \ldots , x_n) \in \mathbf{R}^n$ herhangi bir nokta ise bu x noktasının çarpım topolojisine göre $\mathbf{R}^n$'deki her komşuluğu, U_i'lerin her biri, $x_i \in \mathbf{R}$

noktalarının $(\mathbf{R},\tau_e)$'de uygun ε_i-komşulukları olmak üzere $\prod_{i=1}^{n} U_i$ şeklindeki bir komşuluğu içerir. x noktasının bu $\prod_{i=1}^{n} U_i$ komşuluğu ise uygun bir $\varepsilon>0$ (örneğin $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots , n \}$) için doğal metriğe göre x'in $K(x,\varepsilon)$ komşuluğunu içerir, yani

$$K(x,\varepsilon) \subset \prod_{i=1}^{n} U_i \subset U$$

sağlanır. Şu halde U, metrik topolojiye göre de x 'in bir komşuluğudur.

Tersine olarak, $x = (x_1, \ldots , x_n)\in \mathbf{R}^n$'nin metrik topolojiye göre her ε-komşuluğu $K(x,\varepsilon)$, çarpım topolojisine göre $\prod_{i=1}^{n} U_i$ şeklindeki bir komşuluğunu içerir. Bunun için U_i $(i =1, 2, \ldots , n)$ 'leri, $x_i\in \mathbf{R}$ noktalarının, örneğin $U_i = K(x_i,\frac{\varepsilon}{n})$ şeklinde $\frac{\varepsilon}{n}$- komşulukları olarak seçmek yeterlidir. Şu halde $K(x,\varepsilon)$, x noktasının çarpım topolojisine göre de bir komşuluğudur. Böylece, $\mathbf{R}^n$ üzerinde, $(\mathbf{R},\tau_e)$'nin n-defa çarpımı ile elde edilen çarpım topolojisi ile, $\mathbf{R}^n$'nin doğal metriğinin ürettiği metrik topolojinin, $\mathbf{R}^n$'nin her noktasındaki komşuluk ailelerinin aynı olduğu ve dolayısıyla bu iki topolojinin de aynı olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 6.2. $X = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ reel değişkenli ve reel değerli bütün fonksiyonların kümesi olsun. Bu kümeyi çarpım topolojisi ile göz önüne alırsak, bir $f\in X$ noktasının çarpım topolojisine göre bir komşuluk tabanı elemanı, indis kümesi olarak $\mathbf{R}$'nin sonlu bir $\{x_1, \ldots , x_n\}$ altkümesi ve buna karşılık gelen $\{\varepsilon_1, \ldots , \varepsilon_n\}$ gibi pozitif sayıların sonlu kümesi alınarak

$$U(f,\{x_1, \ldots , x_n\},\{\varepsilon_1, \ldots , \varepsilon_n\}):=\{ g\in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid |\, g(x_k) - f(x_k) \,| < \varepsilon_k,\ k=1, 2, \ldots ,n \}$$

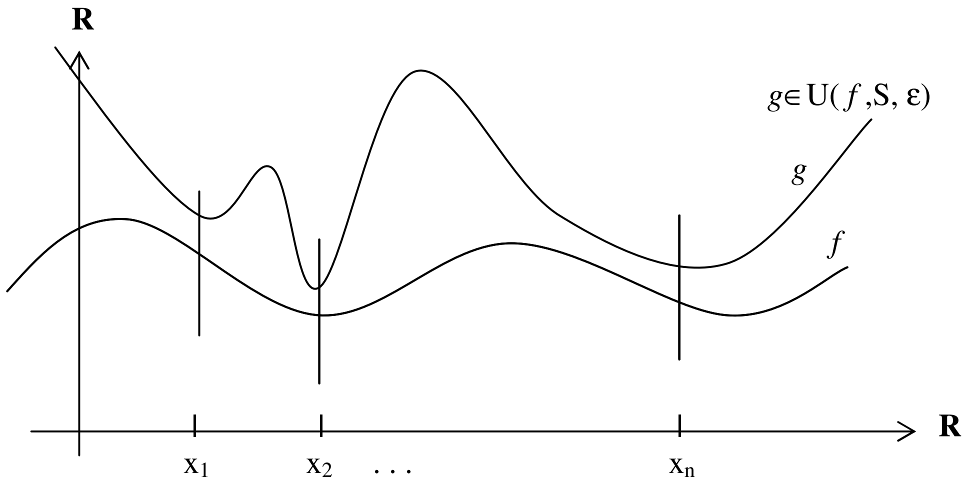
şeklinde yazılabilir. $S:=\{x_1, \ldots , x_n\}$ ve $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1, \ldots , \varepsilon_n\}$ olarak tanımlanırsa, f'nin

$$U(f,S, \varepsilon):= \{ g\in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid |\, g(x) - f(x) \,| < \varepsilon ,\ x\in S \}$$

komşuluğu, U(f,{x_1, ... , x_n},{ε_1, ... , ε_n}) komşuluğunun içinde kaldığından, $f\in X$ noktasındaki bir komşuluk tabanı kısaca

$$\mathcal{B}(f) = \{\ U(f, S, \varepsilon)\ \ |\ \ S \subset \mathbf{R}\ \text{ sonlu ve }\ \varepsilon > 0\ \}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathcal{B}(f)$'nin elemanları için bkz. Şekil 6.2.



Şekil 6.2. U(f,S, ε)

Teorem 6.5. *$(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ve* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *bu ailenin çarpım uzayı ise bütün* $p_\lambda: \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$, $p_\lambda(x) = x_\lambda$ *izdüşüm fonksiyonları örten, sürekli ve açıktırlar.*

Kanıt. Teorem 6.4'e göre bütün izdüşüm fonksiyonları örten ve çarpım topolojisi tanımına göre de (Tanım 6.4) bütün izdüşüm fonksiyonları süreklidir.

Şimdi de, herhangi bir $\mu \in \Lambda$ için $p_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\mu$, $p_\mu(x) = x_\mu$ izdüşüm fonksiyonunun açık olduğunu gösterelim. Bunun için $H \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ herhangi bir açık küme olsun. $p_\mu(H)$'nın açık olduğunu göstermek için her noktasının bir iç nokta olduğunu göstereceğiz: a $\in p_{\mu}(\mathrm{H})$ ise $p_{\mu}(\mathrm{x})=\mathrm{a}$ olacak şekilde bir $\mathrm{x}\in \mathrm{H}$ vardır. Diğer yandan H açık olduğundan, çarpım topolojisinin doğal tabanının, $\mathrm{x}\in \mathrm{V}\subset \mathrm{H}$ koşulunu sağlayan V gibi bir elemanı vardır. Bu V kümesi,

$$\mathrm{V} = p_{\mu_1}^{-1}(\mathrm{O}_{\mu_1})\cap \ldots\ldots \cap p_{\mu_n}^{-1}(\mathrm{O}_{\mu_n}), \quad (\mathrm{O}_{\mu_i} \subset \mathrm{X}_{\mu_i} \text{ açık, } i = 1, \ldots, n)$$

biçiminde yazılabilir. Genelliği bozmayacağından burada i ≠ k için, $\mu_i \neq \mu_k$ kabul edilebilir. Buradan a $= p_{\mu}(\mathrm{x})\in p_{\mu}(\mathrm{V})\subset p_{\mu}(\mathrm{H})$ ve

$$p_{\mu}(\mathrm{V}) = \begin{cases} \mathrm{O}_{\mu}, & \mu \in \{\mu_1,\ldots,\mu_n\} \\ \mathrm{X}_{\mu}, & \mu \notin \{\mu_1,\ldots,\mu_n\} \end{cases}$$

olup, her iki halde de $p_{\mu}(\mathrm{V})$ X_{μ} 'de açıktır. O halde a, $p_{\mu}(\mathrm{H})$ 'nın bir iç noktasıdır. □

Uyarı 6.4. Daha önce de belirtildiği gibi (bkz. Uyarı 5.5 b)), izdüşüm fonksiyonlarının kapalı olmaları gerekmez. Örneğin

$$\mathrm{A} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y})\in \mathbf{R}^2 \mid \mathrm{x}.\mathrm{y} = 1\}$$

kümesi $(\mathbf{R}^2,\tau_e^2)$'de kapalıdır, fakat $p_1(\mathrm{A})$ ve $p_2(\mathrm{A})$ $(\mathbf{R},\tau_e)$'de kapalı değildir.

Teorem 6.6. $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{X}_{\lambda}$ *bir çarpım uzayı,* (Y,τ^*) *herhangi bir topolojik uzay ve* $f : Y \to \prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{X}_{\lambda}$ *herhangi bir fonksiyon ise*

$$f \text{ süreklidir } \Leftrightarrow \text{ Her } \lambda\in\Lambda \text{ için } p_{\lambda}of \text{ süreklidir.}$$

Kanıt. "⇒" f sürekli olsun. Her $\lambda\in\Lambda$ için p_{λ}'lar sürekli olduklarından $p_{\lambda}of$ bileşke fonksiyonları da süreklidir.

"$\Leftarrow$" Her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda of$ sürekli olsun. $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayında çarpım topolojisinin alttabanının herhangi bir $p_\mu^{-1}(O_\mu)$ elemanı için

$$f^{-1}(p_\mu^{-1}(O_\mu)) = (p_\mu of)^{-1}(O_\mu) \in \tau^*,$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_\mu of"'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[d, "p_\mu"] \\ & X_\mu \end{tikzcd}$$

Yani $f^{-1}(p_\mu^{-1}(O_\mu))$, (Y,τ^*) topolojik uzayında açıktır, çünkü $O_\mu \subset X_\mu$ topolojik uzayında açık ve $p_\lambda of$ süreklidir. Şu halde Teorem 5.5'e göre f süreklidir.

Görüldüğü gibi bu teoremin ifadesi ve kanıtı aslında Teorem 6.3'ün bir özel halidir. □

Uyarı 6.5. $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi, (Y,τ^*) bir topolojik uzay ve her $\lambda\in\Lambda$ için bir $f_\lambda : Y \to X_\lambda$ fonksiyonu verilsin.

$$f: Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad f(y) := (f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon için

$$f \text{ süreklidir} \iff \text{Her } \lambda\in\Lambda \text{ için } f_\lambda \text{ süreklidir}$$

sağlanır. Gerçekten de her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda = p_\lambda of$ sağlandığından bu iddia Teorem 6.6'nın apaçık bir sonucudur. Buradaki $f_\lambda = p_\lambda of$ fonksiyonlarına f'nin bileşenleri denir. Buna göre, "f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul, bütün bileşenlerinin sürekli olmalarıdır" ifadesi elde edilir. Özel olarak, herhangi bir topolojik uzaydan n-boyutlu Öklid uzayına tanımlanmış her sürekli fonksiyon, o topolojik uzay üzerinde tanımlı n tane reel değerli sürekli fonksiyon ile belirlenir.

C. Tümel Topoloji

Teorem 6.7. *(X,τ) bir topolojik uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise*

$$\tau^*_f = \{ H\subset Y \ / \ f^{-1}(H)\in\tau \} \subset \mathcal{P}(Y)$$

ailesi Y üzerinde f fonksiyonunu sürekli yapan en ince topolojidir.

Kanıt. (T-1) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing\in\tau$ ve $f^{-1}(Y) = X\in\tau$ olduğundan $\varnothing$ ve $Y\in \tau^*_f$ dır.

(T-2) $H_1, H_2 \in \tau^*_f$ ise $f^{-1}(H_1)$, $f^{-1}(H_2)\in\tau$ dır. Buradan $f^{-1}(H_1\cap H_2) = f^{-1}(H_1)\cap f^{-1}(H_2)\in\tau$, ve dolayısıyla $H_1\cap H_2 \in \tau^*_f$ dır.

(T-3) $H_\lambda\in \tau^*_f$ $(\lambda\in \Lambda)$ ise her $\lambda\in\Lambda$ için $f^{-1}(H_\lambda)\in\tau$ ve

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(H_\lambda)\in\tau$$

olduğundan $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \in \tau^*_f$ dır. Şu halde τ^*_f, Y üzerinde bir topolojidir.

Diğer yandan, her $H\in \tau^*_f$ için $f^{-1}(H) \in\tau$ olarak tanımlandığından $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*_f)$ süreklidir. Eğer $\mathcal{T}^*$, Y üzerinde f 'yi sürekli yapan τ^*_f 'den başka bir topoloji ise diğer bir ifade ile, $f : (X,\tau) \to (Y,\mathcal{T}^*)$ sürekli ise her $H\in \mathcal{T}^*$ için $f^{-1}(H) \in\tau$ sağlanır. Buna göre eğer $G\in \mathcal{T}^*$ ise $f^{-1}(G)\in\tau$ olacağından, τ^*_f 'nin tanımına göre, $G \in \tau^*_f$, yani $\mathcal{T}^*\subset\tau^*_f$ olmak zorundadır. □

Tanım 6.5. (X,τ) bir topolojik uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli yapan Y üzerindeki en ince topoloji olan

$$\tau^*_f = \{ H \subset Y \ | \ f^{-1}(H)\in\tau \} \subset \mathcal{P}(Y)$$

topolojisine, f fonksiyonu (ve (X,τ) topolojik uzayı) ile Y üzerinde üretilen *tümel topoloji* veya *bitiş topolojisi* denir.

Teorem 6.8. *(X,τ), $(Y,\mathcal{Y})$, $(Z,\mathcal{Z})$ topolojik uzayları ile $f: (X,\tau)\to(Y,\mathcal{Y})$ ve $g: (Y,\mathcal{Y})\to(Z,\mathcal{Z})$ fonksiyonları verildiklerinde, eğer Y üzerinde verilen $\mathcal{Y}$ topolojisi, f ve (X,τ) ile üretilen tümel topoloji ise*

$$g \text{ süreklidir} \iff gof \text{ süreklidir.}$$

Kanıt. "$\Rightarrow$" g sürekli olsun. Y üzerindeki topoloji $\mathcal{Y}$, f ile üretilen tümel topoloji ise f de sürekli olduğundan gof bileşke fonksiyonu da süreklidir.
"$\Leftarrow$" gof sürekli olsun. O halde $H\in\mathcal{Z}$ herhangi bir açık küme ise

$$(gof)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)) \in \tau,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gof"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

yani (X,τ)'de açıktır. Buradan, tümel topoloji tanımına göre $g^{-1}(H)\in\mathcal{Y}$, şu halde g süreklidir. □

Teorem 6.9. *(X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f: (X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu ayrıca açık veya kapalı ise Y üzerindeki τ^* topolojisi f ile üretilen τ^*_f tümel topolojisi ile aynıdır.*

Kanıt. f örten, sürekli ve açık olsun. τ^*_f, f'yi sürekli yapan en ince topoloji olduğundan $\tau^*\subset\tau^*_f$ dır. Diğer yandan, eğer $H\subset Y$ ve $H\in\tau^*_f$ ise τ^*_f'nin tanımına göre $f^{-1}(H)\in\tau$ dır. Buradan, f açık ve örten olduğundan $f(f^{-1}(H)) = H\in\tau^*$ elde edilir. Bu ise $\tau^*_f\subset\tau^*$ olduğunu gösterir. Şu halde $\tau^*_f=\tau^*$ dır.

Eğer f örten, sürekli ve kapalı ise kanıt benzer şekilde yapılır. Bkz. P.14. □

Tanım 6.6. $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ve her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda: X_\lambda\to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\tau^* := \{\ H \subset Y \mid \forall\, \lambda \in \Lambda \text{ için } f_\lambda^{-1}(H) \in \tau_\lambda\ \}$$

ailesi Y üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye, $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzaylar ailesi ve $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ fonksiyon ailesi ile Y üzerinde üretilen *tümel topoloji* veya *kuvvetli topoloji* denir.

Bu topolojinin bütün f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ fonksiyonlarını sürekli yapan Y üzerindeki en ince topoloji olduğu kolayca görülür. Bkz. P.15.

Teorem 6.3'e paralel olarak aşağıdaki teorem de kolayca gösterilebilir:

Teorem 6.10. *$(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi, Y bir küme ve her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ fonksiyonları verilsin. Eğer Y, yukarıdaki topolojik uzaylar ailesi ve $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ fonksiyon ailesi ile üretilen tümel topolojiye sahip ise herhangi bir $(Z,\mathcal{Z})$ topolojik uzayı ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu için*

$$g \text{ süreklidir} \iff \text{Her } \lambda\in\Lambda \text{ için } g o f_\lambda \text{ süreklidir.}$$

Kanıt. Alıştırma olarak bırakılmıştır. Bkz. P.16. □

D. Bölüm Uzayı

Tanım 6.7. (X,τ) bir topolojik uzay, " ~ " X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $[x]:= \{y\in X \mid x\sim y\}$ bu bağıntıya göre x noktasının denklik sınıfı olsun. X 'den, X 'in "~" bağıntısına göre bölüm kümesi

$$X/\!\sim\ := \{\ [x] \mid x\in X\ \}$$

üzerine tanımlanan

$$q : X \to X/\!\sim, \quad q(x) := [x]$$

bölüm fonksiyonunun ürettiği tümel topolojiye, τ'nun "~" bağıntısına göre *bölüm topolojisi* ve bu topoloji ile $(X/\!\sim,\tau_q^*)$ topolojik uzayına da (X,τ) topolojik uzayının bir *bölüm uzayı* denir. Buna göre,

$G \subset X/\sim$ bölüm topolojisine göre açıktır $\Leftrightarrow$ $q^{-1}(G) = \{ x \mid [x] \in G \} = \bigcup_{[x]\in G} [x]$ X üzerindeki topolojiye göre açıktır.

Şimdi de bazı bölüm uzayı örneklerini görelim:

Örnek 6.3. **R** reel sayılar kümesini τ_e doğal topolojisi ile göz önüne alalım. Her x, y$\in$**R** için

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow \ (x \leq 0 \ \text{ve} \ y \leq 0) \ \text{veya} \ (x > 0 \ \text{ve} \ y > 0)$$

şeklinde tanımlanan "~" bağıntısı **R** üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Kolayca görülebileceği üzere **R**/~ = { [0], [1] } bölüm kümesi üzerinde

$$q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\sim \ , \quad x \to [x]$$

bölüm fonksiyonu ile üretilen tümel topoloji $\tau_q^* = \{ \mathbf{R}/\sim , \varnothing , \{[1]\}\}$ dir. Şu halde $(\mathbf{R}/\sim ,\tau_q^*)$, $(\mathbf{R}, \tau_e)$'nin bir bölüm uzayıdır.

Aynı bağıntıya göre $(\mathbf{R},\tau_{BSO})$'nun bölüm uzayının ilkel topolojik uzay olduğu kolayca gösterilebilir (gösteriniz).

Örnek 6.4. X = [0, 2π] kapalı aralığını **R**'nin doğal altuzay topolojisi ile göz önüne alalım. X üzerinde her s, t $\in$ X için

$$s \sim t \ :\Leftrightarrow \ [(s = 0 \ \text{ve} \ t = 2\pi) \ \text{veya} \ (s = 2\pi \ \text{ve} \ t = 0) \ \text{ya da} \ (s = t)]$$

ile tanımlanan denklik bağıntısına göre bir t$\in$X'in denklik sınıfını $[t] =\{ s\in X \mid s\sim t \}$ ve X'in bu bağıntıya göre bölüm kümesini de X/~ ile gösterelim. Bu kümenin elemanları:

$$[0] = [2\pi] = \{0, 2\pi\} \quad \text{ve} \quad 0 < t < 2\pi \ \text{için} \quad [t] = \{t\}$$

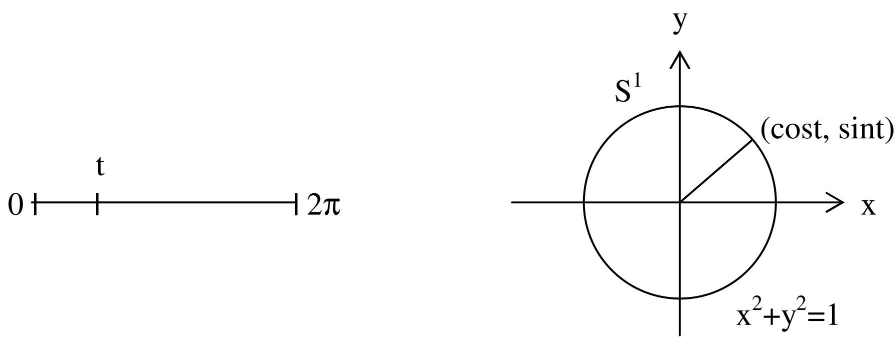
dır. Diğer yandan $\mathbf{R}^2$'deki

$$S^1 := \{(x, y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

birim çemberini $(\tau_e^2)_{S^1}$ doğal altuzay topolojisi ile göz önüne alalım. Şimdi ilk olarak, X/~ bölüm kümesi üzerinde öyle bir topoloji tanımlayabileceğimizi gösterelim ki, bu topoloji ile X/~ , $(S^1, (\tau_e^2)_{S^1})$ topolojik uzayına homeomorf olsun. Bunun için önce

$$f:\ X \to S^1\ ,\ \ f(t) := (\cos t, \sin t)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:



Şekil 6.3

Bir $(x, y)\in S^1$ için,

(i) Eğer $(x, y) \neq (1, 0)$ ise

$$\exists\ t\in(0, 2\pi),\ \ \text{öyle ki}\ \ x = \cos t,\ \ \ y = \sin t\ ,$$

(ii) Eğer $(x, y) = (1, 0)$ ise $X = [0, 2\pi]$ 'nin $t = 0$ ve $t = 2\pi$ noktaları bu (x,y) noktasına resmedilirler, yani $f(0) = f(2\pi) = (1,0)$ dır. Şu halde f örtendir. Diğer yandan $t\to\cos t$ ve $t\to\sin t$ bileşenleri sürekli olduklarından f süreklidir. Ayrıca Bölüm 9'da görüleceği gibi (X kompakt ve S^1 Hausdorff olduğundan) f kapalıdır (bkz. Teorem 9.8) ve her $s, t\in[0,2\pi]$ için

$$s \sim t\ \ \Leftrightarrow\ \ f(s) = f(t)$$

sağlanır. Şimdi de

$$h : X/\!\sim\ \to\ S^1\ ,\ \ h([t]) :=\ f(t),\ \ \ t\in[t]$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S^1 \\ & q\searrow \nearrow h & \\ & X/\sim & \end{array}$$

Önce bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Çünkü s, t$\in$[t] farklı iki temsilci ise s ~ t olduğundan f(s) = f(t), ve dolayısıyla

$$h([t]) = f(t) = f(s)$$

dir. Ayrıca h 'nın bire-bir ve örten olduğu da kolayca görülür. İşte bu h ile X/~ üzerinde üretilen izdüşel topoloji

$$\tau_h = \{\, h^{-1}(V) \mid V\in(\tau_e^2)_{S^1} \,\}$$

'nın aranan topoloji olduğu, yani (X/~,τ_h) topolojik uzayının (S^1, $(\tau_e^2)_{S^1}$) topolojik uzayına homeomorf olduğu kolayca görülür. Gerçekten h, bire-bir örten sürekli ve kolayca görüleceği gibi açık olduğundan bu iki topolojik uzay arasında bir homeomorfizmdir. Şu halde bu iki topolojik uzay topolojik olarak denktir.

Son olarak (X/~,τ_h) topolojik uzayının (X,$(\tau_e)_X$)'in yukarıdaki "~" denklik bağıntısına göre bölüm uzayı olduğunu göstereceğiz. Bunun için, X/~ üzerindeki topoloji τ_h 'nın,

$$q : X \to X/\sim \ , \quad q(t) := [t]$$

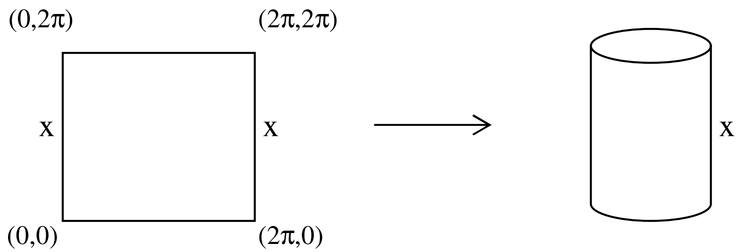
bölüm fonksiyonu ile üretilen tümel topoloji olduğunu göstermek yeter. Bunun için de, Teorem 6.9'a göre, q fonksiyonunun örten ve, $(\tau_e)_X$ ve τ_h topolojilerine göre sürekli ve kapalı olduğunu göstermek yeter. q örtendir, çünkü her [t]$\in$ X/~ için t$\in$X olup q(t) := [t] dir. Teorem 6.2'ye göre q süreklidir, çünkü τ_h, h ile üretilen izdüşel topoloji olup $h o q = f$ ve f süreklidir. Son olarak q'nün kapalı olduğunu gösterelim: K $\subset$ X herhangi bir $(\tau_e)_X$-kapalı altküme olsun. q(K)'nın X/~'de τ_h-kapalı olduğunu göstereceğiz. τ_h, h ile üretilen izdüşel topoloji olduğundan q(K)'nın (S^1,$(\tau_e^2)_{S^1}$)'deki bir kapalı kümenin h altındaki ters görüntüsü olduğunu göstermek yeter (bkz. P.1 a)). Bu ise kolaydır, çünkü $f : X \to S^1$ kapalı olduğundan $f(K)$ $(\tau_e^2)_{S^1}$-kapalı ve $h^{-1} o f = q$ olduğundan

$$h^{-1}(f(K)) = (h^{-1} o f)(K) = q(K)$$

olup $q(K)$ τ_h-kapalıdır. Şu halde $(X/\sim,\tau_h)$, $(X,(\tau_e)_X)$'in bir bölüm uzayıdır. Diğer yandan $(X/\sim,\tau_h)$ ile $(S^1,(\tau_e^2)_{S^1})$ topolojik uzayları homeomorf, dolayısıyla topolojik olarak denk olduklarından $(S^1,(\tau_e^2)_{S^1})$ topolojik uzayına $(X,(\tau_e)_X)$'in bir bölüm uzayı gözü ile bakılabilir.

S^1 birim çemberinin, $[0,2\pi]$ aralığının uzunluğuna eşit bir telin uçlarının birleştirilmesi ile elde edildiği düşünülürse, bir topolojik uzay ve o uzayda bir denklik bağıntısı verildiğinde, bu bağıntıya göre aynı sınıftaki noktaların çakıştırılması ile aşağıdaki gibi yeni bölüm uzayları elde edilebilir:

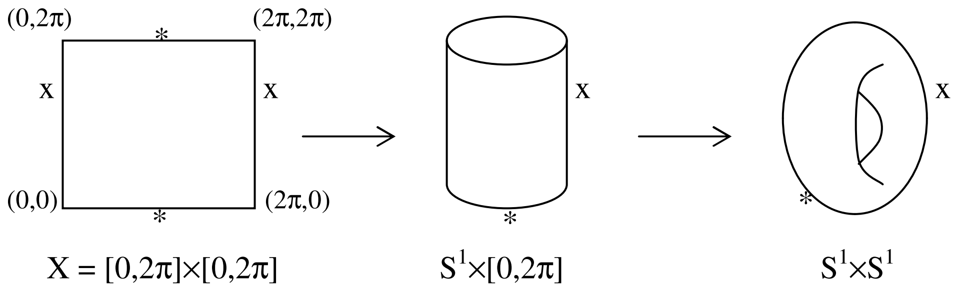
Örnek 6.5. $X = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ olsun. Bu X kümesinde koordinatları (0, x) olan noktalarla, (2π, x) olan noktaları aynı sınıftan; diğer bütün noktaları ise başlı başına birer sınıf olarak tanımlayalım. Aynı sınıftaki noktaların çakıştırılması ile elde edilen $S^1\times[0,2\pi]$ silindiri, doğal altuzay topolojisi ile, X'in bir bölüm uzayına homeomorftur. Yani bir bölüm uzayıdır (bkz.Şekil 6.4).



$X = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ $\qquad$ $S^1\times[0,2\pi]$

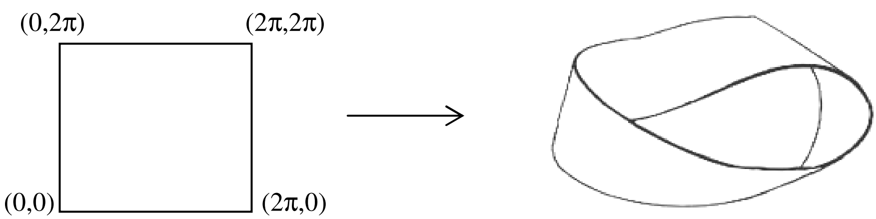
Şekil 6.4

Örnek 6.6. Yine $X = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ karesini göz önüne alalım. Bu defa X'de koordinatları (0, y) olan noktalarla (2π, y) olan noktaları aynı sınıfta; koordinatları (x, 0) olan noktalarla (x, 2π) olan noktaları aynı sınıfta ve diğer bütün noktaları da başlı başına birer sınıf olarak tanımlayalım. Aynı sınıftaki noktaları çakıştırırsak, Örnek 6.5'deki silindirin alt- ve üst taban çemberlerinin karşılıklı noktalarının çakıştırılması ile elde edilen ve "*tor*" adı verilen simit şeklinde bir geometrik şekil elde edilir (bkz. Şekil 6.5). Yine doğal altuzay topolojisi ile $S^1 \times S^1$ toru X'in bir bölüm uzayıdır.



Şekil 6.5

Örnek 6.7. Yukarıdaki düşünce tarzı ile, aynı $X = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ kümesinde bu defa koordinatları (x, 0) olan noktalar ile (2π-x, 2π) olan noktaları aynı sınıftan; diğerlerini başlı başına birer sınıf olarak açıklayalım. Aynı sınıftaki noktaları çakıştırarak elde edilen yüzey de X'in bir bölüm uzayıdır. "*Mobius bandı*" (veya "*Mobius şeridi*") adı verilen bu yüzeyin çok ilginç özellikleri vardır (bkz. Şekil 6.6).



Şekil 6.6

Problemler

P.1. X bir küme (Y,τ^*) bir topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer X kümesi, f ve τ^* ile üretilen τ_f izdüşel topolojisine sahip ise

a) $K \subset X$, τ_f-kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\exists\, F \subset Y$ τ^*-kapalı, öyle ki, $K = f^{-1}(F)$

b) $U \subset X$, izdüşel topolojiye göre bir $x \in X$ noktasının bir komşuluğudur $\Leftrightarrow$ $\exists\, V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$, öyle ki, $f^{-1}(V) \subset U$.

Gösteriniz.

P.2. X kümesi, (Y,τ^*) topolojik uzayı ve $f: X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde, eğer X, f ve τ^* ile üretilen τ_f izdüşel topolojisine sahip ise bu durumda, (Y,τ^*) bir A_1-uzayı veya bir A_2-uzayı ise (X,τ_f)'de sırasıyla bir A_1-uzayı veya bir A_2-uzayıdır. Gösteriniz.

P.3. a) Eğer her $\lambda \in \Lambda$ için $X_\lambda \subset Y_\lambda$ ise $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ olduğunu gösteriniz.

b) Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda, B_\lambda \subset X_\lambda$ iseler,

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$$

sağlandığını gösteriniz. Buna benzer bir eşitliğin, buradaki arakesit yerine birleşim alındığında sağlanmadığına dikkat ediniz.

P.4. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ üzerindeki çarpım topolojisinin $\mathbf{R}^2$ üzerindeki Öklid metriğinin ürettiği metrik topoloji ile aynı olduğunu gösteriniz. Bkz. Uyarı 6.4.

P.5. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise bu $d: X\times X \to \mathbf{R}$ fonksiyonunun çarpım uzayı üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

P.6. X ile X^* ve Y ile Y^* birbirine homeomorf topolojik uzaylar iseler, $X\times Y$ ile $X^*\times Y^*$ (veya $Y\times X$) topolojik uzaylarının da birbirine homeomorf olduklarını gösteriniz.

P.7. X ve Y iki topolojik uzay ve $A \subset X$, $B \subset Y$ iseler, $X \times Y$ çarpım uzayında,

$$\textbf{a)}\ \overset{o}{A} \times \overset{o}{B} = (A \times B)^{o}, \qquad \textbf{b)}\ \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

sağlandıklarını gösteriniz.

P.8. $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ve her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ iseler, çarpım uzayında

$$\overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A}_\lambda$$

sağlandığını gösteriniz.

P.9. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ için $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ ayrık topolojik uzay ve $|X_\lambda| \geq 2$ ise $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayının ayrık olması için gerek ve yeter koşul Λ'nın sonlu olmasıdır.

P.10. $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ve her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ ise $A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ kümesi, bir yandan $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayının bir altkümesi, diğer yandan da $(A_\lambda, \tau_{A_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ altuzaylarının topolojik çarpımı olarak göz önüne alınabilir. Bu durumda A kümesi üzerindeki her iki topolojinin de aynı olduğunu gösteriniz. (Y.g.: P.3 b)'deki özelliği göz önünde bulundurunuz).

P.11. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli ise

$$F : X \to X \times Y, \quad F(x) := (x, f(x))$$

fonksiyonunun da sürekli olduğunu gösteriniz.

P.12. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli ise

$$F : X \times X \to Y \times Y, \quad F(x_1, x_2) := (f(x_1), f(x_2))$$

fonksiyonunun da sürekli olduğunu gösteriniz.

P.13. $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(Y_\lambda,\tau^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gibi topolojik uzayların iki ailesi ve her $\lambda\in\Lambda$ için $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ fonksiyonları verildiğinde, çarpım uzayları arasındaki

$$F : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \ , \ F((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) := (f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$$

fonksiyonunun sürekli olması için gerek koşul, her $\lambda\in\Lambda$ için f_λ fonksiyonunun sürekli olmasıdır.
Not: Buradaki F fonksiyonu bazen, $F = \prod f_\lambda$ şeklinde yazılır.

P.14. (X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ örten, sürekli ve kapalı ise Y üzerindeki topoloji τ^*'ın, f 'nin ürettiği tümel topoloji ile aynı olduğunu gösteriniz.

P.15. Tanım 6.6'da açıklanan τ^* ailesinin Y üzerinde bir topoloji olduğunu ve bu topolojinin bütün f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ fonksiyonlarını sürekli yapan Y üzerindeki topolojilerin en incesi olduğunu gösteriniz.

P.16. Teorem 6.10'u kanıtlayınız.

P.17. $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ boş olmayan topolojik uzayların bir ailesi ve $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ bu uzayların çarpım uzayı olsun. Her $\mu\in\Lambda$ için (X_μ ,τ_μ) uzayının, çarpım uzayının bir altuzayına homeomorf olduğunu gösteriniz.

(Y. g.: Eğer her $\lambda\in\Lambda$ için $a_\lambda\in X_\lambda$ sabit olarak seçilirse,

$$X^*_\mu := \{ x\in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \ \mid \ x_\lambda = a_\lambda , \lambda\neq\mu \} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

olmak üzere,

$$e : X_\mu \to X^*_\mu \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \ , \quad x_\mu \to (e(x_\mu))_\lambda := \begin{cases} x_\mu , & \lambda = \mu \\ a_\lambda , & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Diğer bir ifade ile, X_μ'nın bir x_μ elemanının resmi $e(x_\mu)$, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 'nın, μ. koordinatı x_μ, diğer bütün koordinatları ise seçilen sabit a_λ koordinatları ile aynı olan elemanıdır. $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayının bu tip elemanlarından oluşan altkümesi X_μ^* ile gösterilmiştir. Bu şekilde tanımlanan *e* fonksiyonunun aranan gömme fonksiyonu olduğu, yani X_μ uzayını, çarpım uzayının X_μ^* altuzayına homeomorf olarak resmettiği gösterilebilir).

BÖLÜM 7

YAKINSAKLIK

Metrik uzaylarda "bir kümenin kapanışı" ve "bir fonksiyonun sürekliliği" gibi birçok kavram dizi yakınsaklığı yardımıyla belirlenebilmekte ve problem çözümlerinde diziler etkin bir araç olarak sıkça kullanılmaktadır. Topolojik uzaylarda ise durum genel olarak aynı değildir. Diziler, kısaca "A_1-uzayı" olarak adlandırdığımız "birinci sayılabilirlik" özelliğini sağlayan topolojik uzaylarda, metrik uzaylardaki gibi etkili bir araç olmaya devam etmekte, ancak herhangi bir topolojik uzayda, yakınsaklık teorisini işlemek için yetersiz kalmaktadır. O nedenle, bu kavramın genelleştirilmesine gereksinme duyulmuştur.

Bu bölümde, önce herhangi bir topolojik uzayda bir dizinin "yakınsaklığı" ve "yığılma noktası" kavramlarının tanımları verilmekte, bunların karşılaştırılması yapılmakta, dizilerle ilgili metrik uzaylardan bilinen bazı teoremlerin genel topolojik uzaylarda sadece birer yönünün sağlandığı gösterilmekte; diğer yönlerinin doğru olmadığını gösteren örnekler verilmektedir. A_1-uzaylarında ise bu teoremlerin metrik uzaylardan bilinen ifadelerinin geçerli kaldığı gösterilmektedir. Böylece dizilerin, genel topolojik uzaylarda yakınsaklık teorisini işlemek için yetersizliği ortaya konulduktan sonra, amaca uygun şekilde genelleştirilmeleri ile elde edilen "ağ" ve "filtre" kavramları tanıtılmakta ve bunların her ikisinin de, diziler ile metrik uzaylarda elde edilen sonuçların genel topolojik uzaylara taşınmasını sağladığı gösterilmektedir.

A. Diziler

Tanım 7.1. a) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbf{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, $f : \mathbf{N} \to X$ şeklindeki her fonksiyona X'de bir *dizi* adı verilmiş ve her $n \in \mathbf{N}$ için $f(n) := x_n \in X$ ile gösterilerek, X'de bir dizi, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ veya kısaca (x_n) biçiminde yazılmıştı (bkz. Bölüm 1, s.4).

b) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $f : \mathbf{N} \to X$, X'de bir dizi olsun. Kesin monoton artan her $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ fonksiyonu için $f o \varphi : \mathbf{N} \to X$ bileşke fonksiyonuna f dizisinin bir *altdizisi* denir. $\varphi(k) := n_k$ ile gösterilirse, $(f o \varphi)(k) = f(\varphi(k)) = x_{\varphi(k)} = x_{n_k}$ olup, f ile tanımlanan $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dizisinin bir altdizisi, (n_k) kesin monoton artan bir doğal sayı dizisi olmak üzere, $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ veya kısaca (x_{n_k}) biçiminde yazılır.

Örnek 7.1. $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) := \dfrac{1}{n}$, $\mathbf{R}$'de bir dizidir. Bu dizi yukarıdaki gösterimle $x_n = \dfrac{1}{n}$, $(n \in \mathbf{N})$ biçiminde yazılır. Bu dizinin bir altdizisi, örneğin

$\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\varphi(k) := 2k$ kesin monoton artan fonksiyonu için

$$f o \varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \quad (f o \varphi)(k) = f(\varphi(k)) = \frac{1}{\varphi(k)} = \frac{1}{2k}, \ (k \in \mathbf{N})$$

dır. Şu halde alışılmış yazış biçimi ile, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $(n \in \mathbf{N})$ ve $x_{n_k} = \dfrac{1}{2k}$, $(k \in \mathbf{N})$ dır. Bu (x_n) dizisinin ve (x_{n_k}) altdizisinin baştan birkaç terimi yazılırsa,

$$(x_n): \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

$$(x_{n_k}): \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots$$

olduğu görülür.

Tanım 7.2. (X,τ) bir topolojik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_o \in X$ olsun.

a) Eğer her $U \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ komşuluğu için, buna bağlı bir $n_o = n_o(U) \in \mathbf{N}$ doğal sayısı; her $n \geq n_o$ için $x_n \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine, (X,τ) topolojik uzayında x_o noktasına yakınsar denir. Böyle bir diziye de *yakınsak dizi* adı verilir.

Eğer (x_n), (X,τ)'da bir x_o noktasına yakınsıyor ise; $\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ veya $x_n \xrightarrow{\tau} x_o$; ya da, yanlış anlaşılma söz konusu olmayacak ise topolojiyi belirtmeksizin kısaca, $x_n \to x_o$ şeklinde yazılır. Ve bu x_o noktasına da (x_n) dizisinin bir *limiti (limit noktası)* adı verilir.

b) Eğer her $U \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ komşuluğu ve her $n \in \mathbf{N}$ doğal sayısı için, en az bir $m \geq n$ doğal sayısı, $x_m \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, x_o noktasına bu (x_n) dizisinin bir *yığılma noktası* denir.

Uyarı 7.1. a) Bir dizinin yığılma noktası kavramı ile, daha önce Tanım 3.5 c)'de verilen bir kümenin yığılma noktası kavramı farklıdır. Hatta bir (x_n) dizisinin yığılma noktaları ile, bu dizinin terimlerinden oluşan $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ nokta kümesinin yığılma noktaları aynı değildir. Örneğin $(\mathbf{R},\tau_e)$'de $x_n = (-1)^n$ dizisini göz önüne alalım. -1 ve $+1$ noktaları bu dizinin, bu uzayda birer yığılma noktasıdır, fakat $A=\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}= \{-1, +1\}$ kümesinin bu uzayda yığılma noktaları kümesi boştur.

b) Tanım 7.2'den kolayca görüleceği gibi, bir topolojik uzayda bir x_o noktası, bir (x_n) dizisinin bir limit noktası ise bu x_o, söz konusu (x_n) dizisinin aynı zamanda bir yığılma noktasıdır. Ancak bir dizinin her yığılma noktasının, bu dizinin aynı zamanda bir limit noktası olması gerekmez.

Örneğin, -1 ve $+1$ noktaları $(\mathbf{R},\tau_e)$'deki $x_n = (-1)^n$ dizisinin yığılma noktaları olmalarına rağmen, bu dizi bu noktalardan hiçbirine yakınsamaz, yani bunlar bu dizinin limit noktaları olamaz.

Uyarı 7.2. Bir metrik uzayda, bir dizinin bir noktaya metrik uzay anlamında yakınsak olması ile, metriğin ürettiği topolojiye göre, topolojik uzay anlamında yakınsak olması, birbirine denktir. Gerçekten, (X, d) bir metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x\in X$ ise

$$d(x_n, x) \to 0 \iff x_n \xrightarrow{\tau_d} x$$

sağlandığı kolayca gösterilebilir. Bunun için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x) \to 0 &\iff \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_o\in \mathbf{N} \ :\ \forall\, n \geq n_o \ \text{ için } \ d(x_n, x) < \varepsilon \\ &\iff \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_o\in \mathbf{N} \ :\ \forall\, n \geq n_o \ \text{ için } \ x_n\in K(x,\varepsilon) \\ &\iff x_n \xrightarrow{\tau_d} x \end{aligned}$$

sağlandığını görmek yeterlidir.

Örnek 7.2. a) (X,τ_D) ayrık uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_o\in X$ olsun. Eğer $x_n \to x_o$ ise kolayca görüleceği gibi

$$\exists\, n_o\in \mathbf{N} \ :\ \forall\, n \geq n_o \ \text{ için } \ x_n = x_o$$

sağlanır. Diğer bir ifade ile, dizi belirli bir terimden itibaren sabittir. Bunu görmek için, $\{x_o\}$ tek noktalı kümesinin, bu uzayda x_o noktasının bir komşuluğu olduğunu göz önüne almak ve bu komşuluk için dizi yakınsaklığı tanımını (Tanım 7.2.a)) yazmak yeterlidir.

b) $(\mathbf{R},\tau_{BSA})$ topolojik uzayında da, bir dizinin bir noktaya yakınsaması, ayrık uzayda olduğu gibi, belirli bir terimden itibaren o dizinin sabit olmasını gerektirir. Gerçekten, (x_n) $\mathbf{R}$'de bir dizi, $x_o\in \mathbf{R}$ ve $x_n \xrightarrow{\tau_{BSA}} x_o$ olsun. $A := \{ x_n \mid x_n \neq x_o,\ n\in \mathbf{N} \}$ olarak tanımlayalım. A sayılabilir bir küme ve $x_o\notin A$ olduğundan $x_o\in \mathbf{R}-A \in\tau_{BSA}$, şu halde $\mathbf{R}-A\in \mathcal{U}_{\tau_{BSA}}(x_o)$ dır. Diğer yandan, $x_n \xrightarrow{\tau_{BSA}} x_o$ olduğundan

$$\exists\, n_o\in \mathbf{N} \ :\ \forall\, n \geq n_o \ \text{ için } \ x_n\in \mathbf{R}-A$$

sağlanmalıdır. Fakat her $n\in \mathbf{N}$ için $x_n\in A$ olduğundan bu koşul ancak, her $n \geq n_o$ için $x_n = x_o$ olması ile sağlanır. Şu halde eğer $x_n \xrightarrow{\tau_{BSA}} x_o$ ise

$$\exists\ n_o \in \mathbf{N}\ :\ \forall\ n \geq n_o \text{ için } x_n = x_o$$

olmalıdır.

c) (X,τ_t) ilkel uzay ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Her $x \in X$ için $x_n \to x$ olduğu kolayca görülür. Çünkü bu uzayda, uzayın her noktasının bir tek komşuluğu uzayın kendisidir. Kısaca, ilkel topolojik uzayda her dizi her noktaya yakınsar.

d) $X \neq \varnothing$ bir küme ve τ_1 ile τ_2 , X üzerinde iki topoloji olsunlar. Eğer $\tau_2 \subset \tau_1$ ve $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$ ise $x_n \xrightarrow{\tau_2} x$ dir, çünkü bu durumda $\mathcal{U}_{\tau_2}(x) \subset \mathcal{U}_{\tau_1}(x)$ dir.

Örnek 7.3. $X = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ çarpım uzayındaki bir $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisi için

$$f_n \to f \quad \Leftrightarrow \quad \text{Her } x \in \mathbf{R} \text{ için } f_n(x) \to f(x)$$

sağlanır.

Çözüm. "$\Rightarrow$" $\mathcal{B}(f) := \{\, U(f, S, \varepsilon) \mid S \subset \mathbf{R}$ sonlu ve $\varepsilon>0 \,\}$ ailesi $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$'de bir komşuluk tabanı oluşturduğundan (bkz. Örnek 6.2), $f_n \to f$ ise her $U(f, S, \varepsilon) \in \mathcal{B}(f)$ için

$$\exists\ n_o \in \mathbf{N}\ :\ \forall\ n \geq n_o \text{ için } f_n \in U(f, S, \varepsilon)$$

sağlanır. Şu halde her $x \in S$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dir.

Özel olarak; $x \in \mathbf{R}$ herhangi bir nokta, $S=\{x\}$ ve $\varepsilon>0$ keyfi olarak seçilirse, $U(f,\{x\},\varepsilon) \in \mathcal{B}(f)$ için

$$\exists\ n_o \in \mathbf{N}\ :\ \forall\ n \geq n_o \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

yani $f_n(x) \to f(x)$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" Şimdi de her $x \in \mathbf{R}$ için $f_n(x) \to f(x)$ olsun. Buradan, herhangi bir $U(f, S, \varepsilon) \in \mathcal{B}(f)$ ve her $x \in S$ için de

$$\exists\ n_o(x,\varepsilon) \in \mathbf{N}\ :\ \forall\ n \geq n_o(x,\varepsilon) \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

yazılabilir. Fakat S sonlu olduğundan, $N_o := \text{maks}\{\, n_o(x,\varepsilon) \mid x \in S \,\}$ olarak tanımlanırsa, her $n \geq N_o$ ve her $x \in S$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, yani $f_n \in U(f, S, \varepsilon)$ elde edilir. Böylece $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ çarpım uzayında $f_n \to f$ olduğu gösterilmiş olur.

Bu özellik nedeni ile $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ reel değerli reel fonksiyonlar uzayındaki yakınsaklığa "*noktasal yakınsaklık*" ve $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$'nin çarpım topolojisine de "*noktasal yakınsaklık topolojisi*" adı verilir.

Teorem 7.1. *(X,τ) bir topolojik uzay, $M \subset X$ ve $x_o \in X$ olsun. Eğer X deki bir (x_n) dizisi, her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \in M - \{x_o\}$ ve $x_n \to x_o$ koşullarını sağlıyorsa, $x_o \in M'$ dır.*

Kanıt. $x_n \to x_o$ olduğundan, her $U \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için

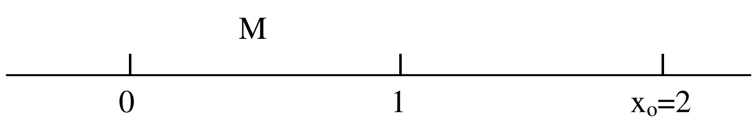
$$\exists\, n_o \in \mathbf{N} \;:\; \forall\, n \geq n_o \text{ için } x_n \in U$$

sağlanır. Diğer yandan, her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \in M - \{x_o\}$ olduğundan, her $U \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ ve her $n \geq n_o$ için

$$x_n \in U \cap (M - \{x_o\}) = (U - \{x_o\}) \cap M$$

yazılabilir. Şu halde her $U \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için $(U - \{x_o\}) \cap M \neq \varnothing$, yani $x_o \in M'$ dır. □

Uyarı 7.3. Teorem 7.1'in tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $(\mathbf{R}, \tau_{BSA})$ topolojik uzayında $M := [0,1] \subset \mathbf{R}$ altkümesini ve $x_o = 2 \notin M$ noktasını göz önüne alırsak, $x_o \in M'$, fakat M kümesinde, x_o noktasına yakınsayan bir dizi yoktur.



Şekil 7.1

Gerçekten her $U \in \mathcal{U}_{\tau_{BSA}}(x_o)$ için $U^o \subset U$ ve $U^o \in \tau_{BSA}$ olduğundan $\mathbf{R} - U^o$ sayılabilirdir. Fakat M'nin gücü sayılamaz olduğundan $M \not\subset \mathbf{R} - U^o$ dır. Buradan $M \cap U^o \neq \varnothing$ ve $x_o \notin M$ olduğundan da, $(U^o - \{x_o\}) \cap M \neq \varnothing$ sağlanır. Şu halde $x_o \in M'$ dir.

Şimdi de, (x_n) dizisinin bütün terimleri M kümesinde bulunan ve bu uzayda x_o noktasına yakınsayan bir dizi olduğunu kabul edelim.

$$A := \{ x_n \mid n\in \mathbf{N} \} \subset M$$

olarak tanımlayalım. Bu A kümesinin gücü sayılabilir olduğundan $\mathbf{R}-A\in \tau_{BSA}$ dır. Diğer yandan, $A \subset M$ ve $x_o \notin M$ olduğundan $x_o \in \mathbf{R}-A$ dır. Şu halde $\mathbf{R}-A\in \mathcal{U}_{\tau_{BSA}}(x_o)$ dır. Fakat $x_n \xrightarrow{\tau_{BSA}} x_o$ olduğundan,

$$\exists\, n_o\in \mathbf{N} \;:\; \forall\, n \geq n_o \;\text{ için }\; x_n\in \mathbf{R}-A$$

sağlanması gerekir ki bu durum, A'nın tanımı ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlıştır. Yani M kümesinde, x_o noktasına yakınsayan bir dizi yoktur.

Teorem 7.2. *(X,τ) bir A_1-uzayı , $M \subset X$ ve $x_o\in X$ olsun. Bu durumda*

$$x_o\in M' \;\Leftrightarrow\; [\, \exists (x_n) \;:\; x_n\in M-\{x_o\}, \quad (\forall n\in \mathbf{N}) \quad \text{ve} \quad x_n \to x_o \,]$$

sağlanır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $x_o\in M'$ olsun. $\mathcal{B}(x_o):=\{ V_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$, x_o noktasında $V_{n+1} \subset V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ özelliğini sağlayan bir komşuluk tabanı ise (bkz Teorem 4.2), $x_o\in M'$ olduğundan, her $n\in \mathbf{N}$ için $(V_n - \{x_o\})\cap M\neq\emptyset$ sağlanır. Buna göre, her $n\in \mathbf{N}$ için bir $x_n\in (V_n - \{x_o\})\cap M$ seçilebilir. Bu şekilde elde edilen (x_n) dizisi istenen özellikleri sağlar: Gerçekten, (x_n)'nin tanımına göre her $n\in \mathbf{N}$ için $x_n\in M - \{x_o\}$ dır. Ayrıca $x_n \to x_o$ dır. Çünkü önce $\mathcal{B}(x_o)$, x_o'da bir komşuluk tabanı olduğundan, her $U\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için

$$\exists\, n_o\in \mathbf{N} \;:\; x_o\in V_{n_o} \subset U$$

sağlanır. Buradan, her $U\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ ve her $n \geq n_o$ için

$$x_n\in V_n \subset V_{n_o} \subset U \;\Rightarrow\; \forall\, n \geq n_o \;\text{ için }\; x_n\in U$$

elde edilir. Şu halde $x_n \to x_o$ dır.

"$\Leftarrow$" Bkz. Teorem 7.1. □

Teorem 7.3. *(X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ ve $x_o\in X$ olsun. Eğer (x_n), her $n\in\mathbf{N}$ için $x_n\in A$ ve $x_n \to x_o$ koşulunu sağlayan bir dizi ise $x_o\in \overline{A}$ dir.*

Kanıt. (x_n) dizisi, $x_n \to x_o$ koşulunu sağladığından, yakınsaklık tanımına göre her $U\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için

$$\exists\, n_o\in\mathbf{N} \ : \ \forall\ n\geq n_o \ \text{ için } \ x_n\in U$$

yazılabilir. Fakat ayrıca her $n\in\mathbf{N}$ için $x_n\in A$ olduğundan, her $U\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ ve her $n\geq n_o$ için $x_n\in U\cap A$, dolayısıyla, her $U\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için $U\cap A\neq\varnothing$ dır. Şu halde $x_o\in\overline{A}$ dir. □

Uyarı 7.4. Teorem 7.3 'ün tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $X=\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ çarpım uzayını ve bunun

$$E := \{\ f\in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ \mid\ \exists\, S\subset \mathbf{R} \text{ sonlu, ö.k. } \ f(x) = \begin{cases} 0, & x\in S \\ 1, & x\notin S \end{cases} \ \}$$

altkümesini göz önüne alalım.

$g\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, $g(x)\equiv 0$ $(\forall x\in\mathbf{R})$ elemanı için $g\in\overline{E}$, fakat E kümesinde g fonksiyonuna yakınsayan hiçbir dizinin bulunmadığını gösterebiliriz. Bilindiği gibi bu uzayda, g fonksiyonunun bir komşuluk tabanının herhangi bir elemanı, sonlu bir $S^*\subset\mathbf{R}$ ve bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$U(\,g, S^*,\varepsilon) = \{\ h\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ \mid\ |\,h(y)-g\,(y)\,|<\varepsilon,\ \ y\in S^*\ \}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan, bu S^* ile tanımlanan

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x\in S^* \\ 1, & x\notin S^* \end{cases} \qquad \text{için} \qquad h\in U(\,g, S^*,\varepsilon)\cap E$$

olduğundan $U(\,g, S^*,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing$, şu halde $g\in\overline{E}$ dir.

Diğer yandan, E kümesindeki herhangi bir $(\,f_n\,)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisi, her $n\in\mathbf{N}$ için $A_n\subset\mathbf{R}$ sonlu bir küme olmak üzere,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in A_n \\ 1, & x \notin A_n \end{cases}$$

şeklindedir. Eğer $f_n \to f$ ise her $x \in \mathbf{R}$ için $f_n(x) \to f(x)$ olmalıdır (bkz. Örnek 7.3). Buradan, eğer $x \in \mathbf{R} - \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ ise her $n \in \mathbf{N}$ için $f_n(x) = 1$, dolayısıyla $f(x) = 1$ dir. Şu halde f limit fonksiyonu, sayılabilir güçteki $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ kümesi dışında sıfır olamaz. Oysa $g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, her $x \in \mathbf{R}$ için $g(x) \equiv 0$ olarak tanımlanmıştı. O halde $f \neq g$ ve dolayısıyla (f_n) dizisi g fonksiyonuna yakınsayamaz. Şu halde E kümesinde g'ye yakınsayan bir dizi yoktur.

Teorem 7.4. *(X, τ) bir A_1-uzayı, $A \subset X$ ve $x_o \in X$ olsun. Bu durumda,*

$$x_o \in \overline{A} \iff \exists\, (x_n) \text{ ö.k. her } n \in \mathbf{N} \text{ için } x_n \in A \text{ ve } x_n \to x_o$$

sağlanır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $x_o \in \overline{A}$ olsun. (X,τ) bir A_1-uzayı olduğundan $x_o \in X$ noktasında da, her $n \in \mathbf{N}$ için $V_{n+1} \subset V_n$ koşulunu sağlayan sayılabilir bir $\mathcal{B}(x_o) := \{ V_n \mid n = 1,2, \ldots \}$ komşuluk tabanı vardır. $x_o \in \overline{A}$ olduğundan, her $n \in \mathbf{N}$ için $V_n \cap A \neq \emptyset$ dır. Her $n \in \mathbf{N}$ için bir $x_n \in V_n \cap A$ seçilerek elde edilen (x_n) dizisi istenen özelliği sağlar. Gerçekten, her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \in A$ dır. Diğer yandan, $x_n \to x_o$ koşulunu da sağlar. Çünkü her $U \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için

$$\exists\, n_o \in \mathbf{N} \;:\; \forall\, n \geq n_o \text{ için } x_n \in V_n \subset V_{n_o} \subset U$$

sağlanır.

"$\Leftarrow$" Bkz. Teorem 7.3. □

Sonuç 7.1. *(X, τ) bir A_1-uzayı ve $A \subset X$ ise*

A kapalıdır $\iff$ Her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \in A$ ve $x_n \to x$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi için $x \in A$ dır.

Kanıt. "⇒" A kapalı olsun. Eğer bir (x_n) dizisi, her $n\in \mathbf{N}$ için $x_n\in A$ ve $x_n \to x$ koşulunu sağlıyorsa, Teorem 7.4'e göre $x\in \overline{A}$, ve $\overline{A} = A$ olduğundan da $x\in A$ dır.

"⇐" Sağ taraf doğru olsun. Her $x\in \overline{A}$ için Teorem 7.4'e göre

$$\exists\ (x_n) \text{ ö.k. her } n\in \mathbf{N} \text{ için } x_n\in A \text{ ve } x_n \to x$$

sağlanır. Hipoteze göre buradan $x\in A$ olmalıdır. O halde $\overline{A}\subset A$ ve dolayısıyla A kapalıdır. □

Tanım 7.3. (X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_o\in X$ olsun. Eğer (X,τ)'da $x_n \to x_o$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi için (Y,τ^*)'da $f(x_n) \to f(x_o)$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna x_o noktasında *dizisel süreklidir* denir.

Teorem 7.5. *Her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir.*

Kanıt. (X,τ), (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ $x_o\in X$ noktasında sürekli ve (x_n) (X,τ)'da $x_n \to x_o$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. (Y,τ^*)'da $f(x_n) \to f(x_o)$ sağlandığını göstereceğiz. Diğer bir ifade ile, her $V\in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x_o))$ için

$$\exists\ n_o\in \mathbf{N} \ :\ \forall\ n \geq n_o \ \text{ için } \ f(x_n) \in V$$

olduğunu göstereceğiz. $f : X \to Y$ fonksiyonu $x_o\in X$ noktasında sürekli olduğundan, her $V\in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x_o))$ için

$$\exists\ U\in \mathcal{U}_{\tau}(x_o) \ \text{ ö.k. } \ f(U) \subset V$$

yazılabilir. Diğer yandan, $x_n \to x_o$ olduğundan, yukarıdaki $U\in \mathcal{U}_{\tau}(x_o)$ için de

$$\exists\ n_o\in \mathbf{N} \ :\ \forall\ n \geq n_o \ \text{ için } \ x_n \in U$$

sağlanır. Buradan, her $\forall\ n \geq n_o$ için $f(x_n) \in f(U) \subset V$ elde edilir. Şu halde $f(x_n) \to f(x_o)$ dır. Yani f, $x_o\in X$ noktasında dizisel süreklidir. □

Uyarı 7.5. Teorem 7.5'in tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $(\mathbf{R},\tau_{BSA})$ ve $(\mathbf{R},\tau_e)$ topolojik uzayları arasındaki

$$i : (\mathbf{R},\tau_{BSA}) \to (\mathbf{R},\tau_e)\ , \quad i(x) := x$$

özdeşlik fonksiyonu dizisel süreklidir, fakat sürekli değildir. Gerçekten, $x_o \in \mathbf{R}$ herhangi bir nokta ve (x_n) birinci uzayda bu noktaya yakınsayan, yani $x_n \xrightarrow{\tau_{BSA}} x_o$ koşulunu sağlayan herhangi bir dizi ise Örnek 7.2 b)'de gösterildiği gibi

$$\exists\ n_o \in \mathbf{N}\ :\ \forall\ n \geq n_o \ \text{ için } \ x_n = x_o$$

olmalıdır. Buradan, her $n \geq n_o$ için $i(x_n) = i(x_o)$ olup, resim uzayında da $i(x_n) \xrightarrow{\tau_e} i(x_o)$ sağlanır. Şu halde i fonksiyonu yukarıdaki topolojik uzaylar arasında dizisel süreklidir. Fakat bu i fonksiyonu sürekli değildir. Çünkü, örneğin $(0,1) \in \tau_e$, fakat $i^{-1}(0,1) = (0,1) \notin \tau_{BSA}$ dır.

Teorem 7.6. *(X,τ) bir A_1-uzayı, (Y,τ^*) herhangi bir topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. Bu durumda,*

$$f,\ x_o \text{ noktasında süreklidir} \quad \Leftrightarrow \quad f,\ x_o \text{ noktasında dizisel süreklidir}$$

sağlanır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" f , x_o noktasında sürekli ise Teorem 7.5'e göre f bu noktada dizisel süreklidir.
"$\Leftarrow$" f , x_o noktasında dizisel sürekli olsun. Biz f 'nin bu noktada sürekli olmadığını varsayalım. Bu durumda

$$\exists\ V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x_o))\ \text{ ö.k. } \forall\ U \in \mathcal{U}_{\tau}(x_o) \ \text{ için } \ f(U) \not\subset V$$

yazılabilir. Buradan, $\mathcal{B}(x_o) := \{ V_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, x_o noktasında $V_{n+1} \subset V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ koşulunu sağlayan bir komşuluk tabanı olmak üzere, her $n \in \mathbf{N}$ için de, $f(V_n) \not\subset V$ olacaktır. Bunun anlamı ise

$$\forall\ n \in \mathbf{N} \ \text{ için } \ \exists\ x_n \in V_n, \ \text{ ö.k. } \ f(x_n) \notin V$$

dir. Bu şekilde elde edilen (x_n) dizisi, (X,τ) 'da x_o noktasına yakınsar. Bunu göstermek için, önce yukarıdaki $\mathcal{B}(x_o)$, x_o 'da bir komşuluk tabanı olduğundan

$$\forall\ U \in \mathcal{U}_{\tau}(x_o) \ \text{ için } \ \exists\ n_o \in \mathbf{N}\ : \quad x_o \in V_{n_o} \subset U$$

yazılabilir. Ayrıca her $n \geq n_o$ için $x_n \in V_n \subset V_{n_o}$ olduğundan, her $n \geq n_o$ için $x_n \in U$ elde edilir. Yani (x_n), x_o noktasına yakınsar. Fakat $(f(x_n))$ dizisi (Y,τ^*)'da $f(x_o)$ noktasına yakınsamaz, çünkü $V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x_o))$ olmasına rağmen, her $n\in\mathbf{N}$ için $f(x_n)\notin V$ dir. Bu durum ise f'nin, x_o noktasında dizisel sürekli olması hipotezi ile çelişir. Şu halde varsayımımız yanlış, yani f, x_o noktasında sürekli olmak zorundadır. □

Sonuç 7.2. Teorem 7.5, Uyarı 7.5 ve Teorem 7.6'dan çıkan sonuç şudur: Herhangi bir topolojik uzayda, "dizisel süreklilik" ile "süreklilik" denk olmadığı halde, A_1-uzaylarında bu iki kavram denktir.

Uyarı 7.6. Her metrik uzay, metrik topoloji ile bir A_1-uzayı olduğundan, metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için de, süreklilik ve dizisel süreklilik denk kavramlardır.

Teorem 7.7. *(X,τ) bir topolojik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_o\in X$ olsun. Eğer $x_n \to x_o$ ise (x_n)'nin her (x_{n_k}) altdizisi için de $x_{n_k} \to x_o$ dır.*

Kanıt. $x_n \to x_o$ ve (x_{n_k}), (x_n)'nin $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $\varphi(k):=n_k$ kesin monoton artan fonksiyonu ile tanımlanmış altdizisi olsun. $x_n \to x_o$ olduğundan, her $U\in\mathcal{U}_\tau(x_o)$ için

$$\exists\, n_o\in\mathbf{N} \;:\; \forall\, n\geq n_o \;\text{ için }\; x_n\in U$$

sağlanır. (n_k) kesin monoton artan olduğundan, her $n\in\mathbf{N}$ için $n_k>n$ olacak şekilde bir $k\in\mathbf{N}$ vardır (görünüz). Buna göre, eğer $k_o\in\mathbf{N}$, $n_{k_o}>n_o$ koşulunu sağlayan bir doğal sayı ise her $k\geq k_o$ için, $n_k \geq n_{k_o}>n_o$; yani her $k\geq k_o$ için, $n_k>n_o$ olduğundan $x_{n_k}\in U$ olmalıdır. Bu da $x_{n_k}\to x_o$ olduğunu gösterir. □

Teorem 7.8. *(X,τ) bir topolojik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_o\in X$ olsun. Eğer (x_n) dizisinin x_o noktasına yakınsayan (x_{n_k}) gibi bir altdizisi varsa, bu x_o noktası, (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.*

Kanıt. $U\in\mathcal{U}_\tau(x_o)$ ve $n\in\mathbf{N}$ keyfi verilsin. (x_{n_k}), (x_n)'nin $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $\varphi(k):=n_k$ kesin monoton artan fonksiyonu ile tanımlanmış altdizisi ise

$$\exists\, k_1\in\mathbf{N} \;\text{ ö.k. }\; n_{k_1}>n$$

yazılabilir. Diğer yandan, $x_{n_k}\to x_o$ olduğundan

$$\exists\, k_2 \in \mathbf{N} \text{ ö.k. } \forall\, k \geq k_2 \text{ için } x_{n_k} \in U$$

sağlanır. Şimdi eğer, $k^* := \text{maks}\{k_1, k_2\}$ olarak seçilirse, $k^* \geq k_1$ olduğundan, $n_{k^*} \geq n_{k_1} > n$, yani $n_{k^*} > n$ ve aynı zamanda $k^* \geq k_2$ olduğundan da, $x_{n_{k^*}} \in U$ elde edilir. Şu halde $n_{k^*} \in \mathbf{N}$ için, $n_{k^*} > n$ olup $x_{n_{k^*}} \in U$ dur. Bu ise x_o noktasının, (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olduğunu gösterir. □

Uyarı 7.7. Teorem 7.8'in tersi genel olarak doğru değildir. Başka bir anlatımla, herhangi bir topolojik uzayda, bir dizinin, kendisinin her yığılma noktasına yakınsayan bir altdizisinin bulunması gerekmez. Bunu göstermek için $X := \mathbf{N} \times \mathbf{N} \cup \{(0,0)\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan topolojiyi göz önüne alalım (bkz. J. Dugundji, s. 214):

Her $x \in X$ için, X'in aşağıdaki (i) ve (ii) koşulları ile tanımlanan altkümelerinin $\mathcal{U}_x$ ile gösterilen ailesi, X üzerinde bir topolojinin x noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur (bkz.Teorem 3.2). $x \in X$ herhangi bir nokta olsun.

(i) $x \neq (0,0)$ ise X 'in, x noktasını içeren bütün altkümeleri $\mathcal{U}_x$ 'in elemanı olsun.

(ii) $x = (0,0)$ ise $U := \{(0,0)\} \cup \{\exists\, N \in \mathbf{N}$ ö.k. $\forall\, n \geq N$ için $\{n\} \times \mathbf{N}$ 'nin sonlu sayıdaki elemanının dışında kalan bütün elemanları$\}$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde elde edilen topolojiyi τ ile gösterirsek, (X,τ) topolojik uzayında $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$'nin elemanlarının

$$x_1 = (1,1),\ x_2 = (2,1),\ x_3 = (1,2),\ x_4 = (1,3),\ x_5 = (2,2),\ x_6 = (3,1),$$

$$x_7 = (4,1),\ x_8 = (3,2),\ x_9 = (2,3),\ x_{10} = (1,4),\ x_{11} = (1,5),\ x_{12} = (2,4),\ \ldots$$

şeklinde köşegensel numaralanması ile elde edilen (x_n) dizisi için $x_o = (0,0)$ noktası bir yığılma noktasıdır (gösteriniz). Fakat bu dizinin, bu uzayda $x_o = (0,0)$ noktasına yakınsayan hiçbir altdizisi yoktur. Gerçekten, (x_n)'nin herhangi bir $(x_{n_k}) = (p_{n_k}, q_{n_k})$ altdizisi için iki durum söz konusudur:

a) Öyle bir $p^* \in \mathbf{N}$ vardır ki, her $k \in \mathbf{N}$ için $p_{n_k} < p^*$ dir. Bu durumda,

$U:=\{(0,0)\}\cup\{\forall\ n \geq p^*$ için $\{n\}\times\mathbf{N}$'nin sonlu sayıdaki elemanının dışında kalan bütün elemanları$\}$

$x_o = (0,0)$ noktasının bir komşuluğudur, fakat bu komşuluk (x_{n_k})'nın hiçbir terimini içermez. Dolayısıyla (x_{n_k}), $x_o = (0,0)$ noktasına yakınsamaz.

b) Her $n\in\mathbf{N}$ için öyle bir $k\in\mathbf{N}$ vardır ki, $p_{n_k} > n$ dir. Bu durumda

$$\limsup_{n\to\infty} p_{n_k} = \infty$$

olduğundan (p_{n_k})'nın

$$p_{n_{k_1}} < p_{n_{k_2}} < p_{n_{k_3}} < \ldots .$$

şeklinde monoton artan bir altdizisi tanımlanabilir. $x_{n_{k_i}} = (p_{n_{k_i}}, q_{n_{k_i}})$ olmak üzere

$$U := \{(0,0)\}\cup(\mathbf{N}\times\mathbf{N} - \{x_{n_{k_i}} \mid i\in\mathbf{N}\})$$

$x_o = (0,0)$ noktasının bir komşuluğu olur. Ancak bu komşuluğun, (x_{n_k}) altdizisinin belirli bir indisten büyük indisli bütün terimlerini içermesi olanaksızdır. Dolayısıyla bu durumda da (x_{n_k}), $(0,0)$ noktasına yakınsamaz.

(x_n) dizisinin her (x_{n_k}) altdizisi için bu işlem yapılabileceğinden, (x_n)'nin $(0,0)$ noktasına yakınsayan hiçbir altdizisi yoktur.

Oysa aşağıdaki teorem, birinci sayılabilir uzaylarda Teorem 7.8'in tersinin de sağlandığını ifade eder.

Teorem 7.9. *(X,τ) bir A_1-uzayı, (x_n) X'de bir dizi ve $x_o\in X$ olsun. x_o noktasının (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul, (x_n) dizisinin x_o noktasına yakınsayan bir altdizisinin bulunmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bir A_1-uzayı, (x_n) X'de bir dizi ve $x_o\in X$ bu dizinin bir yığılma noktası olsun. Bu dizinin x_o noktasına yakınsayan bir altdizisinin bulunduğunu göstereceğiz:

x_o noktasında her $k\in\mathbf{N}$ için $V_{k+1} \subset V_k$ koşulunu sağlayan bir komşuluk tabanı

$$\mathcal{B}(x_o):=\{ V_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$$

ise x_o, (x_n)'nin bir yığılma noktası olduğundan, bu dizinin istenen özelliği sağlayan bir altdizisi aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

$$V_1\in \mathcal{B}(x_o) \quad \text{ve} \quad 1\in \mathbf{N} \quad \text{için} \quad \exists\, n_1 > 1 \quad : \quad x_{n_1} \in V_1$$

$$V_2\in \mathcal{B}(x_o) \quad \text{ve} \quad n_1\in \mathbf{N} \quad \text{için} \quad \exists\, n_2 > n_1 \quad : \quad x_{n_2} \in V_2$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$V_k\in \mathcal{B}(x_o) \quad \text{ve} \quad n_{k-1}\in \mathbf{N} \quad \text{için} \quad \exists\, n_k > n_{k-1} \quad : \quad x_{n_k} \in V_k$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

Tümevarımla, her $k\in \mathbf{N}$ için bu şekilde elde edilen (x_{n_k}) altdizisi x_o noktasına yakınsar. Gerçekten, her $U\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için $V_{k_o} \subset U$ olacak şekilde bir $k_o\in \mathbf{N}$ mevcut olduğundan, her $k \geq k_o$ için,

$$x_{n_k} \in V_k \subset V_{k_o} \subset U$$

sağlanır, yani $x_{n_k} \to x_o$ dır.

"$\Leftarrow$" Eğer (x_n) dizisinin x_o noktasına yakınsayan bir altdizisi varsa, Teorem 7.8'e göre x_o bu (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Aşağıdaki teorem, A_1-uzaylarında açık (veya kapalı) kümelerin de dizilerin yakınsaklığı yardımı ile belirlenebileceğini göstermektedir.

Teorem 7.10. *(X,τ) bir A_1-uzayı ise*

a) $G \subset X$ *açıktır* $\Leftrightarrow$ [$x_n \to x$ *ve* $x\in G$ *koşulunu sağlayan her* (x_n) *dizisi için* $\exists\, n_o\in \mathbf{N}$, *ö.k.* $\forall n \geq n_o$ *için* $x_n\in G$ *dir.*]

b) $F \subset X$ *kapalıdır* $\Leftrightarrow$ [$\forall\, n\in \mathbf{N}$ *için* $x_n\in F$ *ve* $x_n \to x$ *koşulunu sağlayan her* (x_n) *dizisi için* $x\in F$ *dir*]

Kanıt. a) "$\Rightarrow$" $G \subset X$ açık, $x_n\to x$ ve $x\in G$ olsun. Bu durumda $G\in \mathcal{U}_\tau(x)$ olduğundan,

$$\exists\, n_o \in \mathbf{N} \;:\; \forall\, n \geq n_o \text{ için } x_n \in G$$

elde edilir.

"$\Leftarrow$" Sağ taraf sağlansın. Buna rağmen $G \subset X$ kümesinin açık olmadığını varsayalım. O halde en az bir $x \in G$ için $x \notin \overset{o}{G}$ dir.

$$\mathcal{B}(x) := \{ V_n \;|\; n = 1,2, \ldots \}$$

bu x noktasının her $n \in \mathbf{N}$ için $V_{n+1} \subset V_n$ koşulunu sağlayan bir komşuluk tabanı ise $x \notin \overset{o}{G}$ olduğundan her $n \in \mathbf{N}$ için $V_n \not\subset G$, yani her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\exists\; x_n \in V_n \;:\; x_n \notin G$$

sağlanır. Bu şekilde elde edilen (x_n) dizisi için $x_n \to x$ dir. Diğer yandan $x \in G$ olduğundan hipoteze göre

$$\exists\, n_o \in \mathbf{N} \;:\; \forall\, n \geq n_o \text{ için } x_n \in G$$

olmalıdır. Fakat her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \notin G$ olduğundan bu olanaksızdır. O halde varsayım yanlış, yani G açık olmak zorundadır.

b) Daha önce kanıtlanan bu ifade (bkz. s. 135, Sonuç 7.1), teoremdeki bütünlüğü sağlamak için burada yeniden verilmiştir. □

Özetlemek gerekirse, bu bölümde buraya kadar anlatılanlardan çıkan sonuç şudur: Başlangıçta da belirtildiği gibi; birinci sayılabilir uzaylarda birçok kavram, örneğin fonksiyonların sürekliliği, hatta uzayın açık ve kapalı kümeleri yani topolojisi dahi metrik uzaylarda olduğu gibi diziler yardımıyla karakterize edilebilmektedir. Diğer bir ifadeyle, birinci sayılabilir uzaylarda diziler, metrik uzaylardaki kadar etkin bir problem çözme aracı olarak karşımıza çıkmaktadır. Birinci sayılabilir olmayan uzaylarda ise durum böyle değildir. Bu gerçek, dizi kavramının genelleştirilmesi gereğini ortaya koymuştur.

B. Ağlar

Yukarıda görüldüğü gibi, herhangi bir topolojik uzayda, bir kümenin kapanışı ve bir fonksiyonun sürekliliği gibi birçok kavramın karakterize edilmesinde diziler yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle dizilerin genelleştirilmesi gereği ortaya çıkmış ve bu amaçla "ağ"lar ve "filtre"ler tanımlanmıştır. Bu kısımda, dizilerin doğal bir genelleştirilmesi olarak ağlar veya diğer adıyla Moore-Smith dizileri tanımlanacak ve bunlarla ilgili özet bilgi verilecektir.

Tanım 7.4. Bir Λ kümesi üzerinde tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan "$\preccurlyeq$" bağıntısına bir *yönlendirme bağıntısı* ve üzerinde böyle bir bağıntı tanımlanmış olan kümeye de *yönlendirilmiş küme* denir.

(i) Her $\lambda\in\Lambda$ için $\lambda\preccurlyeq\lambda$ dir.
(ii) $\lambda_1\preccurlyeq\lambda_2$ ve $\lambda_2\preccurlyeq\lambda_3$ ise $\lambda_1\preccurlyeq\lambda_3$ dir.
(iii) Her λ_1 , $\lambda_2\in\Lambda$ için $\lambda_1\preccurlyeq\lambda_3$ ve $\lambda_2\preccurlyeq\lambda_3$ olacak biçimde bir $\lambda_3\in\Lambda$ vardır.

Uyarı 7.8. Yukarıdaki tanımda verilen bağıntının ters simetri (anti-simetrik) özelliğine sahip olması gerekmediğinden bu bağıntının bir yarı-sıralama bağıntısı olması gerekmez. (iii) koşulu Λ kümesini (yukarı doğru) yönlendirmeyi sağlar.

Örnek 7.3 a) (X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. $\mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluk ailesinde

$$U_1\preccurlyeq U_2 \quad :\Leftrightarrow \quad U_2\subset U_1$$

şeklinde tanımlanan "$\preccurlyeq$" bağıntısı bir yönlendirme bağıntısıdır.

b) $[a,b]\subset\mathbf{R}$ aralığının parçalanışlarından oluşan

$$\mathcal{P} := \{\ P:=(x_o, x_1, \ldots, x_n) \ \mid \ a = x_o < x_1 < \ \ldots\ < x_n = b\ \}$$

kümesi üzerinde, $P, Q\in\mathcal{P}$ için

$$P\preccurlyeq Q \ :\Leftrightarrow \ P \text{ 'nin bütün noktaları } Q \text{ 'nün de noktalarıdır.}$$

şeklinde tanımlanan "$\preccurlyeq$" bağıntısı bir yönlendirme bağıntısıdır.

Tanım 7.5. X bir küme ve Λ herhangi bir yönlendirilmiş küme olmak üzere, Λ üzerinde tanımlı her $f : \Lambda \to X$ fonksiyonuna X'de bir *ağ* adı verilir. Dizilerde olduğu gibi, her $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda) := x_\lambda \in X$ ile gösterilir ve X'de bir ağ çoğu kez $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ veya kısaca (x_λ) şeklinde yazılır.

Tanım 7.6. X bir küme, Λ ve M yönlendirilmiş iki küme ve $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ X 'de $f : \Lambda \to X$, $f(\lambda) := x_\lambda$ ile tanımlı bir ağ olsun. $\varphi : M \to \Lambda$, $\varphi(\mu) := \lambda_\mu$ şeklinde tanımlanmış ve

(i) $\mu_1 \preccurlyeq \mu_2 \;\Rightarrow\; \varphi(\mu_1) \preccurlyeq \varphi(\mu_2)$

(ii) $\forall\, \lambda \in \Lambda$ için $\exists\, \mu \in M$, ö.k. $\lambda \preccurlyeq \varphi(\mu)$

koşullarını sağlayan her φ fonksiyonu için $f o \varphi : M \to X$ bileşke fonksiyonuna, *f 'nin bir altağı* adı verilir. Bir $\mu \in M$ noktası için $(f o \varphi)(\mu) = f(\varphi(\mu)) = x_{\varphi(\mu)} \in X$ noktası çoğu kez x_{λ_μ} şeklinde yazılır ve $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 'nın bir altağı, $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$ veya kısaca (x_{λ_μ}) ile gösterilir.

Tanım 7.7. (X,τ) bir topolojik uzay, (x_λ) X'de bir ağ ve $x \in X$ olsun.

a) Eğer her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluğu için, buna bağlı bir $\lambda_o = \lambda_o(U) \in \Lambda$, her $\lambda \succcurlyeq \lambda_o$ için $x_\lambda \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, (x_λ) ağı x noktasına yakınsar denir ve $x_\lambda \to x$ şeklinde yazılır. Bu x noktasına da bu *ağın bir limit noktası* veya limiti denir.

b) Eğer her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluğu ve her $\lambda \in \Lambda$ için en az bir $\lambda_o \succcurlyeq \lambda$ elemanı, $x_{\lambda_o} \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, bu x noktasına (x_λ) *ağının bir yığılma noktası* denir.

Örnek 7.4. a) N doğal sayılar kümesi, kendi doğal sıralamasına göre yönlendirilmiş küme olduğundan, her (x_n) dizisi, indis kümesi **N** olan bir ağdır.

b) (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasındaki $\mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluk ailesi,

$$U_1 \preccurlyeq U_2 \quad :\Leftrightarrow \quad U_2 \subset U_1$$

bağıntısı ile yönlendirilmiş olduğundan, her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ için bir $x_U \in U$ noktası seçilerek X'de bir

$$(x_U)_{U\in\mathcal{U}_\tau(x)}$$

ağı elde edilir. Bu ağ için $x_U \to x$ sağlanır. Gerçekten, her $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ için $\overset{o}{U}\in\mathcal{U}_\tau(x)$ elemanını göz önüne alırsak, her $V \succcurlyeq \overset{o}{U}$ için $x_V\in U$ olduğu görülür. Çünkü $x_V\in V\subset \overset{o}{U}\subset U$ dur.

c) (X,τ) bir topolojik uzay, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ X'de bir ağ ve $x\in X$ olsun. Eğer $x_\lambda \to x$ ise $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağının her $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$ altağı için de $x_{\lambda_\mu}\to x$ dir. Gerçekten, $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ keyfi verilsin. $x_\lambda \to x$ olduğundan

$$\exists\ \lambda_o\in\Lambda \text{ ö.k. } \forall\ \lambda \succcurlyeq \lambda_o \text{ için } x_\lambda\in U$$

sağlanır. Diğer yandan, $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$'nın bir altağı olduğundan

$$\exists\ \mu_o\in M \text{ ö.k. } \lambda_{\mu_o}\succcurlyeq\lambda_o$$

yazılabilir. Buradan,

$$\forall\ \mu\succcurlyeq\mu_o \text{ için } \lambda_\mu\succcurlyeq\lambda_{\mu_o}\succcurlyeq\lambda_o \ \Rightarrow\ \forall\ \mu\succcurlyeq\mu_o \text{ için } x_{\lambda_\mu}\in U$$

elde edilir. Şu halde $x_{\lambda_\mu}\to x$ dir.

Şimdi de, diziler yardımıyla sadece birinci sayılabilir uzaylarda elde edilebilen, fakat genel topolojik uzaylarda geçerli olmayan bazı ifadelerin, ağlar yardımıyla genel topolojik uzaylarda da elde edilebileceğini göstereceğiz:

Teorem 7.11. *(X,τ) bir topolojik uzay, (x_λ) X'de bir ağ ve $x_o\in X$ olsun. Bu durumda,*

x_o, (x_λ)'nın bir yığılma noktasıdır $\Leftrightarrow$ (x_λ)'nın x_o noktasına yakınsayan bir altağı vardır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" x_o, (x_λ)'nın bir yığılma noktası olsun. O halde

$$\forall\ U\in\mathcal{U}_\tau(x_o) \text{ ve } \forall\ \lambda\in\Lambda \text{ için } \exists\ \lambda^*\succcurlyeq\lambda\in\Lambda \text{ ö.k. } x_{\lambda^*}\in U$$

sağlanır. Şimdi eğer,

$$M := \{ (\lambda,U) \mid x_\lambda \in U,\ \lambda\in\Lambda,\ U\in \mathcal{U}_\tau(x_o) \}$$

olarak tanımlanırsa, M'de,

$$(\lambda_1,U_1) \preccurlyeq (\lambda_2,U_2) \ :\Leftrightarrow\ \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2 \ \text{ ve } \ U_2 \subset U_1$$

ile tanımlanan "$\preccurlyeq$" bağıntısı bir yönlendirme bağıntısıdır.

$$\varphi : M \to \Lambda, \quad \varphi(\lambda,U) := \lambda$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyonu Tanım 7.6 'daki (i) ve (ii) koşullarını sağlar (gösteriniz). Şu halde bu φ, (x_λ)'nın bir (x_{λ_μ}) altağını tanımlar. İşte bu (x_{λ_μ}) ağı x_o noktasına yakınsar. Gerçekten, $U^* \in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ keyfi verilsin. $\lambda^*\in\Lambda$, $x_{\lambda^*}\in U^*$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $(\lambda^*, U^*)\in M$ dir ve

$$\forall\ (\lambda,V) \succcurlyeq (\lambda^*, U^*),\ \ ((\lambda,V)\in M)\ \text{ için }\ x_\lambda \in V \subset U^*,$$

yani $x_{\varphi(\lambda,V)} \in U^*$ sağlanır.

"$\Leftarrow$" $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$'nın bir $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$ altağı x_o noktasına yakınsasın. x_o'ın $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağının bir yığılma noktası olduğunu göstereceğiz. $U_o\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ ve $\lambda_o\in\Lambda$ keyfi verilsin. (x_{λ_μ}), (x_λ)'nın $\varphi : M \to \Lambda$, $\mu \to \lambda_\mu$ dönüşümü ile tanımlanan bir altağı ise $\lambda_o\in\Lambda$ elemanına karşılık, $\lambda_{\mu_o} \succcurlyeq \lambda_o$ olacak şekilde bir $\mu_o\in M$ vardır. Diğer yandan, $x_{\lambda_\mu} \to x_o$ olduğundan, $U_o\in \mathcal{U}_\tau(x_o)$ için

$$\exists\ \mu_{U_o}\in M,\ \ \text{ö.k.}\ \ \forall\ \mu \succcurlyeq \mu_{U_o}\ \ \text{için}\ \ x_{\lambda_\mu} \in U_o$$

sağlanır. Fakat M yönlendirilmiş olduğundan

$$\exists\ \mu^*\in M,\ \ \text{ö.k.}\ \ \mu^* \succcurlyeq \mu_o\ \ \text{ve}\ \ \mu^* \succcurlyeq \mu_{U_o}$$

yazılabilir. Şimdi, eğer $\lambda^* := \lambda_{\mu^*}$ olarak tanımlanırsa, $\lambda^* \succcurlyeq \lambda_o$ ve $x_{\lambda^*} \in U_o$ sağlanır. Gerçekten, önce $\mu^* \succcurlyeq \mu_o$ olduğundan $\lambda_{\mu^*} \succcurlyeq \lambda_{\mu_o} \succcurlyeq \lambda_o$, yani $\lambda^* \succcurlyeq \lambda_o$; fakat aynı zamanda $\mu^* \succcurlyeq \mu_{U_o}$ olduğundan da, $x_{\lambda_{\mu^*}} = x_{\lambda^*} \in U_o$ elde edilir. Bu da x_o'ın, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$'nın bir yığılma noktası olduğunu ifade eder. □

Teorem 7.12. *(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,*

$$x \in \overline{A} \iff \exists\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ ağı, ö.k. } \forall \lambda\in\Lambda \text{ için } x_\lambda \in A \text{ ve } x_\lambda \to x \text{ dir.}$$

Kanıt. "⇒" $x \in \overline{A}$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ için $U \cap A \neq \emptyset$ olduğundan, her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ için bir $x_U \in U \cap A$ seçilebilir. Bu şekilde elde edilen $(x_U)_{U\in\mathcal{U}_\tau(x)}$ ağının bütün terimleri A kümesinde olup, Örnek 7.4 b)'de gösterildiği gibi bu ağ x noktasına yakınsar.

"⇐" Tersine, bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için, $x_\lambda \in A$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$ ve $x_\lambda \to x$ sağlansın. Buradan,

$$\forall\ U \in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ için } \exists\ \lambda_o \in \Lambda \text{ ö.k. } \forall\ \lambda \succcurlyeq \lambda_o \text{ için } x_\lambda \in U$$

sağlanır. Fakat her $\lambda \in \Lambda$ için $x_\lambda \in A$ olduğundan, buradan da, her $\lambda \succcurlyeq \lambda_o$ için $x_\lambda \in U \cap A$ elde edilir. Şu halde her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ için $U \cap A \neq \emptyset$, yani $x \in \overline{A}$ dir. □

Teorem 7.13. *(X, τ) ve (Y, τ^*) herhangi iki topolojik uzay, $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,*

f fonksiyonu x noktasında süreklidir ⇔ (X, τ)'da $x_\lambda \to x$ koşulunu sağlayan her (x_λ) ağı için (Y, τ)'da $f(x_\lambda) \to f(x)$ sağlanır.

Kanıt. "⇒" $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ fonksiyonu $x \in X$ noktasında sürekli ve $x_\lambda \to x$ olsun. $V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$, $f(x)$'in herhangi bir komşuluğu ise f fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_\tau(x)$ dir. Diğer yandan, $x_\lambda \to x$ olduğundan

$$\exists\ \lambda_o \in \Lambda \text{ ö.k. } \forall\ \lambda \succcurlyeq \lambda_o \text{ için } x_\lambda \in f^{-1}(V)$$

sağlanır. Buradan, her $\lambda \succcurlyeq \lambda_o$ için $f(x_\lambda) \in V$ elde edilir. Şu halde $f(x_\lambda) \to f(x)$ dir.

"⇐" Eğer f, $x \in X$ noktasında sürekli değilse, sağ taraftaki ifadenin sağlanamayacağını gösterelim: f, $x \in X$'de sürekli değilse,

$$\exists\ V \in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x)) \text{ ö.k. } \forall\ U \in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ için } f(U) \not\subset V$$

yazılabilir. Buradan,

$$\forall\, U\in \mathcal{U}_\tau(x) \quad \text{için} \quad \exists\, x_U\in U \quad \text{ö.k.} \quad f(x_U)\notin V$$

elde edilir. $\mathcal{U}_\tau(x)$ yönlendirilmiş olduğundan, bu şekilde elde edilen $(x_U)_{U\in\mathcal{U}_\tau(x)}$ X'de bir ağdır ve bu ağ için $x_U\to x$ sağlanır. Ancak $(f(x_U))_{U\in\mathcal{U}_\tau(x)}$ ağı Y'de $f(x)$'e yakınsamaz. Çünkü, $V\in \mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$, bu ağın hiçbir terimini içermez. Bu ise hipoteze aykırıdır. Bu da kanıtı tamamlar. □

Tanım 7.8. X bir küme ve $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ X'de bir ağ olsun. Eğer her $E\subset X$ altkümesi için,

$$\exists\ \lambda_1=\lambda_1(E)\in\Lambda \ \text{ ö.k. } \forall\,\lambda\succcurlyeq\lambda_1 \ \text{ için } x_\lambda\in E \ \text{ veya } \forall\,\lambda\succcurlyeq\lambda_1 \ \text{ için } x_\lambda\in X-E$$

sağlanıyorsa, bu $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağına bir *ultraağ* veya *evrensel ağ* adı verilir.

Herhangi bir Λ yönlendirilmiş kümesi üzerinde tanımlanan her $f:\Lambda\to X$, $f(\lambda):=x_o$, $(x_o\in X)$ sabit fonksiyonu X 'de bir ultraağdır. Bu ultraağ'a "*ilkel ultraağ*" adı verilir.

Uyarı 7.9. Tanım 7.8'den kolayca görüleceği gibi, bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ultraağı, bir $E\subset X$ altkümesine göre,

$$\forall\,\lambda\in\Lambda \ \text{ için } \ \exists\ \lambda_o\succcurlyeq\lambda\,,\ (\lambda_o\in\Lambda) \ \text{ ö.k. } \ x_{\lambda_o}\in E$$

koşulunu sağlıyorsa, bu ultraağ için,

$$\exists\ \lambda_1\in\Lambda \ \text{ ö.k. } \ \forall\,\lambda\succcurlyeq\lambda_1 \ \text{ için } \ x_\lambda\in E$$

sağlanır. Buradan,

"*Bir topolojik uzaydaki her ultraağ, kendisinin bütün yığılma noktalarına yakınsar*"

ifadesi elde edilir.

Teorem 7.12 ve Teorem 7.13, herhangi bir topolojik uzayda bir kümenin kapanışı ve bir fonksiyonun sürekliliği kavramlarının ağların yakınsaklığı yardımıyla karakterize edilebileceğini göstermektedir. Bunun gibi, birinci sayılabilir uzaylarda diziler yardımıyla elde edilebilen bütün ifadeler, herhangi bir topolojik uzayda ağlar yardımı ile elde edilebilirler. Bunlardan bazıları bölüm sonundaki problemler kısmında verilmiştir. Gerektiğinde bunların kanıtları ve ağlarla ilgili daha fazla bilgi için, örneğin S. Willard, General Topology, Addison-Wesley 1970, Chapter 4'e bakılabilir.

C. Filtreler

Herhangi bir topolojik uzayda amaca uygun bir yakınsaklık teorisini kurmak için diğer bir araç da, "filtre" adı verilen ve literatürde çok daha sıkça kullanılan yapılardır. Bu kısımda bu yapılarla ilgili özet bilgi sunulacaktır.

Tanım 7.9. a) X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\varnothing \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ altküme ailesine X üzerinde bir *filtre* adı verilir:

(F1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ dir.
(F3) $F \in \mathcal{F}$ ve $F' \supset F$ ise $F' \in \mathcal{F}$ dir.

b) $\mathcal{F}$ bir filtre ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $F \in \mathcal{F}$ için $F_1 \subset F$ olacak şekilde bir $F_1 \in \mathcal{B}$ varsa, bu $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{F}$'nin bir tabanı (*filtre tabanı*) adı verilir.

Y. Teorem 7.1. *Bir X kümesinin boştan farklı bazı altkümelerinden oluşan ve boş olmayan bir $\mathcal{B}$ ailesinin X üzerinde bir filtrenin tabanı olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ için } \exists\, B_3 \in \mathcal{B} \text{ ö.k. } B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\mathcal{B}$, X üzerinde bir $\mathcal{F}$ filtresinin tabanı ve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ise $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ olduğundan, $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ dir. Fakat $\mathcal{B}$'nin taban olduğu göz önüne alınırsa, buradan, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.

"$\Leftarrow$" Tersine, eğer $\mathcal{B}$ yukarıdaki koşulu sağlayan bir altküme ailesi ise

$$\mathcal{F} := \{ F \subset X \mid \exists\ B \in \mathcal{B} \ \text{ ö.k. } \ B \subset F \}$$

'nin X üzerinde bir filtre ve $\mathcal{B}$'nin bu filtre için bir taban olduğu kolayca görülür. □

Bir tabanı $\mathcal{B}$ olan $\mathcal{F}$ filtresine bazen "$\mathcal{B}$ ile üretilen filtre" denir ve bu durum $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ ile ifade edilir. Bu filtre, $\mathcal{B}$'nin elemanlarına, bu elemanların bütün üst kümelerinin katılması ile elde edilir.

Örnek 7.5. a) X bir küme ve $\varnothing \neq A \subset X$ ise

$$\mathcal{F} := \{ F \subset X \mid A \subset F \}$$

ailesi X üzerinde bir filtredir ve $\mathcal{B} := \{ A \}$ bu filtrenin bir tabanıdır.

b) (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının bu uzaydaki bütün komşuluklarının $\mathcal{U}_\tau(x)$ ailesi X üzerinde bir filtredir. Bu filtreye, x'in *komşuluk filtresi* adı verilir.

c) (x_n) X'de bir dizi olsun. Her $k \in \mathbf{N}$ için $B_k := \{ x_n \mid n \geq k \}$ şeklinde tanımlanan B_k'ların $\mathcal{B} := \{ B_k \mid k \in \mathbf{N} \}$ ailesi X üzerinde bir filtre tabanıdır. Bu taban ile üretilen, diğer bir ifade ile, bir tabanı bu $\mathcal{B}$ ailesi olan $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ filtresine, (x_n) *dizisi ile üretilen filtre* adı verilir.

d) $\mathcal{B} := \{ (a, \infty) \mid a \in \mathbf{R} \}$ ailesi $\mathbf{R}$ üzerinde bir filtre tabanıdır. Bir tabanı bu $\mathcal{B}$ ailesi olan $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ filtresine, $\mathbf{R}$ üzerinde *Fréchet filtresi* adı verilir.

Tanım 7.10. $\mathcal{F}$ bir filtre olsun. Eğer $\bigcap \{ F \mid F \in \mathcal{F} \} = \varnothing$ ise bu $\mathcal{F}$ filtresine *serbest filtre*; eğer $\bigcap \{ F \mid F \in \mathcal{F} \} \neq \varnothing$ ise *sabit filtre* adı verilir.

Örneğin, $\mathbf{R}$ üzerindeki Fréchet filtresi bir serbest filtre, bir topolojik uzayın herhangi bir noktasının komşuluk filtresi ise bir sabit filtredir.

Tanım 7.11. a) $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$, X kümesi üzerinde iki filtre olsunlar. Eğer $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$'den daha *kaba*, ya da $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$'den daha *incedir* denir.

Eğer $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ve $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ ise bu iki filtre aynıdır. Eğer farklı iki filtreden biri diğerinden daha ince ise bu ince olan filtreye diğerinden kesin olarak daha incedir denir.

b) $\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde bir filtre olsun. Eğer X üzerinde $\mathcal{F}$'den kesin olarak daha ince olan başka bir filtre mevcut değilse, bu $\mathcal{F}$ filtresine bir *ultrafiltre* (veya en ince filtre) adı verilir.

Uyarı 7.10. Bir küme üzerinde birden fazla ultrafiltre bulunabilir. Bunun nedeni, bir küme üzerindeki bütün filtrelerden oluşan aile üzerinde, Tanım 7.11 a)'da verilen karşılaştırma bağıntısının bir yarı-sıralama bağıntısı olmasıdır.

Teorem 7.14. *Her filtre bir ultrafiltrenin içindedir.*

Kanıt. $\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde bir filtre ve $\mathcal{F}$'den ince olan bütün filtrelerin kümesi

$$\Phi := \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ filtre ve } \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \text{ dir} \}$$

olsun. Φ 'de, $\mathcal{G}_1 \preccurlyeq \mathcal{G}_2 \ :\Leftrightarrow\ \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ şeklinde tanımlanan "$\preccurlyeq$" bağıntısı bir yarı-sıralama bağıntısıdır.

$\Phi_1 \subset \Phi$, yarı-sıralanmış $(\Phi, \preccurlyeq)$ kümesinin tam sıralanmış bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F} := \bigcup_{\mathcal{G} \in \Phi_1} \mathcal{G}$$

bir filtredir. Çünkü Φ_1 tam sıralanmış olduğundan herhangi iki $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ elemanı aynı bir $\mathcal{G} \in \Phi_1$ filtresinin içinde kalır. Şu halde $\mathfrak{F}$, Φ_1'in bir üst sınırıdır. Buna göre Φ'nin tam sıralanmış her altkümesinin bir üst sınırı bulunmaktadır. O halde Zorn Lemmasına göre Φ'nin $\mathcal{G}^*$ gibi bir maksimal elemanı vardır. İşte bu $\mathcal{G}^*$ bir ultrafiltredir ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}^*$ sağlanır. □

Teorem 7.15. *Bir $\mathcal{F}$ filtresinin X üzerinde bir ultrafiltre olması için gerek ve yeter koşul, her $A \subset X$ için $A \in \mathcal{F}$ ya da $X - A \in \mathcal{F}$ olmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\mathcal{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre olsun. Eğer $A = \varnothing$ ise $X \in \mathcal{F}$ olduğundan iddia doğrudur. $A \neq \varnothing$ olsun. $A \notin \mathcal{F}$ ve $X - A \notin \mathcal{F}$ kabul edelim. Bu durumda

$$\mathcal{G} := \{ M \mid M \subset X \text{ ve } A \cup M \in \mathcal{F} \}$$

ailesi X üzerinde $\mathcal{F}$'den daha ince olan ve X–A'yı içeren bir filtredir (Bkz. P. 12). Fakat $\mathcal{F}$ bir ultrafiltre olduğundan $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ olmalıdır. Buradan $X - A \in \mathcal{F}$ elde edilir. O halde kabulümüz yanlış, dolayısıyla iddia doğrudur.

"$\Leftarrow$" Tersine, her $A \subset X$ için A veya X–A kümelerinden biri $\mathcal{F}$'nin bir elemanı olsun. Eğer $\mathcal{F}$'den kesin olarak daha ince olan bir $\mathcal{G}$ filtresi mevcut olsaydı,

$$\exists\ G \in \mathcal{G} \quad \text{ö.k.} \quad G \notin \mathcal{F}$$

sağlanırdı. Buradan da hipoteze göre, $X - G \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ sağlanması gerekirdi. Fakat $G \cap (X - G) = \varnothing$ olduğundan bu durum, $\mathcal{G}$'nin bir filtre olması ile çelişir. O halde X üzerinde $\mathcal{F}$'den kesin olarak daha ince olan bir filtre mevcut değildir. Yani $\mathcal{F}$ bir ultrafiltre olmak zorundadır. □

Tanım 7.12. (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre ve $x \in X$ olsun.

a) Eğer $\mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}$ filtresi x noktasına yakınsar denir ve bu durum $\mathcal{F} \to x$ ile gösterilir. Bu x noktasına da $\mathcal{F}$ *filtresinin bir limiti* adı verilir.

b) Eğer her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ ve her $F \in \mathcal{F}$ için $U \cap F \neq \varnothing$ ise bu x noktasına $\mathcal{F}$ *filtresinin bir yığılma noktası* adı verilir. Buna göre, x'in $\mathcal{F}$'nin bir yığılma noktası olması,

$$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$$

olmasına denktir.

c) (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{B}$, X üzerinde bir filtre tabanı ve $x \in X$ olsun. Eğer bir tabanı $\mathcal{B}$ olan $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ filtresi x noktasına yakınsıyor ise bazen, $\mathcal{B}$ *filtre tabanı* x *noktasına yakınsar;* eğer x, bu $\mathcal{F}$'nin bir yığılma noktası ise x, $\mathcal{B}$ *filtre tabanının yığılma noktasıdır* denir.

Örnek 7.6. a) (X,τ) bir topolojik uzay; (x_n) X'de bir dizi, $\mathcal{F}$ bu dizi ile üretilen filtre ve $x\in X$ olsun. Bu durumda ,

x noktası, (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır $\Leftrightarrow$ x, $\mathcal{F}$'nin bir yığılma noktasıdır.

Çözüm. "$\Rightarrow$" Eğer x, $\mathcal{F}$'nin bir yığılma noktası değilse, yani $x \notin \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ ise

$$\exists\ F\in \mathcal{F} \text{ ö.k. } x\notin \overline{F} \quad \Rightarrow \quad \exists\ U\in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ ö.k. } U\cap F = \varnothing$$

sağlanır. $\mathcal{F}$, (x_n) dizisi ile üretilen filtre olduğundan, en az bir $k\in \mathbf{N}$ için, $B_k := \{ x_n \mid n \geq k \}\subset F$ dir. Buradan $U\cap B_k = \varnothing$, yani her $n \geq k$ için $x_n\notin U$ elde edilir. Şu halde x, (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olamaz.

"$\Leftarrow$" Tersine, eğer x, (x_n) dizisinin bir yığılma noktası değilse,

$$\exists\ U\in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ ve } \exists\ k\in \mathbf{N} \text{ ö.k. } \forall\ n \geq k \text{ için } x_n\notin U$$

yazılabilir. Buradan $U\cap B_k = \varnothing$, ve dolayısıyla $x \notin \overline{B_k}$ dır. Fakat $B_k\in \mathcal{F}$ olduğundan, buradan $x \notin \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ elde edilmiş olur. Yani bu durumda x, $\mathcal{F}$ 'nin bir yığılma noktası olamaz. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

b) R üzerindeki Fréchet filtresinin yığılma noktaları kümesi boştur. Çünkü eğer bir x noktası, bu filtrenin bir yığılma noktası olsaydı, x'in her komşuluğunun filtrenin her elemanını kesmesi gerekirdi. Oysa bu olanaksızdır.

c) $\{ (0,r) \mid r > 0 \}$, $\mathbf{R}$ üzerinde bir filtre tabanıdır. $\mathcal{F}=<\{ (0,r) \mid r > 0 \}>$ filtresi $(\mathbf{R},\tau_e)$'de 0 noktasına yakınsar. Gerçekten, 0'ın $\mathbf{R}$'deki her $(-\varepsilon, \varepsilon)$ komşuluğu için, $(0, \varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ ve $(0, \varepsilon)\in \mathcal{F}$ olduğu için $(-\varepsilon, \varepsilon)\in \mathcal{F}$ dır. Şu halde $\mathcal{U}_{\tau e}(0) \subset \mathcal{F}$, yani $\mathcal{F} \to 0$ dır.

Teorem 7.16. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. Bir $x\in X$ noktasının $\mathcal{F}$ 'nin bir yığılma noktası olabilmesi için gerek ve yeter koşul, X üzerinde $\mathcal{F}$ 'den daha ince olan ve x noktasına yakınsayan bir $\mathcal{G}$ filtresinin bulunmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" Eğer $x\in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ ise $\{U\cap F \mid U\in \mathcal{U}_\tau(x),\ F\in\mathcal{F}\}$ ailesi X üzerinde bir $\mathcal{G}$ filtresinin filtre tabanıdır. Bu $\mathcal{G}$ filtresi $\mathcal{F}$ 'den daha incedir ve $\mathcal{G}\to x$ sağlanır.
"$\Leftarrow$" Eğer $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}\to x$ ise her $F\in\mathcal{F}$ ve her $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ için $F, U\in\mathcal{G}$ olduğundan $U\cap F\neq\emptyset$, ve dolayısıyla $x\in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ dir. □

Şimdi de filtrelerin bir topolojik uzayda bir kümenin kapanışı ve herhangi iki topolojik uzay arasındaki bir fonksiyonun sürekliliği kavramının belirlenebilmesi için yeterli olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce bir tanım verelim:

Tanım 7.13. X ve Y iki küme, $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre ve $f: X\to Y$ bir fonksiyon ise $\{ f(F) \mid F\in\mathcal{F}\}$ altküme ailesi Y üzerinde bir filtre tabanıdır. Bu taban ile üretilen filtreyi $f(\mathcal{F})$ ile gösterelim. İşte bu

$$f(\mathcal{F}) := <\{ f(F) \mid F\in\mathcal{F} \}>$$

filtresine *$\mathcal{F}$'nin f altındaki resmi* veya kısaca *resim filtresi* denir.

Teorem 7.17. *(X,τ) ve (Y,τ^*) herhangi iki topolojik uzay, $A\subset X$ ve $f: X\to Y$ bir fonksiyon ise*

a) $x\in\overline{A}$ $\Leftrightarrow$ X üzerinde $A\in\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}\to x$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{F}$ filtresi vardır.

b) f fonksiyonu bir $x\in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ X üzerinde $\mathcal{F}\to x$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{F}$ filtresi için, $f(\mathcal{F})\to f(x)$ sağlanır.

Kanıt. a) Eğer $x\in\overline{A}$ ise $\{A\cap U \mid U\in\mathcal{U}_\tau(x)\}$ ailesi X üzerinde bir filtre tabanıdır.

$$\mathcal{F} = <\{A\cap U \mid U\in\mathcal{U}_\tau(x)\}>$$

filtresi için $A\in\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}\to x$ sağlanır.

Tersine olarak, eğer $A\in\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}\to x$ ise her $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ için $U\in\mathcal{F}$ olması gerektiğinden $U\cap A\neq\emptyset$, yani $x\in\overline{A}$ dir.

b) f, $x\in X$ noktasında sürekli ve $\mathcal{F}\to x$ olsun. f, x'de sürekli olduğundan her $V\in\mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$ için $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ vardır. $\mathcal{F}\to x$

olduğundan, buradan $U\in\mathcal{F}$ ve dolayısıyla $f(U)\in f(\mathcal{F})$ elde edilir. Şu halde $V\in f(\mathcal{F})$ dir. Böylece $f(\mathcal{F})\to f(x)$ elde edilmiş olur.

Tersine, $\mathcal{F}\to x$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{F}$ filtresi için $f(\mathcal{F})\to f(x)$ koşulu sağlansın. $\mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluk filtresi için de $\mathcal{U}_\tau(x)\to x$ sağlandığından $f(\mathcal{U}_\tau(x))\to f(x)$ olmalıdır. Bu ise her $V\in\mathcal{U}_{\tau^*}(f(x))$ için $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ 'in mevcut olduğunu ifade eder. Şu halde, f fonksiyonu bu $x\in X$ noktasında süreklidir. □

Teorem 7.18. $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *topolojik uzayların bir ailesi,* $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ *bunların çarpım uzayı ve* $\mathcal{F}$ *çarpım uzayında bir filtre ise*

$$\mathcal{F}\to x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \quad\Leftrightarrow\quad \textit{Her } \lambda\in\Lambda \textit{ için } \quad p_\lambda(\mathcal{F})\to x_\lambda$$

sağlanır. Burada p_λ *'lar izdüşüm fonksiyonlarını göstermektedir.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\mathcal{F}\to x$ ve her $\lambda\in\Lambda$ için p_λ sürekli olduğundan, Teorem 7.17 b)'ye göre $p_\lambda(\mathcal{F})\to p_\lambda(x)=x_\lambda$ dır.

"$\Leftarrow$" Her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda(\mathcal{F})\to x_\lambda$ olsun. Çarpım uzayında $\mathcal{F}\to x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ olduğunu göstermek istiyoruz. $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ noktasının çarpım uzayındaki bir komşuluk tabanı elemanı

$$U=\bigcap_{k=1}^{n}p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k}), \qquad (U_{\lambda_k}\in\mathcal{U}_{\tau_{\lambda_k}}(x_{\lambda_k}),\ k=1,2,\ \dots,n)$$

şeklindedir. Her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda(\mathcal{F})\to x_\lambda$ olduğundan, her $k=1,2,\dots,n$ için de $p_{\lambda_k}(\mathcal{F})\to x_{\lambda_k}$, ve dolayısıyla $U_{\lambda_k}\in p_{\lambda_k}(\mathcal{F})$ dir. Buradan

$$\exists\ F_k\in\mathcal{F},\ \text{ ö.k. } \quad p_{\lambda_k}(F_k)\subset U_{\lambda_k} \quad\Rightarrow\quad F_k\subset p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k}),\quad (k=1,2,\dots,n)$$

elde edilir. Diğer yandan, $F_k\in\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ bir filtre olduğundan

$$F:=\bigcap_{k=1}^{n}F_k\in\mathcal{F} \quad\Rightarrow\quad F\subset\bigcap_{k=1}^{n}p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k})=U$$

sağlanır. Böylece $U\in\mathcal{F}$ ve dolayısıyla $\mathcal{F}\to x$ elde edilmiş olur. □

Yukarıda görüldüğü gibi, ağ veya filtre yakınsaklığı kavramlarının her biri yardımıyla, herhangi bir topolojik uzayda bir kümenin kapanışı (bkz. Teorem 7.12 ve Teorem 7.17 a), dolayısıyla uzayın topolojisi aynı kolaylıkla belirlenebilmekte ve bir topolojik uzayda yakınsaklık teorisi arzu edildiği şekilde işlenebilmektedir. Bu durum, bu iki kavram arasında bir ilişkinin bulunması beklentisini ortaya koymaktadır. Beklenen bu ilişki aşağıda verilmiştir.

Tanım 7.14. a) X bir küme ve $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, X'de bir ağ olsun. Her $\lambda\in\Lambda$ için

$$B_\lambda := \{ x_\mu \mid \mu \geq \lambda \}$$

şeklinde tanımlanan kümelerin $\{ B_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$ ailesi X üzerinde bir filtre tabanıdır. Bu taban ile üretilen

$$\mathcal{F} := <\{ B_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}>$$

filtresine, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *ağı ile üretilen filtre* denir.

b) X bir küme ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre olsun.

$$\Lambda_{\mathcal{F}} := \{ (x, F) \mid x\in F,\ F\in \mathcal{F} \}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme,

$$(x_1, F_1) \preccurlyeq (x_2, F_2) \quad :\Leftrightarrow \quad F_2 \subset F_1$$

ile tanımlanan "$\preccurlyeq$" bağıntısı ile yönlendirilmiştir. Buna göre

$$P : \Lambda_{\mathcal{F}} \to X, \quad P((x, F)) := x$$

fonksiyonu ile X 'de bir ağ tanımlanır. Bu ağa, $\mathcal{F}$ *filtresi ile üretilen ağ* adı verilir.

Problemler

P. 1. (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir altküme ve (x_n) bütün terimleri A kümesinde olan bir dizi ise

$$x_n \xrightarrow{\tau} x \quad \Leftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{\tau_A} x$$

sağlandığını gösteriniz.

P. 2. X bir küme, (x_n) X'de bir dizi, ayrıca τ_1 ve τ_2 X üzerinde $\tau_1 \subset \tau_2$ koşulunu sağlayan iki topoloji olsunlar. Bu durumda, eğer $x_n \xrightarrow{\tau_2} x$ ise $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$ olduğunu gösteriniz.

P. 3. $a_n = (-1)^{n-1}.(2n-1)$ dizisini göz önüne alalım. Aşağıda verilen dizilerden her birinin bu dizinin bir altdizisi olup olmadığını belirleyiniz.

(i) $(b_n) = (1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \ldots)$

(ii) $(c_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots)$

(iii) $(d_n) = (-3, -7, -11, -15, -19, -23, \ldots)$

P. 4. (X,τ) bir topolojik uzay ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer $\mathcal{B}(x)$, $x \in X$ noktasının bir komşuluk tabanı ise

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, V \in \mathcal{B}(x) \text{ için } \exists\, n_o \in \mathbf{N} \text{ ö.k. } \forall\, n \geq n_o \text{ için } x_n \in V$$

sağlanır. Gösteriniz.

P. 5. $\mathbf{R}$ üzerinde bir tabanı $\mathcal{B} = \{\, (a, b] \mid a < b \,;\, a, b \in \mathbf{R} \,\}$ ile verilen topolojiye göre, aşağıda verilen dizilerin $0 \in \mathbf{R}$ noktasına yakınsayıp yakınsamadıklarını belirleyiniz. Daha sonra aynı problemi, bir tabanı $\mathcal{B} = \{\, [a, b) \mid a < b \,;\, a, b \in \mathbf{R} \,\}$ ile verilen topoloji için araştırınız.

a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, b) $x_n = (-1)^n.\dfrac{1}{n}$

P. 6. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ dizisi $\mathbf{R}$ üzerindeki τ_{BSO} topolojisine göre $0 \in \mathbf{R}$ noktasına yakınsar mı? Neden?

P. 7. Örnek 7.3 a) ve b)'de verilen bağıntıların birer yönlendirme bağıntısı olduğunu gösteriniz.

P. 8. (X,τ) bir topolojik uzay ise

a) $G \subset X$ açıktır $\Leftrightarrow$ Her $x \in G$ ve $x_\lambda \to x$ koşulunu sağlayan her $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için

$$\exists\ \lambda_o \in \Lambda \ \text{ö.k.}\ \ \forall\ \lambda \geq \lambda_o \ \text{için}\ \ x_\lambda \in G$$

sağlanır.

b) $F \subset X$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset F$ ve $x_\lambda \to x$ koşulunu sağlayan her $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $x \in F$ dir.

P. 9. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\prod\limits_{\nu\in I} X_\nu$ çarpım uzayında bir ağ ve $x \in \prod\limits_{\nu\in I} X_\nu$ ise

$$x_\lambda \to x \ \ \Leftrightarrow\ \ \text{Her } \nu \in I \text{ için } \ p_\nu(x_\lambda) \to p_\nu(x) \in X_\nu$$

sağlanır. Gösteriniz.

P. 10. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ X'de bir ultraağ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$'nın de Y'de bir ultraağ olduğunu gösteriniz.

P. 11. (X,τ) bir topolojik uzay, $\varnothing \neq A \subset X$ ve $\mathcal{F} = \{ F \mid F \subset X \text{ ve } A \subset F \}$, A ile üretilen filtre ise

$$\overline{A} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$$

olduğunu gösteriniz.

P. 12. $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun. Eğer $A \notin \mathcal{F}$ ve $X-A \notin \mathcal{F}$ ise

$$\mathcal{G} := \{ M \mid M \subset X \text{ ve } A \cup M \in \mathcal{F} \}$$

ailesi X üzerinde $\mathcal{F}$'den daha ince olan ve X – A'yı içeren bir filtredir. Gösteriniz.

P. 13. $\mathcal{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre ve $f : X \to Y$ örten ise $f(\mathcal{F})$ resim filtresinin Y üzerinde bir ultrafiltre olduğunu gösteriniz. (Y. g.: Teorem 7.15 kullanılabilir).

P. 14. Bir topolojik uzaydaki her ultrafiltre kendisinin her yığılma noktasına yakınsar. Gösteriniz.

P. 15. $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun.

a) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre ise

$$\mathcal{F} \cap A := \{ F \cap A \mid F \in \mathcal{F} \}, \text{ A üzerinde bir filtredir}$$

$$\Leftrightarrow \text{ Her } F \in \mathcal{F} \text{ için } F \cap A \neq \varnothing \text{ dır.}$$

Gösteriniz. Bu $\mathcal{F} \cap A$ filtresine $\mathcal{F}$'nin A üzerindeki *izdüşüm filtresi* denir.

b) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre ise

$$\mathcal{F} \cap A \text{, A üzerinde bir filtredir } \Leftrightarrow A \in \mathcal{F} \text{ dir.}$$

Bu durumda, $\mathcal{F} \cap A$, A üzerinde bir ultrafiltredir. Gösteriniz.

(Y.g.: $\mathcal{G} = \langle \mathcal{F} \cap A \rangle$, X üzerinde $\mathcal{F}$'den daha ince olan ve A'yi içeren bir filtredir. Eğer $\mathcal{F}$ ultrafiltre ise $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ dir).

BÖLÜM 8

AYIRMA AKSİYOMLARI

Bir X kümesi üzerinde $\tau_t = \{X, \emptyset\}$ ilkel topoloji ile $\tau_D=\mathcal{P}(X)$ ayrık topoloji arasında farklı incelikte birçok topoloji tanımlanabilir. Sonlu kümeler için bile, bir kümenin eleman sayısı ile, o küme üzerinde tanımlanabilecek olan topolojilerin sayısı arasındaki ilişki bilinmemekle birlikte, kümenin eleman sayısına bağlı olarak, tanımlanabilecek topolojilerin sayısının üstel biçimde arttığı bilinmektedir. Diğer yandan, bir küme üzerinde tanımlı topolojiler inceldikçe bazı topolojik kavramlar kazanılırken mevcut bazıları da kaybedilir. Örnek olarak, süreklilik ve yakınsaklık kavramlarının topolojilerin incelmesi ile nasıl değiştiğini düşünelim. X üzerindeki topolojiler inceldikçe, X üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sayısı artarken, yakınsak dizilerin sayısı azalır. Örneğin ayrık topoloji ile göz önüne alındığında, X üzerinde tanımlı her fonksiyon sürekli iken sadece (belirli bir terimden sonra) sabit olan diziler yakınsaktır.

Topolojik uzayları açık kümelere göre sahip oldukları ortak özellikler yönünden sınıflara ayırarak incelemek birçok nedenle daha kolay ve amaca daha uygundur. Bu bölümde, topolojik uzayların “ayırma aksiyomları” adı verilen ve Almanca bu anlama gelen “Trennungsaxiome” sözcüğünün baş harfi kullanılarak, sırasıyla T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 ile gösterilen başlıca sınıflandırılması incelenecektir.

A. T_0-, T_1- ve T_2-(Hausdorff) Uzayları

Tanım 8.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için bir $G \subset X$ açık kümesi,

$$(x \in G,\quad y \notin G) \quad \text{veya} \quad (x \notin G,\quad y \in G)$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına bir *T_0-uzayı* (veya *Kolmogorof uzayı*) denir.

b) Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme,

$$(x \in G,\quad y \notin G) \quad \text{ve} \quad (x \notin H,\quad y \in H)$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına bir *T_1-uzayı* (veya *Fréchet uzayı*) denir.

c) Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme,

$$x \in G,\quad y \in H \quad \text{ve} \quad G \cap H = \varnothing$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına bir *T_2-uzayı* (veya *Hausdorff uzayı*) denir.

Uyarı 8.1. a) Tanımları karşılaştırılınca kolayca görüleceği gibi, her T_2-uzayı bir T_1-uzayı ve her T_1-uzayı bir T_0-uzayıdır. Yani,

$$T_2\text{-uzayı} \;\Rightarrow\; T_1\text{-uzayı} \;\Rightarrow\; T_0\text{-uzayı}$$

sağlanır. Fakat buradaki oklar genel olarak tersine çevrilemez. Örneğin $(\mathbf{R},\tau_{\text{sağ}})$ bir T_0-uzayıdır, fakat bir T_1-uzayı değildir. Her T_1-uzayının da bir

T_2-uzayı olması gerekmez. Örneğin, sonsuz elemanlı bir X kümesi üzerindeki

$$\tau_{BSO} = \{ G \mid G \subset X, \; X - G \text{ sonlu} \} \cup \{\varnothing\}$$

topolojisini göz önüne alırsak, (X,τ_{BSO}) bir T_1-uzayıdır. Gerçekten, herhangi iki $x, y \in X$, $x \neq y$ için, $X-\{x\}$ ve $X-\{y\}$ kümeleri bu uzayda açıktır. Ayrıca bunlardan birincisi y noktasını içerir x'i içermez, diğeri de x'i içerip y'yi içermez. Fakat (X,τ_{BSO}) bir T_2-uzayı değildir. Çünkü eğer bu uzayda, G ve H gibi iki açık küme, $x\in G$, $y\in H$ ve $G\cap H = \varnothing$ koşulunu sağlayacak biçimde bulunabilseydi

$$X = X - (G\cap H) = (X - G) \cup (X - H)$$

yazılabileceğinden sonlu iki kümenin birleşimi olarak X'in de sonlu olması gerekirdi.

b) Hiçbir T_i $(i = 0,1,2)$ aksiyomunu sağlamayan topolojik uzaylar da vardır. Örneğin, $|X| \geq 2$ olmak üzere (X,τ_t) ilkel topolojik uzayı, ya da, $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde verilen

$$\tau = \{ X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\} \}$$

topolojisi ile (X,τ) topolojik uzayı birer T_0-uzayı bile değildir. Dolayısıyla bu uzaylar diğer T_i $(i = 1,2)$ aksiyomlarını da sağlamaz.

Teorem 8.1. *(X,τ) bir T_0-uzayıdır $\Leftrightarrow$ Her $x, y\in X$, $x \neq y$ için* $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ *sağlanır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bir T_0-uzayı, $x, y\in X$ ve $x\neq y$ olsun. Buradan

$$\exists\, G\in \tau \quad \text{ö.k.} \quad (\, x\in G, \;\; y\notin G \,) \quad \text{veya} \quad (\, x\notin G, \;\; y\in G \,)$$

yazılabilir. Genelliği bozmayacağı için, $x\in G$ ve $y\notin G$ olacak biçimde bir G açık kümesinin bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda G, x'in bir komşuluğu olup, $G\cap\{y\}=\varnothing$ olduğu görülür. Şu halde $x\notin \overline{\{y\}}$ ve bu nedenle de $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ dir.

"$\Leftarrow$" Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ olsun. Genelliği bozmayacağı için, bir $z \in X$ elemanının, $z \in \overline{\{x\}}$ fakat $z \notin \overline{\{y\}}$ olacak şekilde bulunduğunu kabul edelim.Buradan

$$\exists\, U \in \mathcal{U}_\tau(z) \quad \text{açık}, \quad \text{ö.k.} \quad U \cap \{y\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad y \notin U$$

elde edilir. Fakat $z \in \overline{\{x\}}$ olduğundan $U \cap \{x\} \neq \emptyset$, yani $x \in U$ dur. Böylece x'i içerip y'yi içermeyen bir U açık kümesi bulunmuş olur. Şu halde (X,τ) bir T_0-uzayıdır. □

Teorem 8.2. *Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktirler:*

a) (X,τ) bir T_1-uzayıdır.
b) Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek noktalı kümesi kapalıdır.
c) Her $A \subset X$ için $A = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_\tau(A)} U$ dır.

Burada $\mathcal{U}_\tau(A)$, A kümesinin komşuluklarının ailesi, yani A'yı içeren açık kümeler ve onların bütün üst kümelerinin ailesini göstermektedir.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b): (X,τ) bir T_1-uzayı ve $x \in X$ olsun. $X - \{x\}$ kümesinin açık olduğunu göstereceğiz. Eğer $X - \{x\} = \emptyset$ ise $\{x\} = X$ kapalıdır. $X - \{x\} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda her $y \in X - \{x\}$ için $x \neq y$ dir. (X,τ) bir T_1-uzayı olduğundan

$$\exists\, H \in \tau \quad \text{ö.k.} \quad y \in H, \quad x \notin H$$

sağlanır. Buradan $\{x\} \cap H = \emptyset$, yani $y \in H \subset X - \{x\}$ elde edilir. Şu halde y, $X - \{x\}$ kümesinin bir iç noktası, dolayısıyla $X - \{x\}$ açık ve bu nedenle de $\{x\}$ kapalıdır.

b) $\Rightarrow$ c): $A \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}_\tau(A)} U$ olduğu aşikardır. Şimdi de bir $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_\tau(A)} U$ için $x \notin A$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda b)'ye göre $\{x\}$ kapalı, dolayısıyla $X - \{x\}$ açık ve $A \subset X - \{x\}$ olduğundan, $X - \{x\}$, A'nın bir komşuluğu olur. Kabulümüze göre $x \in X - \{x\}$ olmalıdır. Bu çelişki kabulümüzün yanlış olduğunu gösterir. Şu halde $\bigcap_{U \in \mathcal{U}_\tau(A)} U \subset A$ dır. Böylece A'nın, kendisinin bütün komşuluklarının arakesitine eşit olduğu gösterilmiş olur.

c) $\Rightarrow$ a): (X,τ) T_1-uzayı olmasın. Bu durumda X'de öyle farklı iki x, y noktaları vardır ki, bunlardan birini içeren her açık küme, diğerini de içerir. Eğer x noktasını içeren her açık küme, y noktasını da içeriyorsa, c)'ye göre $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_\tau(x)} U$ olduğundan, $y \in \{x\}$; diğer durumda $x \in \{y\}$ olmalıdır. Bu ise $x \neq y$ olması ile çelişir. □

Teorem 8.3. *Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktirler:*

a) (X,τ) bir Hausdorff uzayıdır.
b) Her $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap\{\, U \mid U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ ve U kapalı $\}$ dır.
c) (X,τ) 'deki yakınsak her filtrenin bir tek limit noktası vardır
d) $\Delta(X) = \{\, (x,x) \mid x \in X \,\}$ kümesi $X \times X$ çarpım uzayında kapalıdır.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a) ve a) $\Leftrightarrow$ d) biçiminde yapılacaktır.
a) $\Rightarrow$ b): $x \in X$ olsun. x'in bütün kapalı komşuluklarının arakesiti içinde x'den farklı bir y elemanının daha bulunduğunu kabul edelim. a)'dan dolayı

$$\exists\, G,\ H \in \tau \quad \text{ö.k.} \quad x \in G,\quad y \in H \quad \text{ve} \quad G \cap H = \varnothing$$

yazılabilir. Buradan $x \in G \subset X - H$ elde edilir. Şu halde $X-H$, x'in kapalı bir komşuluğudur. Kabulümüze göre $y \in X-H$ olmalıdır. Fakat $y \in H$ olduğundan bu olanaksızdır. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani, x'in bütün kapalı komşuluklarının arakesitinde x'den başka hiçbir eleman yoktur. Şu halde bu arakesit $\{x\}$ kümesine eşittir.
b) $\Rightarrow$ c): X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ filtresi için $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{F} \to y$ ve $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. b)'ye göre $\{x\} = \bigcap\{\, U \mid U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ ve U kapalı $\}$ şeklinde yazılabilir. $x \neq y$ olduğundan $y \notin \{x\}$ dir. O halde

$$\exists\, U \in \mathcal{U}_\tau(x),\ U \text{ kapalı}, \quad \text{ö.k.} \quad y \notin U$$

yazılabilir. Buradan, $y \in X-U$ ve $X-U$ açıktır. Şu halde $X-U \in \mathcal{U}_\tau(y)$ dir. Fakat $\mathcal{F} \to y$ olduğundan, $X-U \in \mathcal{F}$ olmalıdır. Diğer yandan, $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ ve $\mathcal{F} \to x$ olduğundan $U \in \mathcal{F}$ olmalıdır. Buradan $U \cap (X-U) = \varnothing \in \mathcal{F}$ olması gerekir ki bu $\mathcal{F}$'nin bir filtre olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır, yani $x = y$ olmak zorundadır.

c) $\Rightarrow$ a): (X,τ)'nun Hausdorff uzayı olmadığını kabul edelim. Yani a) sağlanmasın. Buradan,

$$\exists\ x, y\in X\,,\ x \neq y \ \text{ ö.k. } \forall\, G, H\in\tau\ :\ x\in G \ \text{ ve } \ y\in H \ \text{ için } \ G\cap H\neq\varnothing$$

yazılabilir. Şu halde her $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ve her $V\in\mathcal{U}_\tau(y)$ için $U\cap V\neq\varnothing$ dır. Bu durumda,

$$\mathcal{F} := <\{\ U\cap V \mid U\in\mathcal{U}_\tau(x) \ \text{ ve } \ V\in\mathcal{U}_\tau(y)\ \}>$$

filtresi için $\mathcal{F}\to x$ ve $\mathcal{F}\to y$ olduğu görülür. O halde c) sağlanmaz. Bu nedenle c) $\Rightarrow$ a) olmak zorundadır.

Şimdi de, a) $\Leftrightarrow$ d) olduğunu gösterelim:

a) $\Rightarrow$ d): (X,τ) bir Hausdorff uzayı ise $(X\times X)-\Delta(X)$'in $(X\times X,\ \tau\times\tau)$ çarpım uzayında açık olduğunu göstereceğiz. Bunun için $(x_1, x_2)\notin\Delta(X)$ ise $x_1\neq x_2$ olduğundan,

$$\exists\ G, H\in\tau \quad \text{ö.k.} \quad x_1\in G,\ x_2\in H \ \text{ ve } \ G\cap H=\varnothing$$

sağlanır. Buradan $(x_1, x_2)\in G\times H$ ve $(G\times H)\cap\Delta(X)=\varnothing$ olduğu görülür. Şu halde $(x_1, x_2)\in G\times H\subset (X\times X)-\Delta(X)$, yani $(X\times X)-\Delta(X)$ açık ve dolayısıyla $\Delta(X)$ kapalıdır.

d) $\Rightarrow$ a): $\Delta(X)$, $(X\times X,\ \tau\times\tau)$ çarpım uzayında kapalı olsun. $x_1, x_2\in X$ ve $x_1\neq x_2$ ise $(x_1, x_2)\notin\Delta(X)$, yani $(x_1, x_2)\in(X\times X)-\Delta(X)$ dir. $(X\times X)-\Delta(X)$ açık olduğundan

$$\exists\ O_1, O_2\in\tau \quad \text{ö.k.} \quad (x_1, x_2)\in O_1\times O_2\subset (X\times X)-\Delta(X)$$

yazılabilir. Buradan $(O_1\times O_2)\cap\Delta(X)=\varnothing$ elde edilir. Şu halde $O_1\cap O_2=\varnothing$ olur. Ayrıca, $x_1\in O_1$, $x_2\in O_2$ ve O_1 ve O_2 açık olduğundan (X,τ) bir Hausdorff uzayıdır. □

Uyarı 8.2. Yukarıdaki teoremde görüldüğü gibi, bir topolojik uzaydaki yakınsak her filtrenin bir tek limitinin bulunması, bu topolojik uzayın bir Hausdorff uzayı olmasına denktir. Ancak bu ifadede "filtre" yerine "dizi" yazmakla elde edilen yeni ifade doğru değildir. Örneğin, $(\mathbf{R},\tau_{BSA})$ topolojik uzayında yakınsak her dizinin bir tek limiti vardır. Çünkü bilindiği gibi, bu uzaydaki yakınsak her dizi, belirli bir terimden itibaren sabittir (bkz. Örnek

7.2 b)). Fakat Uyarı 8.1 a)'daki düşünce ile kolayca görüleceği gibi bu uzay bir Hausdorff uzayı değildir. Buna karşılık Hausdorff uzaylarında, dizilerle ilgili aşağıdaki teoremde verilen ve analizde sıkça kullanılan ifade kolayca gösterilebilir.

Teorem 8.4. *Bir Hausdorff uzayında yakınsak her dizinin bir tek limiti vardır.*

Kanıt. (X,τ) bir Hausdorff uzayı ve $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$, X'de bir dizi olsun. $x_n \to x$, $x_n \to y$ ve $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. Uzay Hausdorff olduğundan

$$\exists \; G, H \in \tau \quad \text{ö.k.} \quad x \in G, \; y \in H \; \text{ ve } \; G \cap H = \varnothing$$

yazılabilir. $x_n \to x$ ve G, x'in bir komşuluğu olduğundan

$$\exists \; n_1 \in \mathbf{N} \quad \text{ö.k.} \quad \forall \; n \geq n_1 \; \text{ için } \; x_n \in G, \tag{8.1}$$

ve $x_n \to y$ ve H, y'nin bir komşuluğu olduğundan da

$$\exists \; n_2 \in \mathbf{N} \quad \text{ö.k.} \quad \forall \; n \geq n_2 \; \text{ için } \; x_n \in H \tag{8.2}$$

sağlanırlar. Eğer $n^* := \text{maks}\{n_1, n_2\}$ olarak seçilirse (8.1) ve (8.2)'den

$$\forall \; n \geq n^* \; \text{ için } \; x_n \in G \text{ ve } x_n \in H \quad \Rightarrow \quad G \cap H \neq \varnothing$$

elde edilir. Halbuki bu iki kümenin arakesitleri boştur. Bu çelişki kabulümüzün yanlış olduğunu gösterir. O halde $x = y$ olmak zorundadır. □

Uyarı 8.3. Uyarı 8.2'de görüldüğü gibi Teorem 8.4'ün tersi genel olarak doğru değildir, ancak birinci sayılabilir uzaylarda doğrudur. Gerçekten gösterilebilir ki, eğer (X,τ) bir A_1-uzayı ise ve bu uzaydaki yakınsak her dizinin bir tek limiti varsa, bu uzay bir Hausdorff uzayıdır (neden?). (Bkz. P.15. Y.g.: Aksini kabul ediniz).

Teorem 8.5. *$i = 0,1,2$ için,*

a) Bir T_i-uzayının her altuzayı da yine bir T_i-uzayıdır.
b) (X,τ) bir T_i-uzayı ve $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ bire-bir, örten ve açık ise (Y,τ^*) 'da bir T_i-uzayıdır.

c) Boştan farklı bir çarpım uzayının bir T_i-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, her bir çarpan uzayının T_i-uzayı olmasıdır.
d) T_i-uzaylarının bölüm uzaylarının da yine T_i-uzayı olmaları gerekmez.

Kanıt. a) ve b)'nin kanıtları alıştırma olarak bırakılmıştır. Bkz. P.1 ve P.2.

c) Kanıt $i = 2$ için yapılacaktır. $i = 0$ ve $i = 1$ için benzer düşünce ile yapılır.

$(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ T_2-uzaylarının bir ailesi ve $x, y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $x \neq y$ olsun. Koordinatları ile $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ise en az bir $\mu\in\Lambda$ için $x_\mu \neq y_\mu$ dır. $x_\mu, y_\mu \in X_\mu$ ve (X_μ,τ_μ) bir T_2-uzayı olduğundan

$$\exists\, G_\mu , H_\mu \in \tau_\mu \quad \text{ö.k.} \quad x_\mu \in G_\mu \;,\; y_\mu \in H_\mu \quad \text{ve} \quad G_\mu \cap H_\mu = \varnothing$$

yazılabilir. p_μ izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan $p_\mu^{-1}(G_\mu)$ ve $p_\mu^{-1}(H_\mu)$ çarpım uzayında sırasıyla x ve y'yi içeren açık kümelerdir. Ayrıca

$$p_\mu^{-1}(G_\mu) \cap p_\mu^{-1}(H_\mu) = p_\mu^{-1}(G_\mu \cap H_\mu) = \varnothing$$

sağlanır. Şu halde çarpım uzayı da bir Hausdorff uzayıdır.

İddianın ikinci yanını göstermek için, önce $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ sabit bir nokta olmak üzere, her $\lambda\in\Lambda$ için

$$g_\lambda :\; X_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;,\quad x_\lambda \to x = (x_\mu)_{\mu\in\Lambda} = \begin{cases} x_\mu = x_\lambda \;, & \mu = \lambda \\ x_\mu = a_\mu \;, & \mu \neq \lambda \end{cases}$$

dönüşümü ile X_λ'nın çarpım uzayı içine gömülebildiği gösterilmektedir (bkz. Bölüm 6, P.17). Bu nedenle X_λ ile $g_\lambda(X_\lambda)$ topolojik olarak denk olduğundan, a) şıkkı kullanılarak sonuca gidilebilir.

d) **R** üzerinde, Örnek 6.3'de tanımlanan aşağıdaki denklik bağıntısını göz önüne alalım: Her x, y ∈ **R** için,

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; (\, x \le 0 \text{ ve } y \le 0\,) \text{ veya } (\, x > 0 \text{ ve } y > 0\,).$$

(i) Eğer $(\mathbf{R},\tau_{BSO})$ topolojik uzayı göz önüne alınırsa, bu uzay bir T_1-uzayı ve dolayısıyla bir T_0-uzayı olmasına rağmen, $\mathbf{R}/\sim = \{[0], [1]\}$ bölüm kümesi üzerindeki bölüm topolojisi $\tau_q = \{\varnothing, \mathbf{R}/\sim\}$ ilkel topoloji olup, $(\mathbf{R}/\sim, \tau_q)$ topolojik uzayı bir T_0-uzayı değildir.

(ii) Eğer $(\mathbf{R},\tau_e)$ doğal topolojik uzayı göz önüne alınırsa, bu uzay hem T_2-uzayı ve dolayısıyla hem de bir T_1-uzayıdır. Ancak Örnek 6.3'de elde edilen $\tau_q^* = \{\, \mathbf{R}/\sim , \varnothing , \{[1]\}\}$ bölüm topolojisi ile $(\mathbf{R}/\sim,\tau_q^*)$ bölüm uzayı ne bir T_2-uzayı ve ne de bir T_1-uzayıdır. □

Teorem 8.6. *(X,τ) bir topolojik uzay, (Y,τ^*) bir Hausdorff uzayı ve $f: X \to Y$ sürekli ise*

$$A = \{\, (x_1,x_2) \mid f(x_1) = f(x_2) \,\}$$

kümesi $X \times X$ çarpım uzayında kapalıdır.

Kanıt. $(X\times X)-A$ kümesinin açık olduğunu göstereceğiz. Eğer $(x_1, x_2) \notin A$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. (Y,τ^*) Hausdorff olduğundan

$$\exists\; G, H \in \tau^* \quad \text{ö.k.} \quad f(x_1) \in G, \quad f(x_2) \in H \quad \text{ve} \quad G \cap H = \varnothing$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan $f^{-1}(G)$ ve $f^{-1}(H)$ sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarını içeren birer açık kümedir. Şu halde $f^{-1}(G) \times f^{-1}(H)$, (x_1, x_2)'nin çarpım uzayında bir komşuluğudur ve $G \cap H = \varnothing$ olduğundan

$$(\, f^{-1}(G) \times f^{-1}(H)\,) \cap A = \varnothing$$

sağlanır. Bu nedenle (x_1, x_2), $(X\times X)-A$'nın bir iç noktasıdır. O halde $(X\times X)-A$ açık, dolayısıyla A kümesi kapalıdır. □

Teorem 8.7. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ açık ve örten bir fonksiyon ve*

$$A = \{\, (x_1,x_2) \mid f(x_1) = f(x_2) \,\}$$

kümesi $X \times X$ çarpım uzayında kapalı ise (Y,τ^*) bir Hausdorff uzayıdır.

Kanıt. $f(x_1)$, $f(x_2) \in Y$ ve $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise $(x_1, x_2) \notin A$ dır. A kapalı olduğundan $(X\times X)-A$ kümesi çarpım uzayında açıktır. O halde

$$\exists\ G, H \in \tau \quad \text{ö.k.} \quad x_1 \in G, \quad x_2 \in H \quad \text{ve} \quad (G\times H) \cap A = \varnothing$$

yazılabilir. f açık olduğundan, $f(G)$ ve $f(H)$ sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarını içeren açık kümelerdir. Ayrıca $(G\times H) \cap A = \varnothing$ olduğundan $f(G) \cap f(H) = \varnothing$ sağlanır. Şu halde (Y, τ^*) bir Hausdorff uzayıdır. □

Teorem 8.8. *(X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli açık ve örten bir fonksiyon ise*

(Y,τ^*) bir Hausdorff uzayıdır $\Leftrightarrow$ *$A = \{ (x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2) \}$ kümesi $X\times X$ çarpım uzayında kapalıdır.*

Kanıt. Teorem 8.6 ve Teorem 8.7'nin birleştirilmesi ile elde edilir. □

Teorem 8.9. *(X,τ) bir topolojik uzay, (Y,τ^*) bir Hausdorff uzayı ve $f, g : X \to Y$ fonksiyonları sürekli iseler,*

$$A = \{ x\in X \mid f(x) = g(x) \}$$

kümesi (X,τ)'da kapalıdır.

Kanıt. $x\in X-A$ ise $f(x) \neq g(x)$ dir. (Y,τ^*) bir Hausdorff uzayı olduğundan

$$\exists\ U, V \in \tau^* \quad \text{ö.k.} \quad f(x) \in U, \quad g(x) \in V \quad \text{ve} \quad U\cap V = \varnothing$$

yazılabilir. f ve g sürekli ve $U, V \in \tau^*$ olduğundan $f^{-1}(U)$ ve $g^{-1}(V)$ x 'in birer açık komşuluğudur. O halde $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ de x'in bir açık komşuluğudur ve $U\cap V = \varnothing$ olduğundan

$$(f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) \cap A = \varnothing$$

olduğu görülür. Şu halde $X-A$ açık ve dolayısıyla A kapalıdır.

2. Yol: Bu teoremin, dolaylı bir kanıtı da aşağıdaki gibi verilebilir:

$$F : X \to Y\times Y, \quad F(x) := (f(x), g(x)) \qquad (x\in X)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. p_1 ve p_2 izdüşüm fonksiyonları olmak üzere $p_1 o F = f$ ve $p_2 o F = g$ bileşke fonksiyonları sürekli olduklarından Teorem 6.6'ya göre F fonksiyonu da süreklidir. Diğer yandan, kolayca görüleceği gibi

$$F^{-1}(\Delta(Y)) = \{ x\in X \mid F(x)\in \Delta(Y) \} = \{ x\in X \mid f(x) = g(x) \} = A$$

dır. Teorem 8.3'e göre $\Delta(Y)$, $Y\times Y$'de kapalı olduğundan, A kümesi de kapalıdır. □

Teorem 8.10. *(X,τ) bir topolojik uzay, (Y,τ^*) bir Hausdorff uzayı ve $f, g : X \to Y$ fonksiyonları sürekli olsunlar. Eğer f ve g fonksiyonları X 'in yoğun bir $D\subset X$ altkümesi üzerinde eşit iseler, X üzerinde de $f = g$ sağlanır.*

Kanıt. Bir önceki Teoreme benzer düşünce tarzı ile doğrudan bir kanıtı verilebileceği gibi (bkz. P.8), bir önceki teoremin sonucu olarak da aşağıdaki gibi elde edilebilir:

f ve g fonksiyonları X'in yoğun bir $D \subset X$ altkümesi üzerinde eşit iseler, bu D kümesi, Teorem 8.9'da verilen $A=\{x\in X \mid f(x) = g(x)\}$ kümesinin bir altkümesidir. D yoğun ve Teorem 8.9'a göre A kümesi kapalı olduğundan,

$$X = \overline{D} \subset \overline{A} = A \quad \Rightarrow \quad X = A$$

elde edilir. Şu halde her $x\in X$ için $f(x) = g(x)$, yani X üzerinde $f = g$ olmalıdır.□

Sonuç 8.1. a) ***R*** *üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli iki fonksiyonun bütün rasyonel sayılarda aldığı değerler eşit iseler, bu iki fonksiyon eşittir.*

b) Bir $f : (X,\tau) \to (\mathbf{R}^n,\tau^n_e)$ *sürekli fonksiyonunun sıfır yerleri kümesi*

$$S_f := \{ x\in X \mid f(x) = 0 \}$$

kapalıdır.

Kanıt. a) Teorem 8.10'nun apaçık bir sonucudur.

b) Bu iddia, f 'nin sürekliliği, $\{0\}$ tek noktalı kümesinin $(\mathbf{R}^n,\tau^n_e)$'de kapalılığı ve $S_f = f^{-1}(\{0\})$ olduğu göz önüne alınarak hemen görüleceği gibi, $g : (X,\tau) \to (\mathbf{R}^n,\tau^n_e)$, $g(x) = 0$ $(0\in \mathbf{R}^n)$ sabit fonksiyonunu göz önüne alırsak, Teorem 8.9'a göre de S_f 'nin kapalı olduğunu söyleyebiliriz (nasıl?).□

Teorem 8.11. *(X,τ) bir topolojik uzay, (Y,τ^*) bir Hausdorff uzayı ve $f : X \to Y$ sürekli ise "f'nin grafiği"*

$$G_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$

kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında kapalıdır.

Kanıt. $(x, y) \notin G_f$ ise $f(x) \neq y$ ve (Y,τ^*) Hausdorff olduğundan

$$\exists \; U, V \in \tau^*, \quad \text{ö.k.} \quad f(x) \in U, \quad y \in V \quad \text{ve} \quad U \cap V = \varnothing$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, x'in bir açık komşuluğudur. O halde $f^{-1}(U) \times V$, $X \times Y$ çarpım uzayında (x, y)'nin bir açık komşuluğudur. Ve ayrıca $U \cap V = \varnothing$ olduğundan $(f^{-1}(U) \times V) \cap G_f = \varnothing$ olduğu görülür. Şu halde G_f'nin bütünleyeni açık ve dolayısıyla G_f kapalıdır.

2. Yol: Bu teoremin de dolaylı bir kanıtı aşağıdaki gibi verilebilir:

p_1 ve p_2, $X \times Y$'den sırasıyla X ve Y üzerine izdüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$p_2 : X \times Y \to Y \quad \text{ve} \quad f o p_1 : X \times Y \to Y$$

fonksiyonları süreklidir. Teorem 8.9'a göre

$$\{ (x,y) \mid (x,y) \in X \times Y, \; p_2((x,y)) = (f o p_1)((x,y)) \}$$

$$= \{ (x,y) \mid (x,y) \in X \times Y, \; y = f(x) \} = G_f$$

kümesi, yani G_f kapalıdır.□

B. Regüler-, Tam regüler- ve Normal Uzaylar

Tanım 8.2. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Eğer her kapalı $A \subset X$ ve $x \notin A$ için G ve H açık altkümeleri,

$$x \in G, \quad A \subset H \quad \text{ve} \quad G \cap H = \varnothing$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına bir *T_3-uzayı* denir.

Hem T_1- ve hem de T_3-aksiyomunu sağlayan bir topolojik uzaya *regüler uzay* adı verilir.

b) Eğer her kapalı $A \subset X$ ve $x \notin A$ için bir $f : X \to [0, 1]$ sürekli fonksiyonu, $f(x) = 0$ ve $f(A) \subset \{1\}$ sağlanacak biçimde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına bir *$T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı* denir.

Hem T_1- ve hem de $T_{3\frac{1}{2}}$-aksiyomunu sağlayan bir topolojik uzaya *tam regüler uzay* adı verilir.

c) Eğer her kapalı ve ayrık $A, B \subset X$ altkümeleri için, G ve H açık altkümeleri,

$$A \subset G, \quad B \subset H \quad \text{ve} \quad G \cap H = \varnothing$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına bir *T_4-uzayı* denir.

Hem T_1- ve hem de T_4- aksiyomunu sağlayan bir topolojik uzaya da *normal uzay* adı verilir.

Uyarı 8.4. a) Her T_3-uzayının bir T_2-uzayı ya da bir T_1-uzayı olması gerekmez. Örneğin, X en az iki elemanlı küme olmak üzere (X,τ_t) ilkel uzayı bir T_3-uzayıdır, fakat bu uzay ne bir T_2-uzayı ve ne de bir T_1-uzayıdır.

b) Her T_4-uzayının bir T_3-uzayı olması gerekmez. Örneğin, $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{ X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisini göz önüne alalım. Bu şekilde elde edilen (X,τ) topolojik uzayındaki kapalı kümeler, $\varnothing$, X, $\{b, c, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d\}$ dir. Görüldüğü gibi, bu uzaydaki iki kapalı küme, ancak ve ancak kümelerden birinin boş olması halinde, ayrıktır. Bu nedenle, bu kümeleri içeren ayrık açık kümeler olarak, $\varnothing$ ve X kümeleri alınabilir. O halde (X,τ) bir T_4-uzayıdır. Fakat bu uzay bir T_3-uzayı değildir, çünkü örneğin $\{d\}$ kapalı ve $a \notin \{d\}$ olmasına rağmen, bu uzayda, a noktası ile $\{d\}$ kapalı kümesini içeren ayrık açık kümeler mevcut değildir. a) ve b) şıkları birlikte genel olarak,

$$T_4\text{-uzayı} \not\Rightarrow T_3\text{-uzayı} \not\Rightarrow T_2\text{-uzayı}$$

olduğunu ifade eder.

c) Her $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı bir T_3-uzayıdır. Gerçekten, eğer (X,τ) bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı, $A \subset X$ kapalı bir küme ve $x \notin A$ ise $f(x) = 0$ ve $f(A) \subset \{1\}$ sağlanacak biçimde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır. Buradan,

$$f^{-1}([0,\frac{1}{2})) \quad \text{ve} \quad f^{-1}((\frac{1}{2},1])$$

kümelerinin sırasıyla x noktası ve A kapalı kümesini içeren ayrık açık kümeler olduğu görülür. Şu halde (X,τ) bir T_3-uzayıdır.

Uyarı 8.5. Her normal uzayın tam regüler olduğu, ileride göreceğimiz Urysohn Lemması'nın (Teorem 8.15) bir sonucudur (bkz. Sonuç 8.2).

Bu sonuç ve Teorem 8.2 b) birlikte aşağıdaki diyagramın yapılmasını sağlar.

$$\begin{array}{ccccc}
T_4\text{-uzayı} & & T_{3\frac{1}{2}}\text{-uzayı} & \Rightarrow & T_3\text{-uzayı} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\text{Normal u.} & \Rightarrow & \text{tam regüler u.} & \Rightarrow & \text{regüler u.}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Hausdorff uzayı} \Rightarrow T_1\text{-uzayı} \Rightarrow T_0\text{-uzayı}$$

Teorem 8.12. *Bir (X,τ) topolojik uzayının bir T_3-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in X$ noktasında kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanının bulunmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bir T_3-uzayı, $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ herhangi bir komşuluk olsun. U'nun içinde, x noktasının kapalı bir komşuluğunun bulunduğunu göstereceğiz.

U, x'in bir komşuluğu olduğundan, $x \in G \subset U$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır. Buradan X–G kapalı ve $x \notin X-G$ dir. (X,τ) bir T_3-uzayı olduğundan

$$\exists \; O_1, O_2 \in \tau \text{ ö.k. } x \in O_1, \quad X-G \subset O_2 \quad \text{ve} \quad O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

sağlanır. Buradan $x \in O_1 \subset X-O_2 \subset G \subset U$ elde edilir. Şu halde $V := X-O_2$ x'in U içinde kalan kapalı bir komşuluğudur.

"$\Leftarrow$" Her $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ için, $x \in V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}_\tau(x)$ kapalı komşuluğunun bulunduğunu kabul edelim. $F \subset X$ herhangi bir kapalı küme ve $x \notin F$ ise $x \in X-F$ ve X–F açık olduğundan x'in bir komşuluğudur. O halde

$$\exists \; V \in \mathcal{U}_\tau(x), \quad V \text{ kapalı ö.k.} \quad x \in V \subset X-F$$

sağlanır. V, x'in bir komşuluğu olduğundan, $x \in G \subset V$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır. Ayrıca V kapalı olduğundan X–V açıktır. Buradan G ve X–V açık kümeleri için,

$$x \in G, \quad F \subset X-V \quad \text{ve} \quad G \cap (X-V) = \varnothing$$

sağlandığı görülür. Şu halde (X,τ) bir T_3-uzayıdır. □

Her regüler uzay bir T_3-uzayı olduğundan, bir regüler uzay, her noktasında kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanına sahiptir.

Teorem 8.13. *a) Bir T_3-uzayının her altuzayı da yine bir T_3-uzayıdır.*

b) Boştan farklı bir çarpım uzayının bir T_3-uzayı (regüler uzay) olması için gerek ve yeter koşul her bir çarpan uzayının bir T_3-uzayı (regüler uzay) olmasıdır.

c) T_3-uzaylarının bölüm uzaylarının da yine T_3-uzayı olmaları gerekmez.

Kanıt. a) Okuyucuya bırakılmıştır. Bkz. P.10.

b) $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayı boştan farklı bir T_3-uzayı ise her bir X_λ, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayının bir altuzayına homeomorf olduğundan (bkz. Teorem 8.5 c) 'nin kanıtı) bir T_3-uzayıdır.

Tersine olarak her bir X_λ'nın bir T_3-uzayı olduğunu kabul edelim. $x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ olsun. x noktasının $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayındaki bir komşuluk tabanı elemanı, $i = 1,2, ... ,n$ için U_{λ_i}, x_{λ_i}'nin X_{λ_i}'deki bir komşuluğu olmak üzere,

$$p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap ... \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$$

biçimindedir. Her $i = 1,2, ... ,n$ için U_{λ_i}, x_{λ_i}'nin X_{λ_i}'deki bir komşuluğu ve X_{λ_i} bir T_3-uzayı olduğundan, U_{λ_i}, x_{λ_i}'nin C_{λ_i} gibi kapalı bir komşuluğunu içerir. Buradan

$$p_{\lambda_1}^{-1}(C_{\lambda_1}) \cap ... \cap p_{\lambda_n}^{-1}(C_{\lambda_n}),$$

çarpım uzayında x'in $p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap ... \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$ içinde kalan kapalı bir komşuluğu olur. Böylece çarpım uzayında alınan herhangi bir x noktasındaki kapalı komşulukların bir komşuluk tabanı oluşturduğu gösterilmiş olur. Bu da bir önceki teoreme göre çarpım uzayının da bir T_3-uzayı olduğunu gösterir.

c) $(\mathbf{R},\tau_e)$ bir T_3-uzayı olmasına rağmen Örnek 6.3'de verilen $(\mathbf{R}/\sim,\tau_q^*)$ bölüm uzayı bir T_3-uzayı değildir. □

Teorem 8.14. *Bir (X,τ) topolojik uzayının bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, X üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların sıfır olmayan yerlerinin τ için bir taban oluşturmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayı, G açık ve $x \in G$ olsun. Buradan $X - G$ kapalı ve $x \notin X - G$ dir. $T_{3\frac{1}{2}}$-aksiyomuna göre,

$$\exists \; f : X \to [0,1] \text{ sürekli ö.k., } f(x) = 0 \text{ ve } f(X - G) \subset \{1\}$$

yazılabilir. Eğer $g(t) := 1 - f(t)$ şeklinde tanımlanırsa, bu g fonksiyonu X üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $g(x) = 1$ ve $g(X{-}G) \subset \{0\}$ sağlanır. Eğer g fonksiyonunun sıfır yerleri kümesi $S_g := \{ x \in X \mid g(x) = 0 \}$ ile gösterilirse, $x \in X - S_g \subset G$ olduğu kolayca görülür. Gerçekten, $g(x) = 1 \neq 0$ ve $g(X{-}G) \subset \{0\}$ dır. Ayrıca reel değerli ve sürekli her g için $X - S_g$ açıktır. Şu halde bu tip kümelerin ailesi τ için bir tabandır.

"$\Leftarrow$" $K \subset X$ kapalı ve $x_o \notin K$ olsun. Buradan $x_o \in X - K$ ve $X - K$ açıktır. Hipoteze göre öyle bir reel değerli ve sürekli $f : X \to \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır ki, $x_o \in X - S_f \subset X - K$ sağlanır. Burada S_f, f fonksiyonunun sıfır yerleri kümesidir. Şu halde $f(x_o) \neq 0$ dır. Her $x \in X$ için,

$$g(x) := \text{maks}\{\ 0,\ \min\{1,\ 1 - \frac{f(x)}{f(x_o)}\}\ \}$$

olarak tanımlanırsa, g, her $x \in X$ için $0 \leq g(x) \leq 1$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur ve ayrıca $g(x_o) = 0$ ve $g(K) \subset \{1\}$ sağlanır. Şu halde (X,τ) bir $T_{3\frac{1}{2}}$ -uzayıdır. □

$T_{3\frac{1}{2}}$ -uzayları ile ilgili diğer bazı özellikleri bölüm sonundaki problemler kısmına bırakarak, şimdi de T_4-uzayları ve normal uzayların bazı özelliklerini inceleyelim:

Konu ile ilgili kaynaklarda "Urysohn Lemması" olarak bilinen teorem, "T_4-aksiyomunun, uzay üzerinde tanımlı ve belirli özellikleri sağlayan sabitten farklı reel değerli ve sürekli fonksiyonların bulunabilmesine denk olduğunu" ifade eder. Bunun kanıtına geçmeden önce, bu kanıtta kullanılacak önemli bir özelliği, bir yardımcı teorem olarak verelim:

Y. Teorem 8.1. *(X,τ) bir T_4-uzayıdır $\Leftrightarrow$ Her $A \subset X$ kapalı kümesi ve onu içeren G açık kümesi için, $A \subset H$ ve $\overline{H} \subset G$ koşulunu sağlayan bir H açık kümesi vardır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bir T_4-uzayı, $A \subset X$ kapalı ve G, onu içeren bir açık küme, yani $A \subset G$ olsun. Buradan $X - G$ kapalı ve $A \cap (X - G) = \varnothing$ olduğundan,

$$\exists\ O_1, O_2 \in \tau \quad \text{ö.k.} \quad A \subset O_1,\quad X - G \subset O_2 \quad \text{ve} \quad O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

yazılabilir. Buradan da $A \subset O_1 \subset X - O_2 \subset G$ elde edilir. Şu halde $H := O_1$ istenen özelliği sağlayan bir açık kümedir.

"⇐" (X,τ) sağ taraftaki özelliğe sahip bir topolojik uzay, $A, B \subset X$ kapalı ve $A\cap B = \varnothing$ ise $X - B$ açık ve $A \subset X - B$ olduğundan,

$$\exists\ H\in\tau \quad \text{ö.k.} \quad A \subset H \subset \overline{H} \subset X - B$$

yazılabilir. Buradan H ve $X - \overline{H}$ açık kümeleri için,

$$A \subset H, \quad B\subset X - \overline{H} \quad \text{ve} \quad H\cap(X - \overline{H}) = \varnothing$$

sağlandığı görülür. □

Teorem 8.15. (Urysohn Lemması)

(X,τ) bir T_4-uzayıdır ⇔ (X,τ)'da kapalı ve ayrık herhangi iki A ve B kümeleri için $f(A) \subset \{0\}$ ve $f(B) \subset \{1\}$ koşullarını sağlayan bir $f : X \to [0, 1]$ sürekli fonksiyonu vardır.

Kanıt. "⇒" (X,τ) bir T_4-uzayı olsun. Önce Y. Teorem 8.1 arka arkaya uygulanarak aşağıdaki özellikleri sağlayan bir küme ailesi elde edilecektir.

$A, B \subset X$ kapalı ve $A\cap B = \varnothing$ olsun. (X,τ) T_4-uzayı olduğundan, Y.Teorem 8.1'e göre

$$\exists\ U_{\frac{1}{2}} \subset X \quad \text{açık,} \quad \text{ö.k.} \quad A \subset U_{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \overline{U_{\frac{1}{2}}} \cap B = \varnothing$$

yazılabilir. Fakat bu defa, A, $X - U_{\frac{1}{2}}$ ve $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$, B kümeleri ayrık ve kapalı kümeler olduğundan, aynı nedenle $U_{\frac{1}{4}}$ ve $U_{\frac{3}{4}} \subset X$ açık kümeleri,

$$A \subset U_{\frac{1}{4}}, \quad \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}}, \qquad \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}}, \quad \overline{U_{\frac{3}{4}}} \cap B = \varnothing$$

bağıntıları sağlanacak biçimde bulunabilir. Bu düşünce tarzı ile devam edilerek,

$k = 1,2, \dots , 2^n-1$ için $U_{\frac{k}{2^n}}$ tipindeki açık kümelerin,

$$A \subset U_{\frac{k}{2^n}} , \dots , \overline{U_{\frac{k-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{k}{2^n}} , \dots , \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \cap B = \varnothing$$

sağlanacak biçimde elde edildiklerini kabul edelim. Uzay T_4-uzayı olduğundan, tekrar Y. Teorem 8.1 uygulanırsa, $k = 1,2, \dots , 2^{n+1}-1$ için $U_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ kümeleri de aynı özellikleri sağlayacak biçimde bulunabilir. Şu halde tümevarımla,

$$r = \frac{k}{2^n} , \quad (n > 0 \text{ tam sayı ve } k = 1,2, \dots , 2^n-1)$$

tipindeki her rasyonel sayı için bir U_r açık kümesi aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde elde edilmiş olur.

a) $r = \frac{k}{2^n}$ tipindeki her r için $A \subset U_r$ ve $\overline{U}_r \cap B = \varnothing$

b) $r < s$ için $\overline{U}_r \subset U_s$.

Şimdi de $f : X \to [0, 1]$ fonksiyonunu,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer her } r \text{ için } x \notin U_r \text{ ise,} \\ \inf\{ r \mid x \in U_r \}, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açıkça görüldüğü gibi, $f(A)\subset\{0\}$ ve $f(B)\subset\{1\}$ sağlanır. Eğer f 'nin sürekli olduğunu gösterirsek kanıt tamamlanmış olur. Bunun için,

$$D = \{ r = \frac{k}{2^n} \mid n\in \mathbf{N} , \ k = 1,2, \dots , 2^n-1 \}$$

kümesinin [0,1]'de yoğun olduğu göz önüne alınacaktır (bkz. P.24).

(*i*) f , $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$ kümesi üzerinde süreklidir. Çünkü $(a,1]$ ve $a < r < 1$ olacak biçimde seçilen $\frac{k}{2^n}$ tipindeki bir r için,

$$x \in X - \overline{U}_r \quad \text{ve} \quad f(X - \overline{U}_r) \subset (a,1]$$

sağlanır. Gerçekten, eğer $x \in \overline{U}_r$ olsaydı, $r < s < 1$ için $x \in \overline{U}_r \subset U_s$, yani $x \in U_s$ ve dolayısıyla $f(x) \neq 1$ olurdu. Diğer yandan,

$$t \notin \overline{U}_r \quad \text{ise} \quad t \notin U_r \quad \Rightarrow \quad f(t) \geq r > a$$

elde edilir. Çünkü $f(t) = \inf\{\, s \mid t \in U_s \,\} < r$ olsaydı, bir $s < r$ için, $t \in U_s \subset \overline{U}_s \subset U_r$, yani $t \in U_r$ olurdu.

(*ii*) f 'nin $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu göstermek için, benzer düşünce ile, $[0,a)$ ve $0 < r < a$ olacak biçimde seçilecek $\frac{k}{2^n}$ tipindeki bir r için,

$$x \in U_r \quad \text{ve} \quad f(U_r) \subset [0, a)$$

sağlandığı gösterilebilir.

(*iii*) f 'nin $\{x \in X \mid 0 < f(x) < 1\}$ kümesi üzerindeki sürekliliği için ise (a, b), $(\,0 < a < f(x) < b < 1\,)$ ve $f(x) < r < b$, $a < s < f(x)$ olacak biçimde seçilen $\frac{k}{2^n}$ tipindeki r ve s için,

$$x \in U_r - \overline{U}_s \quad \text{ve} \quad f(U_r - \overline{U}_s) \subset (a, b)$$

sağlandığı gösterilebilir. Böylece f 'nin X üzerindeki sürekliliği gösterilmiş olur. Bu f fonksiyonuna, A ve B için "*Urysohn fonksiyonu*" denir.

"$\Leftarrow$" Eğer A ve B, (X,τ) da kapalı ve ayrık herhangi iki küme ve $f : X \to [0, 1]$ fonksiyonu, $f(A) \subset \{0\}$ ve $f(B) \subset \{1\}$ koşullarını sağlayacak şekilde verilmiş ise açıkça görüldüğü gibi $f^{-1}(\,[0,\frac{1}{2}\,)\,)$ ve $f^{-1}(\,(\frac{1}{2},1]\,)$ kümeleri (X,τ)'da açık, ayrık ve

$$A \subset f^{-1}([0,\frac{1}{2})) \ , \quad B \subset f^{-1}((\frac{1}{2},1])$$

koşullarını sağlarlar. Şu halde (X,τ) bir T_4-uzayıdır. □

Sonuç 8.2. *Her normal uzay tam regülerdir.*

Kanıt. (X,τ) normal, $K\subset X$ kapalı ve $x\notin K$ ise $\{x\}\cap K=\varnothing$ sağlanır. Normal uzay aynı zamanda bir T_1-uzayı olduğundan, $\{x\}$ tek noktalı kümesi kapalıdır. Urysohn Lemmasına göre buradan,

$$\exists \quad f: X \to [0, 1] \quad \text{sürekli, ö.k.} \quad f(x) = 0 \quad \text{ve} \quad f(K) \subset \{1\}$$

yazılabilir. Şu halde uzay tam regülerdir. □

Uyarı 8.6. Urysohn Lemmasındaki $[0, 1]$ aralığı yerine herhangi bir $[a, b]$ $(a < b)$ aralığı da alınabilir. Çünkü bilindiği gibi bu iki aralık birbirine topolojik olarak denktir. Örneğin $h : [0, 1] \to [a, b]$, $h(x) = (b-a)x + a$ homeomorfizmi göz önüne alındığında, $f : X \to [0, 1]$, A ve B için bir Urysohn fonksiyonu ise $g=h\circ f$ sürekli fonksiyonu istenen özellikleri sağlar. Gerçekten,

$$g(A) = (h\circ f)(A) = h(f(A)) \subset h(\{0\}) = \{a\}$$

$$g(B) = (h\circ f)(B) = h(f(B)) \subset h(\{1\}) = \{b\}$$

sağlandığı kolayca görülür.

Tanım 8.3. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Eğer bir $A \subset X$ kümesi, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ (G_i açık) şeklinde sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılabilirse, bu A altkümesine bir *G_δ-kümesi* adı verilir.

b) Eğer bir $B \subset X$ kümesi, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ (F_i kapalı) şeklinde sayılabilir sayıda kapalı kümelerin birleşimi olarak yazılabilirse, bu B altkümesine bir *F_σ-kümesi* adı verilir.

Teorem 8.16. *(X,τ) bir T_4-uzayı ve $\varnothing \neq A \subset X$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda $f^{-1}(\{0\}) = A$ koşulunu sağlayan sürekli bir $f : X \to [0, 1]$ fonksiyonunun bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul, A 'nın bir G_δ-kümesi olmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" $f : X \to [0, 1]$, $f^{-1}(\{0\}) = A$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon ise her $n \in \mathbf{N}$ için, $[0, \frac{1}{n})$, $[0, 1]$'de açık ve

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}([0,\frac{1}{n}))\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([0,\frac{1}{n}))$$

şeklinde yazılabileceğinden, A bir G_δ-kümesidir.

"$\Leftarrow$" Tersine olarak A bir G_δ–kümesi, yani G_i (i = 1, 2, ...) 'ler açık olmak üzere, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ şeklinde yazılabilsin. Her i = 1, 2, ... için, A ve $X - G_i$ 'ler kapalı ve ayrık kümeler olduklarından, Urysohn Lemmasına göre,

$$\exists \quad f_i : X \to [0, 1] \quad \text{sürekli,} \quad \text{ö.k.} \quad f_i(A) \subset \{0\} \quad \text{ve} \quad f_i(X - G_i) \subset \{1\}$$

yazılabilir.

Şimdi de $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i$ fonksiyon serisini göz önüne alalım.

$$\left|\frac{1}{2^i} f_i\right| \leq \frac{1}{2^i} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

serisi yakınsak olduğundan, Weierstraß M-testine göre yukarıdaki fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır. Bu nedenle bu serinin limit fonksiyonu olan

$$f := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i$$

de süreklidir. Ayrıca bu f fonksiyonu için $0 \leq f(x) \leq 1$ ve

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$$

sağlanır. □

Genel topolojinin başlıca problemlerinden biri de, "sürekli fonksiyonların genişletilmesi problemi"dir. X bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $f : A \to Y$ sürekli ise hangi koşullar altında bir $F : X \to Y$ sürekli fonksiyonu, $F|A = f$ olacak şekilde bulunabilir? Böyle bir F'ye, f fonksiyonunun X'e bir sürekli genişletilmişi ve bu F'yi bulma problemine de, sürekli fonksiyonların genişletilmesi problemi denir. Burada, T_4-uzaylarını karakterize eden önemli bir genişletme teoremi verilecektir.

Teorem 8.17. (Tietze Genişletme Teoremi)

(X,τ) bir T_4-uzayıdır $\Leftrightarrow$ (X,τ)'daki her A kapalı kümesi ve $f : A \to \mathbf{R}$ sürekli fonksiyonu için, $F|A = f$ koşulunu sağlayan bir $F : X \to \mathbf{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" Teorem önce, görüntüsü $[-1, +1]$'de bulunan sürekli bir $f : A \to [-1, +1]$ fonksiyonu için kanıtlanacaktır. $A \subset X$ kapalı kümesinin

$$A_1 := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{3}\} \quad \text{ve} \quad B_1 := \{x \in X \mid f(x) \leq -\frac{1}{3}\}$$

altkümelerini göz önüne alalım. A_1, B_1 kümelerinin (X,τ)'da kapalı ve $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ olduğu açıktır. Urysohn Lemmasına göre,

$$\exists \quad f_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \quad \text{sürekli, ö.k.} \quad f_1(A_1) \subset \{\frac{1}{3}\} \quad \text{ve} \quad f_1(B_1) \subset \{-\frac{1}{3}\}.$$

A üzerinde $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ olduğundan, $f - f_1$ fonksiyonu A kümesini $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ aralığının içine resmeder.

Yukarıdaki işlemi, f yerine $f - f_1$ için tekrarlayarak,

$$A_2 := \{x \in A \mid (f - f_1)(x) \geq \frac{2}{9}\} \quad \text{ve} \quad B_2 := \{x \in A \mid (f - f_1)(x) \leq -\frac{2}{9}\}$$

ayrık kapalı kümelerini tanımlarsak,

$\exists \quad f_2 : X \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ sürekli, ö.k. $f_2(A_2) \subset \{\frac{2}{9}\}$ ve $f_2(B_2) \subset \{-\frac{2}{9}\}$
.

A üzerinde $|\,(f - f_1) - f_2\,| \leq (\frac{2}{3})^2$ olduğu açıktır.

. . . .

Bu işleme devam edersek, A üzerinde

$$|\, f - \sum_{k=1}^{n} f_k \,| \leq (\frac{2}{3})^n$$

koşulunu sağlayan f_k (k = 1, 2, . . .) sürekli fonksiyonlarını elde ederiz. Her $x \in X$ için

$$|\, f_k(x) \,| \leq (\frac{2}{3})^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$$

koşulu sağlandığı için, Weierstraß M-testine göre $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır. Bütün f_k 'lar sürekli olduklarından

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

limit fonksiyonu da süreklidir. Kolayca görüleceği gibi $F|A = f$ sağlanır.

Genel halde, (–1, +1) aralığı **R**'ye homeomorf olduğundan herhangi bir $f : A \to (-1, +1)$ sürekli fonksiyonunu genişletmek yeter. Böyle bir f fonksiyonu, A 'dan [–1, +1] aralığına bir fonksiyon olarak göz önüne alınabileceğinden, ilk kısımda görüldüğü gibi bir $F^* : X \to [-1, +1]$ sürekli fonksiyonuna genişletilebilir. Eğer,

$$A_o := \{\, x \in X \;\;|\;\; |\,F^*(x)\,| = 1 \,\}$$

olarak tanımlanırsa, A ve A_o birbirinden ayrık kapalı kümeler olduklarından, Urysohn Lemmasına göre,

$$\exists \; g : X \to [0,1] \quad \text{sürekli,} \quad \text{ö.k.} \quad g(A_o) \subset \{0\} \quad \text{ve} \quad g(A) \subset \{1\} .$$

Şimdi eğer $F(x) := g(x) \cdot F^*(x)$ olarak tanımlanırsa, bu $F : X \to (-1, +1)$ fonksiyonu f'nin bir sürekli genişletilmişi olur.

"$\Leftarrow$" A ve B (X,τ)'da kapalı ve ayrık iki küme olsun. Bir $f : A \cup B \to [0, 1]$ fonksiyonunu $f(A) \subset \{0\}$ ve $f(B) \subset \{1\}$ olarak tanımlayalım. Bu f fonksiyonu $A \cup B$ kapalı kümesi üzerinde süreklidir (neden?). O halde hipoteze göre, $F|A \cup B = f$ olacak şekilde sürekli bir $F: X \to [0,1] \subset \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır. Bu F fonksiyonu için $F(A) \subset \{0\}$ ve $F(B) \subset \{1\}$ sağlandığından Urysohn Lemması uyarınca (X,τ) bir T_4-uzayıdır. □

Uyarı 8.7. Bütün kapalı ve sınırlı aralıklar birbirlerine homeomorf olduğundan, Tietze Genişletme Teoremindeki $[-1, +1]$ kapalı aralığı yerine herhangi bir $[a, b]$ $(a < b)$ kapalı aralığı da alınabilir.

Uyarı 8.8. a) Bir T_4-uzayının (normal uzayın) herhangi bir altuzayının da yine bir T_4-uzayı (normal uzay) olması gerekmez. Ancak kapalı altkümeleri üzerindeki altuzayları T_4-uzayı (normal uzay) dır (bkz. P. 20).

b) T_4-uzaylarının (normal uzayların) çarpım uzaylarının da yine bir T_4-uzayı (normal uzay) olması gerekmez (bkz. P.22, 23).

Problemler

P. 1. T_o-, T_1- ve T_2-uzayı olma özellikleri, bire-bir örten ve açık fonksiyonlar tarafından korunurlar ve bu nedenle birer topolojik özelliktir. Ayrıca, bir T_1-uzayının kapalı bir fonksiyon altındaki resmi de yine bir T_1-uzayıdır. Gösteriniz.

P. 2. T_o-, T_1- ve T_2-uzayı olma özellikleri birer kalıtsal özelliktir. Gösteriniz.

P. 3. Eğer (X,τ) bir T_i-uzayı $(i=0,1,2)$ ve $\tau \subset \tau^*$ ise (X,τ^*) da bir T_i-uzayıdır. Gösteriniz.

P. 4. (X,τ) bir T_o-uzayıdır $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için, $x \notin \overline{\{y\}}$ veya $y \notin \overline{\{x\}}$ dir.

P. 5. (X,τ) bir T_1-uzayıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap\{U \mid U \text{ açık ve } x \in U\}$ sağlanır.

P. 6. Bir T_1-uzayında sonlu bir kümenin yığılma noktasının bulunmadığını gösteriniz.

P. 7. Sonlu elemanlı her T_1-uzayının bir ayrık topolojik uzay olduğunu gösteriniz.

P. 8. Bir (X,τ) topolojik uzayın T_1-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, τ'nun X üzerindeki bütünleyenleri sonlu kümeler topolojisi τ_{BSO} den daha ince olmasıdır. Gösteriniz.

P. 9. Bir topolojik uzayın T_1-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, o uzayın her altkümesinin, kendisini içeren bütün açık kümelerin arakesiti şeklinde yazılabilmesidir.

P. 10. Teorem 8.13 a)'yı kanıtlayınız.

P. 11. (X,τ) bir T_1-uzayı ve $M \subset X$ ise M' türev kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
(Y.g.: $(M')' \subset M'$ olduğu gösterilebilir).

P. 12. (X,τ) bir T_1-uzayı ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda,

$p \in A'$ $\Leftrightarrow$ (X,τ)'da p noktasını içeren her açık küme,
A'nın sonsuz sayıda elemanını içerir.

P. 13. (X,τ) birinci sayılabilir bir T_1-uzayı ve $A \subset X$ olsun. Eğer $p \in A'$ ise A kümesinde, farklı noktalardan oluşan ve p noktasına yakınsayan bir (a_n) dizisi vardır. Gösteriniz.

P. 14. **a)** (X,τ) bir Hausdorff uzayıdır $\Leftrightarrow$ (X,τ)'daki yakınsak her filtrenin limiti tektir.

b) (X,τ) bir Hausdorff uzayıdır $\Leftrightarrow$ (X,τ)'daki yakınsak her ağın limiti tektir.

P. 15. (X,τ) birinci sayılabilir uzay olsun. Bu taktirde,

(X,τ) bir Hausdorff uzayıdır $\Leftrightarrow$ (X,τ)'daki yakınsak her dizinin limiti tektir.

P. 16. Bir (X,τ) topolojik uzayının bir T_3-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, her $x\in X$ ve $x\in G$ koşulunu sağlayan G açık kümesi için, $x\in H\subset \overline{H}\subset G$ koşulunu sağlayan bir H açık kümesinin bulunmasıdır. Gösteriniz.

P. 17. X ve Y iki küme ve $\mathcal{F}(X,Y)$, X'den Y'ye tanımlanmış bütün fonksiyonların kümesi ve $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}(X,Y)$ bunun bir altailesi olsun. Eğer her x, $y\in X$ için $f(x) \neq f(y)$ olacak şekilde bir $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu varsa, bu $\mathcal{A}$ ailesine X'de *"noktaları ayırıyor"* denir.

Bir (X,τ) topolojik uzayı üzerinde tanımlanmış reel değerli ve sürekli bütün fonksiyonların ailesini $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ ile gösterelim. Buna göre,

a) Eğer (X,τ) tam regüler ise $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ ailesi X'de noktaları ayırır.

b) Eğer $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ X'de noktaları ayırıyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayı bir Hausdorff uzayıdır. Gösteriniz

P. 18. (X,τ) bir $T_{3\frac{1}{2}}$-uzayıdır $\Leftrightarrow$ Her $A\subset X$ kapalı kümesi, $x\notin A$ noktası ve $a, b\in\mathbf{R}$ $(a\neq b)$ için, $f(A)\subset\{a\}$ ve $f(x) = b$ olacak şekilde bir $f : X \to \mathbf{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Gösteriniz

P. 19. Bir tam regüler uzayın her altuzayı da tam regülerdir. Gösteriniz.

P. 20. Bir T_4-uzayının (veya normal uzayın) kapalı altkümeler üzerindeki altuzayları da T_4-uzayı (veya normal) dir. Gösteriniz.

P. 21. Bir T_4-uzayının (veya normal uzayın) kapalı ve sürekli bir fonksiyon altındaki resmi de yine bir T_4-uzayı (veya normal) dır. Gösteriniz.

P. 22. **R**'nin Sorgenfrey topolojisi ile bir normal uzay olduğunu gösteriniz.

P. 23. $\mathcal{T}$, $\mathbf{R}^2$ üzerinde

$$[a, b)\times[c, d) = \{ (x, y) \mid a \le x < b ,\ c \le y < d \}$$

yarı-açık dikdörtgenlerinin ürettiği topoloji olsun. Görüldüğü gibi bu topoloji, Sorgenfrey topolojisinin kendisi ile çarpım topolojisine topolojik olarak denktir.

$Y = \{ (x, y) \mid x + y = 0 \} \subset \mathbf{R}^2$ doğrusu üzerinde, koordinatları rasyonel sayılar olan nokta kümesini A; irrasyonel sayılar olan nokta kümesini de B ile gösterelim. Şu halde $B = Y - A$ dır. Bu durumda,

(i) A ve B kümelerinin $(\mathbf{R}^2,\mathcal{T})$'da kapalı olduğunu gösteriniz.

(ii) $(\mathbf{R}^2,\mathcal{T})$'da, $A\subset G$, $B\subset H$ ve $G\cap H = \varnothing$ koşulunu sağlayan G ve H gibi iki açık kümenin bulunamayacağı gösterilebilir (bkz. [7], s. 298). Dolayısıyla $(\mathbf{R}^2,\mathcal{T})$ normal değildir.

P. 24. $D=\{ r = \frac{k}{2^n} \mid n\in \mathbf{N} ,\ k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \}$ kümesi $[0, 1]$ kapalı aralığında yoğundur. Gösteriniz (bkz. [9], s. 146).

P. 25. (X,τ) normal ve $A \subset X$ kapalı olsun. Bu durumda her $f : A \to \mathbf{R}^n$ sürekli fonksiyonu için $F|A = f$ koşulunu sağlayan bir $F : X \to \mathbf{R}^n$ sürekli fonksiyonu vardır. Gösteriniz.

P. 26. Her G_δ-kümesinin bütünleyeni bir F_σ-kümesi; ve her F_σ-kümesinin bütünleyeni de bir G_δ-kümesidir. Gösteriniz.

P. 27. Bir metrik uzayda her kapalı küme bir G_δ-kümesi, dolayısıyla her açık küme de bir F_σ-kümesidir. Gösteriniz.

(Y.g.: A kapalı ise $A_n := \{ y \mid d(A, y) < \frac{1}{n} \}$ kümelerini göz önüne alınız).

P. 28. Her metrik uzay bir Hausdorff uzayı hatta bir normal uzaydır. Gösteriniz.

BÖLÜM 9

KOMPAKTLIK

Klasik analizdeki önemli teoremlerin çoğu kapalı ve sınırlı aralıklar için gösterilmiştir. Örneğin, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon bu aralıkta sınırlıdır ve hatta bu aralıkta maksimum ve minimum değerini alır. Bir başkası, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon düzgün süreklidir vb.. Bu tip teoremlerin kanıtlarının temelinde Heine-Borel Teoremi olarak bilinen ve "kapalı ve sınırlı bir aralığın, açık kümelerle her örtümünün sonlu bir altörtümü vardır" şeklinde ifade edilen bir teorem yatmaktadır. Kapalı ve sınırlı aralıkların bu önemli özelliği topolojide "kompaktlık" kavramının tanımı olarak alınmaktadır.

A. Kompakt Topolojik Uzaylar

Tanım 9.1. a) X bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi için

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

sağlanıyorsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine A altkümesinin bir *örtümü* denir. Eğer A = X ise $\mathcal{U}$, X'in bir örtümü olur.

b) X bir küme ve $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i\in I \}$, (I bir indis kümesi) X 'in bir örtümü olsun. Eğer $\mathcal{U}$'nun bir $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ altailesi, yani $I' \subset I$ olmak üzere $\mathcal{U}' = \{ U_i\in\mathcal{U} \mid i\in I' \}$, X'in yine bir örtümü oluyorsa, bu $\mathcal{U}'$ ailesine $\mathcal{U}$'nun bir *altörtümü* adı verilir.

c) Bir örtümüm eleman sayısı sonlu veya sayılabilir ise bu örtüme sırasıyla *sonlu örtüm* veya *sayılabilir örtüm* denir.

d) X bir küme ve $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$'nın her sonlu altailesinin elemanlarının arakesiti boştan farklı ise bu $\mathcal{A}$ ailesine, *Sonlu Arakesit Özelliğine* (kısaca SAÖ) sahiptir denir.

Tanım 9.2. a) (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X'in bir örtümü olsun. Eğer $\mathcal{G}$'nin her elemanı bu uzayda açık ise $\mathcal{G}$'ye bir *açık örtüm*; eğer $\mathcal{G}$'nin her elemanı bu uzayda kapalı ise $\mathcal{G}$'ye bir *kapalı örtüm* denir.

b) (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in her açık örtümünün sonlu bir altörtümü varsa, bu topolojik uzaya *kompakt topolojik uzay* adı verilir.

c) (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir altküme olsun. Eğer (A,τ_A) altuzayı kompakt ise A kümesi bu topolojik uzayda *kompakttır* denir.

d) (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir altküme olsun. Eğer $\overline{A}$ kapanışı kompakt ise A kümesi bu (X,τ) topolojik uzayında *relatif kompakttır* denir.

Y. Teorem 9.1. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir altküme olsun. A'nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul, A'nın (X,τ)'daki her açık örtümünün sonlu bir altörtümü bulunmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" $A \subset X$ kompakt, yani (A,τ_A) kompakt ve $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, A'nın (X,τ)'daki herhangi bir açık örtümü olsun. Buradan,

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \quad \Rightarrow \quad A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cap G_\lambda)$$

yazılabilir. Her $\lambda\in\Lambda$ için $G_\lambda\in\tau$ olduğundan, $\mathcal{G}^* = \{A\cap G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, A'nın (A,τ_A)'daki bir açık örtümüdür. A kompakt olduğundan

$$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\in\Lambda, \quad \text{ö.k.} \quad A = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap G_{\lambda_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}$$

elde edilir. Şu halde $\{ G_{\lambda_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \}$, $\mathcal{G}$'nin sonlu bir altörtümüdür.

"⇐" A'nın (X,τ)'daki her açık örtümünün sonlu bir altörtümü bulunsun. (A,τ_A)'nın kompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $\mathcal{H} = \{H_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ ailesi A'nın altuzayda herhangi bir açık örtümü, yani her $\lambda\in\Lambda$ için $H_\lambda\in\tau_A$ olmak üzere,

$$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$$

olsun. Buradan, her $\lambda\in\Lambda$ için $H_\lambda = A\cap G_\lambda$ olacak şekilde bir $G_\lambda\in\tau$ mevcuttur. Şu halde $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, A'nın (X,τ) 'da bir açık örtümüdür. Hipoteze göre buradan,

$$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\in\Lambda,\ \text{ö.k.}\ \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \quad\Rightarrow\quad A = \bigcup_{i=1}^{n}(A\cap G_{\lambda_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} H_{\lambda_i}$$

elde edilir. Şu halde $\{ H_{\lambda_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \}$, $\mathcal{H}$'nin sonlu bir altörtümüdür.
□

Uyarı 9.1. Yukarıdaki Y.Teorem, bir kümenin bir topolojik uzayda kompakt olduğunu göstermek için, o kümenin, o uzaydaki her açık örtümünün sonlu bir altörtümü bulunduğunu göstermenin yeterli olduğunu ifade eder. Bu durum uygulamada kolaylık sağlar.

Örnek 9.1. a) $(\mathbf{R},\tau_e)$ topolojik uzayında $\mathcal{U}=\{ (-n, n) \mid n\in\mathbf{N} \}$ ailesi **R**'nin bir açık örtümüdür (neden?). Ancak bu açık örtümün hiç bir sonlu altörtümü yoktur. Çünkü, eğer bir $N\in\mathbf{N}$ için

$$\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{N}(-n_k, n_k)$$

olsaydı, $N^* = \text{maks}\{ |n_k| \mid k=1,2, ..., N \}$ olmak üzere, $\mathbf{R} = (-N^*, N^*)$, yani **R** sınırlı olurdu. Şu halde $(\mathbf{R},\tau_e)$ kompakt değildir. Benzer düşünce ile, $(\mathbf{R}^2,\tau^2_e)$ ve genel olarak $(\mathbf{R}^n,\tau^n_e)$ 'nin kompakt olmadığı görülür.

b) $A = (0, 1] \subset \mathbf{R}$ altkümesini göz önüne alalım.

$$\mathcal{U} = \{ (\frac{1}{n}, 2) \mid n = 1, 2, \dots \}$$

ailesi $(\mathbf{R},\tau_e)$'de A'nın bir açık örtümüdür, çünkü $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 2)$ dir. Fakat bu açık örtümün sonlu bir altörtümü yoktur. O halde A, $(\mathbf{R},\tau_e)$'de kompakt değildir.

c) Aşikar olarak (X,τ_t) ilkel uzayı kompakttır.

d) (X,τ_D) ayrık uzayı kompakttır $\Leftrightarrow$ X kümesi sonludur. Neden?

e) X bir küme, τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki topoloji olsun. Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ve (X,τ_2) kompakt ise (X,τ_1) de kompakttır.

Uyarı 9.2. a) X bir küme, τ ve τ^* X üzerinde iki topoloji ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\tau_A = \tau^*_A$ ise Tanım 9.2 c)'den hemen görüleceği gibi,

A, (X,τ)'da kompakttır $\Leftrightarrow$ A, (X,τ^*)'da kompakttır.

b) (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset Y \subset X$ olsun. $\tau_A = (\tau_Y)_A$ olduğundan, yine Tanım 9.2 c)'ye göre,

A, (Y,τ_Y)'de kompakttır $\Leftrightarrow$ A, (X,τ)'da kompakttır.

Bu özellik, kompaktlığın, kümelere özgü "mutlak bir özellik" olduğunu ifade eder.

Teorem 9.1. *Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) (X,τ) kompakttır.

b) X'in kapalı altkümelerinin sonlu arakesit özelliğine sahip her ailesinin bütün elemanlarının arakesiti boş değildir.

c) X üzerindeki her filtrenin bir yığılma noktası vardır.

d) X üzerindeki her ultrafiltre yakınsaktır.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b): (X,τ) kompakt ve $\mathcal{A}$ kapalı kümelerin sonlu arakesit özelliğine sahip bir ailesi olsun. $\bigcap\{A \mid A \in \mathcal{A}\} = \varnothing$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$X = \bigcup\{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

olup, $\{X-A \mid A \in \mathcal{A}\}$, X'in bir açık örtümüdür. (X,τ) kompakt olduğundan,

$$\exists\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \text{ ö.k. } X = \bigcup_{i=1}^{n}(X - A_i) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$$

elde edilir. Bu ise $\mathcal{A}$'nın sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlış, yani $\bigcap\{A \mid A \in \mathcal{A}\} \neq \varnothing$ olmak zorundadır.

b) $\Rightarrow$ c): X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ filtresinin hiç bir yığılma noktasının bulunmadığını kabul edelim. O halde $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} = \varnothing$ tur. b)'den dolayı X'deki $\{\overline{F} \mid F\in\mathcal{F}\}$ kapalı kümeler ailesi sonlu arakesit özelliğini sağlamaz. Şu halde

$$\exists \;\; F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F} \quad \text{ö.k.} \quad \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \varnothing$$

olmalıdır. Buradan $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \varnothing$, dolayısıyla $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$ elde edilir ki bu da $\mathcal{F}$'nin bir filtre olması ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlıştır.

c) $\Rightarrow$ d) : $\mathcal{G}$, X üzerinde bir ultrafiltre olsun. $\mathcal{G}$ önce bir filtre olduğundan x gibi bir yığılma noktası vardır. c)'den dolayı, X üzerinde, $\mathcal{G}$'den daha ince olan ve bu x noktasına yakınsayan bir filtre mevcut olmalıdır (bkz. Teorem 7.16). Fakat $\mathcal{G}$, X üzerinde bir ultrafiltre olduğundan, $\mathcal{G}$'den kesin olarak daha ince olan bir filtre yoktur. O halde $\mathcal{G}$, x noktasına yakınsar.

d) $\Rightarrow$ a) : (X,τ)'nun kompakt olmadığını kabul edelim. O halde X'in öyle bir $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ açık örtümü vardır ki, bunun hiç bir sonlu altörtümü yoktur. Bu durumda, her sonlu $S \subset \Lambda$ için,

$$A_S := X - \bigcup_{\lambda\in S} G_\lambda \neq \varnothing$$

dır. Bu şekilde elde edilen $\{A_S \mid S \subset \Lambda, S \text{ sonlu}\}$ ailesi X üzerinde bir filtre tabanıdır (gösteriniz). Bu taban ile üretilen

$$\mathcal{F} := \langle\{A_S \mid S \subset \Lambda, S \text{ sonlu}\}\rangle$$

filtresi de bir $\mathcal{G}$ ultrafiltresinin içindedir (bkz. Teorem 7.14). d)'ye göre bu $\mathcal{G}$ bir $x\in X$ noktasına yakınsar. Diğer yandan, $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, X'in bir açık örtümü olduğundan, $x\in G_\mu$ olacak şekilde bir $\mu\in\Lambda$ vardır. G_μ açık olduğundan x'in bir komşuluğudur. Ve $\mathcal{G} \to x$ olduğundan da $G_\mu \in \mathcal{G}$ dir. Fakat $\mathcal{G}$'nin inşası göz önüne alınırsa, $X - G_\mu$ önce $\mathcal{F}$'ye ve dolayısıyla $\mathcal{G}$'ye aittir.

Böylece $G_\mu \in \mathcal{G}$ ve $X - G_\mu \in \mathcal{G}$ elde edilir ki bu da $\mathcal{G}$'nin bir filtre olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani (X,τ) kompakt olmak zorundadır. □

Teorem 9.2. (Heine-Borel Teoremi)

$a, b \in \boldsymbol{R}$ ve $a \leq b$ ise $[a, b]$ kapalı aralığı $(\boldsymbol{R}, \tau_e)$'de kompakttır.

Kanıt. [a, b] aralığının her açık örtümünün sonlu bir altörtümü bulunduğunu göstereceğiz. $\mathcal{U}$, [a, b]'nin herhangi bir açık örtümü olsun. Şimdi

$$A := \{\, x \in [a, b] \;\mid\; [a, x],\ \mathcal{U}\text{'nun sonlu bir altailesi ile örtülebilsin} \,\}$$

biçiminde tanımlansın. $A \neq \emptyset$ ve üstten sınırlıdır. Gerçekten, $a \in A$ ve b, A'nın bir üst sınırıdır. O halde $s = \sup A$ mevcuttur. Kolayca görüleceği gibi $s \in [a, b]$ dir. Diğer yandan, $\mathcal{U}$, [a, b]'nin bir açık örtümü olduğundan, uygun bir $U^* \in \mathcal{U}$ için $s \in U^*$ dır. Fakat U^* τ_e-açık olduğundan

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \text{ö.k.} \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U^*$$

yazılabilir. $s = \sup A$ olduğundan, $s - \varepsilon < c < s$ olacak şekilde bir $c \in A$ vardır. O halde $[a, c]$, $\mathcal{U}$'nun sonlu sayıda elemanı ile örtülebilir. Bu sonlu örtümü $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ ile gösterirsek, $[c, s] \subset (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U^*$ olduğundan, $\{U_1, U_2, \ldots, U_n, U^*\}$, [a, s]'nin sonlu bir örtümüdür. O halde $s \in A$ ve dolayısıyla $s \leq b$ dir.

Şimdi, eğer $s < b$ $(s \neq b)$ ise $s < d < \min(s + \varepsilon, b)$ olacak şekilde seçilecek bir d sayısı için, $[a, d]$ kapalı aralığı da, $\mathcal{U}$ örtümünün yine aynı $\{U_1, U_2, \ldots, U_n, U^*\}$ sonlu altörtümü ile örtülebilir. O halde A'nın tanımına göre $d \in A$ olmalıdır. Fakat $s < d$ olduğundan bu durum $s = \sup A$ olması ile çelişir. Şu halde $s < b$ olamaz, $s = b$ olmalıdır. Bu durumda, $b = s \in A$ olur ve A'nın tanımına göre, [a, b], $\mathcal{U}$'nun sonlu bir altailesi ile örtülmüş olur. Böylece kanıt biter. □

Şimdi de bir topolojik uzayda, bir kümenin kompakt olması ile kapalı olması arasındaki ilişkileri inceleyelim:

Uyarı 9.3. Bir kompakt topolojik uzayın her altkümesinin kompakt olması gerekmez. Örneğin $[0,1] \subset \mathbf{R}$ kompakttır, fakat $(0,1) \subset [0,1]$ altkümesi kompakt değildir. Gerçekten,

$$\mathcal{U} := \{ (\frac{1}{n},1) \ | \ n = 1, 2, \ldots \}$$

(0,1)'in bir açık örtümüdür, fakat bunun sonlu bir altörtümü yoktur. Oysa aşağıdaki teoremde ifade edildiği gibi, kompakt bir topolojik uzayın kapalı altkümeleri de kompakttır.

Teorem 9.3. *Kompakt bir topolojik uzayın her kapalı altkümesi de kompakttır.*

Kanıt. (X,τ) kompakt ve $K \subset X$ kapalı bir altküme olsun. Y. Teorem 9.1'e göre, K'nın her açık örtümünün sonlu bir altörtümü bulunduğunu göstermek yeter. $\mathcal{U}$, K'nın bir açık örtümü olsun. O halde $\mathcal{U} \cup \{X - K\}$, X'in bir açık örtümüdür. (X,τ) kompakt olduğundan

$$\exists \ U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \quad \text{ö.k.} \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cup (X - K))$$

yazılabilir. Buradan,

$$K = X \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

elde edilir. Şu halde $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, $\mathcal{U}$'nun sonlu bir altörtümüdür ve dolayısıyla K kompakttır. □

Uyarı 9.4. Herhangi bir topolojik uzayda kompakt altkümelerin kapalı olmaları gerekmez. Örneğin $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere (X,τ_t) ilkel topolojik uzayında $A = \{a, b\} \subset X$ altkümesi kompakttır, fakat kapalı değildir. Buna karşılık, aşağıdaki teoremde ifade edildiği gibi, Hausdoff uzaylarında kompakt altkümeler kapalıdır.

Teorem 9.4 *Bir Hausdorff uzayında kompakt altkümeler kapalıdır.*

Kanıt. (X,τ) bir Hausdorff uzayı ve $K \subset X$ kompakt bir altküme olsun. $X - K$'nın açık olduğunu göstereceğiz.

$x \in X - K$ herhangi bir nokta olsun. Her $y \in K$ için $x \neq y$ dir. (X,τ) Hausdorff olduğundan, her $y \in K$ için,

$$\exists\ U_y, V_y \text{ açık, ö.k. } x\in U_y,\ y\in V_y \text{ ve } U_y\cap V_y=\varnothing$$

sağlanır. Böylece elde edilen $\{ V_y \mid y\in K \}$ ailesi K'nın bir açık örtümüdür. K kompakt olduğundan bunun sonlu bir altörtümü vardır. Diğer bir ifade ile,

$$\exists\ y_1, y_2, \ldots, y_n\in K, \quad \text{ö.k.} \quad K\subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

yazılabilir. Buradan

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \quad \text{ve} \quad V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

olarak tanımlanırsa, bu U ve V açık olup, $U\cap V=\varnothing$ sağlandığı görülür, çünkü her $y\in K$ için $U_y \cap V_y = \varnothing$ olduğundan $U_{y_i}\cap V_{y_i} = \varnothing$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dir. Buradan

$$x\in U\subset X-V\subset X-K$$

elde edilir. Şu halde x, $X - K$'nın bir iç noktasıdır. Bu nedenle $X - K$ açık ve dolayısıyla K kapalıdır. □

Teorem 9.5. *Her kompakt Hausdorff uzayı regülerdir.*

Kanıt. (X,τ) bir kompakt Hausdorff uzayı, $K\subset X$ kapalı bir küme ve $x\notin K$ olsun. Kompakt bir uzayın her kapalı altkümesi de kompakt olduğundan (bkz. Teorem 9.3) K kompakttır. Şu halde K bir Hausdorff uzayının kompakt altkümesi ve $x\notin K$ dir. Buradan, Teorem 9.4'ün kanıtında yapıldığı gibi, U ve V açık kümeleri,

$$x\in U\subset X-V\subset X-K$$

sağlanacak şekilde bulunabilir. Buradan, bu U ve V açık kümeleri için, $x\in U$, $K\subset V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olduğu görülür. Şu halde (X,τ) bir T_3-uzayıdır. Diğer yandan, her Hausdorff uzayı bir T_1-uzayı olduğundan (X,τ) regülerdir. □

Bundan başka, üstelik bu teoremden daha güçlü olan aşağıdaki teorem de gösterilebilir.

Teorem 9.6. *Her kompakt Hausdorff uzayı normaldır.*

Kanıt. (X,τ) bir kompakt Hausdorff uzayı, $A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \varnothing$ olsun. Teorem 9. 3'e göre A, B kompakttır.

Şimdi de $x \in A$ noktasını alıp sabit tutalım. Buradan, her $y \in B$ için $x \neq y$ olduğundan

$$\exists\ U_y, V_y \text{ açık, ö.k. } x \in U_y,\ y \in V_y \text{ ve } U_y \cap V_y = \varnothing$$

yazılabilir. Buradan $\{ V_y \mid y \in B \}$, B'nin bir açık örtümü ve B kompakt olduğundan

$$\exists\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in B, \quad \text{ö.k.} \quad B \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

sağlanır. Eğer

$$U_x := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \quad \text{ve} \quad V_x := \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

olarak tanımlanırsa, buradan U_x ve V_x açık olup, $x \in U_x$, $B \subset V_x$ ve $U_x \cap V_x = \varnothing$ sağlandığı görülür. Şu halde her $x \in A$ için

$$\exists\ U_x, V_x \text{ açık, ö.k. } x \in U_x,\ B \subset V_x \text{ ve } U_x \cap V_x = \varnothing$$

elde edilmiş olur. Buradan $\{U_x \mid x \in A\}$, A'nın bir açık örtümüdür. A kompakt olduğundan,

$$\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_m \in A, \quad \text{ö.k.} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$$

sağlanır. Şimdi de,

$$U := \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \qquad \text{ve} \qquad V := \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}$$

olarak tanımlanırsa, U ve V açık olup, $A \subset U$, $B \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olduğu görülür. Şu halde (X,τ) bir T_4-uzayıdır. Öte yandan bu uzay Hausdorff olduğu için aynı zamanda bir T_1-uzayıdır. Sonuç olarak (X,τ) hem T_1- ve hem de bir T_4-uzayı olduğu için normaldir. □

Teorem 9.7. *(X,τ) kompakt, (Y,τ^*) herhangi bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli ise $f(X)$ resim kümesi (Y,τ^*)'da kompakttır.*

Kanıt. $\mathcal{U} := \{ U_\nu \mid \nu \in I \}$, $f(X)$'in bir açık örtümü, yani

$$f(X) \subset \bigcup_{\nu \in I} U_\nu, \quad (U_\nu \in \tau^*)$$

olsun. Buradan

$$X = \bigcup_{\nu \in I} f^{-1}(U_\nu)$$

elde edilir. Her $\nu \in I$ için $U_\nu \subset Y$ açık ve f sürekli olduğundan, $\{ f^{-1}(U_\nu) \mid \nu \in I \}$, X'in bir açık örtümüdür. (X,τ) kompakt olduğundan

$$\exists\ S \subset I,\ S \text{ sonlu}, \quad \text{ö.k.} \quad X = \bigcup_{\nu \in S} f^{-1}(U_\nu)$$

yazılabilir. Buradan

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{\nu \in S} f^{-1}(U_\nu)\Big) = \bigcup_{\nu \in S} f(f^{-1}(U_\nu)) \subset \bigcup_{\nu \in S} U_\nu \quad \Rightarrow \quad f(X) \subset \bigcup_{\nu \in S} U_\nu$$

elde edilir. Şu halde $\{ U_\nu \mid \nu \in S \}$ ailesi, $\mathcal{U}$'nun sonlu bir altörtümü ve dolayısıyla $f(X)$ kompakttır. □

Sonuç 9.1. *(X,τ), (Y,τ^*) herhangi iki topolojik uzay, $A \subset X$ kompakt bir altküme ve $f: X \to Y$ sürekli ise $f(A)$ resim kümesi de (Y,τ^*)'da kompakttır.*

Kanıt. $A \subset X$ kompakt olduğundan (A,τ_A) kompakttır. Diğer yandan $f : X \to Y$ sürekli olduğundan $f\,|A : A \to Y$ daraltılmış fonksiyonu da süreklidir. Şu halde Teorem 9.7 'ye göre, $(f|A)(A)=f(A)$ resim kümesi de (Y,τ^*)'da kompakttır. □

Teorem 9.8. *(X,τ) kompakt, (Y,τ^*) Hausdorff ve $f: X \to Y$ bire-bir, örten ve sürekli ise bu f fonksiyonu bir topolojik dönüşümdür.*

Kanıt. f'nin kapalı olduğunu göstermek yeter. (X,τ) kompakt, $f: X \to Y$ sürekli ve örten olduğundan $f(X)=Y$ de kompakttır. $A \subset X$ kapalı bir altküme olsun. (X,τ) kompakt olduğundan Teorem 9.3'e göre A, (X,τ)'da kompakt ve Sonuç 9.1'e göre de $f(A)$, (Y,τ^*)'da kompakttır. Fakat (Y,τ^*) Hausdorff olduğundan Teorem 9.4'e göre $f(A)$, (Y,τ^*)'da kapalıdır. Şu halde f kapalıdır. □

Uyarı 9.5. $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ sürekli fonksiyonuna, (bazen $f([0,1])$ resim kümesine) $\mathbf{R}^2$'de bir "*eğri*" adı verilir. Teorem 9.2 ve Sonuç 9.1'e göre $f([0,1]) \subset \mathbf{R}^2$'de kompakttır. Bu $f([0,1])$, bizim anladığımız klasik anlamda bir eğri olmayabilir. İlk kez 1890 yılında PEANO'nun gösterdiği gibi, $[0,1]$'den $\mathbf{R}^2$'deki $[0,1]\times[0,1]$ kapalı karesinin üzerine sürekli bir fonksiyon vardır (*PEANO eğrisi*, bkz. [2], s.56). Diğer bir ifade ile, bir nokta kümesinin "boyutu"nun sürekli fonksiyonlar altında korunması gerekmez. Fakat BROUWER 1911 yılında, topolojik dönüşümlerin boyutu koruduğunu göstermiştir. Buna göre, $f: [0,1] \to \mathbf{R}^2$ için sürekli olmasının yanında bire-bir olması da istenirse, $f: [0,1] \to f([0,1]) \subset \mathbf{R}^2$ dönüşümü Teorem 9.8'e göre bir topolojik dönüşüm olur. Bu durumda, $f([0,1])$ resim kümesi de, $\mathbf{R}^2$'de 1-boyutludur. Dolayısıyla $f([0,1])$, $\mathbf{R}^2$'de klasik anlamda bir eğri olur. İşte bu şekilde elde edilen eğriye, yani bir $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ sürekli ve bire-bir fonksiyonuna (ya da $f([0,1])$ resim kümesine) bir *JORDAN eğrisi* denir. Şu halde Jordan eğrisinin Peano eğrisinden tek farkı, $f: [0,1] \to \mathbf{R}^2$ fonksiyonunun sürekliliğinin yanında, aynı zamanda bire-bir olmasıdır.

Teorem 9.9. (Tychonoff Teoremi)

$(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ boştan farklı topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu durumda,

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *çarpım uzayı kompakttır* $\Leftrightarrow$ *Her $\lambda\in\Lambda$ için (X_λ,τ_λ) kompakttır.*

Kanıt. "⇒" $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kompakt ve her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan, Teorem 9.7'ye göre, $p_\lambda(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = X_\lambda$ kompakttır.

"⇐" $\mathcal{F}$, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 'de bir ultrafiltre olsun. Her $\lambda\in\Lambda$ için p_λ örten olduğundan, $p_\lambda(\mathcal{F})$ resim filtresi de bir ultrafiltredir (bkz. Bölüm 7, P.13). Her $\lambda\in\Lambda$ için $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ kompakt olduğundan, Teorem 9.1 d)'ye göre $p_\lambda(\mathcal{F})$, $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ 'da yakınsaktır. Diğer bir ifade ile

$$\forall\ \lambda\in\Lambda \text{ için } \exists\ x_\lambda \in X_\lambda, \quad \text{ö.k.} \quad p_\lambda(\mathcal{F}) \to x_\lambda$$

sağlanır. O halde Teorem 7.18'e göre $\mathcal{F} \to (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve dolayısıyla Teorem 9.1'e göre $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kompakttır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Tychonoff Teoreminin en genel hali için verilen yukarıdaki dolaylı kanıtının yanında, sadece ikili çarpımlar için de olsa, bu önemli teoremin doğrudan bir kanıtının verilmesi, sonlu çarpımlar için de geçerli olan bir kanıt tekniği konusunda bilgi vermesi yönünden yararlı görülmüştür. Bu nedenle aşağıda, *kompakt iki topolojik uzayın çarpımının da kompakt olduğu* gösterilecektir. Bu düşünce biçiminin sonlu sayıda uzayın çarpımına da aynen uygulanabileceği kolayca görülür.

(X,τ), (Y,τ^*) iki kompakt topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, $X\times Y$ çarpım uzayının herhangi bir açık örtümü olsun. Bu açık örtümün sonlu bir altörtümü bulunduğu gösterilecektir. $\mathcal{G}$'nin her bir elemanı, $G\subset X$'de açık ve $H\subset Y$'de açık olmak üzere, $G\times H$ tipindeki taban elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabilir. $X\times Y$'nin, her biri $\mathcal{G}$'nin bir elemanı içinde kalan bu tip taban elemanlarından oluşan

$$\mathcal{G}^* := \{\, G_\lambda \times H_\lambda \ \mid\ \lambda\in \Lambda \,\}$$

örtümünü göz önüne alalım. Bu açık örtümün sonlu bir altörtümü varsa, bu altörtümün her bir elemanı da $\mathcal{G}$'nin bir elemanının içinde kaldığından, bu sonlu örtümün elemanlarını içeren $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıdaki elemanı, $\mathcal{G}$'nin sonlu bir altörtümünü oluşturur. O halde $\mathcal{G}^*$'in sonlu bir altörtümünün bulunduğunu göstermek yeter.

Her $x \in X$ için $Y_x := \{x\} \times Y$, altuzay topolojisi ile (Y, τ^*) uzayına ($(x,y) \to y$) homeomorf olduğundan (gösteriniz) ve (Y, τ^*) kompakt olduğundan, Y_x de kompakttır. $\mathcal{G}^*$, Y_x'in de bir örtümü olduğundan, bunun

$$\mathcal{G}_x^* := \{ G_{x,\lambda_i} \times H_{x,\lambda_i} \mid i = 1,2, \ldots, n(x) \}$$

gibi sonlu bir altörtümü vardır. Şimdi

$$G_x := \bigcap_{i=1}^{n(x)} G_{x,\lambda_i}$$

olarak tanımlanırsa, bu G_x'in x noktasını içeren bir açık küme olduğu görülür. Ayrıca yukarıdaki $\mathcal{G}_x^*$ örtümü gerçekte, $G_x \times Y$'yi de örter. Diğer yandan, $\{ G_x \mid x \in X \}$, X'in bir açık örtümü ve (X, τ) kompakt olduğundan, bu örtümün $\{ G_{x_j} \mid j = 1,2, \ldots, N \}$ gibi sonlu bir altörtümü vardır. İşte

$$\{ G_{x_j,\lambda_i} \times H_{x_j,\lambda_i} \mid i = 1,2, \ldots, n(x_j) \; ; \; j = 1,2, \ldots, N \}$$

ailesi $X \times Y$'nin bir örtümüdür ve bu örtüm $\mathcal{G}^*$'in sonlu bir altörtümüdür. Böylece kanıt tamamlanır. □

Sonuç 9.2. *$a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ ve $M \subset \mathbf{R}$ herhangi bir altküme ise*

$$[a, b]^M := \prod_{\nu \in M} [a, b]_\nu , \qquad ([a, b]_\nu = [a, b] \; , \; \forall \nu \in M)$$

kümesi kompakttır.

Kanıt. Heine-Borel Teoremine göre $[a, b]$ kompakt olduğundan, bunların çarpımı olan $[a, b]^M$ kümesi de Tychonoff Teoremine göre kompakttır. □

$[a, b]^M$ kümesine bir *küb* adı verilir. Özel olarak, $[0, 1]^{\mathbf{N}}$ çarpımına *Hilbert kübü* denir.

Tanım 9.3. $\mathbf{R}^n$, $(n \geq 1)$ n-boyutlu Öklid uzayı ve $A \subset \mathbf{R}^n$ olsun. Eğer,

$$\exists \; r > 0 \quad \text{ö.k.} \quad A \subset K(\mathbf{0}, r), \qquad (\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n)$$

sağlanıyorsa, bu A kümesine $\mathbf{R}^n$'de sınırlıdır denir.

Tychonoff Teoremi yardımıyla $\mathbf{R}^n$'de kompaktlık aşağıdaki gibi karakterize edilebilir:

Teorem 9.10. *$A \subset \boldsymbol{R}^n$, $(n \geq 1)$ olsun. A kompakttır $\Leftrightarrow$ A kapalı ve sınırlıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" A kompakt olsun. $\mathbf{R}^n$ Hausdorff olduğundan A kapalıdır. Diğer yandan,

$$A \subset \bigcup_{a \in A} K(a,1)$$

olduğundan $\{K(a,1) \mid a \in A\}$, A'nın $\mathbf{R}^n$'de bir açık örtümüdür. A kompakt olduğundan bu örtümün de sonlu bir altörtümü vardır. Diğer bir ifade ile,

$$\exists\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in A\,, \quad \text{ö.k.} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{k} K(a_i,1)$$

yazılabilir. Buradan, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ olmak üzere,

$$r = \text{maks}\{\ e(\mathbf{0}, a_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\ \} + 1$$

olarak seçilirse,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} K(a_i,1) \subset K(\mathbf{0},r) \quad \Rightarrow \quad A \subset K(\mathbf{0},r)$$

elde edilir. Şu halde A sınırlıdır.

"$\Leftarrow$" A kapalı ve sınırlı olsun. A sınırlı olduğundan,

$$\exists\ r > 0 \quad \text{ö.k.} \quad A \subset K(\mathbf{0},r) \subset [-r, r]^n$$

yazılabilir. Fakat A kümesi $\mathbf{R}^n$'de aynı zamanda kapalı olduğundan $[-r, r]^n$ kümesinde de kapalıdır. Tychonoff Teoremine göre $[-r, r]^n$ kompakt olduğundan Teorem 9.3'e göre A, önce $[-r, r]^n$'de kompakt, dolayısıyla üst uzayda, yani $\mathbf{R}^n$'de kompakttır. □

Teorem 9.10, "$\mathbf{R}^n$'de Heine-Borel Teoremi" olarak da bilinir.

Teorem 9.11. *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. $\varnothing \neq A \subset X$ kompakt ve $f : X \to \mathbf{R}$ sürekli ise*

$$\exists\ a_1,\ a_2 \in A,\quad \text{ö.k.}\quad f(a_1) = \sup f(A) \quad \text{ve} \quad f(a_2) = \inf f(A)$$

sağlanır.

Kanıt. $A \subset X$ kompakt ve f sürekli olduğundan, $f(A) \subset \mathbf{R}$'de kompakttır. O halde Teorem 9.10'a göre $f(A)$, $\mathbf{R}$ 'de kapalı ve sınırlıdır. $f(A)$ sınırlı olduğundan

$$c := \sup f(A) \quad \text{ve} \quad d := \inf f(A)$$

mevcuttur. Fakat $f(A)$ aynı zamanda kapalı olduğundan $c, d \in f(A)$ olmak zorundadır. Buradan,

$$\exists\ a_1,\ a_2 \in A,\quad \text{ö.k.}\quad f(a_1) = c \quad \text{ve} \quad f(a_2) = d$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Tanım 9.4. Bir topolojik uzayın her açık örtümünün sayılabilir bir altörtümü varsa, bu topolojik uzaya bir *Lindelöf uzayı* adı verilir.

Tanımları karşılaştırılınca hemen görüleceği gibi, her kompakt topolojik uzay bir Lindelöf-uzayıdır. Bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin X sayılabilir sonsuz olmak üzere, (X,τ_D) ayrık uzayı kompakt olmayan bir Lindelöf uzayıdır.

Teorem 9.12. *Her A_2-uzayı bir Lindelöf uzayıdır.*

Kanıt. (X,τ) bir A_2-uzayı, $\mathcal{B}$ bunun sayılabilir bir tabanı ve $\mathcal{G}$, X'in herhangi bir açık örtümü olsun. Her $G \in \mathcal{G}$ ve her $x \in G$ için

$$\exists\ B_{x,G} \in \mathcal{B},\quad \text{ö.k.}\quad x \in B_{x,G} \subset G$$

sağlanır. $\mathcal{B}^* := \{\, B_{x,G} \mid x \in G,\ G \in \mathcal{G} \,\}$ olarak tanımlanırsa, $\mathcal{B}$ sayılabilir ve $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B}^*$ da sayılabilirdir. $\mathcal{B}^* := \{ B_{x_1,G_1},\ B_{x_2,G_2},\ \ldots \}$ şeklinde yazılırsa, $\{G_1, G_2, \ldots \}$, $\mathcal{G}$'nin sayılabilir bir altörtümü olur. Bunu göstermek için, bu sayılabilir ailenin bir örtüm olduğunu göstermek yeter. Bu ise kolaydır. $\mathcal{G}$ bir örtüm olduğundan herhangi bir $x \in X$ için, $x \in G$

olacak şekilde bir $G \in \mathcal{G}$ vardır. $\mathcal{B}$'nin bir taban olduğu ve $\mathcal{B}^*$'in tanımı göz önünde bulundurulursa,

$$\exists \; B_{x_j, G_j} \in \mathcal{B}^*, \quad \text{ö.k.} \quad x \in B_{x_j, G_j} \subset G_j \;\Rightarrow\; x \in G_j$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Herhangi bir topolojik uzayda, kompaktlık ile, Lindelöf uzayı, A_2-uzayı ve ayrılabilir uzay olma tanımları karşılaştırılırsa, aşağıdaki diagram elde edilir:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Kompakt uzay} & & \\ & & & \searrow & \\ \text{Ayrılabilir uzay} & \Leftarrow & A_2\text{-uzayı} & \Rightarrow & \text{Lindelöf uzayı} \end{array}$$

Uyarı 9.6. Yukarıdaki diagramda görülen okların hiçbiri ilave bir koşul olmadan tersine çevrilemez (bkz. P.13). Fort uzayı örneğinde görüldüğü gibi, ne Lindelöf uzayı olma özelliği ve ne de kompaktlık, ayrılabilirliği veya A_2-uzayı olma özelliğini vermez (bkz. P.14, P.15, P.16).

Tanım 9.5. Bir topolojik uzayın sayılabilir her açık örtümünün sonlu bir altörtümü varsa, bu topolojik uzaya *sayılabilir kompakt* adı verilir.

Tanımları karşılaştırılınca hemen görüleceği gibi,

$$(X,\tau) \text{ kompakttır } \Leftrightarrow (X,\tau) \text{ sayılabilir kompakt ve Lindelöftur.}$$

denkliği sağlanır.

Uyarı 9.7. Bir A_2-uzayında, kompaktlık ile sayılabilir kompaktlık denktirler. Gerçekten (X,τ) bir A_2-uzayı olsun. Eğer (X,τ) kompakt ise aşikar olarak sayılabilir kompakttır. Tersine olarak, (X,τ) sayılabilir kompakt ise Teorem 9.12'ye göre, her A_2-uzayı bir Lindelöf uzayı olduğundan, (X,τ) sayılabilir kompakt bir Lindelöf uzayı olur ve o nedenle kompakttır.

Aşağıdaki teorem sayılabilir kompaktlığın diziler yardımıyla da belirlenebileceğini göstermektedir.

Teorem 9.13. *(X,τ)'nun sayılabilir kompakt olması için gerek ve yeter koşul, X'deki her dizinin (X,τ)'da bir yığılma noktasının bulunmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) sayılabilir kompakt ve $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun. Bu dizinin hiçbir yığılma noktasının bulunmadığını kabul edelim. Her $n\in\mathbf{N}$ için $S_n := \{ x_k \mid k \geq n \}$ olarak tanımlanırsa, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n = \varnothing$ olduğu görülür. Gerçekten, eğer $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n$ olsaydı, her $n\in\mathbf{N}$ için $x \in \overline{S}_n$, ve dolayısıyla, her $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ ve her $n\in\mathbf{N}$ için,

$$\exists\ k\in\mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad k \geq n \quad \text{ve} \quad x_k \in U$$

sağlanırdı ve dolayısıyla x, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisinin bir yığılma noktası olurdu. Fakat bu durum kabulümüz ile çelişir. O halde, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n = \varnothing$ olur. Buradan,

$$X = X - \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X - \overline{S}_n)$$

elde edilir. Şu halde, $\{ X - \overline{S}_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$, X'in sayılabilir bir açık örtümüdür. (X,τ) sayılabilir kompakt olduğundan,

$$\exists\ n_o\in\mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad X = \bigcup_{i=1}^{n_o}(X - \overline{S}_{n_i}),$$

ve buradan da,

$$\varnothing = X - (\bigcup_{i=1}^{n_o}(X - \overline{S}_{n_i})) = \bigcap_{i=1}^{n_o}\overline{S}_{n_i}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\bigcap_{i=1}^{n_o}S_{n_i} = \varnothing$ olmalıdır. Fakat bu durum, S_n'lerin tanımına göre olanak dışıdır. Şu halde kabulümüz yanlıştır, yani $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisi bir yığılma noktasına sahip olmalıdır.

"$\Leftarrow$" (X,τ)'nun sayılabilir kompakt olmadığını kabul edelim. $\mathcal{G}=\{G_k \mid k\in\mathbf{N}\}$ X'in, hiçbir sonlu altörtümü bulunmayan sayılabilir bir açık örtümü ise

$$\forall\ n\in\mathbf{N} \quad \text{için} \quad \exists\ x_n \in X - \bigcup_{k=1}^{n} G_k$$

yazılabilir. Hipoteze göre, bu şekilde elde edilen $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisinin de $x_o\in X$ gibi bir yığılma noktası vardır. $\mathcal{G}$ bir örtüm olduğundan, $x_o\in G_j$ olacak şekilde bir $G_j\in\mathcal{G}$ vardır. $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisinin tanımına göre buradan,

$$\forall\ n \geq j \quad \text{için} \quad x_n \notin G_j$$

olduğu görülür. Bu durum, x_o'ın, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisinin bir yığılma noktası olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır, yani (X,τ) sayılabilir kompakt olmak zorundadır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Tanım 9.6. Bir topolojik uzaydaki her dizinin yakınsak bir altdizisi varsa, bu topolojik uzaya *dizisel kompakt* adı verilir.

Uyarı 9.8. a) Her dizisel kompakt topolojik uzay sayılabilir kompakttır. Bu ifade, Tanım 9.6, Teorem 7.8 ve Teorem 9.13'ün bir sonucudur.

b) Her sayılabilir kompakt A_1-uzayı dizisel kompakttır. Bu ifade ise Teorem 9.13 ve Teorem 7.9'un bir sonucudur.

c) Herhangi bir topolojik uzayda, dizisel kompaktlık, kompaktlıktan ne güçlü ve ne de zayıf bir özelliktir. Bu iki özellik birbirinden tamamen bağımsızdır.

Buna göre, Uyarı 9.8 a) ve b)'den hemen görüleceği gibi, A_1-uzaylarında, sayılabilir kompaktlık ile dizisel kompaktlık denktir.

Diğer yandan, her A_2-uzayı aynı zamanda bir A_1-uzayı olduğundan, Uyarı 9.7 ile birlikte buradan, A_2-uzaylarında, kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramlarının denk olduğu sonucuna varılır.

Özel olarak, $(\mathbf{R}^n,\tau_e^n)$ topolojik uzayında da kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık denktir. Çünkü bilindiği gibi bu uzay da bir A_2-uzayıdır (bkz. Örnek 4.5).

Tanım 9.7. Bir (X,τ) topolojik uzayının sonsuz elemanlı her altkümesinin X'de bir yığılma noktası varsa, bu topolojik uzaya *Bolzano-Weierstraß kompakttır* denir.

Teorem 9.14. *Her kompakt topolojik uzay Bolzano-Weierstraß kompakttır*

Kanıt. (X,τ) kompakt olsun. Bir $A \subset X$ altkümesinin hiç bir yığılma noktasına sahip olmadığını kabul edelim. O halde, her $x\in X$ için $x\notin A'$ ve dolayısıyla her $x\in X$ için

$$\exists\ U_x\in \mathcal{U}_\tau(x),\ U_x \text{ açık}, \quad \text{ö.k.} \quad (U_x - \{x\})\cap A = \varnothing$$

yazılabilir. Buradan her $x\in X$ için

$$\exists\ U_x\in \mathcal{U}_\tau(x),\ U_x \text{ açık}, \quad \text{ö.k.} \quad U_x \cap A = \{x\} \quad \text{veya} \quad U_x \cap A = \varnothing$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen U_x açık komşuluklarının, $\mathcal{U}=\{ U_x \mid x\in X \}$ ailesi, X'in bir açık örtümüdür. Uzay kompakt olduğundan

$$\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n\in X \qquad \text{ö.k.} \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\ ,$$

ve buradan da,

$$A = A\cap X = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap U_{x_i}) \subset \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

elde edilir. Çünkü her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $A \cap U_{x_i}$ kümelerinin her biri ya boştur, ya da sadece tek elemanlı $\{x_i\}$ kümesine eşittir. Şu halde A kümesi sonlu olmak zorundadır. Bu nedenle, X'in sonsuz elemanlı her altkümesinin, X'de en az bir yığılma noktası mevcut olmalıdır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Herhangi bir topolojik uzayda verilen ve yukarıda tartışılan değişik kompaktlık kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki şemada bir araya getirilmiştir.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Bolzano-Weierstraß kompakt} & & & & \\
\Uparrow & & & & \\
\text{Kompakt} & \Rightarrow & \text{Sayılabilir kompakt} & \Leftarrow & \text{Dizisel kompakt} \\
\Downarrow & & & & \\
\text{Lindelöf} & & & &
\end{array}
$$

Ek bir koşul olmadan, yukarıdaki oklardan hiç biri genel olarak tersine çevrilemez. Bazı özel topolojik uzaylardaki denkliklere Uyarı 9.8'de dikkat çekilmiştir. Orada açıklandığı gibi, birinci sayılabilir uzaylarda, dizisel kompaktlık ile sayılabilir kompaktlık denk; ikinci sayılabilir uzaylarda ise kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları denktir.

B. Yerel Kompakt Uzaylar

Analizde karşılaşılan uzaylar, çoğu kez kompakt olmamakla birlikte, her noktasının kompakt bir komşuluğu vardır. Bu özelliğe sahip topolojik uzaylar, diğer özellikleri bakımından da araştırmalarda önemli bir yere sahiptir.

Tanım 9.8. Bir topolojik uzayın her noktasının kompakt bir komşuluğu varsa, bu topolojik uzaya *yerel kompakt (lokal kompakt)* uzay adı verilir.

Örnek 9.2. a) Her kompakt topolojik uzay yerel kompakttır. Çünkü uzayın kendisi her noktasının kompakt bir komşuluğudur.

b) $(\mathbf{R},\tau_e)$ yerel kompakttır, fakat bilindiği gibi kompakt değildir. Aynı şey $(\mathbf{R}^n,\tau_e^n)$ için de geçerlidir.

c) **Q** rasyonel sayılar kümesi kendi doğal topolojisi ile (**R**'nin altuzayı olarak) yerel kompakt değildir. Bunu göstermek için aksini varsayalım. Her $x\in\mathbf{Q}$ noktasının altuzayda K gibi bir kompakt komşuluğu bulunsun. Uygun bir $(a,b)\subset\mathbf{R}$ aralığı için $x\in(a,b)\cap\mathbf{Q}\subset K$ sağlanır. $s\in(a,b)$ bir irrasyonel sayı olmak üzere, her $y\in K$ için

$$U_y := \begin{cases} (y,\ \infty)\ , & s < y \\ (-\infty,\ y), & s > y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\{U_y \cap K \mid y \in K\}$, K'nın bir açık örtümü olup, bu örtümün sonlu bir altörtümü yoktur. Bu durum K'nın kompakt olmasıyla çelişir.

Teorem 9.15. *Her yerel kompakt Hausdorff uzayı regülerdir.*

Kanıt. (X,τ) bir yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun. Her Hausdorff uzayı bir T_1-uzayı olduğundan, (X,τ)'nun bir T_3-uzayı olduğunu göstermek yeter. Bunun için, X'in her noktasının kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanına sahip olduğunu göstereceğiz.

$x \in X$ ve $K \in \mathcal{U}_\tau(x)$ kompakt bir komşuluk olsun. K, (X,τ) Hausdorff uzayının kompakt altkümesi olduğundan τ-kapalıdır. Ayrıca (K,τ_K) bir kompakt Hausdorff uzayı olduğundan regülerdir (bkz. Teorem 9.5).

Şimdi $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ herhangi bir komşuluk ise $U \cap K \in \mathcal{U}_{\tau_K}(x)$ ve (K,τ_K) altuzayı regüler olduğundan

$$\exists\ F \in \mathcal{U}_{\tau_K}(x), \quad F \quad \tau_K\text{-kapalı}, \quad \text{ö.k.} \quad F \subset U \cap K$$

sağlanır. Buradan, bu F kümesinin üst uzayda da x'in bir kapalı komşuluğu olduğu ve $F \subset U$ sağlandığı görülür. Gerçekten,

$$F \in \mathcal{U}_{\tau_K}(x) \quad \Rightarrow \quad \exists\ V \in \mathcal{U}_\tau(x), \quad \text{ö.k.} \quad F = V \cap K \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{U}_\tau(x)$$

dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} F \quad \tau_K\text{-kapalı} \quad &\Rightarrow \quad \exists\ B \subset X, \quad B \quad \tau\text{-kapalı} \quad \text{ö.k.} \quad F = B \cap K \\ &\Rightarrow \quad F \quad \tau\text{-kapalıdır.} \end{aligned}$$

Şu halde her $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ için,

$$\exists\ F \in \mathcal{U}_\tau(x), \quad F \quad \tau\text{-kapalı}, \quad \text{ö.k.} \quad x \in F \subset U \cap K \subset U$$

elde edilir. Böylece $x \in X$ noktasının kapalı komşuluklarının bu noktada bir komşuluk tabanı oluşturduğu gösterilmiş olur ve kanıt biter. □

Teorem 9.16. *Bir yerel kompakt Hausdorff uzayının her noktasında kompakt komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanı vardır.*

Kanıt. (X,τ) bir yerel kompakt Hausdorff uzayı, $x\in X$, $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$, x'in herhangi bir komşuluğu ve $K\in\mathcal{U}_\tau(x)$, x'in kompakt bir komşuluğu olsun. Teorem 9.15'e göre (X,τ) regüler olduğundan, x'in $x\in V\subset U$ koşulunu sağlayan kapalı bir $V\in\mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluğu vardır (bkz.Teorem 8.12). Buradan $V\cap K$'nın, x noktasının U içinde kalan kompakt bir komşuluğu olduğu görülür. Gerçekten, $V\cap K$ iki komşuluğun arakesiti olarak x'in yine bir komşuluğudur ve $V\cap K\subset V\subset U$ sağlanmaktadır. Ayrıca $V\cap K$, K'da kapalı ve K kompakt olduğundan $V\cap K\subset K$, K'da kompakt ve dolayısıyla (X,τ)'da kompakttır. □

Tanım 9.9. (X,τ) bir topolojik uzay, (K,τ^*) bir kompakt Hausdorff uzayı ve $h : X\to K$ bir gömme fonksiyonu olsun. Eğer $h(X)$ resim kümesi (K,τ^*) topolojik uzayında yoğun ise bu (K,τ^*) topolojik uzayına, (X,τ)'nun bir *kompaktlaştırması* adı verilir.

Homeomorf topolojik uzaylara, topolojik açıdan aynı uzay gözü ile bakılabileceğinden, Tanım 9.9'daki $h(X)$ yerine çoğu kez yine X yazılır.

Çok sayıda kompaktlaştırma örnekleri verilebilir. Örneğin, [0, 1], [0, 1)'in; ve $S^1:=\{ (x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ birim çemberi de (stereografik izdüşüm altında) $\mathbf{R}$ 'nin bir kompaktlaştırmasıdır. Bu kompaktlaştırmaların her ikisi de ilk uzaylara birer nokta katılması ile elde edilmişlerdir. Bunun gibi, genel olarak kompakt olmayan yerel kompakt Hausdorff uzaylarına bir nokta katılarak kompaktlaştırılabilir (bkz. Teorem 9.17).

Teorem 9.17 (Alexandroff Kompaktlaştırma Teoremi)

(X,τ) kompakt olmayan yerel kompakt bir Hausdorff uzayı, $w\notin X$ bir nokta ve $X^*:= X\cup\{w\}$ olsun. Bu durumda X^* üzerinde öyle bir τ^* topolojisi vardır ki, (X^*,τ^*) bir kompakt Hausdorff uzayı ve (X,τ) bu uzayın yoğun bir altuzayıdır. Homeomorfizmden vazgeçildiği taktirde bu özelliği sağlayan (X^*,τ^*) topolojik uzayı tek türlü belirlidir.

Kanıt. Ayrıntıları burada yapılmayacaktır. Ancak,

$$\tau^* := \tau \cup \{\, G \subset X^* \;\;|\;\; G = X^* - K, \;\; K \subset X \text{ ve } K \text{ kompakt } \}$$

ailesinin X^* üzerinde istenen özellikleri sağlayan bir topoloji olduğu gösterilebilir (bkz. H. SCHUBERT, s. 86). □

Kompakt olmayan yerel kompakt bir (X,τ) Hausdorff uzayından yola çıkarak, yukarıdaki teoremde yapıldığı gibi inşa edilen (X^*,τ^*) kompakt Hausdorff uzayına, (X,τ)'nun *Alexandroff Kompaktlaştırması* (veya *Tek Nokta Kompaktlaştırması*) denir.

C. Baire Uzayları

Tanım 9.10. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in açık ve yoğun altkümelerinden oluşan sayılabilir her ailenin arakesiti de (X,τ)'da yoğun ise bu (X,τ) topolojik uzayına bir *Baire uzayı* adı verilr.

Tanım 9.11. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir altküme olsun.

a) Eğer $(\overline{A})^{\circ} = \varnothing$ ise A kümesine (X,τ)'da *hiç bir yerde yoğun değildir* (veya *seyrektir*) denir.

b) Eğer A, (X,τ)'da hiç bir yerde yoğun olmayan sayılabilir sayıdaki A_n ($n= 1, 2, \dots$) kümelerinin birleşimi olarak, diğer bir ifade ile

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu A kümesine (X,τ)'da *1. kategoriden*'dir denir. X'in 1. kategoriden olmayan diğer bütün altkümelerine ise (X,τ)'da *2. kategoriden* adı verilir.

1. kategoriden kümelere "zayıf kümeler" de denir.

Örnek 9.3. **Q** rasyonel sayılar kümesi **R**'de 1. kategoridendir. Gerçekten, her $q \in \mathbf{Q}$ için $\{q\}$, **R**'de hiç bir yerde yoğun değildir ve

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{q\}$$

şeklinde yazılabildiği apaçıktır.

Teorem 9.18. *Her Baire uzayı kendisinin içinde 2. kategoridendir.*

Kanıt. (X,τ) bir Baire uzayı ve X kendisinin içinde 1. kategoriden olsun. Bu durumda, hiçbir yerde yoğun olmayan A_n kümeleri ile

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olacak şekilde yazılabilir. $(\overline{A_n})^o = (\overline{\overline{A_n}})^o$ olduğundan, $\overline{A_n}$ kümeleri de hiçbir yerde yoğun değildir ve

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

sağlanır. Buradan, $X - \overline{A_1}$, $X - \overline{A_2}, \ldots, X - \overline{A_n}, \ldots$ kümelerinin (X,τ)'da açık ve yoğun olduğu ve

$$\varnothing = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{A_n})$$

sağlandığı görülür. Bu durum ise (X,τ)'nun bir Baire uzayı olması ile çelişir. Şu halde X, kendisinin içinde 2. kategoridendir. □

Teorem 9.19 (Baire Teoremi)

Her yerel kompakt Hausdorff uzayı bir Baire uzayıdır.

Kanıt. (X,τ) yerel kompakt bir Hausdorff uzayı ve $D_1, D_2, \ldots$, X'in açık ve yoğun altkümelerinin herhangi bir dizisi olsun. $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ kümesinin X'de yoğun olduğunu göstermek için, X'in boştan farklı her açık altkümesi ile bu kesişimin arakesitinin boş olmadığını göstereceğiz:

$G \neq \emptyset$, X'de açık herhangi bir altküme olsun. $\overline{D_1} = X$ olduğundan $D_1 \cap G \neq \emptyset$ dır. $x \in D_1 \cap G$ ise $D_1 \cap G$ bu x noktasının bir açık komşuluğudur. X yerel kompakt bir Hausdorff uzayı olduğundan,

$$\exists\ K_1 \in \mathcal{U}_\tau(x)\ ,\quad K_1 \text{ kompakt},\quad \text{ö.k.}\quad K_1 \subset D_1 \cap G\ .$$

Eğer $G_1 := \overset{o}{K_1}$ olarak tanımlanırsa, G_1'in x'in relatif kompakt bir komşuluğu olduğu ve

$$\overline{G_1} \subset \overline{K_1} = K_1 \subset D_1 \cap G$$

sağlandığı görülür. Gerçekten G_1 relatif kompakttır. Çünkü K_1, bir Hausdorff uzayının kompakt altkümesi olarak kapalı ve $\overline{G_1}$ kompakt bir uzayın kapalı altkümesi olarak kompakttır.

Aynı düşünce tarzı, D_1 ve G yerine bu defa, D_2 ve G_1 açık kümelerine uygulanırsa, relatif kompakt bir $G_2 \neq \emptyset$ açık kümesi

$$\overline{G_2} \subset D_2 \cap G_1$$

sağlanacak şekilde elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse, tümevarımla boş olmayan relatif kompakt açık kümelerden oluşan bir $G_1, G_2, \ldots$ dizisi her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\overline{G_n} \subset D_n \cap G_{n-1}$$

sağlanacak şekilde elde edilmiş olur. Ayrıca,

$$K_1 \supset \overline{G_1} \supset \overline{G_2} \supset \ \ldots \supset \overline{G_n} \supset \ldots$$

olduğu göz önüne alınırsa, $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \ldots, \overline{G_n}, \ldots$ kümelerinin K_1 kompakt kümesinin kapalı altkümelerinin bir ailesi olduğu ve bunlardan herhangi sonlu tanesinin arakesitinin boş olmadığı, yani sonlu arakesit özelliğine sahip olduğu görülür. Şu halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \neq \emptyset$ olur.

Diğer yandan, $\overline{G_1} \subset D_1 \cap G$, ve her $n \in \mathbf{N}$ için $\overline{G_n} \subset D_n$ sağlandığından

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \subset G \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) \quad \Rightarrow \quad G \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) \neq \varnothing$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanır. □

Teorem 9.20. *Bir (X, τ) Baire uzayının her sayılabilir kapalı örtümünün içi boş olmayan bir elemanı vardır.*

Kanıt. $\mathcal{U} = \{ U_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$, X'in kapalı bir örtümü, yani her $n \in \mathbf{N}$ için U_n kapalı ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ olsun. Buradan $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - U_n) = \varnothing$ elde edilir. (X,τ) Baire uzayı olduğundan, $X - U_n$ ($n=1,2, \ldots$) açık kümelerinin hepsi (X,τ)'da yoğun olamaz. Buradan da,

$$\exists\ j \in \mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad \overline{X - U_j} \neq X \quad \Rightarrow \quad X - \overline{X - U_j} = \overset{o}{U}_j \neq \varnothing$$

elde edilir. □

D. Metrik Uzaylarda Kompaktlık

Metrik uzaylarda, kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları birbirlerine denktir. Şimdi de, metrik uzaylarda bu üç kavramın denkliği gösterilecektir.

Önce metrik uzaylarda, kompaktlık ile Lindelöf uzayı, A_2-uzayı ve Ayrılabilir uzay olma özellikleri arasındaki ilişkileri araştıralım:

Teorem 9.21. *Her Lindelöf metrik uzayı bir A_2-uzayıdır.*

Kanıt. (X, d) bir Lindelöf metrik uzayı olsun. Her $k \in \mathbf{N}$ için

$$\{ K(x, \frac{1}{k}) \mid x \in X \}$$

bu uzayın, metrik topolojiye göre bir açık örtümüdür. Uzay Lindelöf olduğundan bu örtümün de

$$\{\ K(x_n^{(k)}, \frac{1}{k})\ \mid\ n = 1, 2, \ldots\ \}$$

şeklinde sayılabilir bir altörtümü vardır. Bu altörtümlerle elde edilen

$$\mathcal{B} := \{\ K(x_n^{(k)}, \frac{1}{k})\ \mid\ n, k \in \mathbf{N}\ \}$$

ailesinin, d metriği ile üretilen τ_d metrik topolojisi için sayılabilir bir taban olduğu gösterilebilir.

Aşikar olarak $\mathcal{B}$ açık kümelerin sayılabilir bir ailesidir. Diğer yandan. $G \in \tau_d$ ve $x \in G$ ise uygun bir $\varepsilon > 0$ için $K(x, \varepsilon) \subset G$ sağlanır. Burada, $j > \frac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde seçilen bir $j \in \mathbf{N}$ için de $\{\ K(x_n^{(j)}, \frac{1}{j})\ \mid\ n = 1, 2, \ldots\ \}$, X 'in bir açık örtümü olduğundan,

$$\exists\ m \in \mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad x \in K(x_m^{(j)}, \frac{1}{j}) \in \mathcal{B}$$

dir. Ayrıca, bu $K(x_m^{(j)}, \frac{1}{j})$ için, $x \in K(x_m^{(j)}, \frac{1}{j}) \subset K(x, \varepsilon) \subset G$ sağlanır. Gerçekten, eğer $y \in K(x_m^{(j)}, \frac{1}{j})$ ise $d(x_m^{(j)}, y) < \frac{1}{j}$ olduğundan,

$$d(x,y) \leq d(x,\ x_m^{(j)}) + d(x_m^{(j)}, y) < \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} < \varepsilon,$$

yani $y \in K(x, \varepsilon)$ dir. □

Her A_2-uzayının hem bir Lindelöf uzayı ve hem de bir ayrılabilir uzay olduğunu daha önce görmüştük (bkz. Teorem 9.12 ve Teorem 4.11). Her ayrılabilir metrik uzay bir A_2-uzayı olduğundan (bkz. Teorem 4.12), Teorem 9.21 ile birlikte, bir metrik uzayda, kompaktlık ile Lindelöf uzayı, A_2-uzayı ve ayrılabilir uzay olma özellikleri arasında aşağıdaki denklikler sağlanır:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Kompakt uzay} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \text{Ayrılabilir uzay} & \Leftrightarrow & A_2\text{-uzayı} & \Leftrightarrow & \text{Lindelöf uzayı} \end{array}$$

Topolojik uzaylarda kompaktlık kavramı verildiğinde, Heine-Borel Teoremi genel bir topolojik uzayda anlamını kaybetmiştir. Çünkü topolojik uzaylarda sınırlılık kavramı yoktur. Ancak bu kavram metrik uzaylara kolayca genelleştirilmiştir. Tanım 2.9'dan hatırlanacağı gibi, (X,d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Eğer

$$\exists \; r > 0 \,, \quad \text{öyle ki} \quad \forall \; x, y \in A \quad \text{için} \quad d(x, y) < r$$

sağlanıyorsa, A altkümesine bu metrik uzayda *sınırlıdır* denir.

Her metrik uzay bir Hausdorff uzayı olduğundan, bir metrik uzayın her kompakt altkümesi kapalıdır. Metrik uzaylarda kompakt altkümelerin aynı zamanda sınırlı olduğu da gösterilebilir. Bu kolaydır (bkz. P. 21). Biz burada, metrik uzaydaki kompakt kümelerin, hatta sayılabilir kompakt kümelerin, sınırlılıktan daha güçlü "tam sınırlı" (bkz. Tanım 9.12) olduklarını göstereceğiz. Ancak $\mathbf{R}^n$'dekinin aksine, herhangi bir metrik uzayda, kapalı ve sınırlı bir altkümenin kompakt olması gerekmez. Örneğin, $(\mathbf{N}, \rho)$ ayrık metrik uzayında $A = \{ 2, 4, 6, \ldots \}$ çift doğal sayılar kümesi kapalı ve sınırlıdır. Ancak τ_ρ metrik topolojisi ayrık topoloji, ve A sonsuz olduğundan kompakt değildir. Diğer bir örnek, **H** Hilbert uzayında (bkz. Bölüm 2, P.3) kapalı ve sınırlı top kompakt değildir (bkz. J. Pervin, s.109, Theorem 6.3.3).

Tanım 9.12. a) (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Eğer bir $F \subset X$ altkümesi için

$$A \subset \bigcup_{x \in F} K(x, \varepsilon)$$

sağlanıyorsa, bu F altkümesine A'nın bir *ε-ağı* adı verilir.

b) (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için A'nın sonlu bir ε-ağı varsa bu A altkümesine *tam sınırlıdır* (total sınırlı) denir. Eğer $A=X$ ise (X, d) uzayına *tam sınırlı uzay* adı verilir.

Kolayca görüleceği gibi, tam sınırlı her küme sınırlıdır. Diğer yandan her kompakt uzay sayılabilir kompakt olduğundan aşağıdaki teorem, bir metrik uzayda her kompakt kümenin sınırlı olduğunu da ifade eder.

Teorem 9.22. *Her sayılabilir kompakt metrik uzay tam sınırlıdır.*

Kanıt. (X, d) sayılabilir kompakt bir metrik uzay olsun. X'in tam sınırlı olmadığını kabul edelim. Şu halde bir $\varepsilon>0$ için X'in sonlu bir ε-ağı yoktur. Bu nedenle, örneğin herhangi bir $x_1 \in X$ için de $\{x_1\}$ kümesi X'in bir ε-ağı değildir. Buradan,

$$\exists\ x_2 \in X, \quad \text{ö.k.} \quad x_2 \notin K(x_1,\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$$

yazılabilir. Aynı nedenle, $\{x_1,x_2\}$ kümesi de X'in bir ε-ağı değildir. Buradan

$$\exists\ x_3 \in X, \quad \text{ö.k.} \quad x_3 \notin K(x_1,\varepsilon) \cup K(x_2,\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d(x_1, x_3) \geq \varepsilon \quad \text{ve} \quad d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$$

elde edilir.

. . . .

Bu işleme devam edilerek n. adımda elde edilen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesinin X'in bir ε-ağı olmadığını ve dolayısıyla $i, j=1, 2, \ldots, n$ ve $i \neq j$ için $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ sağlandığını kabul edelim. Buradan aynı nedenle, bunun n+1 için de doğru olduğu görülür. Böylece tümevarımla farklı noktalardan oluşan ve $i \neq j$ için $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir (x_n) dizisi elde edilir. (X,τ_d) sayılabilir kompakt olduğundan (x_n) dizisinin x_o gibi bir yığılma noktası vardır (bkz Teorem 9.13). O halde $K(x_o,\frac{\varepsilon}{2})$ komşuluğunun (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimini içermesi gerekir (neden?). Fakat bu olanaksızdır. Çünkü, eğer $x_i, x_j \in K(x_o,\frac{\varepsilon}{2})$, $(i \neq j)$ ise

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_o) + d(x_o, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ olması ile çelişir. Şu halde kabulümüz yanlıştır. Yani X tam sınırlı olmak zorundadır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Teorem 9.23. *Her sayılabilir kompakt metrik uzay ayrılabilirdir.*

Kanıt. Eğer (X, d) sayılabilir kompakt ise bir önceki teoreme göre, her $n \in \mathbf{N}$ için X'in sonlu bir $\frac{1}{n}-$ağı vardır. Bu ağı $F = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{N(n)}^n\}$ ile gösterelim. Şimdi de

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{N(n)}^n\}$$

olarak tanımlayalım. Bu küme sayılabilir sayıda sonlu kümenin birleşimi olarak sayılabilirdir. Bu A kümesinin (X, τ_d)'de yoğun olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için herhangi bir $K(x,\varepsilon) \in \tau_d$ açık topunu göz önüne alalım. $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olacak şekilde seçilen bir $n \in \mathbf{N}$ için $\frac{1}{n}$-ağını düşünürsek

$$\exists \ i \leq N(n), \quad \text{ö.k.} \quad x \in K(x_i^n, \frac{1}{n})$$

yazılabilir. Buradan $x_i^n \in K(x, \frac{1}{n}) \subset K(x,\varepsilon)$ elde edilir. Şu halde $A \cap K(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ tur. Bu da A'nın (X, τ_d)'da yoğun olduğunu gösterir ve kanıt biter. □

Teorem 9.24. *Bir metrik uzayda kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık birbirlerine denktir.*

Kanıt. Her kompakt uzay sayılabilir kompakttır. Diğer yandan A_1-uzaylarında, sayılabilir kompaktlık ile dizisel kompaktlık denk olduğundan (bkz. Uyarı 9.8) ve her metrik uzay da bir A_1-uzayı olduğundan, metrik uzaylarda bu iki kavram denktir. Şu halde her sayılabilir kompakt metrik uzayın kompakt olduğunu göstermekle istenen denklik gösterilmiş olur. Bu ise daha önce gösterilen bazı teoremlerin bir araya getirilmesi ile aşağıdaki gibi elde edilir:

Her sayılabilir kompakt metrik uzay ayrılabilirdir (bkz. Teorem 9.23). Her ayrılabilir metrik uzay bir A_2-uzayı (bkz. Teorem 4.12); her A_2-uzayı Lindelöf (bkz. Teorem 9.12) ve her sayılabilir kompakt Lindelöf uzayı da kompakt olduğundan, her sayılabilir kompakt metrik uzay kompakttır. Böylece metrik uzaylarda, Kompaktlık $\Leftrightarrow$ Sayılabilir kompaktlık $\Leftrightarrow$ Dizisel kompaktlık

sağlandığı gösterilmiş ve kanıt tamamlanmıştır. □

Bu bölümü, kompakt metrik uzayların, aşağıdaki Teorem 9.25'de verilen önemli bir özelliği ile bitireceğiz. Ancak bunun için önce bir tanımı anımsıyalım.

Tanım 9.13. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin çapı,

$$ç(A) := \sup\{ d(x, y) \mid x, y \in A \}$$

ile tanımlanır (bkz. Uyarı 2.3, s. 22).

Teorem 9.25. (Lebesgue Örtü Teoremi)

(X, d) bir kompakt metrik uzay ve $\{ U_1, U_2, \ldots, U_n \}$ bu uzayın sonlu bir açık örtümü ise öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, çapı $ç(A) < \delta$ olan her $A \subset X$ altkümesi için $A \subset U_k$ olacak şekilde bir $k \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$ vardır.

Kanıt. Aksini kabul edelim. Bunun anlamı, her $n \in \mathbf{N}$ için çapı $\frac{1}{n}$'den küçük olan, fakat hiç bir U_k $(k = 1,2, \ldots ,n)$ içine düşmeyen bir A_n kümesinin bulunduğudur. Diğer bir ifade ile,

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \text{için} \quad \exists\, A_n \subset X, \quad \text{ö.k.} \quad ç(A_n) < \frac{1}{n}\,, \quad \text{fakat} \quad A_n \not\subset U_k\,,$$

$(\forall\, k \in \{1,2, \ldots ,n\})$

sağlanır. Her $n \in \mathbf{N}$ için bir $x_n \in A_n$ seçerek elde edilen (x_n) dizisini göz önüne alalım. (X, d) kompakt olduğundan bu (x_n)'nin x gibi bir yığılma noktası vardır. $\{U_1, U_2, \ldots ,U_n\}$, X'in bir örtümü olduğundan uygun bir $k \in \{1,2, \ldots ,n\}$ için $x \in U_k$ dır. U_k açık olduğundan

$$\exists\, \delta > 0, \quad \text{ö.k.} \quad K(x,\delta) \subset U_k$$

yazılabilir. n yeteri kadar büyük seçilir ve $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ yapılırsa, x, (x_n)'nin bir yığılma noktası olduğundan, bu n için de, $m \geq n$ ve $x_m \in K(x, \frac{\delta}{2})$ olacak şekilde bir $m \in \mathbf{N}$ bulunabilir. $x_m \in A_m$ olduğundan $A_m \cap K(x, \frac{\delta}{2}) \neq \emptyset$ olur.

Fakat $ç(A_m) < \frac{1}{m}$ ve dolayısıyla $ç(A_m) < \frac{\delta}{2}$ olduğundan

$$A_m \subset K(x,\delta) \subset U_k$$

elde edilir. Çünkü, her $z \in A_m$ için $d(z, x_m) < \frac{\delta}{2}$, ve

$$d(x, z) \leq d(x, x_m) + d(x_m, z) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

dır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Teorem 9.25'deki özelliği sağlayan $\delta>0$ sayısına verilen örtümün *Lebesgue sayısı* denir.

Problemler

P. 1. Herhangi bir topolojik uzayda her sonlu kümenin kompakt olduğunu gösteriniz.

P. 2. X herhangi bir küme ve τ_{BSO}, X üzerinde bütünleyenleri sonlu kümeler topolojisi olduğuna göre (X,τ_{BSO}) topolojik uzayının kompakt olduğunu gösteriniz.

P. 3. Bir ayrık topolojik uzayda sonsuz elemanlı bir küme kompakt olabilir mi? Neden?

P. 4. (X,τ) bir topolojik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_n \to x_o$ ise

$$A := \{ x_n \mid n = 1, 2, \ldots \} \cup \{x_o\}$$

kümesinin bu uzayda kompakt olduğunu gösteriniz.

P. 5. (X,τ) bir Hausdorff uzayı ve $A, B \subset X$ kompakt ve ayrık iki altküme ise $A\subset G$, $B\subset H$ ve $G\cap H = \varnothing$ olacak şekilde G ve H açık kümelerinin bulunduğunu gösteriniz.

P. 6. (X,τ) kompakt ve (X,τ^*) Hausdorff uzayı olsun. Eğer $\tau^*\subset \tau$ ise $\tau = \tau^*$ olduğunu gösteriniz.

P. 7. (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu gösteriniz.

a) (X,τ) kompakttır.

b) X'in kapalı altkümelerinin $\bigcap_{\nu\in I} A_\nu = \varnothing$ özelliğine sahip her $\{ A_\nu \mid \nu\in I \}$ ailesi için

$$\exists\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\in I\ ,\ \text{ö.k.}\ \bigcap_{i=1}^{n} A_{\nu_i} = \varnothing$$

dir.

P. 8. Bir topolojik uzayda E kompakt ve F kapalı ise $E\cap F$ kümesi de kompakttır. Gösteriniz.

P. 9. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bir (X,τ) topolojik uzayının kompakt altkümeleri iseler, $A_1\cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin de kompakt olduğunu gösteriniz.

P. 10. (X,τ) dizisel kompakt ve $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ve örten ise (Y,τ^*) da dizisel kompakttır. Gösteriniz.

P. 11. Sayılabilir kompaktlık ile dizisel kompaktlığın birer topolojik özellik olduğunu gösteriniz.

P. 12. Dizisel kompakt bir uzayın her kapalı altkümesinin de dizisel kompakt olduğunu gösteriniz.

P. 13. $(\mathbf{R},\tau_{BSO})$ ayrılabilir bir Lindelöf uzayıdır, fakat bir A_2-uzayı değildir. Gösteriniz.

P. 14. X sayılamaz güçte bir küme ve $w\in X$ sabit bir nokta ise

$$\tau := \{ G\subset X \mid w\notin G \ \text{ veya } \ w\in G \ \text{ ise } X - G \text{ sonlu} \}$$

ailesi ile (X,τ)'nun bir kompakt Hausdorff uzayı olduğunu gösteriniz. (Bu (X,τ) topolojik uzayına *Fort uzayı* adı verilir. Bkz. s.56).

P. 15. Fort uzayının ayrılabilir olmadığını gösteriniz.

P. 16. Fort uzayı kompakt olduğundan Lindelöftur. Fakat Fort uzayının $X-\{w\}$ kümesi üzerindeki altuzayının bir Lindelöf uzayı olmadığını gösteriniz. Şu halde Lindelöf uzayı olma özelliği kalıtsal değildir.

P. 17. Bir Lindelöf uzayının her kapalı alt uzayının da Lindelöf olduğunu gösteriniz.

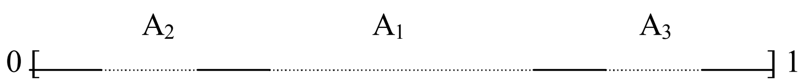
P. 18. Yerel kompakt bir topolojik uzayın kapalı altkümeleri üzerindeki altuzayları da yerel kompakttır. Gösteriniz.

P. 19. (X,τ) yerel kompakt ve $f: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ve açık ise (Y,τ^*) da yerel kompakttır. Gösteriniz.

P. 20. Eğer G bir (X,τ) topolojik uzayında açık ve yoğun bir altküme ise $X - G$ kapalı kümesinin hiçbir yerde yoğun olmadığını gösteriniz.

P. 21. Bir metrik uzayda her kompakt kümenin sınırlı, hatta tam sınırlı olduğunu gösteriniz.

P. 22. *Cantor Kümesi.* $[0, 1]$ kapalı aralığının aşağıdaki gibi tanımlanan altkümesine Cantor kümesi denir.



Şekil 9.1

$A_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ açık aralığı olsun. Diğer bir ifade ile A_1, $[0, 1]$'in, orta $\frac{1}{3}$'lük açık aralığını göstersin. $[0, 1]-A_1 = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ ayrık kapalı aralıklarının birleşiminden oluşur. $A_2 := (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ve $A_3 := (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ bu iki kapalı aralığın, orta $\frac{1}{3}$'lük açık aralıkları ise $[0, 1]-(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ dört adet ayrık kapalı aralıkların birleşimidir. A_4, A_5, A_6, A_7 bu kapalı aralıkların, orta $\frac{1}{3}$'lük açık aralıkları olsun. Bu durumda,

$$[0, 1] - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7),$$

sekiz adet ayrık kapalı aralığın birleşimidir. Bu kapalı aralıkların her birinin orta $\frac{1}{3}$'lük açık aralıkları çıkarılır ve bu süreç sürekli böyle tekrarlanırsa, açık aralıkların $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, \ldots, A_n, \ldots$ dizisi elde edilir. Sonuçta,

$$\boldsymbol{C} := [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ile tanımlanan kümeye *Cantor kümesi* adı verilir. Cantor kümesinin boştan farklı kompakt bir küme olduğunu gösteriniz. (Y.g.: Bu küme [0,1]'in kapalı bir altkümesidir).

Cantor kümesinin daha birçok ilginç özellikleri vardır (bkz. J. Dugundji, s.22, 104, 112; S. Willard, s. 121, 216, 218).

BÖLÜM 10

BAĞLANTILILIK

A. Bağlantılı ve Yerel Bağlantılı Uzaylar

Tanım 10.1. a) (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu (X,τ) *topolojik uzayına bağlantılıdır* denir. Bağlantılı olmayan bir topolojik uzaya da *bağlantısız uzay* adı verilir.

b) (X,τ) bir topolojik uzay ve $M\subset X$ bir altküme olsun. Eğer (M,τ_M) altuzayı bağlantılı ise M *kümesine* (X,τ) topolojik uzayında *bağlantılıdır* denir.

Örnek 10. a) (X,τ_t) ilkel topolojik uzayı bağlantılıdır.

b) X en az iki elemanlı küme ise (X,τ_D) ayrık uzayı bağlantılı değildir.

c) $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbf{R},\tau_e)$'de bağlantılı değildir. Çünkü $(-\infty,\sqrt{2})\cap\mathbf{Q}$ ile $(\sqrt{2},\infty)\cap\mathbf{Q}$ kümeleri, **Q**'nun doğal altuzay topolojisine göre açık olan boştan farklı ve ayrık iki küme olup, $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$ olduğundan

$$\mathbf{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}\,) \cap \mathbf{Q}) \cup ((\sqrt{2}\,, \infty) \cap \mathbf{Q}\,)$$

sağlanır.

Uyarı 10.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset B \subset X$ ise $\tau_A = (\tau_B)_A$ olduğundan (bkz. Y.Teorem 3.2)

$$A,\ (X,\tau)\text{'da bağlantılıdır} \Leftrightarrow A,\ (B,\tau_B)\text{'de bağlantılıdır}$$

ifadesi sağlanır. Bu nedenle bağlantılılık da kompaktlık gibi bir mutlak özelliktir. Diğer bir ifade ile, bir kümenin bağlantılı olması, o kümenin içinde bulunduğu uzaya değil, üzerindeki topolojiye bağlıdır.

Bağlantılılığa denk olan başlıca özelliklerden biri aşağıdaki teoremde verilmiştir. Diğer bazı ifadelerin bağlantılılığa denkliklerinin gösterilmesi ise problem olarak bırakılmıştır.

Teorem 10.1. *(X,τ) bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ (X,τ)'da $\varnothing$ ve X'den başka hem açık ve hem de kapalı küme yoktur.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) bağlantılı ve $A \subset X$, $A \neq \varnothing$ ve $A \neq X$ bu uzayda hem açık ve hem de kapalı bir küme olsun. Bu durumda A ile $X-A$ bu uzayda boş olmayan ayrık iki açık küme olup $X = A \cup (X-A)$ dır. Bu ise (X,τ)'nun bağlantılı olması ile çelişir.
"$\Leftarrow$" (X,τ) bağlantılı olmasın. Bu durumda

$$\exists\ \varnothing \neq G, H \text{ açık ve } G \cap H = \varnothing \text{ ö.k. } X = G \cup H$$

yazılabilir. Buradan $X-H = G$ kapalı olup $H \neq \varnothing$ olduğundan $G \neq X$ dir. Şu halde G (ve aynı şekilde H) (X,τ)'da hem açık ve hem de kapalı olan $\varnothing$ ve X'den farklı bir kümedir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde (X,τ) bağlantılı olmak zorundadır. □

Teorem 10.2. *$[0, 1]$ kapalı aralığı **R**'de bağlantılıdır.*

Kanıt. $[0, 1]$ aralığının bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\exists\ H, K \neq \varnothing, \text{ altuzayda açık ve } H \cap K = \varnothing, \text{ ö.k. } [0, 1] = H \cup K$$

yazılabilir. Genelliği bozmayacağı için $1 \in K$ kabul edelim. $H \neq \emptyset$ ve üstten sınırlı olduğundan $s = \sup H$ mevcuttur ve $s \neq 1$ dir. Çünkü $s=1$ olsaydı, $1 \in K$ ve K altuzayda açık olduğundan, uygun bir $\varepsilon > 0$ için $(1-\varepsilon, 1] \subset K$ olurdu. Fakat $\sup H = 1$ olduğundan,

$$\exists\, x \in H \text{ ö.k. } 1-\varepsilon < x < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in H \cap K$$

yazılabilirdi ki bu $H \cap K = \emptyset$ ile çelişir. Ayrıca $s \neq 0$ dır (neden?). Fakat diğer yandan da, $s \in H$ veya $s \in K$ olmalıdır.

Eğer $s \in H$ ise uygun bir $\varepsilon > 0$ için $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset H$ olur. Bu durumda H, s'den daha büyük elemanlar (s'nin sağ tarafında kalanlar) içerir. Ancak bu durum, $s = \sup H$ olması ile çelişir.

Eğer $s \in K$ ise uygun bir $\varepsilon > 0$ için $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset K$ olur. Bu durumda da K, s'den daha küçük elemanlar (s'nin sol tarafında kalanlar) içerir. Fakat $s = \sup H$ olduğundan $s-\varepsilon$ ile s arasında H'nın da en az bir elemanı vardır. Bu ise $H \cap K = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $[0, 1]$ bağlantılı olmak zorundadır. □

Teorem 10.3. *Bağlantılı bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki resmi de bağlantılıdır.*

Kanıt. (X,τ) bağlantılı ve $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ve örten olsun. (Y,τ^*) resim uzayının da bağlantılı olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. (Y,τ^*) bağlantılı olmasın. Bu durumda,

$$\exists\ H, K \subset Y \text{ boştan farklı, açık, } \quad H \cap K = \emptyset \quad \text{ve} \quad Y = H \cup K$$

yazılabilir. Buradan

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K)$$

olup f sürekli olduğundan $f^{-1}(H)$ ve $f^{-1}(K)$, X'de açıktır. Diğer yandan $H, K \neq \emptyset$ ve f örten olduğundan $f^{-1}(H)$ ve $f^{-1}(K)$ boştan farklı ve $H \cap K = \emptyset$ olduğundan da $f^{-1}(H \cap K) = f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$ olur. Bu durum (X,τ)'nun bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. □

Sonuç 10.1. *(X,τ) bir topolojik uzay, $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ve $A \subset X$ bağlantılı bir altküme ise $f(A)$ resim kümesi de (Y,τ^*)'da bağlantılıdır.*

Kanıt. A kümesi bağlantılı ise (A,τ_A) bağlantılı ve

$$f\,|A : (A,\tau_A) \to (f(A),\tau^*_{f(A)})$$

sürekli ve örten olduğundan $(f(A),\tau^*_{f(A)})$ bağlantılı, dolayısıyla $f(A)$ bağlantılıdır. □

Sonuç 10.2. ***R****'deki bütün kapalı ve sınırlı aralıklar [0, 1] kapalı aralığına homeomorf olduğundan bağlantılıdırlar.*

Kanıt. Teorem 10.2 ve Teorem 10.3'ün apaçık sonucudur. □

Tanım 10.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Eğer,

$$\overline{A} \cap B = \varnothing \quad \text{ve} \quad A \cap \overline{B} = \varnothing$$

ise bu A ve B kümelerine (X,τ)'da *ayrılmış kümeler* adı verilir.

Uyarı 10.2. Ayrılmış iki küme ayrıktır. Fakat bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin **R**'nin A=(0, 1] ve B=(1, 2) altkümeleri ayrıktır, fakat bunlar $(\mathbf{R},\tau_e)$'de ayrılmış değildir.

Bağlantılılık ayrılmış kümelerle de aşağıdaki gibi belirlenebilir:

Teorem 10.4. *(X,τ) bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ X boş olmayan ayrılmış iki kümenin birleşimi olarak yazılamaz.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" X'in boş olmayan ayrılmış iki kümenin birleşimi şeklinde yazılabildiğini kabul edelim. Diğer bir ifade ile

$$A, B \neq \varnothing, \quad \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing \quad \text{ve} \quad X = A \cup B$$

olacak şekilde $A, B \subset X$ altkümeleri bulunsun. Buradan $A \cap B = \varnothing$ ve dolayısıyla $X-A=B$ ve $X-B=A$ dır. Diğer yandan

$$\overline{A} = \overline{A} \cap X = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A$$

dolayısıyla A kapalı ve aynı şekilde B kapalı bulunur. Fakat $X-A=B$ ve $X-B=A$ olduğundan A ve B aynı zamanda açıktırlar. Bu durum Teorem 10.1'e göre (X,τ)'nun bağlantılı olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır.

"$\Leftarrow$" (X,τ) bağlantılı olmasın. O halde

$$\exists\ \varnothing \neq G, H \subset X \text{ açık ve } G \cap H = \varnothing \text{ ö.k. } X = G \cup H$$

yazılabilir. Buradan $X-G = H$ ve $X-H = G$ olup, G ve H aynı zamanda kapalıdırlar. Dolayısıyla $G = \overline{G}$ ve $H = \overline{H}$ dir. Buradan

$$\overline{G} \cap H = G \cap H = \varnothing \quad \text{ve} \quad G \cap \overline{H} = G \cap H = \varnothing$$

elde edilir. Şu halde $G, H \neq \varnothing$, ayrılmış ve $X = G \cup H$ dır. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde (X,τ) bağlantılı olmak zorundadır. □

Teorem 10.5. *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X kümesin herhangi iki noktası, bu uzayda bağlantılı olan bir altkümenin içinde bulunuyorsa, (X,τ) bağlantılıdır.*

Kanıt. (X,τ)'nun bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\exists\ \varnothing \neq G, H \subset X \text{ açık ve } G \cap H = \varnothing \text{ ö.k. } X = G \cup H$$

yazılabilir. $a \in G$ ve $b \in H$ alalım. Hipoteze göre a ve b noktalarını içeren bağlantılı bir $B \subset X$ altkümesi vardır. Buradan

$$B = B \cap X = (B \cap G) \cup (B \cap H)$$

şeklinde yazılabilir. $B \cap G$ ve $B \cap H$ altkümeleri, G ve H (X,τ)'da açık olduğundan (B,τ_B) altuzayında açık; $a \in B \cap G$ ve $b \in B \cap H$ olduğundan boştan farklı ve

$$(B \cap G) \cap (B \cap H) = B \cap (G \cap H) = \varnothing$$

olduğundan da ayrıktır. Fakat bu durum B'nin bağlantılı olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. □

Teorem 10.6. *$\emptyset \neq M \subset \boldsymbol{R}$ bağlantılı bir altküme ise her $a, b \in M$ ve $a \leq b$ için $[a, b] \subset M$ dir. Diğer bir ifade ile M bir aralıktır.*[*)]

Kanıt. Bir $c \in [a, b]$ için $c \notin M$ kabul edelim. $a, b \in M$ olduğundan $a < c < b$ dir. $\mathbf{R} = (-\infty, c) \cup \{c\} \cup (c, \infty)$ şeklinde yazılır ve M ile arakesiti alınırsa $c \notin M$ olduğundan

$$M = ((-\infty, c) \cap M) \cup ((c, \infty) \cap M)$$

olduğu görülür. $(-\infty, c) \cap M$ ve $(c, \infty) \cap M$ kümeleri M'de açık, ayrık ve $a \in (-\infty, c) \cap M$, $b \in (c, \infty) \cap M$ olduğundan boştan farklıdırlar. Şu halde M, boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak yazılabilmektedir. Bu ise M'nin bağlantılı olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. □

Sonuç 10.3. *Teorem 10.5 ve Teorem 10.6 yardımıyla, **R**'nin bütün bağlantılı altkümeleri verilebilir. Bunlar: $\emptyset$, **R**'nin kendisi ve $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a \leq b$ olmak üzere*

$$[a, b],\ (a, b),\ (a, b],\ [a, b),\ (a, \infty),\ [a, \infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b]$$

tipindeki bütün aralıklardır. □

Teorem 10.7. (Ara-değer Teoremi)

(X, τ) bağlantılı bir topolojik uzay, $f : X \to \boldsymbol{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $x_1, x_2 \in X$ olsun. Bu durumda $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$ koşulunu sağlayan her $c \in \boldsymbol{R}$ için $f(x_c) = c$ olacak şekilde bir $x_c \in X$ vardır.

Kanıt. (X, τ) bağlantılı ve $f : X \to \mathbf{R}$ sürekli olduğundan Teorem 10.3'e göre $f(X) \subset \mathbf{R}$'de bağlantılıdır. $x_1, x_2 \in X$ ve dolayısıyla $f(x_1), f(x_2) \in f(X)$ olduğundan Teorem 10.6'ya göre $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(X)$ dir. Buradan her $c \in [f(x_1), f(x_2)]$ için $c \in f(X)$ ve dolayısıyla

$$\exists\ x_c \in X \quad \text{ö.k.} \quad f(x_c) = c$$

elde edilir. □

[*)] $\emptyset \neq M \subset \mathbf{R}$ olsun. Eğer her $x, y \in M$, $x \leq y$ için $[x, y] \subset M$ sağlanıyorsa, bu M kümesine bir "aralık" denir.

Sonuç 10.4. *(X,τ) bağlantılı bir topolojik uzay, $f : X \to \mathbf{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $b\in\mathbf{R}$ ise Ara-değer teoremi $f(x) = b$ denkleminin çözümü için bir test vermektedir. Gerçekten eğer*

$$\exists\ x_1, x_2 \in X \ \text{ ö.k.} \quad f(x_1) \le b \le f(x_2)$$

sağlanıyorsa, Ara-değer teoremine göre $f(x) = b$ denkleminin bir çözümü vardır. □

Sonuç 10.5. (Sabit Nokta Teoremi)

$f : [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonu sürekli ise $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c\in[a, b]$ vardır.

Kanıt. $g : [a, b] \to [a, b]$, $g(x) = x - f(x)$ fonksiyonu süreklidir. Eğer $f(a)=a$ veya $f(b)=b$ ise sırasıyla a veya b aranan nokta olur. Eğer $f(a)\neq a$ ve $f(b)\neq b$ ise f'nin değer bölgesi [a, b] olduğundan, $g(a)<0<g(b)$ olacaktır. Buradan Sonuç 10.4'e göre $g(c) = 0$ ve dolayısıyla $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c\in[a,b]$ vardır. □

Teorem 10.8. *(X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bağlantılı bir altküme ve $A \subset B \subset \overline{A}$ ise B kümesi de bağlantılıdır.*

Kanıt. B'nin bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\exists\ \varnothing \neq O_1, O_2 \in \tau \ \text{ ö.k.} \ \ B\cap O_i \neq \varnothing \ \ (i = 1,2),\ (B\cap O_1)\cap(B\cap O_2) = \varnothing$$

ve

$$B = (B\cap O_1)\cup(B\cap O_2)$$

yazılabilir. $A \subset B \subset \overline{A}$ olduğundan, buradan

$$A = A\cap B = (A\cap O_1)\cup(A\cap O_2) \quad \text{ve} \quad (A\cap O_1)\cap(A\cap O_2) = \varnothing$$

elde edilir. $B\cap O_i \neq \varnothing$ $(i = 1,2)$ olduğundan $b_i\in B\cap O_i$ vardır. Buradan $b_i\in \overline{A}$ ve $b_i\in O_i$ (O_i açık) olduğundan $i=1,2$ için $O_i \cap A \neq \varnothing$ bulunur. Bu ise A'nın bağlantılı olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. □

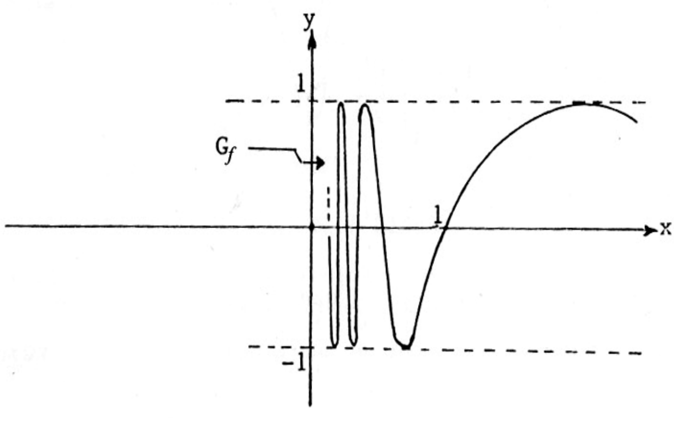
Sonuç 10.6. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bağlantılı bir altküme ise Teorem 10.8'e göre $\overline{A}$ de bağlantılıdır.* □

Örnek 10.2.a) Herhangi bir $I \subset \mathbf{R}$ aralığı üzerinde tanımlanmış reel değerli ve sürekli bir $f : I \to \mathbf{R}$ fonksiyonunun grafiği $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$, $\mathbf{R}^2$'de bağlantılıdır. Gerçekten

$$F : I \to \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ ; \quad F(x) = (x, f(x))$$

fonksiyonunun bileşenleri $F_1 : I \to \mathbf{R}$, $F_1(x) = x$ ve $F_2 : I \to \mathbf{R}$, $F_2(x) = f(x)$ sürekli olduklarından F de süreklidir ve $G_f = F(I)$ dır. O halde Teorem 10.3 ve Sonuç 10.2'e göre G_f bağlantılıdır.

b) $f : (0,1] \to [-1, +1]$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği G_f, a)'ya göre bağlantıdır. Çünkü $G_f = \{(x, \sin\dfrac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$, $(0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyonun grafiğidir. Bkz. Şekil 10.1.



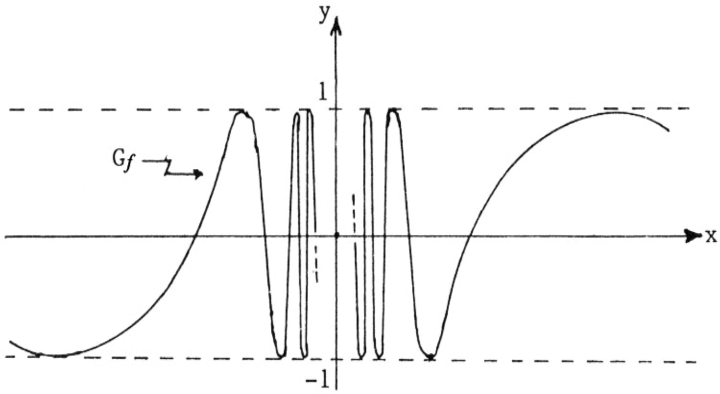
Şekil10.1

Sonuç 10.6'ya göre $\overline{G}_f = G_f \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq y \leq +1\}$ kümesi de bağlantılıdır.

c) $f : \mathbf{R} - \{0\} \to [-1, +1]$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği G_f, bağlantılı değildir. Çünkü bu grafik,

$$H_+ = \{(x, y) \in G_f \mid x > 0\} \quad \text{ve} \quad H_- = \{(x, y) \in G_f \mid x < 0\}$$

gibi boş olmayan ayrık ve G_f'de açık (neden?) kümelerin birleşimi olarak, yani $G_f = H_+ \cup H_-$ şeklinde yazılabilir. Bkz. Şekil 10.2.



Şekil 10.2

Bu örnek bize, bağlantılı olmayan bir topolojik uzayın, sürekli bir fonksiyon altındaki resminin bağlantılı olmasının gerekmediğini de göstermektedir.

Teorem 10.9. *(X,τ) bağlantısız, $\emptyset \neq G, H \subset X$ açık kümeler, $G \cap H = \emptyset$ ve $X = G \cup H$ olsun. Bu durumda eğer $B \subset X$ bağlantılı bir altküme ise $B \subset G$ veya $B \subset H$ dır.*

Kanıt. $X = G \cup H$ olduğundan $B = B \cap X = (B \cap G) \cup (B \cap H)$ dır. Diğer yandan $B \cap G$, $B \cap H$, B'de açık ve $B \cap G \cap H = \emptyset$ olduğundan, eğer $B \cap G \neq \emptyset$ ve $B \cap H \neq \emptyset$ ise B boş olmayan ayrık iki açık kümenin birleşimi şeklinde yazılmış olur. Bu ise B'nin bağlantılı olması ile çelişir. O halde ya $B \cap G = \emptyset$, yani $B \subset H$, ya da $B \cap H = \emptyset$, yani $B \subset G$ olmak zorundadır. □

Teorem 10.10. *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer bu uzaydaki bağlantılı kümelerin bir $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi için $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_{\lambda\in\Lambda} \neq \emptyset$ ise $E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_{\lambda\in\Lambda}$ kümesi de bağlantılıdır.*

Kanıt. E'nin bağlantılı olmadığını kabul edelim. Buradan

$$\exists\, \emptyset \neq O_1, O_2 \in \tau \text{ ö.k. } O_i \cap E \neq \emptyset \ \ (i=1,2),\ (O_1 \cap E) \cap (O_2 \cap E) = \emptyset \ \text{ ve}$$

$$E = (O_1 \cap E) \cup (O_2 \cap E)$$

yazılabilir. $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ olsun. Buradan $x\in O_1\cap E$ veya $x\in O_2\cap E$ olmak zorundadır. Genelliği bozmayacağı için $x\in O_1\cap E$ kabul edelim. Her $\lambda\in\Lambda$ için $x\in B_\lambda$ olduğundan, her $\lambda\in\Lambda$ için $B_\lambda\cap(O_1\cap E)\neq\varnothing$ sağlanır. Diğer yandan her $\lambda\in\Lambda$ için $B_\lambda\subset E$, E kümesinde de bağlantılı olduğundan Teorem 10.9'a göre her $\lambda\in\Lambda$ için $B_\lambda\subset O_1\cap E$ ya da $B_\lambda\subset O_2\cap E$ olmalıdır. Fakat her $\lambda\in\Lambda$ için

$$B_\lambda\cap(O_1\cap E)\neq\varnothing \quad \text{ve} \quad (O_1\cap E)\cap(O_2\cap E)=\varnothing$$

olduğundan, her $\lambda\in\Lambda$ için $B_\lambda\subset O_1\cap E$ olmalıdır. Buradan

$$E=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subset O_1\cap E \;\Rightarrow\; O_2\cap E=\varnothing$$

olması gerekir. Bu ise $O_i\cap E\neq\varnothing$ $(i=1,2)$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış, dolayısıyla E bağlantılıdır. □

Teorem 10.11. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $B\subset X$ bağlantılı bir altküme olsun. Eğer bir $E\subset X$ altkümesi için $B\cap E\neq\varnothing$ ve $B\cap(X-E)\neq\varnothing$ ise $B\cap\partial E\neq\varnothing$ olur.*

Kanıt. $X=\overset{o}{E}\cup\partial E\cup(X-E)^o$ şeklinde yazılabileceğinden, $B\cap\partial E=\varnothing$ olsaydı,

$$B=B\cap X=(B\cap\overset{o}{E})\cup(B\cap(X-E)^o)$$

şeklinde yazılabilirdi. Buradan $B\cap\overset{o}{E}\neq\varnothing$ ve $B\cap(X-E)^o\neq\varnothing$ olmalıdır. Çünkü, örneğin $B\cap\overset{o}{E}=\varnothing$ olsaydı, B'nin yukarıdaki yazılışından

$$B=B\cap(X-E)^o\subset(X-E)^o\subset X-E \quad\Rightarrow\quad B\cap E=\varnothing$$

olurdu. Bu ise hipotez ile çelişir. Aynı şekilde $B\cap(X-E)^o\neq\varnothing$ elde edilir. Ayrıca

$$(B\cap\overset{o}{E})\cap[B\cap(X-E)^o]=B\cap[\overset{o}{E}\cap(X-E)^o]=B\cap[E\cap(X-E)]^o=\varnothing$$

dır. Bu durum B'nin bağlantılı olması ile çelişir. O halde $B\cap\partial E\neq\varnothing$ olmalıdır. □

Tanım 10.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. (X,τ)'da x noktasını içeren bütün bağlantılı kümelerin birleşimine x'*in bağlantılı bileşeni* denir. x'in bağlantılı bileşenini K(x) ile gösterelim.

Teorem 10.12. *(X,τ) bir topolojik uzay ve K(x) bir x noktasının bağlantılı bileşeni ise*

a) K(x) bağlantılı ve kapalıdır.

b) $X = \bigcup_{x \in X} K(x)$ *dir. Ayrıca her* $x, y \in X$ *için ya* $K(x) \cap K(y) = \varnothing$, *ya da* $K(x) = K(y)$ *dir.*

Kanıt. a) x noktasını içeren bütün bağlantılı kümelerin arakesiti de x'i içereceğinden boş değildir. O halde Teorem 10.10'a göre K(x) bağlantılıdır. Öte yandan K(x) bağlantılı olduğundan $\overline{K(x)}$ kapanışı da bağlantılıdır (bkz. Sonuç 10.6). Şu halde $\overline{K(x)}$, x'i içeren bağlantılı bir kümedir. K(x)'in tanımına göre buradan $\overline{K(x)} \subset K(x)$ olmalıdır. Dolayısıyla $K(x) = \overline{K(x)}$, yani K(x) kapalıdır.

b) $X = \bigcup_{x \in X} K(x)$ olduğu apaçıktır. Şimdi de $x, y \in X$ olsun. Eğer $K(x) \cap K(y) \neq \varnothing$ ise Teorem 10.10 'a göre $K(x) \cup K(y)$ hem x ve hem de y'yi içeren bağlantılı bir kümedir. K(x) ve K(y)'nin tanımları dolayısıyla buradan

$$K(x) \cup K(y) \subset K(x) \subset K(x) \cup K(y) \quad \text{ve}$$

$$K(x) \cup K(y) \subset K(y) \subset K(x) \cup K(y),$$

ve buradan da

$$K(x) = K(x) \cup K(y) = K(y), \text{ yani } K(x) = K(y)$$

elde edilir. □

Uyarı 10.3. X'in farklı noktalarının bağlantılı bileşenleri ya eşit veya ayrık olduklarından bazen noktalara atıfta bulunmadan X'in (yani uzayın) bağlantılı bileşenlerinden söz edilir. Şu halde X'in bir bağlantılı bileşeni, X'de başka bir bağlantılı kümenin öz altkümesi olmayan bağlantılı bir altkümedir. Bu anlamda, X'in en geniş bağlantılı altkümesidir. Bir altkümenin bağlantılı bileşeni ise o küme üzerindeki altuzayın bağlantılı bileşeni olarak tanımlanır.

Tanım 10.4. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için $K(x) = \{x\}$ ise bu (X,τ) topolojik uzayına *tamamen bağlantısız uzay* adı verilir.

Örnek 10.3. a) Her ayrık topolojik uzay tamamen bağlantısızdır.

b) Q rasyonel sayılar kümesi doğal altuzay topolojisine göre tamamen bağlantısızdır. Gerçekten eğer $p, q \in \mathbf{Q}$ için $p \in K(q)$ ve genelliği bozmayacağı için $p < q$ ise $p < r < q$ olacak şekilde alınan bir r irrasyonel sayı için $(-\infty, r) \cap K(q)$ ve $(r, \infty) \cap K(q)$, $K(q)$ altuzayında boş olmayan ayrık iki açık küme olup, $\mathbf{R} = (-\infty, r) \cup \{ r \} \cup (r, \infty)$ olduğundan

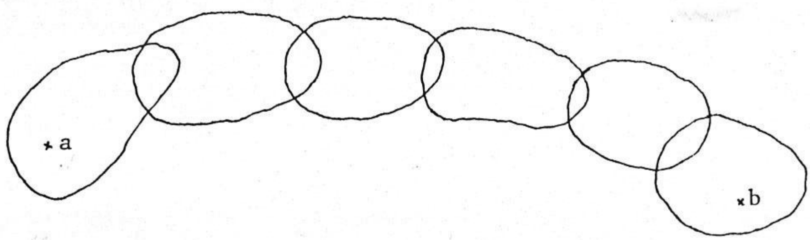
$$K(q) = ((-\infty, r) \cap K(q)) \cup ((r, \infty) \cap K(q))$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise $K(q)$'nun bağlantılı olması ile çelişir. O halde $K(q)$ bir tek q noktasından oluşur.

Tanım 10.5. (X,τ) bir topolojik uzay ve $a, b \in X$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $U_1, U_2, \ldots, U_n$ açık kümeler dizisine bu uzayda a ile b arasında bir *basit zincir* adı verilir (bkz. Şekil 10.3).

(i) $a \in U_1$, $b \in U_n$ ve $i \neq 1$ için $a \notin U_i$, $i \neq n$ için $b \notin U_i$

(ii) $U_i \cap U_j \neq \varnothing \iff |i-j| \leq 1$.



Şekil 10.3

Y.Teorem 10.1. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$, X'in bir açık örtümü olsun. X kümesinde,*

$a \approx b \; :\iff$ a ile b arasında $\mathcal{U}$'nun elemanlarından oluşan bir basit zincir vardır.

ile tanımlanan "$\approx$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Denklik sınıfları ise hem açık, hem de kapalıdırlar.

Kanıt. "$\approx$" 'nin yansıma ve simetrik özellikleri apaçıktır. Bu bağıntının geçişme özelliğine sahip olduğunu göstermek için, a, b, $c \in X$ ve $U_1, U_2, ..., U_n$ ile $V_1, V_2, ..., V_m$ sırasıyla a ile b arasında ve b ile c arasında basit zincirler olsunlar. Eğer

$$k = \min\{ i \mid i = 1,2,..,n \text{ ö.k. } \exists\, j \in \{1,2,...,m\},\ U_i \cap V_j \neq \varnothing \} \quad \text{ve}$$

$$l = \text{mak}\{ j \mid j = 1,...,m \text{ ö.k. } U_k \cap V_j \neq \varnothing \}$$

olarak tanımlanırsa

$$U_1, U_2, ..., U_k, V_l, V_{l+1}, ..., V_m$$

dizisinin a ile c arasında bir basit zincir olduğu görülür.

Basit zincirler açık kümelerden oluştuğundan denklik sınıfları açıktır. Bunlar aynı zamanda kapalıdır. Çünkü bir denklik sınıfının bütünleyeni de açıktır. □

Teorem 10.13. *(X,τ) bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ ve X' in her $\mathcal{U}$ açık örtümü için a ile b arasında $\mathcal{U}$'nun elemanlarından oluşan bir basit zincir vardır.*

Kanıt. Eğer (X,τ) bağlantılı değilse,

$$\exists\ \varnothing \neq O_1, O_2 \subset X \text{ açık, ö.k. } O_1 \cap O_2 = \varnothing \text{ ve } X = O_1 \cup O_2$$

yazılabilir. Şu halde $\mathcal{U} = \{O_1, O_2\}$, X'in bir açık örtümüdür. Fakat $a \in O_1$ ve $b \in O_2$ şeklinde seçilen a ve b noktaları arasında bu örtümün elemanlarından oluşan basit bir zincir yoktur.

Tersine, eğer (X,τ) bağlantılı ise bu uzayda hem açık ve hem de kapalı, boştan farklı tek küme X dir. O halde X'den farklı bir sınıf mevcut değildir. Bu nedenle Y.Teorem 10.1 kanıtı tamamlar. □

Teorem 10.14. *$(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ boş olmayan topolojik uzayların bir ailesi ise*

$\prod X_\lambda$ çarpım uzayı bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \Lambda$ için $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ bağlantılıdır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\prod X_\lambda$ çarpım uzayı bağlantılı ise her $\lambda \in \Lambda$ için p_λ izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 10.3'e göre $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ her $\lambda \in \Lambda$ için bağlantılıdır.

"$\Leftarrow$" Her $\lambda \in \Lambda$ için $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ bağlantılı olsun. a=$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ çarpım uzayında herhangi bir nokta ise a'nın bağlantılı bileşeni K(a) bağlantılı ve kapalı olduğundan (Teorem 10.12) $K(a) = \overline{K(a)}$ dir. Şu halde K(a)'nın çarpım uzayında yoğun, yani $\overline{K(a)} = \prod X_\lambda$ olduğunu göstermek yeter.

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k})$$

çarpım uzayının doğal tabanının herhangi bir elemanı ve k=1,2,...,n için $b_{\lambda_k} \in U_{\lambda_k}$ olsun.

$$E_1 = \{ x \in \prod X_\lambda \mid x_{\lambda_1} \text{ keyfi ve } \lambda \neq \lambda_1 \text{ için } x_\lambda = a_\lambda \}$$

$$E_2 = \{ x \in \prod X_\lambda \mid x_{\lambda_1} = b_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \text{ keyfi ve } \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2 \text{ için } x_\lambda = a_\lambda \}$$

. . . .

$$E_n = \{ x \in \prod X_\lambda \mid x_{\lambda_k} = b_{\lambda_k},\ 1 \leq k \leq n-1,\ x_{\lambda_n} \text{ keyfi ve}$$
$$\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ için } x_\lambda = a_\lambda \}$$

olarak tanımlansınlar. k=1,2,...,n için E_k, X_{λ_k}'ya homeomorf ve X_{λ_k} bağlantılı olduğundan E_k bağlantılı ve $E_k \cap E_{k+1} \neq \varnothing$ olduğundan $A = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ bağlantılıdır. Fakat $a \in A$ (çünkü $a \in E_1$) olduğundan $A \subset K(a)$ dır. Diğer yandan $E_n \cap U \neq \varnothing$ olduğundan

$$A \cap U = (\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \cap U \neq \varnothing,$$

ve dolayısıyla $K(a) \cap U \neq \varnothing$ olur. Böylece $K(a) = \overline{K(a)} = \prod X_\lambda$ elde edilmiş olur ve kanıt biter. □

Sonuç 10.7. *$\mathbf{R}^n$ (n≥1) doğal topolojisi ile bağlantılıdır. Çünkü **R** bağlantılıdır.* □

Teorem 10.15. *$\prod X_\lambda$, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topolojik uzaylarının çarpımı ve $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ çarpım uzayının herhangi bir noktası olsun. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ için $K(x_\lambda)$, $x_\lambda \in X_\lambda$ noktasının çarpan uzayındaki bağlantılı bileşeni ise x' in çarpım uzayındaki bağlantılı bileşeni $K(x) = \prod K(x_\lambda)$ dır.*

Kanıt. Her $\lambda \in \Lambda$ için $K(x_\lambda)$ bağlantılı ve $x_\lambda \in K(x_\lambda)$ olduğundan Teorem 10.14 'e göre $\prod K(x_\lambda)$ bağlantılı ve $x \in \prod K(x_\lambda)$ dır. Diğer yandan K(x) bağlantılı ve p_λ'lar sürekli olduklarından her $\lambda \in \Lambda$ için $p_\lambda(K(x))$ bağlantılıdır. Ayrıca $x_\lambda \in p_\lambda(K(x))$ olduğundan $p_\lambda(K(x)) \subset K(x_\lambda)$ dır. Şu halde her $\lambda \in \Lambda$ için $K(x) \subset p_\lambda^{-1}(K(x_\lambda))$ ve dolayısıyla

$$K(x) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{-1}(K(x_\lambda)) = \prod_{\lambda\in\Lambda} K(x_\lambda)$$

dır. Fakat K(x), x noktasını içeren en geniş bağlantılı küme olduğundan $K(x) = \prod K(x_\lambda)$ olmalıdır. □

Tanım 10.6. Bir topolojik uzayın her noktasında bağlantılı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanı varsa; diğer bir ifade ile, uzayın her noktasının her komşuluğu bağlantılı bir komşuluk içeriyorsa, bu topolojik uzaya *yerel bağlantılı uzay* denir.

Örnek 10.4. **R** doğal topolojisi ile yerel bağlantılı, fakat **Q** rasyonel sayılar kümesi yerel bağlantılı değildir.

Uyarı 10.4. a) Bir yerel bağlantılı topolojik uzayın bağlantılı olması gerekmez. Örneğin $M=[0,1] \cup [2,3]$ kümesi **R**'nin altuzayı olarak yerel bağlantılıdır, fakat bağlantılı değildir (neden?)

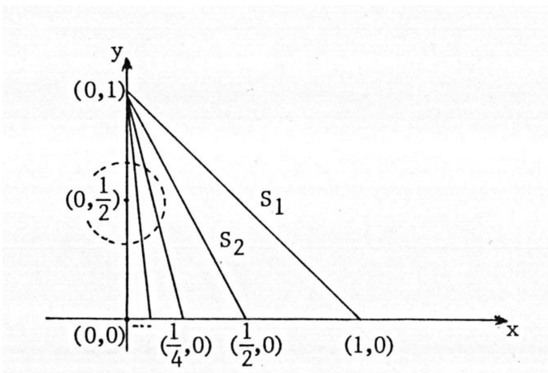
b) Bir bağlantılı topolojik uzayın da yerel bağlantılı olması gerekmez. Örneğin her n=1,2,... için

$$S_n = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \ , \ \ nx + y = 1 \}$$

olmak üzere,

$$X = \{ (0, y) \ \mid 0 \leq y \leq 1 \} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)$$

kümesi $\mathbf{R}^2$'de bağlantılıdır. Çünkü $\{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ bağlantılı, her $n \in \mathbf{N}$ için S_n bağlantılı ve (0,1) bütün bu kümelerin kesişiminde bulunduğundan Teorem 10.10'a göre bunların birleşimi olan X kümesi de bağlantılıdır. Fakat bu X kümesi yerel bağlantılı değildir. Çünkü örneğin $(0, \frac{1}{2}) \in X$ noktasının, (0,1)'i içermeyen X'deki her açık komşuluğu bağlantısızdır (bkz. Şekil 10.4).



Şekil 10.4

Benzer şekilde Örnek 10.2 b)'deki $\overline{G_f}$ bağlantılı, fakat yerel bağlantılı değildir.

Teorem 10.16. *Bir yerel bağlantılı topolojik uzayın bağlantılı bileşenleri açıktır.*

Kanıt. (X,τ) yerel bağlantılı, $x\in X$ ve $K(x)$, x'in bağlantılı bileşeni olsun. Bu durumda her $y\in K(x)$ noktasının bağlantılı bir $V\in \mathcal{U}_\tau(y)$ komşuluğu vardır. $K(x)$ bağlantılı ve $y\in V\cap K(x)\neq\varnothing$ olduğundan $V\cup K(x)$ bağlantılıdır. Ayrıca $x\in V\cup K(x)$ dir. Buradan $y\in V\subset V\cup K(x)\subset K(x)$ elde edilir. Şu halde y, $K(x)$'in bir iç noktası, dolayısıyla $K(x)$ açıktır. □

Teorem 10.17. *(X,τ) yerel bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ (X,τ)'nun açık altkümelerinin bağlantılı bileşenleri de açıktır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X,τ) yerel bağlantılı, $G\subset X$ açık ve C, G'nin bir bağlantılı bileşeni olsun. $x\in C$ keyfi verilsin. $x\in G$ ve G açık olduğundan G, x'in bir komşuluğudur. Hipoteze göre

$$\exists\ N\in\mathcal{U}_\tau(x),\ \ N \text{ bağlantılı ö.k. } N\subset G.$$

Diğer yandan $x\in N\cap C\neq\varnothing$ olduğundan $N\cup C$ bağlantılıdır. Fakat C, G'deki en geniş bağlantılı altküme olduğundan $N\cup C=C$ dir. Şu halde $N\subset C$ ve dolayısıyla C açıktır.

"$\Leftarrow$" $U\in\mathcal{U}_\tau(x)$ keyfi verilsin. Şu halde $x\in G\subset U$ olacak şekilde bir $G\in\tau$ vardır. C, G'nin x'i içeren bir bağlantılı bileşeni olsun. Hipoteze göre C açıktır, ayrıca $x\in C\subset G\subset U$ sağlanır. Şu halde C, x'in bağlantılı bir komşuluğu olup, $x\in C\subset U$ dur. O halde (X,τ) yerel bağlantılıdır. □

Teorem 10.18. *(X,τ) yerel bağlantılı bir topolojik uzay, $Y\neq\varnothing$ bir küme ve $f:(X,\tau)\to Y$ olsun. Eğer Y, f ile üretilen τ^*_f tümel topolojisine sahip ise (Y,τ^*_f) topolojik uzayı da yerel bağlantılıdır.*

Kanıt. Bir önceki teoreme göre her $H\subset Y$ açık kümesinin bağlantılı bileşenlerinin açık olduğunu göstermek yeter. Buna göre $H\subset Y$ açık ve C, H'nin bir bağlantılı bileşeni olsun. Tümel topoloji tanımına göre $f^{-1}(H)\in\tau$ ve (X,τ) yerel bağlantılı olduğundan $f^{-1}(H)$'nin bağlantılı bileşenleri de açıktır. $C\in\tau^*_f$ olduğunu göstermek için $f^{-1}(C)\in\tau$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $f^{-1}(C)$'nin, $f^{-1}(H)$'nin bazı bağlantılı bileşenlerinin birleşimine eşit olduğunu göstermek yeter. $x\in f^{-1}(C)$ keyfi ve B, $f^{-1}(H)$'nın x'i içeren bir bağlantılı bileşeni olsun. $B\subset f^{-1}(C)$ olduğunu göstereceğiz. $x\in B\subset f^{-1}(H)$, B bağlantılı ve f sürekli olduğundan $f(B)$ bağlantılıdır. Diğer yandan $f(B)\subset H$ ve $f(x)\in f(B)\cap C\neq\varnothing$ olduğundan $f(B)\cup C$ bağlantılıdır.

Fakat C, H'nin en geniş bağlantılı altkümesi olduğundan $f(B) \cup C = C$, dolayısıyla $f(B) \subset C$ dir. Böylece $B \subset f^{-1}(C)$ elde edilir. Fakat $x \in f^{-1}(C)$ keyfi olduğundan, $f^{-1}(C)$ kümesi, $f^{-1}(H)$'nin bazı bağlantılı bileşenlerinin birleşimine eşit olur. Bu bileşenler açık olduğundan, $f^{-1}(C)$, X'de açıktır. □

B. Yol Bağlantılı Uzaylar

Tanım 10.7. a) (X,τ) bir topolojik uzay ve $I = [0, 1]$ kapalı aralığı olmak üzere her $f : I \to X$ sürekli fonksiyonuna (bazen $f(I)$ resim kümesine) bu topolojik uzayda bir *yol veya eğri*[*)] denir. Eğer $f(0) = x$ ve $f(1) = y$ ise f yolu x ve y noktalarını birleştiriyor denir.

b) (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in her iki noktası bu uzayda bir yol ile birleştirilebiliyorsa, diğer bir ifade ile, her $x, y \in X$ için

$$\exists \ f : I \to X \ \text{ sürekli, } \ \text{ö.k.} \quad f(0) = x \ \text{ ve } \ f(1) = y$$

yazılabiliyorsa, bu (X,τ) topolojik uzayına *yol bağlantılıdır* denir.

Bir altkümenin yol bağlantılı olması, o küme üzerindeki altuzayın yol bağlantılı olması ile tanımlanır.

Örnek 10.5. a) Her ilkel topolojik uzay yol bağlantıdır.

b) **R** doğal topolojisi ile yol bağlantılıdır (neden?).

Teorem 10.19. *Yol bağlantılı her topolojik uzay bağlantılıdır.*

Kanıt. (X,τ) topolojik uzayı yol bağlantılı ve $x_o \in X$ sabit bir nokta olsun. O halde her $x \in X$ için

$$\exists \ f_x : I \to X \ \text{ sürekli, } \ \text{ö.k.} \quad f_x(0) = x_o \ \text{ ve } \ f_x(1) = x$$

[*)] Öklid uzaylarında "yol" yerine çoğu kez "eğri" adı kullanılır.

yazılabilir. Her x için $f_x(I)$ bağlantılı bir kümenin sürekli fonksiyon altındaki resmi olarak bağlantılıdır ve kolayca görüleceği gibi

$$X = \bigcup_{x \in X} f_x(I)$$

sağlanır. Diğer yandan bu birleşimi oluşturan kümelerin her biri x_o'ı içerdiğinden boş değildir. Bu nedenle birleşimleri, yani X bağlantılıdır. □

Uyarı 10.5. Teorem 10.19'un tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin

$$f : (0, 1] \to [-1, +1], \quad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

fonksiyonunun grafiği

$$G_f = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \text{'nin kapanışı}$$

$$\overline{G}_f = G_f \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq y \leq +1\}$$

bağlantılıdır (bkz. Örnek 10.2 b)), fakat yol bağlantılı değildir. Gerçekten $\overline{G}_f$'de (1, sin1) ile (0, 0) noktalarını birleştiren bir yol mevcut değildir. Aksini kabul edelim:

$$\alpha : [0, 1] \to \overline{G}_f \quad \text{sürekli, ö.k.} \quad \alpha(0) = (1, \sin 1) \text{ ve } \alpha(1) = (0, 0)$$

olsun. Bu durumda $Y = \alpha([0,1])$ resim kümesi $\overline{G}_f$'de kompakt ve bağlantılı bir kümedir. Ayrıca $(1, \sin 1)$ ve $(0, 0) \in Y$ olduğundan $G_f \subset Y$ olmalıdır. Çünkü eğer bir $0 < b < 1$ için $(b, \sin\frac{1}{b}) \notin Y$ olsaydı

$$H_b^- = \{(x, y) \mid x < b\} \quad \text{ve} \quad H_b^+ = \{(x, y) \mid x > b\}$$

olmak üzere,

$$Y = (H_b^- \cap Y) \cup (H_b^+ \cap Y)$$

şeklinde boş olmayan, ayrık ve Y'de açık iki kümenin birleşimi olarak yazılabilirdi. Bu ise Y'nin bağlantılı olması ile çelişir. O halde $G_f \subset Y$ dir. Fakat Y, $\overline{G}_f$ Hausdorff uzayının kompakt altkümesi olarak kapalıdır. Dolayısıyla $\overline{G}_f \subset Y$ dir. Şu halde $Y = \overline{G}_f$ olmalıdır. Fakat bu olanaksızdır. Çünkü α örten, sürekli ve aynı zamanda kapalı olduğundan $\overline{G}_f$ 'nin topolojisi α ile üretilen tümel topoloji olur (bkz Teorem 6.8). Diğer yandan [0,1] yerel bağlantılı ve bu özellik tümel topoloji yapısı altında korunan bir özellik olduğundan (bkz. Teorem 10.18) $\overline{G}_f$ de yerel bağlantılı olmalıdır. Fakat $\overline{G}_f$ yerel bağlantılı değildir.

Bu örnek aynı zamanda yol bağlantılı bir kümenin kapanışının da yol bağlantılı olmasının gerekmediğini göstermektedir.

Teorem 10. 20. *(X,τ) yol bağlantılı ve $f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ sürekli ise $f(X)$ resim kümesi de yol bağlantılıdır.*

Kanıt. a ve b, $f(X)$'de herhangi iki nokta ise X'de, $f(x) = a$ ve $f(y) = b$ olacak şekilde x ve y noktaları vardır. (X,τ) yol bağlantılı olduğundan $\varphi(0) = x$ ve $\varphi(1) = y$ olacak şekilde sürekli bir $\varphi : I \to X$ fonksiyonu vardır. Buradan $f\circ\varphi : I \to f(X)$ bileşke fonksiyonu da süreklidir ve $(f\circ\varphi)(0) = f(x) = a$ ve $(f\circ\varphi)(1) = f(y) = b$ sağlanır. Şu halde $f\circ\varphi$, $f(X)$ 'de a ve b noktalarını birleştiren bir yoldur. □

Teorem 10.21. *$(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ boş olmayan topolojik uzayların bir ailesi ise $\prod X_\lambda$ çarpım uzayı yol bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \Lambda$ için $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ yol bağlantılıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" $\prod X_\lambda$ çarpım uzayı yol bağlantılı ise izdüşüm fonksiyonları sürekli olduklarından her $\lambda \in \Lambda$ için $p_\lambda(\prod X_\lambda) = X_\lambda$ yol bağlantılıdır.

"$\Leftarrow$" Her $\lambda \in \Lambda$ için $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ yol bağlantılı ve $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $\prod X_\lambda$ 'da herhangi iki nokta olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için x_λ, $y_\lambda \in X_\lambda$ ve $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ yol bağlantılı olduğundan $\varphi_\lambda(0) = x_\lambda$ ve $\varphi_\lambda(1) = y_\lambda$ olacak şekilde sürekli bir $\varphi_\lambda : I \to X_\lambda$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$f : I \to \prod X_\lambda , \qquad f(t) = (\varphi_\lambda(t))_{\lambda\in\Lambda}$$

fonksiyonu da süreklidir ve $f(0) = x$ ve $f(1) = y$ sağlanır. Şu halde f çarpım uzayında x ve y noktalarını birleştiren bir yoldur. □

Sonuç 10.8. *$\boldsymbol{R}^n$ $(n \geq 1)$ doğal topolojisi ile yol bağlantılıdır.*

Kanıt. Örnek 10.5.b) ve Teorem 10.21'in apaçık bir sonucudur. □

Problemler

P. 1. (X,τ) bağlantılı ve $\tau^* \subset \tau$ ise (X, τ^*) da bağlantılıdır. Gösteriniz.

P .2. $A_1, A_2, A_3, ...$ bağlantılı kümelerin bir dizisi ise ve her $n \in \mathbf{N}$ için $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ ise

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bağlantılıdır. Gösteriniz.

P. 3. Eğer E bir T_1-uzayının birden fazla elemanlı ve bağlantılı bir altkümesi ise bu E kümesinin sonsuz olduğunu gösteriniz.

P. 4. Bir X topolojik uzayı bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Her $\varnothing \neq A \subset X$ ve $A \neq X$ altkümesi için $\partial A \neq \varnothing$ tur. Gösteriniz.

P. 5. Bir X topolojik uzayı bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ $Y = \{a , b\}$ ayrık topoloji ile göz önüne alınırsa X'den Y'ye sürekli ve örten bir fonksiyon mevcut değildir. Gösteriniz.

P. 6. (X,τ) bir topolojik uzay, (M,τ_M) bunun bir altuzayı ve $A, B \subset M$ ise

A ve B, (M,τ_M)'de ayrılmıştır $\Leftrightarrow$ A ve B, (X,τ)'da ayrılmıştır.

Gösteriniz.

P. 7. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. A ve B kümeleri (X,τ) da ayrılmış iseler, bu kümeler $(A \cup B, \tau_{A\cup B})$ altuzayında hem açık ve hem de kapalıdır. Gösteriniz.

P. 8. Eğer bir X topolojik uzayının sonlu sayıda bağlantılı bileşeni varsa, her bir bileşenin bu uzayda hem açık ve hem de kapalı olduğunu gösteriniz.

P. 9. X bir kompakt topolojik uzay olsun. Eğer X'in bağlantılı bileşenleri açık iseler, sadece sonlu sayıda bileşenin bulunduğunu gösteriniz.

P. 10. X ve Y yerel bağlantılı iki topolojik uzay ise $X\times Y$ çarpım uzayı da yerel bağlantılıdır. Gösteriniz.

P. 11. $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bağlantılı ve yerel bağlantılı topolojik uzayların bir ailesi ise $\prod X_\lambda$ çarpım uzayı da yerel bağlantılıdır.

P. 12. $\mathbf{R}^2$'deki her açık topun yol bağlantılı olduğunu gösteriniz.

P. 13. E, $\mathbf{R}^2$'nin boş olmayan açık ve bağlantılı bir altkümesi ise bu E yol bağlantılıdır. Gösteriniz. (Y.g.: P. 12 yi kullanınız).

P.14. (X,τ_{BSO}) ve (X,τ_{BSA}) topolojik uzaylarının bağlantılı olmaları ile X'in gücü arasında nasıl bir ilişki vardır?

P.15. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sürekli olsun. Eğer $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$ olacak şekilde $a, b\in \mathbf{R}^2$ varsa, f'nin sıfır yerleri kümesi $S_f=\{x \in\mathbf{R}^2 \mid f(x) = 0\}$ sayılamaz bir kümedir. Gösteriniz.
(Y.g.: Eğer F, $\mathbf{R}^2$'nin sayılabilir bir altkümesi ise $\mathbf{R}^2 - F$ bütünleyeni bağlantılı, hatta yol bağlantılıdır (bkz. [7], s. 154).

BÖLÜM 11

PARAKOMPAKTLIK VE METRİKLENEBİLME

A. Parakompakt Uzaylar

Parakompaktlık ilk kez 1944'de Dieudonné tarafından kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olarak verilmiştir. Bu kavram, A. H. Stone tarafından her metrik uzayın parakompakt olduğunun gösterilmesi ile daha büyük bir önem kazanmış ve bu sonuç, BING, SMIRNOV ve NAGATA tarafından "Genel Metriklenebilme Teoremi" nin kanıtında kullanılmıştır.

Parakompaktlık tanımı verilmeden önce bunun için gerekli olan özel tip örtümlerle ilgili bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 11.1. X bir küme, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X'in iki örtümü olsunlar. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa, bu $\mathcal{U}$ örtümüne $\mathcal{V}$'nin bir *inceltilmişi* denir ve $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ şeklinde yazılır.

Tanım 11.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının $\mathcal{U}$'nun en çok sonlu sayıda elemanını kesen bir komşuluğu varsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine *yerel sonlu aile* denir. Eğer her $x \in X$ noktası $\mathcal{U}$'nun en çok sonlu sayıda elemanının içine düşüyorsa, o taktirde bu $\mathcal{U}$ ailesine *nokta sonlu* aile adı verilir.

Açıkça görüldüğü gibi her yerel sonlu aile aynı zamanda nokta sonludur.

Yerel sonlu ailelerin bir özel tipi olarak ayrık (diskret) aileler tanımlanır. $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının $\mathcal{U}$'nun en çok bir elemanını kesen bir komşuluğu varsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine de *ayrık aile* denir. Buna göre her ayrık aile yerel sonludur.

Tanım 11.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer her bir $\mathcal{U}_n$ yerel sonlu olmak üzere

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine σ*-yerel sonlu aile* denir. Eğer her bir $\mathcal{U}_n$ ailesi ayrık bir aile ise bu taktirde $\mathcal{U}$ ailesine σ*-ayrık aile* adı verilir.

Örnek 11.1. a) X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere (X,τ_t) ilkel topolojik uzayını göz önüne alalım. $\{\{x\} \mid x \in X\}$ ailesi X 'in nokta sonlu bir örtümüdür. Ancak bu aile bu uzayda yerel sonlu değildir. Görüldüğü gibi, bir nokta sonlu ailenin yerel sonlu olması gerekmez.

b) $\{ [n, n+1] \mid n \in \mathbf{Z} \}$ altküme ailesi **R**'nin nokta sonlu bir örtümüdür.

Yerel sonlu ailelerin bazı özellikleri aşağıdaki yardımcı teoremler ile verilmiştir.

Y. Teorem 11.1. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\{ A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$, X'in altkümelerinin yerel sonlu bir ailesi ise $\{ \overline{A_\lambda} \mid \lambda\in\Lambda \}$ ailesi de yerel sonludur.*

Kanıt. $x\in X$ herhangi bir nokta ve $U\in \mathcal{U}_\tau(x)$ komşuluğu, $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ için $U\cap A_\lambda = \varnothing$ koşulunu sağlasın. Bu U komşuluğunu açık alabiliriz (neden?). Buradan, her $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ için $U \cap \overline{A}_\lambda = \varnothing$ elde edilir. □

Y. Teorem 11.2. *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\{ A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$ yerel sonlu bir aile ise*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A}_\lambda = \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$$

sağlanır. Bunun sonucu olarak, kapalı kümelerin yerel sonlu bir ailesinin birleşimi de kapalıdır.

Kanıt. Her $\lambda\in\Lambda$ için $\overline{A}_\lambda \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$ olduğundan $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A}_\lambda \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$ dir. Diğer yandan $x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$ olsun. Her $U\in \mathcal{U}_\tau(x)$ için $U \cap (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \neq \varnothing$ olmalıdır. Fakat $\{ A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$ yerel sonlu olduğundan,

$$\exists\, U^*\in \mathcal{U}_\tau(x) \quad \text{ve} \quad n\in\mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{için} \quad U^*\cap A_\lambda = \varnothing$$

yazılabilir. Buradan $U^*\cap (\bigcup_{\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} A_\lambda) = \varnothing$, dolayısıyla $x \notin \overline{\bigcup_{\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} A_\lambda}$ dir. Fakat

$$x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = (\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}}) \cup (\overline{\bigcup_{\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} A_\lambda})$$

olduğundan $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_{\lambda_i}}$ dir. Buradan en az bir $k\in\{1,2, \ldots,n \}$ için $x \in \overline{A}_{\lambda_k}$ ve dolayısıyla $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A}_\lambda$ elde edilir ve kanıt biter. □

Tanım 11.4. Bir (X,τ) Hausdorff uzayının her açık örtümünün açık ve yerel sonlu bir inceltilmişi varsa bu (X,τ) topolojik uzayına *parakompakttır* denir.

Bazı yazarlar parakompaktlık tanımı için uzayın Hausdorff olma koşulunu gerek görmezler.

Teorem 11.1. *Bir (X,τ) regüler uzayı için aşağıdaki ifadeler denktirler:*

a) (X,τ) parakompakttır.
b) X'in her açık örtümünün bir σ–yerel sonlu açık inceltilmişi vardır.
c) X'in her açık örtümünün (açık olması gerekmeyen) yerel sonlu bir inceltilmişi vardır.
d) X'in her açık örtümünün yerel sonlu bir kapalı inceltilmişi vardır.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b): Her yerel sonlu örtüm σ-yerel sonlu olduğundan aşikardır.

b) $\Rightarrow$ c): $\mathcal{U}$, X'in bir açık örtümü ve $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ bunun σ-yerel sonlu ve açık bir inceltilmişi olsun. Buradaki her bir $\mathcal{V}_n$ yerel sonlu bir açık küme ailesidir. Her $n \in \mathbf{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{ V_{n\alpha} \mid \alpha \in \Lambda \}$ ve $W_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_{n\alpha}$ ile gösterilirse, $\{ W_1, W_2, \ldots \}$, X'in bir örtümüdür. Eğer

$$A_n := W_n - \bigcup_{i<n} W_i$$

olarak tanımlanırsa,

$$\mathcal{U}^* := \{ A_n \cap V_{n\alpha} \mid \alpha \in \Lambda, \quad n = 1,2, \ldots \}$$

ailesinin $\mathcal{U}$'nun aranan yerel sonlu inceltilmişi olduğu görülür. Gerçekten, $\mathcal{U}^*$ önce $\mathcal{V}$'nin, ve o nedenle de $\mathcal{U}$'nun bir inceltilmişidir. Diğer yandan, her $x \in X$ için $x \in A_n \subset W_n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbf{N}$; ve $\mathcal{V}_n$, W_n'nin bir örtümü olduğundan da $x \in V_{n\alpha}$ olacak şekilde bir $V_{n\alpha} \in \mathcal{V}_n$ vardır. Şu halde $x \in A_n \cap V_{n\alpha}$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{U}^*$, X'in bir örtümüdür.

Şimdi de $\mathcal{U}^*$'ın yerel sonlu olduğunu gösterelim: Her $x\in X$ için $x\in \bigcup_{n=1}^{k} W_n$ olacak şekilde bir $k\in \mathbf{N}$ doğal sayısı vardır. $\bigcup_{n=1}^{k} W_n$ açık ve $\mathcal{V}_m$ yerel sonlu olduğundan, x'in öyle bir U_m komşuluğu vardır ki $\mathcal{V}_m$'nin en çok sonlu sayıda elemanını keser ve $x\in U_m \subset \bigcup_{n=1}^{k} W_n$ koşulunu sağlar. Şu halde $U := \bigcap_{m=1}^{k} U_m$ da x'in bir komşuluğudur ve $j > k$ için $U\cap A_j = \varnothing$ olduğundan U, $\mathcal{U}^*$'ın en çok sonlu sayıda elemanını keser.

c) $\Rightarrow$ d): $\mathcal{U}$, X'in bir açık örtümü olsun. Her $x\in X$ için bir $U_x\in \mathcal{U}$, $x\in U_x$ olacak şekilde seçilsin. (X,τ) regüler olduğundan, $x\in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x$ olacak şekilde bir V_x açık kümesi vardır (bkz. s.186, P.16). $\mathcal{V} := \{ V_x \mid x\in X \}$, X'in bir açık örtümüdür. $\mathcal{A} := \{ A_\nu \mid \nu\in I \}$, $\mathcal{V}$'nin yerel sonlu bir inceltilmişi olsun. $\mathcal{A}^* := \{ \overline{A}_\nu \mid \nu\in I \}$ da X'in yerel sonlu bir örtümüdür (bkz. Y.Teorem 11.1) ve her $\nu\in I$ için, eğer $A_\nu \subset V_x$ ise $\overline{A}_\nu \subset \overline{V}_x \subset U_x$ olacak şekilde bir $U_x\in \mathcal{U}$ mevcut olduğundan $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{U}$'nun kapalı bir inceltilmişidir.

d) $\Rightarrow$ a) : $\mathcal{U}$, X'in bir açık örtümü ve $\mathcal{V}$ bunun yerel sonlu kapalı bir inceltilmişi olsun. Her $x\in X$ için W_x, x'in en çok sonlu sayıda $V\in \mathcal{V}$'yi kesen açık komşuluğu olmak üzere $\mathcal{W} = \{ W_x \mid x\in X \}$ açık örtümünü göz önüne alalım. $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}$'nin yerel sonlu kapalı bir inceltilmişi olsun. Her $V\in \mathcal{V}$ için

$$\overset{*}{V} := X - \bigcup \{ A\in \mathcal{A} \mid A\cap V = \varnothing \}$$

olarak tanımlansın. Y. Teorem 11.2'ye göre her bir $\overset{*}{V}$ açıktır. $\mathcal{V}$ bir örtüm olduğundan, her $x\in X$ için $x\in V$ olacak şekilde bir $V\in \mathcal{V}$ vardır. Bu V ile elde edilen $\overset{*}{V}$ da x'i içerir. Bu, $\overset{*}{V}$'in tanımından kolayca görülür. O halde

$$\overset{*}{\mathcal{V}} := \{ \overset{*}{V} \mid V\in \mathcal{V} \}$$

X'in bir açık örtümüdür.

Şimdi de $\overset{*}{\mathcal{V}}$'in yerel sonlu olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için, x'in en çok sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ kümelerini kesen bir N_x komşuluğu vardır. Fakat $\mathcal{A}$ bir örtüm olduğundan $N_x \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ sağlanır. Bu nedenle, eğer $N_x \cap \overset{*}{V} \neq \varnothing$ ise

$$N_x \cap \overset{*}{V} \subset (A_1 \cap \overset{*}{V}) \cup \ldots \cup (A_n \cap \overset{*}{V})$$

olduğundan, en az bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $A_k \cap \overset{*}{V} \neq \varnothing$, ve buradan da $A_k \cap V \neq \varnothing$ elde edilir. Diğer yandan $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}$'nin bir inceltilmişi olduğundan, her A_k bir W_x'in içinde bulunur. Ve her bir W_x en çok sonlu sayıda $V \in \mathcal{V}$'yi kestiğinden, her A_k da en çok sonlu sayıda $V \in \mathcal{V}$'yi keser. O halde $N_x \cap \overset{*}{V} \neq \varnothing$ en çok sonlu sayıda $\overset{*}{V} \in \overset{*}{\mathcal{V}}$ için doğrudur. Bu nedenle $\overset{*}{\mathcal{V}}$ yerel sonludur.

Son olarak, her $V \in \mathcal{V}$ için $V \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ seçelim. Bu şekilde oluşturulan

$$\overset{*}{\mathcal{U}} := \{U \cap \overset{*}{V} \mid V \in \mathcal{V}\}$$

ailesi $\mathcal{U}$'nun yerel sonlu ve açık inceltilmişi olur. Bu $\overset{*}{\mathcal{U}}$'ın sadece örtüm olduğunu göstermek yeter. Bu ise $\mathcal{V}$'nin örtüm ve $V \subset U \cap \overset{*}{V}$, $(V \in \mathcal{V})$ olmasının bir sonucudur. Böylece kanıt tamamlanır. □

Sonuç 11. 1. *Her regüler Lindelöf uzayı parakompakttır.*

Kanıt. (X,τ) bir regüler Lindelöf uzayı ve $\mathcal{U}$, X'in bir açık örtümü ise bunun $\overset{*}{\mathcal{U}}$ gibi sayılabilir bir altörtümü vardır. Bu $\overset{*}{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$'nun σ-yerel sonlu bir inceltilmişidir. □

Sonuç 11.2. *Her kompakt Hausdorff uzayı parakompakttır.* □

Teorem 11.2. (A. H. Stone). *Her metrik uzay parakompakttır.*

Kanıt. Her metrik uzay regüler olduğundan bir önceki teoreme göre, bir metrik uzayın her açık örtümünün σ-yerel sonlu bir açık inceltilmişinin bulunduğunu göstermek yeter.

(X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \mid \alpha \in I \}$ bunun bir açık örtümü olsun. I indis kümesini iyi sıralanmış kabul edelim (bkz. Bölüm 1, İyi Sıralama Teoremi). Bir $\alpha \in I$ ve $n \in \mathbf{N}$ doğal sayısı için

$$A_{n,\alpha} := \{ x \in U_\alpha \mid d(x, X - U_\alpha) \geq \frac{1}{2^n} \}$$

olarak tanımlanırsa, $X - U_\alpha$ kapalı olduğundan $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\alpha}$ olduğu görülür.

Şimdi de

$$B_{n,\alpha} := \{ x \in A_{n,\alpha} \mid x \notin A_{n+1,\beta} ,\ \beta < \alpha \}$$

ve

$$V_{n,\alpha} := \{ x \in X \mid d(x, B_{n,\alpha}) < \frac{1}{2^{n+3}} \}$$

olarak tanımlansınlar. $V_{n,\alpha}$ açıktır ve $V_{n,\alpha} \subset U_\alpha$ sağlanır. Gerçekten her $x \in V_{n,\alpha}$ için $d(x, y) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$ olacak şekilde bir $y \in B_{n,\alpha}$ vardır. Buradan $y \in A_{n,\alpha}$ ve dolayısıyla $y \in U_\alpha$ ve $d(y, X - U_\alpha) \geq \dfrac{1}{2^n}$ sağlanır. Buradan da,

$$d(x, X - U_\alpha) \geq d(y, X - U_\alpha) - d(x, y) > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ve bu nedenle $x \notin X - U_\alpha$, yani $x \in U_\alpha$ elde edilir.

Bir $x \in X$ verildiğinde $\alpha \in I$, $x \in U_\alpha$ koşulunu sağlayan en küçük indis olsun. $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\alpha}$ olduğundan en az bir $n \in \mathbf{N}$ doğal sayısı için $x \in A_{n,\alpha}$ sağlanır. α 'nın tanımına göre buradan $x \in B_{n,\alpha}$ ve bu nedenle de $x \in V_{n,\alpha}$ dır. $\mathcal{V}_n := \{ V_{n,\alpha} \mid \alpha \in I \}$ olarak tanımlanırsa,

$$\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n \,,$$

X 'in bir açık örtümüdür. Her $V_{n,\alpha} \subset U_\alpha$ olduğundan da $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$'nun bir inceltilmişidir.

Son olarak her bir $\mathcal{V}_n$ 'nin yerel sonlu olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce $\alpha \neq \beta$ için $d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) \geq \dfrac{1}{2^{n+1}}$ olduğunu gösterelim: $\beta < \alpha$ kabul edelim. $x \in B_{n,\alpha}$ ve $y \in A_{n,\beta}$ keyfi alalım. $B_{n,\alpha}$'nın tanımına göre $x \notin A_{n+1,\beta}$ ve bu nedenle $d(x, X - U_\beta) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$ dır. Fakat $y \in A_{n,\beta}$ olduğundan $d(y, X - U_\beta) \geq \dfrac{1}{2^n}$ yazılabilir. Buradan,

$$d(x, y) \geq d(y, X - U_\beta) - d(x, X - U_\beta) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

elde edilir. Fakat $B_{n,\beta} \subset A_{n,\beta}$ olduğundan $d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) \geq \dfrac{1}{2^{n+1}}$ sağlanır. Şimdi de bundan yararlanarak $d(V_{n,\alpha}, V_{n,\beta}) \geq \dfrac{1}{2^{n+2}}$ olduğunu gösterebiliriz: $V_{n,\alpha}$'nın tanımından $x \in V_{n,\alpha}$ ve $y \in V_{n,\beta}$ için

$$d(x, B_{n,\alpha}) < \frac{1}{2^{n+3}} \quad \text{ve} \quad d(y, B_{n,\beta}) < \frac{1}{2^{n+3}}$$

olduğundan,

$$d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) \leq d(B_{n,\alpha}, x) + d(x, y) + d(y, B_{n,\beta}) \quad \Rightarrow$$

$$d(x, y) \geq d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) - d(B_{n,\alpha}, x) - d(y, B_{n,\beta})$$

$$\geq \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}} - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}} \,,$$

böylece $d(V_{n,\alpha}, V_{n,\beta}) \geq \dfrac{1}{2^{n+2}}$ elde edilmiş olur. Buradan herhangi bir $x \in X$ noktasının $\dfrac{1}{2^{n+3}}$ yarıçaplı açık küresel komşuluğunun $\mathcal{V}_n$'nin en çok bir elemanını kestiği sonucu çıkartılır. Çünkü eğer,

$$y \in K(x, \frac{1}{2^{n+3}}) \cap V_{n,\alpha} \quad \text{ve} \quad z \in K(x, \frac{1}{2^{n+3}}) \cap V_{n,\beta}$$

olsaydı,

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

olurdu ki bu $d(V_{n,\alpha}, V_{n,\beta}) \geq \dfrac{1}{2^{n+2}}$ olması ile çelişirdi. Şu halde her bir $\mathcal{V}_n$ yerel sonlu ve dolayısıyla $\mathcal{V}$ σ-yerel sonludur. □

Teorem 11.3. *Her parakompakt uzay normaldır.*

Kanıt. (X,τ) parakompakt olsun. (X,τ)'nun önce regüler olduğunu gösterelim: $A \subset X$ kapalı ve $x \notin A$ ise (X,τ) Hausdorff olduğundan her $y \in A$ için $x \notin \overline{V}_y$ olacak şekilde bir V_y açık kümesi vardır. Buradan,

$$\mathcal{V} := \{ V_y \mid y \in A \} \cup \{X - A\}$$

ailesi X'in bir açık örtümüdür. (X,τ) parakompakt olduğundan $\mathcal{V}$'nin $\mathcal{W}$ gibi açık ve yerel sonlu bir inceltilmişi vardır.

$$V := \bigcup \{ W \in \mathcal{W} \mid W \cap A \neq \varnothing \}$$

olarak tanımlayalım. Bu V açıktır ve $\mathcal{W}$ bir örtüm olduğundan $A \subset V$ sağlanır. Ayrıca $\mathcal{W}$ yerel sonlu olduğundan,

$$\overline{V} = \bigcup \{ \overline{W} \mid W \in \mathcal{W},\ W \cap A \neq \varnothing \}$$

sağlanır. Diğer yandan $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$'nin bir inceltilmişi olduğundan, V'nin tanımında kullanılan her W kümesi de en az bir V_y'nin içinde kalır. Buradan

$\overline{W} \subset \overline{V}_y$ ve bu nedenle $x \notin \overline{W}$ ve dolayısıyla $x \notin \overline{V}$ elde edilir. Böylece, $x \in X - \overline{V}$, $A \subset V$ ve $V \cap (X - \overline{V}) = \varnothing$ olduğu görülür. Şu halde (X,τ) regülerdir.

Şimdi de A ve B, X'de kapalı ve ayrık iki küme olsun. Regülerlikten dolayı, her $x \in B$ için $\overline{V}_x \cap A = \varnothing$ olacak şekilde bir V_x açık kümesi vardır. Yukarıdaki yöntem aynen uygulanırsa,

$$\overset{*}{\mathcal{V}} := \{ V_x \mid x \in B \} \cup \{X - B\}$$

X'in bir açık örtümüdür. $\overset{*}{\mathcal{W}}$ bunun açık ve yerel sonlu bir inceltilmişi olsun.

$$\overset{*}{V} := \bigcup \{ \overset{*}{W} \in \overset{*}{\mathcal{W}} \mid \overset{*}{W} \cap B \neq \varnothing \}$$

olarak tanımlanırsa, bu $\overset{*}{V}$ açıktır ve $B \subset \overset{*}{V}$ sağlanır. Ayrıca $\overset{*}{\mathcal{W}}$ yerel sonlu olduğundan

$$\overline{\overset{*}{V}} = \bigcup \{ \overline{\overset{*}{W}} \mid \overset{*}{W} \in \overset{*}{\mathcal{W}},\ \overset{*}{W} \cap B \neq \varnothing \}$$

dir. Diğer yandan $\overset{*}{\mathcal{W}}$, $\overset{*}{\mathcal{V}}$'ın bir inceltilmişi olduğundan, $\overset{*}{W} \cap B \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan her $\overset{*}{W} \in \overset{*}{\mathcal{W}}$ kümesi için de, $\overset{*}{W} \subset V_x$ olacak şekilde bir $V_x \in \overset{*}{\mathcal{V}}$ vardır. Buradan $\overline{\overset{*}{W}} \subset \overline{V}_x$ ve bu nedenle $\overline{\overset{*}{W}} \cap A = \varnothing$, dolayısıyla $\overline{\overset{*}{V}} \cap A = \varnothing$ elde edilir. Buradan, $A \subset X - \overline{\overset{*}{V}}$, $B \subset \overset{*}{V}$ ve $\overset{*}{V} \cap (X - \overline{\overset{*}{V}}) = \varnothing$ sağlandığı görülür. Şu halde (X,τ) normaldir. □

Böylece parakompakt uzayların kompakt Hausdorff uzayları ile normal uzaylar arasında yer aldığı, diğer bir ifade ile,

$$\text{Kompakt Hausdorff} \;\Rightarrow\; \text{parakompakt} \;\Rightarrow\; \text{normal}$$

sağlandığı elde edilmiş olur.

Parakompakt uzayların altuzaylarının, çarpım uzaylarının ve sürekli fonksiyonlar altındaki resimlerinin parakompakt olup olmadıkları ile ilgili olarak verilen aşağıdaki bilgilerin ayrıntıları daha kapsamlı Genel Topoloji kitaplarına bırakılmıştır. Örneğin bkz. S. Willard, 20.12; 20.13; 20F.

a) Bir parakompakt uzayın her altuzayının da parakompakt olması gerekmez. Ancak, parakompakt uzayların kapalı altkümeleri üzerindeki altuzayları parakompakttır.

b) Parakompakt uzayların çarpım uzaylarının parakompakt olmaları gerekmez. Ancak, bir parakompakt uzay ile bir kompakt Hausdorff uzayının çarpımı parakompakttır.

c) Parakompakt uzayların sürekli fonksiyon altındaki resimlerinin parakompakt olmaları gerekmez. Ancak, bir parakompakt uzayın sürekli ve kapalı fonksiyon altındaki resmi Hausdorff ise parakompakttır.

B. Metriklenebilme Teoremleri

Bir (X,τ) topolojik uzayı verildiğinde, eğer X üzerinde $\tau_d = \tau$ koşulunu sağlayan bir d metriği varsa, bu τ topolojisine *metrik topoloji* ve (X,τ) topolojik uzayına da *metriklenebilir topolojik uzay* denir.

Bir (X,τ) topolojik uzayı verildiğinde, X kümesi üzerinde $\tau_d = \tau$ koşulunu sağlayan bir d metriğinin bulunabilmesi için sadece açık kümelere dayalı bir takım koşulların bulunup bulunmayacağı ile ilgili araştırmalar Urysohn'nun bazı çalışmalarına rağmen 1950'li yılların başına kadar arzu edilen sonucu vermemiştir. 1950'li yılların başında ise üç matematikçi, BING, NAGATA ve SMIRNOV birbirinden bağımsız olarak bugün "Genel Metriklenebilme Teoremi" adı ile bilinen teoremi kanıtlayarak, genel topolojinin başlıca problemlerinden birini çözmüş oldular.

Biz de artık o ünlü teoremin kanıtını verebilecek bilgi birikimine ulaşmış bulunuyoruz. Ama önce bunun için gerekli olan son bir yardımcı teorem daha gösterilecektir.

Y. Teorem 11.3. *Bir (X,τ) regüler topolojik uzayının σ -yerel sonlu bir tabanı varsa, bu uzaydaki her açık küme sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilir.*

Kanıt. $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, X'in σ-yerel sonlu bir tabanı olsun. Her $n \in \mathbf{N}$ için $\mathcal{B}_n = \{ B_{n,i} \mid i \in I_n \}$ yerel sonludur. $G \subset X$ boştan farklı bir açık küme ise (X,τ) regüler olduğundan her $x \in G$ için

$$\exists\, V_x \in \mathcal{U}_\tau(x)\,,\ V_x \text{ açık, ö.k. } x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset G$$

sağlanır.

Diğer yandan, $\mathcal{B}$, X'in bir tabanı olduğundan

$$\exists\, B_{n(x),i(x)} \in \mathcal{B} \quad \text{ö.k.} \quad x \in B_{n(x),i(x)} \subset V_x$$

yazılabilir. Buradan $\overline{B}_{n(x),i(x)} \subset \overline{V}_x \subset G$ elde edilir. Şimdi de bir $k \in \mathbf{N}$ doğal sayısı için,

$$B_k := \bigcup \{ B_{n(x),i(x)} \mid n(x) = k,\ \ x \in G \}$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{B}_k$ yerel sonlu olduğundan, Y. Teorem 11.2'ye göre

$$\overline{B}_k = \bigcup \{ \overline{B}_{n(x),i(x)} \mid n(x) = k,\ \ x \in G \}$$

dir. Buradan

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k \subset G \quad \Rightarrow \quad G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$$

elde edilir. □

Teorem 11.4. (Genel Metriklenebilme Teoremi)

Bir (X,τ) topolojik uzayının metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul, bu topolojik uzayın regüler olması ve σ -yerel sonlu bir tabanının bulunmasıdır.

Kanıt. "⇒" (X,τ) metriklenebilir ve d, X üzerinde $\tau_d = \tau$ koşulunu sağlayan bir metrik olsun. X'in

$$\mathcal{U}_n := \{\ K(x,\frac{1}{2^n})\ \mid\ x\in X\ \},\quad (\,n\in\mathbf{N}\,)$$

açık örtümünü göz önüne alalım. (X,τ) parakompakt olduğundan bu örtümün $\mathcal{V}_n$ gibi yerel sonlu ve açık bir inceltilmiş örtümü vardır.

$$\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{V}_n$$

σ-yerel sonlu ailesinin bu uzayın bir tabanı olduğu gösterilebilir. Gerçekten, $G \subset X$ açık ve $x\in G$ herhangi bir nokta ise $x\in K(x,\frac{1}{2^n}) \subset G$ olacak şekilde bir $n\in\mathbf{N}$ doğal sayısı vardır. Ayrıca $\mathcal{V}_{n+2}$'de bir örtüm olduğundan $x\in V$ olacak şekilde bir $V\in\mathcal{V}_{n+2}$ vardır. V'nin çapı $\frac{1}{2^{n+1}}$'den küçüktür. Bu nedenle her $y\in V$ için

$$d(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \quad\Rightarrow\quad y \in K(x,\frac{1}{2^n})$$

sağlanır. Böylece bu $V\in\mathcal{V}$ için, $x\in V \subset G$ sağlanmaktadır. Şu halde $\mathcal{V}$, (X,τ)'nun bir tabanıdır.

Diğer yandan, her metrik uzay regüler olduğundan teoremin birinci kısmının kanıtı biter.

"⇐" *1. Adım*: Verilen koşul altında (X,τ)'nun metriklenebilir olduğunu göstermek için önce bu uzayın parakompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\mathcal{U} = \{\ U_i \mid i\in I\ \}$, X'in bir açık örtümü ve

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}_n\ ,$$

uzayın, hipoteze göre mevcut olduğu bildirilen σ-yerel sonlu tabanı olsun. Her $n\in\mathbf{N}$ için $\mathcal{B}_n:=\{B_{n,i} \mid i\in I_n\}$ yerel sonlu olduğundan, $\mathcal{V}_n := \{V\in\mathcal{B}_n \mid \exists\ i\in I,\ \text{ö.k. } V\subset U_i\}$ ailesi de yerel sonlu olur, çünkü

$\mathcal{V}_n \subset \mathcal{B}_n$ dir. Diğer yandan, $\mathcal{B}$ bir taban olduğundan, her U_i , $\mathcal{B}$'deki bazı elemanların birleşimi olarak yazılabilir. Buradan,

$$\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

ailesinin X'in bir örtümü olduğu elde edilir. Ayrıca $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$'nun σ-yerel sonlu ve açık bir inceltilmişidir. Şu halde Teorem 11.1'e göre (X,τ) parakompakttır.

2. Adım: Y. Teorem 11.3'e göre her bir $B_{n,i}$ bir F_σ-kümesi olduğundan $X-B_{n,i}$ bir G_δ-kümesidir. Diğer yandan, (X,τ) parakompakt olduğundan normaldir. Bu nedenle Teorem 8.16'ya göre, her $B_{n,i} \in \mathcal{B}_n$ için

$$\exists\ \phi_{n,i} : X \to [0, 1] \ \text{ sürekli, } \ \text{ö.k. } \ B_{n,i} = \{ x \in X \mid \phi_{n,i}(x) > 0 \}.$$

$\mathcal{B}_n$ yerel sonlu olduğundan, her $x \in X$ en çok sonlu sayıda $B_{n,i}$ içinde bulunur. Bu nedenle $\sum_{i \in I_n} \phi_{n,i}(x)$ tanımlı, sürekli ve dolayısıyla,

$$\Phi_{n,i}(x) := \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\phi_{n,i}(x)}{1 + \sum_{i \in I_n} \phi_{n,i}(x)}$$

tanımlı ve süreklidir. Ayrıca

(i) $0 \le \Phi_{n,i}(x) < \dfrac{1}{2^n}$

(ii) $B_{n,i} = \{ x \in X \mid \Phi_{n,i}(x) > 0 \}$

(iii) $0 \le \sum_{i \in I_n} \Phi_{n,i}(x) < \dfrac{1}{2^n}$

sağlanırlar.

3. Adım. Şimdi de her $x, y \in X$ için

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\Big(\sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}_\mathrm{n}} |\Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{x}) - \Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{y})|\Big)$$

olarak tanımlayalım. Öncelikle, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ sonludur (neden?). Ayrıca bu d, X üzerinde bir metriktir. Bunu göstermek için, $\mathrm{x}, \mathrm{y}\in \mathrm{X}$ ve $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ ise (X,τ) bir T_1-uzayı olduğundan $\mathrm{x}\in \mathrm{U}$ ve $\mathrm{y}\notin \mathrm{U}$ özelliklerini sağlayan bir U açık kümesi vardır. Diğer yandan, $\mathcal{B}$, (X,τ)'nun bir tabanı olduğundan

$$\exists\ (\mathrm{n,i}) \quad \text{ö.k.} \quad \mathrm{x}\in \mathrm{B}_{\mathrm{n,i}} \subset \mathrm{U}$$

sağlanır. Buradan $\mathrm{y}\notin \mathrm{B}_{\mathrm{n,i}}$ ve dolayısıyla $\Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{x}) > 0$ ve $\Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{y}) = 0$ dır. Şu halde $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \neq 0$ dır. Eğer $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ ise d 'nin tanımından açıkça görüldüğü gibi $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ dir.

d 'nin simetri ve üçgen eşitsizliğini sağladığı ise açıktır.

4. Adım. Son olarak, X üzerinde verilen τ topolojisinin yukarıdaki d metriği ile üretilen τ_d metrik topolojisi ile aynı olduğunu göstereceğiz:

$$0 \leq \sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}_\mathrm{n}} \Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{x}) < \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}$$

olduğundan sabit bir $\mathrm{x}\in \mathrm{X}$ için

$$d_\mathrm{x} : \mathrm{X} \to [0, \infty)\,, \qquad d_\mathrm{x}(\mathrm{y}) := d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisinin toplamı olduğundan, Weierstraß M-testi uyarınca y'ye göre süreklidir. Buradaki süreklilik, X üzerinde verilen τ topolojisine göredir. Şu halde d metriği ile üretilen metrik topoloji τ_d , τ'dan daha kaba, yani $\tau_d \subset \tau$ dır. Çünkü her $\mathrm{x}\in \mathrm{X}$ sabit ve $\varepsilon > 0$ için $\mathrm{K}(\mathrm{x}, \varepsilon) = d_\mathrm{x}^{-1}([0,\varepsilon))$ dur.

Tersine olarak, eğer U, x'in τ topolojisine göre bir açık komşuluğu ise uygun bir (n,i) için $\mathrm{x}\in \mathrm{B}_{\mathrm{n,i}} \subset \mathrm{U}$ sağlanır. Şimdi $\delta := \Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{x})$ olarak tanımlanırsa, $\mathrm{K}(\mathrm{x}, \delta) \subset \mathrm{U}$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < \delta$ ise $|\Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{x}) - \Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{y})| < \delta = \Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{x})$ dir. Buradan $\Phi_{\mathrm{n,i}}(\mathrm{y}) > 0$, dolayısıyla $\mathrm{y}\in \mathrm{B}_{\mathrm{n,i}} \subset \mathrm{U}$ elde edilir. Şu halde U, x'in τ_d metrik topolojisine göre de bir komşuluğudur. Bu nedenle $\tau \subset \tau_d$ ve dolayısıyla $\tau = \tau_d$ dir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Metriklenebilme probleminin çözümüne P. Urysohn'nun çok önemli katkıları olmuştur. Ayrılabilir metrik uzayların karakterize edilmesi ve kompakt Hausdorff uzaylarının Metriklenebilme Teoremi, ona aittir. Ancak, Genel Metriklenebilme Teoreminin kanıtlanması ile onun teoremleri, bu genel teoremin birer sonucu olarak elde edilebilir olmuştur.

Teorem 11.5. (Urysohn'nun 1. Metriklenebilme Teoremi)

Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

a) (X,τ) regüler ve ikinci sayılabilirdir.
b) (X,τ) ayrılabilir ve metriklenebilirdir.
c) (X,τ), $[0, 1]^N$ Hilbert kübü içine gömülebilir.

Kanıt. a) $\Rightarrow$ b): Her sayılabilir taban, σ-yerel sonlu bir taban olarak göz önüne alınabileceğinden Teorem 11.4'ün bir sonucudur.

b) $\Rightarrow$ a): Her ayrılabilir metrik uzay ikinci sayılabilir ve regülerdir. Böylece a) $\Leftrightarrow$ b) denkliği elde edilmiş olur.

a) $\Rightarrow$ c): Regüler ve ikinci sayılabilir bir topolojik uzayın $[0,1]^{\mathbf{N}}$ 'nin içine gömülebileceğinin kanıtı için bkz. W. J. Pervin, 1964, s.159 veya S. Willard, 1970, s.166.

c) $\Rightarrow$ a): [0,1], doğal altuzay topolojisi ile regüler ve ikinci sayılabilir olduğundan ve bu özellikler sayılabilir çarpımlar altında korunduğundan $[0,1]^{\mathbf{N}}$ de regüler ve ikinci sayılabilirdir. Dolayısıyla bunun her altuzayı da regüler ve ikinci sayılabilirdir. Böylece

a) $\Leftrightarrow$ c) denkliği de elde edilmiş ve kanıt tamamlanmıştır. □

Teorem 11.6. (Urysohn'nun 2. Metriklenebilme Teoremi)

Bir kompakt Hausdorff uzayının metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul, bu uzayın ikinci sayılabilir olmasıdır.

Kanıt. "$\Rightarrow$" Her kompakt metrik uzay (hatta sayılabilir kompakt metrik uzay) ayrılabilir olduğundan (bkz. Teorem 9.23) ikinci sayılabilirdir.

"$\Leftarrow$" Her kompakt Hausdorff uzayı regülerdir. Eğer bu uzay ayrıca ikinci sayılabilir ise Teorem 11.5'e göre metriklenebilirdir. □

Şimdi de metriklenebilmenin çarpım uzaylarına nasıl yansıdığını araştıralım:

Tanım 11.5. a) X bir küme ve d_1 ile d_2, X üzerinde iki metrik olsunlar. Eğer d_1 ile d_2, X üzerinde aynı topolojiyi üretirlerse, yani $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ sağlanıyorsa, bu iki metriğe *denk metrikler* denir (bkz. s. 30).

b) X bir küme ve d, X üzerinde bir metrik olsun. Eğer bir $k > 0$ sayısı, her x, y$\in$X için d(x, y) $\leq k$ olacak şekilde mevcut ise bu d metriğine *sınırlı metrik* denir.

Topolojik açıdan bir amaca hizmet edecekse, verilen bir metrik ona denk olan başka bir metrik ile daima değiştirilebilir.

Y. Teorem 11.4. *X üzerindeki her d metriği sınırlı bir metriğe denktir.*

Kanıt. Verilen d metriği ile tanımlanan

$$d_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \min(1, d(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$

ve

$$d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \frac{d(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{1 + d(\mathrm{x}, \mathrm{y})}$$

fonksiyonlarının X üzerinde d metriğine denk iki sınırlı metrik olduğu gösterilebilir. Kanıt alıştırma olarak bırakılmıştır (bkz. P.6).

Teorem 11.7. *Boş olmayan bir* $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *çarpım uzayının metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul, her* $i\in\mathbf{N}$ *için* (X_i, τ_i)*'nin metriklenebilir olmasıdır.*

Kanıt. "⇒" Her bir (X_i,τ_i), $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ çarpım uzayının bir altuzayına homeomorf olduğundan (bkz. Bölüm 6, P.17) ve homeomorfizmler metriklenebilmeyi koruduğundan (bkz. P.7), (X_i,τ_i) de metriklenebilirdir.

"⇐" (X_i,τ_i), $(i = 1,2, \ldots)$ metriklenebilir topolojik uzaylar olsunlar. Y. Teorem 11.4'e göre her $i = 1,2, \ldots$ için X_i üzerindeki $\tau_i = \tau_{d_i}$ topolojisini üreten d_i metriği, 1 ile sınırlı bir metrik olarak kabul edilebilir. Buna göre, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ üzerinde her $x = (x_1, x_2, \ldots)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots)$ için

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} . d_i(x_i, y_i)$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonunun bir metrik olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi de bu d metriğinin $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ üzerindeki çarpım topolojisini ürettiğini göstereceğiz:

$x = (x_1,x_2, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ keyfi bir nokta olsun. x'in çarpım topolojisine göre bir U komşuluk tabanı elemanı sadece sonlu sayıda koordinatı sınırladığından

$$U = K_{d_1}(x_1,\varepsilon_1) \times K_{d_2}(x_2,\varepsilon_2) \times \ldots \times K_{d_n}(x_n,\varepsilon_n) \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k$$

şeklinde yazılabilir. Eğer

$$\varepsilon := \min\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{2^n}\right)$$

olarak seçilirse, $K_d(x, \varepsilon) \subset U$ sağlandığı görülür. Gerçekten eğer $d(x, y) < \varepsilon$ ise $i = 1,2, \ldots ,n$ için $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon_i$ olduğu kolayca elde edilir. Şu halde,

$\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ üzerinde d ile üretilen τ_d metrik topolojisi, çarpım topolojisinden daha incedir.

Diğer yandan, $\varepsilon>0$ keyfi verildiğinde, bir N doğal sayısı, $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde yeteri kadar büyük seçilebilir. Bu nedenle

$$K_{d_1}(x_1, \frac{\varepsilon}{2N}) \times K_{d_2}(x_2, \frac{\varepsilon}{2N}) \times \ldots \times K_{d_N}(x_N, \frac{\varepsilon}{2N}) \times \prod_{k=N+1}^{\infty} X_k \subset K_d(x, \varepsilon)$$

sağlandığı görülür, çünkü

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} . d_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2} . d_1(x_1, y_1) + \ldots + \frac{1}{2^N} . d_N(x_N, y_N)$$

$$+ \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} . d_i(x_i, y_i)$$

$$\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2N} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2N}}_{\text{N-defa}} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dur. Şu halde çarpım topolojisi, τ_d metrik topolojisinden daha incedir. Sonuç olarak bu iki topoloji aynıdır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 11.1. Metriklenebilme keyfi çarpımlar altında korunmaz. Örneğin $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ çarpım topolojisi ile metriklenebilir bir topolojik uzay değildir. Çünkü örneğin bu uzay bir A_1-uzayı değildir (bkz. Uyarı 7.4 ve Teorem 7.4).

Örnek 11.2. Metriklenebilme sayılabilir çarpımlar altında korunduğundan, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ve $[0, 1]^{\mathbf{N}}$ metriklenebilirdir. Bu iki uzay ile, Bölüm 2, P. 3'de

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

metriği ile verilen **H** := { $x = (x_1, x_2, \ldots)$ | $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ } Hilbert uzayı, ayrılabilir metrik uzaylar teorisinde ayrı bir öneme sahiptir.

Problemler

P. 1. Her ikinci sayılabilir regüler uzay parakompakttır. Gösteriniz.

P. 2. (X,τ) parakompakt ise

- **a)** X'in her kapalı alt kümesi de parakompakttır.
- **b)** X'deki kapalı kümelerin sayılabilir bir ailesinin birleşimi de parakompakttır.

Gösteriniz.

P. 3. Parakompaktlık bir topolojik özelliktir. Gösteriniz.

P. 4. Bir kompakt uzay ile bir parakompakt uzayın çarpım uzayı parakompakttır. Gösteriniz. (bkz. W. J. Pervin, s. 168).

P. 5. Bir regüler parakompakt uzayın her F_σ altkümesi de parakompakttır. Gösteriniz.

P. 6. Y. Teorem 11.4'ün kanıtını tamamlayınız.

P. 7. Metriklenebilme'nin bir topolojik özellik olduğunu gösteriniz.

P. 8. **H** Hilbert uzayının (Örnek 11.2) ayrılabilir olduğunu gösteriniz (bkz. W. J. Pervin, s. 111).

P. 9. Kapalı kümelerin yerel sonlu her ailesinin herhangi bir altailesinin birleşimi de kapalıdır. Gösteriniz.

P. 10. $\mathcal{A} = \{ A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ bir (X,τ) topolojik uzayının kapalı kümelerinin yerel sonlu ve

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

özelliğine sahip bir ailesi ise

f, X üzerinde süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \Lambda$ için $f|A_\lambda$ daraltılmışı süreklidir.

P. 11. (X,τ), d metriği ile metriklenebilir bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bu uzaydaki kapalı kümelerin

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \text{ö. k.} \quad \lambda,\ \mu \in \Lambda\ \ (\lambda \neq \mu)\ \text{ için } \quad d(A_\lambda, A_\mu) \geq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir ailesi ise $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ kapalıdır. Gösteriniz.

P. 12. *Birimin Ayrışımı*

a) (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların aşağıdaki özellikleri sağlayan her $\mathcal{F}$ ailesine (X,τ) üzerinde "*birimin bir ayrışımı*" denir.

(i) Her $f \in \mathcal{F}$ için $f \geq 0$ dır.
(ii) Her $x \in X$ için sonlu sayıda $f \in \mathcal{F}$ dışında $f(x) = 0$ dır.
(iii) $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1$.

b) (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$, X'in bir örtümü ve $\mathcal{F}$ bu uzay üzerinde birimin bir ayrışımı olsun. Eğer

$$\forall\ f \in \mathcal{F} \ \text{ için } \ \exists\ U_f \in \mathcal{U} \quad \text{ö.k.} \quad f(X - U_f) = 0$$

sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ 'ye "$\mathcal{U}$ *örtümüne karşılık gelen birimin ayrışımı*" denir.

Buradan, bir (X,τ) T_1-uzayı için, aşağıdaki denklik sağlanır:

(X,τ) parakompakttır $\Leftrightarrow$ X'in her açık örtümüne karşılık gelen birimin bir ayrışımı vardır.

(Y.g.: Bu ifadenin kanıtı için daha kapsamlı Genel Topoloji kitaplarına başvurunuz).

BÖLÜM 12

TAM METRİK UZAYLAR VE TAMLAŞTIRMA

Bir metrik uzayın tamlığı bir topolojik özellik değildir. Diğer bir ifade ile, bir tam metrik uzay ile tam olmayan bir metrik uzay, metriklerinin ürettiği topolojilerle birbirlerine homeomorf olabilirler. Hatta bazen aynı küme üzerinde, biri tam diğeri tam olmayan iki metrik aynı topolojiyi üretebilirler. Buna karşılık metrik uzaylarda, kompaktlık gibi bazı topolojik özellikler o metrik uzayın tamlığını garanti ederler. Diğer yandan, bir uzayın topolojisinin bir tam metrik ile üretilmiş olmasının da ilginç topolojik sonuçları vardır. Bu ve benzeri nedenlerle tam metrik uzaylar genel topoloji açısından da ilgi çekmektedir.

Ayrıca, herhangi bir metrik uzaydan yola çıkılarak öyle bir tam metrik elde edilebilir ki, o metrik uzay, elde edilen tam metrik uzayın içine, resim yoğun olacak biçimde, izometrik olarak gömülebilir. Bu işlem, rasyonel sayılar kümesinden hareketle reel sayılar kümesinin elde edilmesine benzer ve "metrik uzayın tamlaştırılması" olarak bilinir.

Aşağıda verilen bazı tanımlar ve temel bilgiler, daha önce Bölüm 2 de metrik uzaylar anlatılırken verilmiş olmasına rağmen bütünlüğü sağlamak amacıyla burada da tekrarlanmasında bir sakınca görülmemiştir. Örneğin, Cauchy dizisi veya **R**'nin tamlığı v. b.

A. Tam Metrik Uzaylar

Tanım 12.1. (X, d) bir metrik uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ X'de bir dizi olsun. Eğer

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad \exists\ n_o = n_o(\varepsilon)\in\mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad \forall\ m, n \geq n_o \quad \text{için} \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisine bu metrik uzayda bir *Cauchy dizisi* denir (bkz. Tanım 2.11).

Örnek 12.1. Kolayca görüleceği gibi, bir metrik uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir (bkz. Örnek 2.9 a)).

Uyarı 12.1. Örnek 12.1'deki ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Diğer bir ifade ile, bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisinin yakınsak olması gerekmez. Örneğin $X = (0, 1]$, doğal mutlak değer metriği (altmetrik e_X) ile göz önüne alındığında, $x_n = \dfrac{1}{n}$, (n=1, 2, . . .) bu metrik uzayda bir Cauchy dizisidir, fakat bu dizi, bu metrik uzayda yakınsak değildir.

Genel olarak, bir metrik uzaydan, o uzayda yakınsak olan bir dizinin limit noktasını atarak elde edilen altuzayda bu dizi, yakınsak olmayan bir Cauchy dizisi olur.

Uyarı 12.2. Bir metrik uzayda, bir dizinin "Cauchy dizisi olma" özelliği, "yakınsak dizi olma" özelliğinin aksine bir topolojik özellik değildir. Diğer bir ifade ile, yakınsak bir dizinin homeomorf resmi (hatta, sürekli bir fonksiyon altındaki resmi) resim uzayında yine yakınsak bir dizi olmasına rağmen, bir Cauchy dizisinin homeomorf resminin de yine bir Cauchy dizisi olması gerekmez. Örneğin, $X = \{ \dfrac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots \}$ kümesi üzerinde, mutlak değer metriğinin (altmetrik e_X) ürettiği metrik topoloji ile, ρ ayrık metriğinin ürettiği topolojiyi göz önüne alalım. Bu topolojilerin her ikisi de ayrık topoloji, yani $\tau_{e_X} = \tau_\rho = \tau_D$ dir. Bu nedenle $i : (X, \tau_{e_X}) \to (X, \tau_\rho)$, $i(x) = x$ özdeşlik dönüşümü bir homeomorfizmdir. Diğer yandan, $x_n = \frac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ dizisi X'de e_X metriğine göre bir Cauchy dizisidir. Fakat bu dizinin i homeomorfizmi altındaki resmi, ki bu resim dizinin kendisidir, ρ ayrık metriğine göre bir Cauchy dizisi değildir.

Yukarıda görüldüğü gibi genel olarak bir metrik uzayda, her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir, fakat her Cauchy dizisinin yakınsak olması gerekmez. Sezgisel olarak, içindeki her Cauchy dizisinin yakınsak olmadığı metrik uzaylar bir anlamda "tam" değildir. O tip uzaylar bir tür "boşluk" lara sahiptir. İşte bu boşlukların doldurulması, ya da kapatılması ile o uzay "tamlaştırılmış" olur.

Tanım 12.2. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsıyorsa, bu (X, d) metrik uzayına bir *tam metrik uzay* denir. Bu d metriğine de bazen *tam metrik* adı verilir.

Örnek 12.2. **R** reel sayılar kümesi e doğal (mutlak değer) metriği ile bir tam metrik uzaydır. **R**'deki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu, reel sayıların, analizden bilinen temel özelliklerinden birisidir (bkz.Örnek 2.9 c)).

Uyarı 12.3. **a)** Tamlık bir topolojik özellik değildir. Örneğin doğal metrikleri ile **R** tam, (0, 1) açık aralığı ise tam değildir. Fakat bilindiği gibi (metrik topolojileri ile) bu iki uzay homeomorftur (bkz. Örnek 5.3 a) ve e).

b) Bir küme üzerinde aynı topolojiyi üreten biri tam diğeri tam olmayan iki metrik de bulunabilir. Örneğin, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ doğal sayılar kümesi üzerinde,

$$e_{\mathbf{N}}(m, n) := |m - n| , \qquad (\forall\, m, n \in \mathbf{N})$$

bir tam metriktir. Çünkü bu metriğe göre sadece sabit diziler Cauchy dizileri olabilirler ve onlar da elbette ki yakınsaktır. Şu halde, $(\mathbf{N}, e_{\mathbf{N}})$ bir tam metrik uzaydır. Aynı küme üzerinde,

$$\rho(m, n) := \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|, \quad (\forall\ m, n \in \mathbf{N})$$

de bir metriktir, fakat bu metrik tam değildir. Çünkü, örneğin $x_n = n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ bu metriğe göre yakınsak olmayan bir Cauchy dizisidir. Şu halde, $(\mathbf{N}, \rho)$ tam olmayan bir metrik uzaydır. Ayrıca her iki metriğin de $\mathbf{N}$ üzerinde ürettiği topoloji ayrık, yani $\tau_{e_{\mathbf{N}}} = \tau_\rho = \tau_D$ dır. Dolayısıyla metrik topolojileri ile bu iki metrik uzay homeomorftur. Örneğin,

$$i : (\mathbf{N}, \tau_{e_{\mathbf{N}}}) \rightarrow (\mathbf{N}, \tau_\rho),\ i(x) = x$$

özdeşlik dönüşümü bir homeomorfizmdir.

Şimdi de bazı tam metrik uzay örneklerini görelim:

Örnek 12.3. $\mathbf{R}^n$ doğal metriği ile bir tam metrik uzaydır. Bunun kanıtı okuyucuya bırakılmıştır (bkz. P. 1).

Örnek 12.4 . $\mathbf{H} = \{\ x = (x_1, x_2, \ldots\ )\ \mid\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\ \}$ dizi uzayında

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$$

bir tam metriktir. Bu metrik ile $\mathbf{H}$ dizi uzayına reel *Hilbert uzayı* adı verilir (bkz. Bölüm 2, P.3).

Bu d'nin bir metrik olduğunun gösterilmesi Bölüm 2, P.3'de okuyucuya bırakılmıştır. Burada bunun bir tam metrik olduğu gösterilecektir: Bunun için $(x_n) = ((x_1^n, x_2^n, \ldots\ ))$, $(\mathbf{H}, d)$'de bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin.

$$\exists\ n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \text{ö.k.}\ \forall\ m, n \geq n_o\ \text{ için }\ d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

sağlanır. Buradan $m, n \geq n_o$ için

$$|\ x_i^m - x_i^n\ | \leq d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olduğundan, i. koordinatlardan oluşan (x_i^n) dizisi $\mathbf{R}$ reel sayılarda bir Cauchy dizisidir. $\mathbf{R}$ tam metrik uzay olduğundan, her $i \in \mathbf{N}$ için

$$\exists\, x_i \in \mathbf{R}, \quad \text{ö.k.} \quad x_i^n \to x_i$$

elde edilir. Şimdi de $x := (x_1, x_2, \ldots)$ olarak tanımlanırsa, yukarıda alınan Cauchy dizisinin bu x noktasına yakınsadığı, yani $x_n \to x$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten, her sabit $J \in \mathbf{N}$ ve her $m, n \geq n_o$ için

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{J} (x_i^m - x_i^n)^2} < \varepsilon$$

sağlanır. Buradan eğer $n \in \mathbf{N}$, $(n > n_o)$ sabit tutulur ve $m \to \infty$ için limite geçilirse

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{J} (x_i - x_i^n)^2} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $J \in \mathbf{N}$ için sağlandığından

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2} = d(x, x_n) < \varepsilon$$

elde edilmiş ve $x_n \to x$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de $x \in \mathbf{H}$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}(x_i)^2 = (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 &= (x_i - x_i^n)^2 + (x_i^n)^2 + 2.(x_i - x_i^n)(x_i^n)\\ &\leq 2.(x_i - x_i^n)^2 + 2.(x_i^n)^2,\end{aligned}$$

çünkü $2.(x_i - x_i^n)(x_i^n) \leq (x_i - x_i^n)^2 + (x_i^n)^2$ dir. Diğer yandan, $x_n \in \mathbf{H}$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n)^2$ her $n \in \mathbf{N}$ için yakınsaktır. Ayrıca her $n > n_o$ için yukarıda gösterildiği gibi $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 < \varepsilon^2$ dir. Dolayısıyla, $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2$ serisi yakınsak ve o nedenle de $x \in \mathbf{H}$ dır. Böylece verilen Cauchy dizisinin $(\mathbf{H}, d)$'de yakınsak olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 12.5. $I = [0, 1]$ aralığı olmak üzere, $C(I) := \{ f \mid f : I \to \mathbf{R} \text{ sürekli}\}$ üzerinde tanımlı

$$d(f, g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| \mid x \in I \}$$

bir tam metriktir.

Bu d 'nin bir metrik olduğunun gösterilmesi Bölüm 2, P.4 a)'da okuyucuya bırakılmıştır. Burada bunun bir tam metrik olduğu gösterilecektir: Bunun için (f_n), C(I)'de bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Cauchy dizisi tanımına göre,

$$\exists\ n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \quad \text{ö.k.} \quad \forall\ m, n \geq n_o \quad \text{için} \quad d(f_m, f_n) < \varepsilon$$

sağlanır. Buradan her $m, n \geq n_o$ ve her $x \in I$ için

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq d(f_m, f_n) < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu ise her sabit $x \in I$ için $(f_n(x))$ reel sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbf{R}$ tam olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ mevcuttur. Böylece $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şeklinde bir fonksiyon tanımlanmış olur.

Şimdi de $f_n \to f$ ve $f \in C(I)$ olduğunu iddia ediyoruz: Her $m, n \geq n_o$ ve her $x \in I$ için

$$-\varepsilon < f_m(x) - f_n(x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f_n(x) - \varepsilon < f_m(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

sağlandığından, burada n ve x sabit tutularak $m \to \infty$ için limite geçilirse ($f_m(x) \to f(x)$ olduğundan) aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon.$$

Dolayısıyla her $n \geq n_o$ ve her $x \in I$ için $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ olur. Böylece her $n \geq n_o$ için

$$d(f_n, f) = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| \mid x \in I \} \leq \varepsilon$$

elde edilmiş olur. Şu halde $f_n \to f$ dir. Diğer yandan, fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı hatırlanırsa (bkz. Bölüm 2, Tanım 2.12), $f_n \to f$ yakınsaklığı I'da düzgün olduğundan ve f_n fonksiyonlarının her biri de sürekli olduklarından f fonksiyonu da süreklidir (bkz. Teorem 2.11), yani $f \in C(I)$ dır.

Şimdi de tam metrik uzayların bazı özelliklerini görelim:

Teorem 12.1. *Bir (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul, X 'de boş olmayan kapalı kümelerin*

$$A_n \supset A_{n+1} \;,\; (n = 1, 2, \ldots) \quad ve \quad ç(A_n) \to 0$$

koşullarını sağlayan her $\{ A_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$ *dizisi için* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$ *olmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $n \in \mathbf{N}$ için $A_n \neq \varnothing$ olduğundan, her $n \in \mathbf{N}$ için bir $a_n \in A_n$ seçilebilir. Bu şekilde elde edilen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dizisi (X, d) 'de bir Cauchy dizisidir. Bunu göstermek için, $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $ç(A_n) \to 0$ olduğundan,

$$\exists \; n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbf{N} \;,\; \text{ö.k.} \quad \forall\, n \geq n_o \quad \text{için} \quad ç(A_n) < \varepsilon$$

sağlanır. Diğer yandan her $n \geq n_o$ için $A_n \subset A_{n_o}$ olduğundan

$$\forall \; m, n \geq n_o \quad \text{için} \quad a_m \in A_m \subset A_{n_o} \quad \text{ve} \quad a_n \in A_n \subset A_{n_o} \quad \Rightarrow$$

$$\forall \; m, n \geq n_o \quad \text{için} \quad a_m,\; a_n \in A_{n_o} \quad \text{ve} \quad ç(A_{n_o}) < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\forall \; m, n \geq n_o \quad \text{için} \quad d(a_m, a_n) \leq ç(A_{n_o}) < \varepsilon$$

elde edilir. Şu halde $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dizisi (X, d)'de bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan

$$\exists \; y \in X, \quad \text{ö.k.} \quad a_n \to y$$

elde edilir. Buradan, her $n \in \mathbf{N}$ için $(a_n, a_{n+1}, \ldots)$ dizisi de y noktasına yakınsar. Fakat her $n \in \mathbf{N}$ için A_n kapalı ve $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \subset A_n$ olduğundan $y \in A_n$, ve dolayısıyla $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dir. Şu halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$ olur.

"$\Leftarrow$" Tersine olarak, (X, *d*)'deki kapalı ve boş olmayan kümelerin,

$$A_n \supset A_{n+1}, \ (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{ve} \quad ç(A_n) \to 0$$

koşulunu sağlayan her $\{ A_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$ dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ olsun. Ayrıca $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, X'de bir Cauchy dizisi olsun. Her $n\in\mathbf{N}$ için

$$B_n := \{ x_k \mid k \geq n \} \quad \text{ve} \quad A_n := \overline{B}_n$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\{ A_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$ kapalı kümelerinin azalan dizisi teoremde verilen koşulları sağlar. (Bunu göstermek için önce, herhangi bir $A \subset X$ altkümesi için $ç(A) = ç(\overline{A})$ olduğunu gösteriniz. Daha sonra $ç(B_n) \to 0$ olduğunu göstermek için ise $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 'nin bir Cauchy dizisi olduğunu göz önünde bulundurunuz). O halde hipoteze göre $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ olmalıdır. $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy dizisinin işte bu y noktasına yakınsadığı gösterilebilir. Bunun için $\varepsilon>0$ keyfi verilsin. $ç(B_n) \to 0$ olduğundan

$$\exists \ M > 0, \ \text{ö.k.} \ \ \forall \ n > M \ \ \text{için} \ \ ç(B_n) < \varepsilon$$

sağlanır. Diğer yandan, $ç(B_n) = ç(\overline{B}_n) = ç(A_n)$ olduğundan $ç(A_n) < \varepsilon$ dır. O halde her $n > M$ için (x_n, $y\in A_n$ olduğundan) $d(x_n, y) < \varepsilon$ olmalıdır. Bu ise $x_n \to y$ olduğunu ifade eder. Böylece kanıt tamamlanır. □

Teorem 12.2. *Bir tam metrik uzayın her kapalı altuzayı da tamdır.*

Kanıt. (X, *d*) bir tam metrik uzay, $A \subset X$ kapalı bir altuzay ve $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, A kümesinde bir Cauchy dizisi olsun. A üzerindeki metrik d_A altmetriği olduğundan, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ üst uzayda da bir Cauchy dizisidir. Üst uzay tam olduğundan bu dizi üst uzayda yakınsaktır. Ancak dizinin bütün terimleri A kümesinde ve A kapalı olduğundan limiti de A'da olmalıdır. Yani $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, A'da yakınsaktır. Şu halde (A, d_A) altuzayı da tamdır. □

Uyarı 12.4. Bilindiği gibi her metrik uzayın tam olması gerekmez. Ancak aşağıdaki teoremde görüleceği gibi, her kompakt metrik uzay tamdır.

Böylece, metrik uzaylarda tamlık bir topolojik özellik olmamasına rağmen, bazı topolojik koşulların tamlığı verdiği görülür.

Teorem 12.3. *Her kompakt metrik uzay tamdır.*

Kanıt. 1. yol: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $\{ A_n \mid n = 1, 2, ... \}$, X'de boş olmayan kapalı kümelerin,

$$A_n \supset A_{n+1} \ , (n = 1, 2, . . . \ ) \quad \text{ve} \quad ç(A_n) \to 0$$

koşullarını sağlayan bir dizisi olsun. (X, d) kompakt ve $\{ A_n \mid n = 1, 2, ...\}$ kapalı kümelerin Sonlu Arakesit Özelliğine sahip bir ailesi olduğundan, Teorem 9.1'e göre $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$ olmalıdır. Şu halde yukarıdaki Teorem 12.1'e göre (X, d) tamdır.

2. yol: (X, d) kompakt ve $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, X'de bir Cauchy dizisi olsun. (X, d) metrik uzayı kompakt olduğundan Teorem 9.24'e göre sayılabilir kompakttır. Bu nedenle, Teorem 9.13'e göre, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dizisinin de $x_o \in X$ gibi bir yığılma noktası vardır. Teorem 2.10'a göre ise bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi, kendisinin yığılma noktasına yakınsar. Şu halde $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de x_o noktasına yakınsar ve dolayısıyla (X, d) tamdır. □

Uyarı 12.5. Teorem 12.3'ün tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin **R** doğal metriği ile bir tam metrik uzaydır, fakat bilindiği gibi kompakt değildir. Ancak bir ek koşul ile tam metrik uzaylar kompakt olmaktadırlar. Bu ek koşul "tam sınırlılık" tır (bkz. Tanım 9.12). (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ bir altküme ise kolayca görüleceği gibi,

A tam sınırlıdır $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon>0$ sayısı için A kümesi, bu uzaydaki sonlu sayıda ε-yarıçaplı açık toplar ile örtülebilir.

Her ne kadar burada sözü edilen ε-yarıçaplı açık topların merkezlerinin o kümenin içinde kalmaları istenmiyorsa da, aşağıdaki teoremde göstereceğimiz gibi bunun her zaman doğru olduğu kabul edilebilir.

Teorem 12.4. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ bir altküme ise*

A, d metriğine göre tam sınırlıdır $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ sayısı için A kümesi, merkezleri A'da olan ε-yarıçaplı sonlu sayıda açık top ile örtülebilir.

Kanıt. "⇒" A, d 'ye göre tam sınırlı olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi verilsin. Tam sınırlılık tanımına göre

$$\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, \quad \text{ö.k.} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$$

yazılabilir. Buradaki $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ noktaları A kümesinin dışında da olabilsin. Genelliği bozmayacağından, her i=1, 2,...,n için $A \cap K(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ kabul edilebilir. Çünkü, A ile arakesitleri boş olan topları dikkate almamak bir şey değiştirmez. Buradan, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için bir $a_i \in A \cap K(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ seçilerek elde edilen $a_i \in A$ merkezli $\{ K(a_i, \varepsilon) \mid i = 1, 2, \ldots, n \}$ açık toplar ailesi A kümesini örter. Çünkü, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $K(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset K(a_i, \varepsilon)$ sağlandığı kolayca görülür. Gerçekten,

$$\forall\ y \in K(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{için} \quad d(y, a_i) \leq d(y, x_i) + d(x_i, a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sağlanır.
"⇐" Apaçıktır. □

Uyarı 12.6. Kolayca görüleceği gibi, bir metrik uzayda her tam sınırlı küme sınırlıdır. Fakat bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin **R**, $d(x, y) := \min(1, |x - y|)$ metriğine göre sınırlıdır, çünkü her $x, y \in \mathbf{R}$ için $d(x, y) \leq 1$ dir. Fakat bu metriğe göre **R** tam sınırlı değildir. Çünkü herhangi bir $x \in \mathbf{R}$ için,

$$K_d(x, \varepsilon) = \begin{cases} (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon), & 0 < \varepsilon \leq 1 \\ \mathbf{R}, & \varepsilon > 1 \end{cases}$$

dir. Bu nedenle **R**, örneğin $\varepsilon = \frac{1}{2}$ yarıçaplı sonlu sayıda açık top ile örtülemez.

Şimdi artık bir metrik uzayın kompaktlığı ile tamlığı arasındaki ilişkiye yeniden dönebiliriz:

Teorem 12.5. *Bir metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter koşul, o uzayın tam ve tam sınırlı olmasıdır.*

Kanıt. "$\Rightarrow$" Önce (X, d) metrik uzayı kompakt, yani (X, τ_d) kompakt olsun. Teorem 12.3'e göre (X, d) bir tam metrik uzaydır. Diğer yandan $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\{ K_d(x,\varepsilon) \mid x \in X \}$, X'in bir açık örtümüdür. (X, τ_d) kompakt olduğundan

$$\exists \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, \quad \text{ö.k.} \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \varepsilon)$$

yazılabilir, yani (X, d) tam sınırlıdır.

"$\Leftarrow$" Şimdi de (X, d) tam ve tam sınırlı olsun. (X, τ_d)'nin kompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\mathcal{G}$, X'in herhangi bir açık örtümü olsun. $\mathcal{G}$'nin hiçbir sonlu altörtümü bulunmadığını kabul edelim. Bu durumda aşağıda görüleceği gibi bir çelişkiye varılır.

(X, d) tam sınırlı olduğundan, $\varepsilon = 1$ için X, 1 yarıçaplı sonlu sayıda açık top ile örtülebilir. Eğer buradaki açık toplardan her biri $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanı ile örtülebilseydi, o taktirde $\mathcal{G}$'nin sonlu bir altörtümü olurdu. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde bu açık toplardan en az birisi, örneğin $K(x_1,1)$, $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanı ile örtülemez. (X, d) tam sınırlı olduğundan, onun bir altkümesi olarak $K(x_1,1)$ de tam sınırlıdır. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için $K(x_1,1)$, merkezleri $K(x_1,1)$'de olan $\frac{1}{2}$ yarıçaplı sonlu sayıda açık top ile örtülebilir. Yukarıdaki nedenle bu toplardan en az birisi, örneğin $x_2 \in K(x_1,1)$ olmak üzere $K(x_2,\frac{1}{2})$, $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanı ile örtülemez. $K(x_2,\frac{1}{2})$ de tam sınırlıdır. $\varepsilon = \frac{1}{4}$ için $K(x_2,\frac{1}{2})$'de aynı nedenle merkezleri kendisinde olan sonlu sayıda $\frac{1}{4}$ yarıçaplı açık toplarla örtülebilir. Bunlardan en az birisi, diyelim $x_3 \in K(x_2,\frac{1}{2})$ olmak üzere $K(x_3,\frac{1}{4})$, $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanı ile örtülemez. Bu işleme devam edilirse, X'de öyle bir (x_n) dizisi ve öyle bir $r_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ reel sayı dizisi elde edilir ki,

$$\forall\, n\in\mathbf{N} \quad \text{için} \quad x_{n+1} \in K(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \quad \text{ve} \quad K(x_{n+1}, \frac{1}{2^n})$$

$\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanı ile örtülemez. Bunlardan birinci koşul (x_n)'nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Gerçekten, $m, n\in\mathbf{N}$ ve $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

yazılır ve $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ geometrik serisinin yakınsaklığı göz önüne alınırsa istenen elde edilir. O halde (X, d) tam olduğundan $x_n \to y$ olacak şekilde bir $y\in X$ vardır. $\mathcal{G}$ örtüm olduğundan,

$$\exists\; G\in\mathcal{G}, \;\; \text{ö.k.} \;\; y\in G \;\; \text{ve} \;\; G \text{ açık} \;\Rightarrow\; \exists\; r > 0, \;\; \text{ö.k.} \;\; K(y, r) \subset G$$

sağlanır. Diğer yandan $x_n \to y$ olduğundan $\dfrac{r}{2} > 0$ sayısı için

$$\exists\; n_o\in\mathbf{N}, \;\; \text{ö.k.} \;\; \forall\; n \ge n_o \;\; \text{için} \;\; d(x_n, y) < \frac{r}{2},$$

ve $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ olduğundan $\dfrac{r}{2} > 0$ için

$$\exists\; n_1\in\mathbf{N}, \;\; \text{ö.k.} \;\; \forall\; n \ge n_1 \;\; \text{için} \;\; \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$$

sağlanır. Buradan her $n \ge \text{maks}\,\{n_o, n_1\}$ için $K(x_{n+1}, \dfrac{1}{2^n}) \subset K(y, r) \subset G$ elde edilir. Bu ise $K(x_{n+1}, \dfrac{1}{2^n})$'nin $\mathcal{G}$'nin bir tek G elemanı içinde bulunduğunu gösterir. Bu da $K(x_{n+1}, \frac{1}{2^n})$ topunun $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanı ile örtülemeyeceği ile çelişir. Bu çelişki $\mathcal{G}$'nin sonlu bir altörtümü bulunması gerektiğini gösterir. O halde (X, τ_d) kompakttır. □

Teorem 12.5. *Bir tam metrik uzayda 1. kategoriden her altkümenin içi boştur.*

Kanıt. (X, d) bir tam metrik uzay ve $A \subset X$, 1. kategoriden bir altküme olsun. O halde

$$\exists \ F_i \subset X \,, \ (i = 1, 2, \ldots) \ \text{ö.k.} \quad \overset{o}{\overline{F_i}} = \varnothing \quad \text{ve} \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

yazılabilir. (Genel olarak, $\overset{o}{A} = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)^o \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{o}{F_i}$ olduğundan teoremin iddiasının açık olmadığına dikkat edilmelidir). Teoremin iddiasının doğru olmadığını kabul edelim. Yani $\overset{o}{A} \neq \varnothing$ ve $x_o \in \overset{o}{A}$ olsun. Buradan,

$$\exists \ r_o > 0 \quad \text{ö.k.} \quad B(x_o, r_o) \subset A$$

yazılabilir. (Burada, $B(x_o,r_o) := \{x \in X \mid d(x_o, x) \leq r_o\}$ kapalı topunu göstermektedir). Şimdi, $\overset{o}{\overline{F_1}} = \varnothing$ olduğundan $X - \overline{F_1}$ açık ve yoğun bir altkümedir. Bu nedenle $K(x_o,r_o) \cap (X - \overline{F_1}) \neq \varnothing$ ve açıktır. Şu halde

$$\exists \ x_1 \in X, \quad \exists \ r_1 > 0, \quad \text{ö.k.} \quad B(x_1,r_1) \subset K(x_o,r_o) \cap (X - \overline{F_1})$$

yazılabilir. Burada $0 < r_1 < \frac{r_o}{2}$ olarak seçilebilir.

Aynı şekilde, $\overset{o}{\overline{F_2}} = \varnothing$ olduğunda $X - \overline{F_2}$ açık ve yoğun bir altkümedir. Bu nedenle $K(x_1,r_1) \cap (X - \overline{F_2}) \neq \varnothing$ ve açıktır. Şu halde

$$\exists \ x_2 \in X, \quad \exists \ r_2 > 0, \quad \text{ö.k.} \quad B(x_2,r_2) \subset K(x_1,r_1) \cap (X - \overline{F_2})$$

yazılabilir ve $0 < r_2 < \frac{r_o}{2^2}$ olarak seçilebilir.

. . . .

Böylece devam edilirse, her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\exists\ x_n \in X,\quad \exists\ r_n > 0,\quad \text{ö.k.}\quad B(x_n,r_n) \subset K(x_{n-1},r_{n-1}) \cap (X - \overline{F}_n)$$

yazılabilir ve $0 < r_n < \dfrac{r_o}{2^n}$ olarak seçilebilir. Bu şekilde elde edilen (x_n) dizisi X'de bir Cauchy dizisidir. Bu gerçek Teorem 12.4'dekine benzer düşünce ile kolayca görülür. (Örneğin, yeteri kadar büyük m, $n \in \mathbf{N}$ için $d(x_m, x_n)$'nin istenildiği kadar küçük yapılabileceğini görünüz). (X, d) tam olduğundan $x_n \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradaki kapalı toplar

$$B(x_o,r_o) \supset B(x_1,r_1) \supset \ldots . \supset B(x_n,r_n) \supset \ldots .$$

şeklinde iç içe ve $x_n \in B(x_n,r_n)$ olduğundan, her $n \in \mathbf{N}$ için $x_n \in B(x_o,r_o)$ dır. Burada $B(x_o,r_o)$ kapalı olduğundan $y \in B(x_o,r_o)$ ve dolayısıyla $y \in A$ dır.

Diğer yandan, her $n \in \mathbf{N}$ için $\{ x_n, x_{n+1}, \ldots \} \subset B(x_n,r_n)$ ve $B(x_n,r_n)$ de kapalı olduğundan $y \in B(x_n,r_n) \subset X - \overline{F}_n$ dir. Şu halde

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - \overline{F}_n) = X - \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{F}_n \subset X - \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n = X - A\,,$$

yani $y \in X - A$ olmalıdır. Bu ise $y \in A$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $\overset{o}{A} = \varnothing$ olmak zorundadır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Sonuç 12.1. *Her tam metrik uzay bir Baire uzayıdır.*

Kanıt. (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Bu uzaydaki sayılabilir sayıda açık ve yoğun kümelerin her ailesinin arakesitinin de bu uzayda yoğun olduğunu göstereceğiz:

Her $n \in \mathbf{N}$ için $G_n \subset X$, X'de açık ve yoğun olmak üzere $\{ G_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ altküme ailesini göz önüne alalım. G_n açık ve yoğun ise $X - G_n$ kapalı ve seyrektir. Gerçekten bu durumda, $X - G_n$ kapalı ve $\overline{G}_n = X$ olduğundan

$$\varnothing = X - \overline{G}_n = (X - G_n)^o = (\overline{X - G_n})^o \quad \Rightarrow \quad (\overline{X - G_n})^o = \varnothing,$$

yani $X - G_n$ seyrektir. Diğer yandan,

$$X - \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = (X - \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)^{o} = (\bigcup_{n=1}^{\infty}(X - G_n))^{o}$$

dır. Fakat her $n\in\mathbf{N}$ için $X–G_n$ seyrek olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X - G_n)$ kümesi X'de 1. kategoridendir. O nedenle Teorem 12.5'e göre $(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X - G_n))^{o} = \varnothing$ ve dolayısıyla $X - \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = \varnothing$, yani $X = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}$ dir. Şu halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, X'de yoğun ve o nedenle de (X, d) bir Baire uzayıdır. □

Sonuç 12.2. *Boş olmayan her tam metrik uzay kendisi içinde 2. kategoridendir.*

Kanıt. (X, d) boş olmayan bir tam metrik uzay ise $\overset{o}{X} = X \neq \varnothing$ olduğundan Teorem 12.5'e göre X kendisi içinde 1.kategoriden olamaz. O halde 2. kategoridendir. □

Uyarı 12.7. Birer tam metrik uzay oldukları göz önüne alınırsa, yukarıdaki sonuçtan, **R**'nin sayılabilir sayıda noktanın birleşimi olarak yazılamayacağı, yani sayılabilir bir küme olmadığı sonucu da çıkarılabilir (neden?). Aynı nedenle, $\mathbf{R}^2$, sayılabilir sayıda doğrunun birleşimi olarak, ya da $\mathbf{R}^3$, sayılabilir sayıda düzlemin birleşimi olarak yazılamaz.

Uyarı 12.8. Teorem 9.19'da görüldüğü gibi, Baire uzaylarının bir kaynağı yerel kompakt Hausdorff uzayları, Teorem 12.5'de görüldüğü gibi, bir diğer kaynağı da tam metrik uzaylardır.

Tanım 12.3. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde $\tau_d = \tau$ koşulunu sağlayan bir d tam metriği varsa, diğer bir ifade ile, verilen topolojik uzayın topolojisi bir tam metrik ile üretilebiliyorsa, bu topolojik uzaya *tam metriklenebilir* veya *metrik topolojik olarak tamdır* denir.

Buna göre, tamlığın aksine, "tam metriklenebilme" bir topolojik özelliktir. Bu nedenle; örneğin (0, 1) bir tam metrik uzay değildir, fakat **R** tam metrik uzayına homeomorf olduğundan, tam metriklenebilirdir.

$(\mathbf{R}^n, \tau_e^n)$, $(n \in \mathbf{N})$ ve bütün kompakt metrik uzaylar tam metriklenebilirdiler. Buna karşılık, **Q** rasyonel sayılar kümesi doğal topolojisi ile tam metriklenebilir değildir. Çünkü **Q**, **R** içinde olduğu gibi (Örnek 9.3), kendisi içinde de 1. kategoridendir, o nedenle Sonuç 12.2'ye göre, **Q**'nun topolojisi herhangi bir tam metrik ile üretilemez. Oysa bilindiği gibi **Q** metriklenebilirdir.

Bu kısmı, tam metrik uzaylarda çok iyi bilinen bir Sabit Nokta Teoremi ile kapatacağız. Önce bir tanım verelim:

Tanım 12.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\exists \quad 0 < k < 1, \quad \text{ö.k.} \quad \forall\, x, y \in X \quad \text{için} \quad d(T(x), T(y)) \leq k.d(x, y)$$

sağlanıyorsa, bu T fonksiyonuna bir *daralma dönüşümü* denir.

Örneğin, $0 < k < 1$ sabit olmak üzere, kolayca görüleceği gibi

$$T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad T(x) := k.x$$

bir daralma dönüşümüdür. Yine kolayca görüleceği gibi, her daralma dönüşümü sürekli (hatta düzgün sürekli) dir. Gerçekten, $T : X \to X$ bir daralma dönüşümü, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilmiş bir pozitif sayı ise $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ şeklinde seçilen bir pozitif sayı için, $d(x, y) < \delta$ olduğunda

$$d(T(x), T(y)) \leq k.d(x, y) < k.\,\delta = k.\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

sağlanır.

Teorem 12.6. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir daralma dönüşümü ise bu dönüşümün bir tek sabit noktası vardır, yani

$$\exists \; x_o \in X, \quad \text{ö.k.} \quad T(x_o) = x_o$$

sağlanır.

Kanıt. $x_1 \in X$ herhangi bir nokta olsun.

$$T(x_1) := x_2\ ,\ \ T(x_2) = T(T(x_1)) := x_3\ , \ .\ .\ .\ .\ ,\ T(x_{n-1}) = T^{n-1}(x_1) := x_n\ ,\ .\ .\ .$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisinin (X, d)'de bir Cauchy dizisi olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için, T'nin bir daralma dönüşümü olduğunu göz önünde bulundurarak, önce her $n \in \mathbf{N}$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq k.\ d(x_{n-1}, x_n) = k.\ d(T(x_{n-2}), T(x_{n-1}))$$

$$\leq k^2.\ d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \leq\ k^{n-1}.\ d(x_1, x_2)$$

elde edilir. Buna göre, $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ .\ .\ .\ + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^{m-1}.\ d(x_1, x_2) + k^m.\ d(x_1, x_2) + \ .\ .\ .\ .\ + k^{n-2}.\ d(x_1, x_2) \\ &= d(x_1, x_2).(k^{m-1} + k^m + \ .\ .\ .\ + k^{n-2}) \\ &= d(x_1, x_2)\ .\ \sum_{i=m-1}^{n-2} k^i \end{aligned}$$

yazılabilir. $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ geometrik serisi $|\,k\,| < 1$ için yakınsak olduğundan, $d(x_1, x_2)\ .\ \sum_{i=m-1}^{n-2} k^i$ ifadesi yeteri kadar büyük m ve n için istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu durum (x_n)'nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) tam olduğundan, $x_n \to x_o$ olacak şekilde bir $x_o \in X$ vardır. İşte bu $x_o \in X$ noktasının T'nin bir sabit noktası olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek ise kolaydır. Şöyle ki, T bir daralma dönüşümü olduğundan süreklidir ve bu nedenle,

$$T(x_o) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_o \quad \Rightarrow \quad T(x_o) = x_o$$

elde edilir.

Şimdi de, son olarak bu x_o noktasının tekliğini gösterelim: Bunun için aksini kabul edelim. Eğer $y_o \in X$, $T(y_o) = y_o$ koşulunu sağlayan başka bir nokta ise

$$d(x_o, y_o) = d(T(x_o), T(y_o)) \leq k.\, d(x_o, y_o)$$

eşitsizliği, $0 < k < 1$ olduğundan ancak $d(x_o, y_o) = 0$ için sağlanır. Aksi halde $k \geq 1$ çıkar. O halde $x_o = y_o$ olmalıdır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 12.9. Banach Sabit Nokta Teoreminin uygulamadaki güzel bir örneği, bu teoremin,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

diferensiyel denkleminin belirli bir başlangıç koşulunu sağlayan çözümünün varlığı ve tekliğinin kanıtlanmasında kullanılmasıdır (bkz. [7], s. 300).

B. Bir Metrik uzayın Tamlaştırılması

Bu kısımda, verilen bir metrik uzayın tamlaştırılması anlatılacaktır. Daha önce de sözü edildiği gibi, bir metrik uzayda yakınsak olmayan bir Cauchy dizisi, limiti o uzayda olmadığı için, verilen uzayda bir "boşluk" veya "delik"e karşılık gelir. Bir metrik uzayın tamlaştırılması, sezgisel olarak o tip boşlukların doldurulması veya deliklerin kapatılması gibi anlaşılabilir. Bu yönü ile de, reel sayıların rasyonel sayılardan Cantor'un inşa yöntemi ile kazanılmasına benzer.

Tanım 12.5. (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun.

a) Eğer, her $x, y \in X$ noktaları için $d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$ sağlanıyorsa, bu f fonksiyonuna bir *izometri* ve bu iki metrik uzaya da *izometrik uzaylar* denir. Kolayca görüleceği gibi her izometri bire-bir dir.

b) Eğer (X, d), (Y, ρ)'nun bir altuzayına izometrik ise (X, d), (Y, ρ)'nun içine *izometrik gömülmüştür* denir.

Tanım 12.6. (X, d) bir metrik uzay ve $(\hat{X}, \hat{d})$ bir tam metrik uzay olsun.

Eğer (X, d), $(\hat{X}, \hat{d})$'nın içine, resim yoğun olacak şekilde, izometrik olarak gömülebiliyorsa, bu $(\hat{X}, \hat{d})$ tam metrik uzayına, (X,d) metrik uzayının bir *tamlaştırılmışı* veya *tamlaması* denir.

Teorem 12.7 (Tamlaştırma Teoremi)

Her metrik uzay, bir tam metrik uzayın içine, resim yoğun olacak şekilde, izometrik olarak gömülebilir, yani tamlaştırılabilir.

Kanıt. 1. Adım: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki bütün Cauchy dizilerinin kümesini $\mathcal{C}$ ile gösterelim. $\mathcal{C}$ içinde, her (x_n), $(y_n) \in \mathcal{C}$ için

$$(x_n) \sim (y_n) \;:\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

şeklinde bir "~" bağıntısı tanımlansın. Kolayca görüleceği gibi bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bir $(x_n)\in\mathcal{C}$ Cauchy dizisinin yukarıdaki ~ bağıntısına göre denklik sınıfını,

$$\hat{x} := [(x_n)] := \{ (y_n) \in \mathcal{C} \mid (x_n) \sim (y_n) \}$$

ile ve $\mathcal{C}$ 'nin bu bağıntıya göre bölüm kümesini de

$$\hat{X} := \mathcal{C}/\!\sim \;:= \{ \hat{x} \mid (x_n)\in\mathcal{C} \}$$

ile gösterelim. Şimdi de $\hat{X} \times \hat{X}$ üzerinde, her $\hat{x}$, $\hat{y} \in \hat{X}$ için

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

şeklinde bir $\hat{d}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu $\hat{d}$ fonksiyonunun $\hat{X}$ üzerinde bir metrik olduğu gösterilebilir. Her şeyden önce, sağ taraftaki limitin mevcut olduğunu ve $\hat{d}$ 'nın iyi tanımlı olduğunu (yani sağ taraftaki limitin, $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ sınıflarındaki temsilci seçiminden bağımsız olduğunu) göstermemiz gerekir. İlk olarak, (x_n) ve (y_n) 'nin birer Cauchy dizisi olduğu göz önüne alınarak, $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$ 'nin de $\mathbf{R}$'de mutlak değer metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğu kolayca gösterilebilir. O halde, $\mathbf{R}$ tam olduğundan bu Cauchy dizisi de yakınsak, yani $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ mevcuttur. İkinci olarak, eğer $(x_n^*) \sim (x_n)$ ve $(y_n^*) \sim (y_n)$ ise

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^*, y_n^*)$$

nin sağlandığı da kolayca elde edilir, yani $\hat{d}$ iyi tanımlıdır.

$\hat{d}$'nın metrik koşullarını sağladığını göstermek ise çok daha kolaydır. Şu halde $(\hat{X}, \hat{d})$ bir metrik uzaydır.

2. Adım: $(\hat{X}, \hat{d})$ bir tam metrik uzaydır. Bunu göstermek için $(\hat{x}_k)$, $(\hat{X}, \hat{d})$'da bir Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin k. terimi $\hat{x}_k = [(x_n^k)]$ dır. Burada (x_n^k), (X, d)'de bir Cauchy dizisidir. Şimdi de, (X, d)'de (y_n) gibi öyle bir Cauchy dizisi bulmak istiyoruz ki, $(\hat{X}, \hat{d})$'da $\hat{x}_k \to \hat{y} = [(y_n)]$ sağlansın. Aranan (y_n) dizisi, (x_n^k) dizilerinden bir çeşit "köşegenleme" yöntemi ile aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

$$\begin{aligned}
(x_n^1) &= (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots, \ldots) \\
(x_n^2) &= (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, \ldots) \\
&\;\vdots \\
(x_n^k) &= (x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots, \ldots) \\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

Eğer aranan (y_n) dizisinin k. terimi, $y_k = x_k^k$ şeklinde yukarıdaki tablodan k. dizinin k. terimi olarak tanımlansa idi, her bir $k \in \mathbf{N}$ için (x_n^k) ve $(\hat{x}_k)$ dizileri Cauchy dizileri olmasına rağmen (y_n) bir Cauchy dizisi olmayabilirdi. Bu durum her $k \in \mathbf{N}$ için yeteri kadar büyük bir $p = p(k)$ seçilerek ve $y_k = x_{p(k)}^k$ alınarak giderilebilir. Bu p'nin ne kadar büyük seçileceği şu şekilde belirlenebilir: $k \in \mathbf{N}$ sabit tutulursa, $(x_n^k)_{n\in\mathbf{N}}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ için,

$$\exists \ p = p(k) \in \mathbf{N}, \ \text{ö.k.} \ \ \forall \ m, n \geq p \ \ \text{için} \ \ d(x_m^k, x_n^k) < \frac{1}{k}$$

sağlanır. Her $k \in \mathbf{N}$ için p(k) bu şekilde belirlenen bir doğal sayı olmak üzere $y_k := x_{p(k)}^k$ olarak tanımlanırsa elde edilen (y_n) dizisinin (X, *d*)'de bir Cauchy dizisi olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için, ε>0 keyfi verilsin. Önce

$$\exists \ q_1 \in \mathbf{N}, \ \ \text{ö.k.} \ \ \frac{1}{q_1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazılabilir. Diğer yandan $(\hat{x}_k)$, $(\hat{X}, \hat{d})$'da bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\exists \ q_2 \in \mathbf{N}, \ \ \text{ö.k.} \ \ \forall \ r, s \geq q_2 \ \ \text{için} \ \ \hat{d}(\hat{x}_r, \hat{x}_s) < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Şimdi de $q := \text{maks}\{q_1, q_2\}$ olarak seçilirse, her $r, s \geq q$ için

$$d(y_r, y_s) = d(x_{p(r)}^r, x_{p(s)}^s) \leq d(x_{p(r)}^r, x_m^r) + d(x_m^r, x_m^s) + d(x_m^s, x_{p(s)}^s)$$

her $m \in \mathbf{N}$ için sağlanır. Özel olarak, $m \geq \text{maks}\{p(r), p(s)\}$ için sağ tarafın ilk ve son terimleri $\frac{\varepsilon}{3}$'den küçük olur. $m \to \infty$ için ikinci terim ise $\hat{d}(\hat{x}_r, \hat{x}_s)$'ye yakınsar, ki bu da $\frac{\varepsilon}{3}$'den küçüktür. Şu halde yeteri kadar büyük $m \in \mathbf{N}$ için sağ taraf ε'dan küçük kalmakta ve dolayısıyla her $r, s \geq q$ için $d(y_r, y_s) < \varepsilon$ olmaktadır. Bu da (y_n)'nin (X, *d*)'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Son olarak, $(\hat{X}, \hat{d})$'da $\hat{x}_k \to \hat{y}$ olduğunu göstereceğiz: Hatırlanacağı gibi, $\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{y}) = \lim\limits_{n \to \infty} d(x_n^k, y_n)$ dir. Diğer yandan

$$d(x_n^k, y_n) \leq d(x_n^k, x_{p(k)}^k) + d(x_{p(k)}^k, y_n) \leq d(x_n^k, x_{p(k)}^k) + d(y_k, y_n)$$

yazılabilir. Burada sonuncu terim, (y_n) bir Cauchy dizisi olduğundan yeteri kadar büyük n ve k için istenildiği kadar küçük yapılabilir. Sondan ikinci terim ise $n \geq p(k)$ için, $\frac{1}{k}$'dan küçüktür. Şu halde yeteri kadar büyük $k \in \mathbf{N}$ için $\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{y})$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. Böylece $\hat{x}_k \to \hat{y}$ olduğu gösterilmiş olur.

3. Adım: $g: (X, d) \to (\hat{X}, \hat{d}), \quad x \to g(x) := \hat{x} := [(x, x, x, \ldots)]$

dönüşümü bir izometrik gömme dönüşümü olup, $g(X)$ resim kümesinin $(\hat{X}, \hat{d})$ içinde yoğun olduğunu göstereceğiz:

$x, y \in X$ ve $x \neq y$ ise $d(x, y) \neq 0$, dolayısıyla $(x, x, x, \ldots)$ dizisi ile $(y, y, y, \ldots)$ dizisi "~" bağıntısına göre aynı sınıftan değildir. Şu halde $\hat{x} \neq \hat{y}$, yani $g(x) \neq g(y)$ dir. Bu da g'nin bire-bir olduğunu gösterir. Diğer yandan,

$$\hat{d}(g(x), g(y)) := \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

dir. Şu halde $g : (X, d) \to (\hat{X}, \hat{d})$ bir izometrik gömme dönüşümüdür.

Son olarak, $g(X)$ resim kümesinin $(\hat{X}, \hat{d})$ içinde yoğun olduğunu, yani $\overline{g(X)} = \hat{X}$ olduğunu göstereceğiz: Bunun için, $\hat{X}$'nın her elemanının, $g(X)$'deki bir dizinin limiti olarak yazılabileceğini göstermek yeter. $\hat{x} := [(x_n)] \in \hat{X}$ alalım. O halde (x_n), (X, d)'de bir Cauchy dizisidir. İşte bu dizinin resimlerinden elde edilen $(g(x_n))_{n\in\mathbf{N}} = ([(x_n, x_n, x_n, \ldots)])_{n\in\mathbf{N}} \subset g(X)$ dizisinin $(\hat{X}, \hat{d})$'da $\hat{x}$'ya yakınsadığını gösterebiliriz. Bunun için $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (x_n), (X, d)'de bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\exists\ n_o \in \mathbf{N}\ ,\ \text{ö.k.}\ \ \forall\ m, n \geq n_o\ \ \text{için}\quad d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Buradan her $m \geq n_o$ sabit için $\lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Bu ise $\hat{d}$'nın tanımına göre,

$$\hat{d}\,(g(x_m),\ \hat{x}) = \hat{d}\,([(x_m, x_m, x_m, \ldots)]\,,\,[(x_n)]\,) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olduğunu ifade eder. Şu halde her $m \geq n_o$ için $\hat{d}\,(g(x_m),\ \hat{x}) < \varepsilon$ dir. Bu da, $(\hat{X}, \hat{d})$'da $g(x_n) \to \hat{x}$ sağlandığını gösterir. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur. □

Şimdi de, bir metrik uzayın tamlaştırmasının, izometriden vazgeçildiği taktirde, tek türlü belirli olduğunu, yani bir metrik uzayın herhangi iki tamlaştırılmışının birbirine izometrik olduğunu göstereceğiz:

Teorem 12.8. *Bir metrik uzayın herhangi iki tamlaştırılmışı birbirine izometriktir.*

Kanıt. (X,d) bir metrik uzay ve (X',d') ile (X^*,d^*) bu uzayın iki ayrı tamlaştırılmışı olsunlar. Özel olarak, (X',d') ile (X^*,d^*) metrik uzayları tam ve her ikisinin de X'i yoğun bir altuzay olarak içerdikleri kabul edilebilir. Bu X' ile X^* arasında, aşağıdaki gibi bir $f : X' \to X^*$ izometrisi tanımlanabilir:

Her $x' \in X'$ için ($X \subset X'$ yoğun olduğundan), (X,d)'de $x_n \to x'$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset X$ dizisi vardır. Fakat $X \subset X^*$ olduğundan bu $(x_n) \subset X^*$ olup, (X^*,d^*)'da bir Cauchy dizisi olur. Diğer yandan, (X^*,d^*) tam olduğundan, $x_n \to x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X^*$ vardır. İşte $f : X' \to X^*$, $f(x') := x^*$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun aranan izometri olduğu gösterilebilir. Öncelikle bu fonksiyonun, x''ye yakınsayacak şekilde seçilen (x_n) dizisinden bağımsız olduğu ve X''den X^*'a bire-bir ve örten olduğu gösterilebilir.

Diğer yandan, her $x \in X$ için $f(x) := x$ olduğu da kolayca görülür. Şimdi eğer $x', y' \in X'$ için (X',d')'de, $x_n \to x'$, $y_n \to y'$ ve (X^*,d^*)'da $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$ iseler

$$d'(x', y') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \quad \text{ve} \quad d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

bağıntılarının her ikisi de sağlanır. Bu nedenle, $d^*(\,f(x'), f(y')) = d'(x', y')$ sağlanmış olur. Şu halde f bir izometridir. □

Problemler

P. 1. $\mathbf{R}^n$'nin doğal metriği ile bir tam metrik uzay olduğunu gösteriniz.

P. 2. (X, *d*) bir metrik uzay ve $A \subset X$ ise A'nın çapı ile, A'nın kapanışı $\overline{A}$'nın çapının aynı olduğunu, yani $ç(A) = ç(\overline{A})$ sağlandığını gösteriniz.

P. 3. a) $\mathbf{R}$ üzerindeki $d(x, y) = \min(1, |x - y|)$ metriğinin bir tam metrik olduğunu gösteriniz.

b) Her tam sınırlı metriğin sınırlı olduğunu gösteriniz.

c) $\mathbf{R}$ üzerindeki $d(x, y) = \min(1, |x - y|)$ metriği sınırlı, fakat tam sınırlı değildir (bkz. Uyarı 12.6).

P. 4. Bir metrik uzaydaki bir Cauchy dizisinin yakınsak bir altdizisi varsa, kendisi de yakınsak olup, o altdizisi ile aynı noktaya yakınsadığını gösteriniz.

P. 5. Ayrık ve yoğun iki altkümesi bulunan bir tam metrik uzay örneği veriniz.

P. 6. $\mathbf{P}$ irrasyonel sayılar kümesi $\mathbf{R}$ içinde 2. kategoridendir. Neden?

P. 7. Teorem 12.2'deki ifadenin tersi de doğrudur: (X, *d*) bir tam metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer (A, d_A) altuzayı tam ise A kümesi kapalıdır.

P. 8. (X, *d*), (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bire-bir, örten, düzgün sürekli ve f^{-1} ters fonksiyonu da sürekli olsun. Bu durumda eğer (Y, ρ) tam ise (X, *d*)'nin de tam olduğunu gösteriniz.

P.9. (X, *d*) izole noktası bulunmayan bir tam metrik uzay ise X kümesinin sayılamaz olduğunu gösteriniz.
(Y.g.: İzole noktası bulunmayan bir metrik uzayın sayılabilir her alt kümesi 1. kategoridendir.)

BÖLÜM 13

DÜZGÜN UZAYLAR

A. Düzgün Uzaylar

Bölüm 5 ve Bölüm 7'de görüldüğü gibi, süreklilik ve yakınsaklık kavramları topolojik uzaylarda en genel halde verilebilmektedir. Ancak yine metrik uzaylardan bilinen "düzgün süreklilik" (Tanım 2.8) ve "düzgün yakınsaklık" (Tanım 2.12) kavramlarını genelleştirmek için topolojik yapılar da yetersiz kalmaktadır. Bu kavramlar bir anlamda, uzayın farklı noktalarının komşuluklarının, noktaların uzaydaki yerlerine bağlı olmaksızın, büyüklüklerine göre karşılaştırılabilir olmasını gerektirir. Metrik uzaylarda bu yapılabilir. Örneğin bir metrik uzayda, aynı $\varepsilon>0$ sayısı için, farklı noktaların ε-komşuluklarının büyüklükleri aynıdır. Oysa genel topolojik uzaylarda bu mümkün değildir. Bu durum, yukarıda sözü edilen kavramları genelleştirmek için metrik uzay yapısından daha genel olan ve "düzgün yapı" adı verilen yeni bir yapıya gereksinme gösterir.

Bu bölümde, metrik uzaylardan daha geniş, ancak topolojik uzaylardan daha dar bir uzay sınıfı olan, "düzgün uzaylar" ile ilgili bir özet bilgi verilmesi amaçlanmıştır. Bu çerçevede, düzgün uzay tanımı ve bazı temel özellikleri verildikten sonra düzgün süreklilik kavramı tanıtılacak ve bu kavram süreklilik ile karşılaştırılacaktır.

Tanım 13.1. a) X bir küme ise $X\times X$ 'in $\Delta=\{(x,x) \mid x\in X\}$ ile gösterilen altkümesine $X\times X$'in *köşegeni* adı verilir.

b) $A\subset X\times X$ bir altküme ise $A^{-1}=\{(x,y) \mid (y,x)\in A\}$ ile tanımlanır. Eğer $A=A^{-1}$ ise bu A kümesine *simetrik küme* denir.

c) Eğer A ve B, $X\times X$'in altkümeleri iseler,

$$A\circ B=\{(x,y) \mid \exists\, z\in X:\ (x,z)\in B \ \text{ve}\ (z,y)\in A\}$$

ile tanımlanır.

d) $A^2=A\circ A$, $A^{n+1}=A^n\circ A$ $(n=1,2,\ldots)$ olarak tanımlanır.

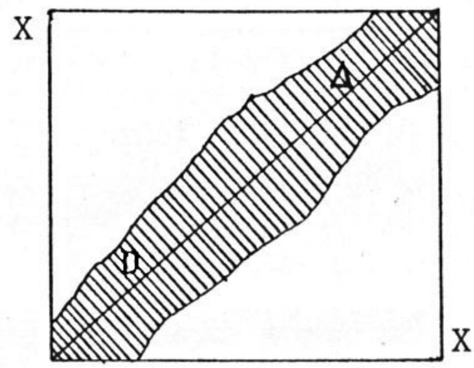
Uyarı 13.1. $A, B, C\subset X\times X$ olsun. Aşağıdakiler kolayca gösterilebilir.

a) $A\subset B \Rightarrow A^{-1}\subset B^{-1}$ ve $A\circ C\subset B\circ C$
b) $(A\circ B)^{-1}=B^{-1}\circ A^{-1}$
c) $(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$

Tanım 13.2. $X\neq\varnothing$ bir küme olsun. $X\times X$'in altkümelerinin aşağıdaki özellikleri sağlayan her $\mathfrak{D}\neq\varnothing$ ailesine X üzerinde bir *düzgün yapı* denir.

a) Her $D\in\mathfrak{D}$ için $\Delta\subset D$ dir.
b) Her $D_1, D_2\in\mathfrak{D}$ için $D_1\cap D_2\in\mathfrak{D}$ dir.
c) Her $D\in\mathfrak{D}$ için $E\circ E\subset D$ olacak şekilde bir $E\in\mathfrak{D}$ vardır.
d) Her $D\in\mathfrak{D}$ için $E^{-1}\subset D$ olacak şekilde bir $E\in\mathfrak{D}$ vardır.
e) $D\in\mathfrak{D}$ ve $D\subset E$ ise $E\in\mathfrak{D}$ dir.

$\mathfrak{D}$, X üzerinde bir düzgün yapı olmak üzere $(X,\mathfrak{D})$ ikilisine, diğer bir ifade ile, üzerinde bir düzgün yapı verilen her X kümesine bir *düzgün uzay* denir.



Şekil 13.1

Tanım 13.3. $(X,\mathfrak{D})$ bir düzgün uzay olsun. Eğer $\bigcap\{D \mid D\in\mathfrak{D}\} = \Delta$ ise $\mathfrak{D}$ düzgün yapısına ve dolayısıyla $(X,\mathfrak{D})$ düzgün uzayına bir *Hausdorff düzgün uzayı* denir.

Tanım 13.4. $(X,\mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ve $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{D}$ bir altaile olsun. Eğer her $D\in\mathfrak{D}$ için $B\subset D$ olacak şekilde bir $B\in\mathfrak{B}$ varsa, bu $\mathfrak{B}$ ailesine $\mathfrak{D}$ düzgün yapısı için bir *taban* denir. Buna göre, eğer bir $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{D}$ altailesi $\mathfrak{D}$ düzgün yapısı için bir taban ise $\mathfrak{D}$ ailesi, $\mathfrak{B}$'nin elemanlarına bütün üst kümeleri de katılarak elde edilir. Aşağıdaki teorem kolayca gösterilebilir:

Teorem 13.1. *X bir küme ve* $\mathfrak{B}$, $X\times X$*' in altkümelerinin*

a) Her $B\in\mathfrak{B}$ *için* $\Delta\subset B$,

b) Her $B_1, B_2\in\mathfrak{B}$ *için* $\exists B_3\in\mathfrak{B}$ *öyle ki,* $B_3\subset B_1\cap B_2$,

c) Her $B\in\mathfrak{B}$ *için* $\exists C\in\mathfrak{B}$ *öyle ki,* $C\circ C\subset B$,

d) Her $B\in\mathfrak{B}$ *için* $\exists C\in\mathfrak{B}$ *öyle ki,* $C^{-1}\subset B$,

koşullarını sağlayan bir ailesi ise bu $\mathfrak{B}$ *ailesi X üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır.*

Kanıt. $\mathfrak{D} := \{D\subset X\times X \mid \exists\, B\in\mathfrak{B}$ ö.k. $B\subset D\}$ ailesinin X üzerinde $\mathfrak{B}$'yi taban kabul eden bir düzgün yapı olduğu görülür. □

Tanım 13.5. $(X,\mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ve $\mathcal{S}\subset\mathfrak{D}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$'nin elemanlarının bütün sonlu arakesitleri $\mathfrak{D}$ düzgün yapısı için bir taban oluşturuyorsa, bu $\mathcal{S}$ ailesine $\mathfrak{D}$ için bir *alttaban* adı verilir.

Örnek 13.1. a) Her $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon := \{(x, y) \mid |x - y| < \varepsilon\} \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ olmak üzere

$$\mathfrak{B} = \{ D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$$

ailesi **R** üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır. Bu düzgün yapıya **R**'nin *doğal düzgün yapısı* denir.

b) Daha genel olarak, (X, d) bir metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$D_\varepsilon := \{(x, y)\in X\times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

kümelerinin

$$\mathfrak{B} = \{ D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$$

ailesi X üzerinde bir düzgün yapı tabanıdır. Bu düzgün yapıya *d metriği ile üretilen metrik düzgün yapı* denir. Biz bu düzgün yapıyı $\mathfrak{D}_d$ ile göstereceğiz.

Eğer bir $(X,\mathfrak{D})$ düzgün uzayının düzgün yapısı bir metrik ile üretilebiliyorsa, bu düzgün uzaya *metriklenebilir düzgün uzay* denir.

Eğer (X,d) bir metrik uzay ise X üzerinde d metriği ile $2d$ metriği aynı düzgün yapıyı üretirler. Buradan, bir küme üzerinde farklı metriklerin aynı düzgün yapıyı üretebildikleri sonucu çıkartılır. Şu halde düzgün yapılar, metrik uzaylardan daha zayıf yapılardır.

c) X bir küme ise $X\times X$'in Δ'yı içeren bütün altkümelerinin

$$\mathfrak{D} = \{U \subset X\times X \mid \Delta\subset U\}$$

ailesi X üzerinde bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıya *ayrık düzgün yapı* denir. Bu düzgün yapının bir tabanı $\mathfrak{B} = \{\Delta\}$ dır.

d) X bir küme ise $\mathfrak{D} = \{X\times X\}$, X üzerinde bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıya *ilkel düzgün yapı* denir.

e) Her $a\in\mathbf{R}$ için $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$'nin $D_a = \Delta\cup\{(x, y) \mid x > a, \ y > a\}$ şeklinde tanımlanan altkümelerinin $\mathfrak{B} = \{D_a \mid a\in\mathbf{R}\}$ ailesi **R** üzerinde bir düzgün yapının tabanını oluşturur.

Uyarı 13.2. $\mathfrak{D}$, X üzerinde bir düzgün yapı ise

a) Her $D\in\mathfrak{D}$ için $D^{-1}\in\mathfrak{D}$ dir. Çünkü her $D\in\mathfrak{D}$ için $E^{-1}\subset D$ olacak şekilde bir $E\in\mathfrak{D}$ vardır. Buradan $E=(E^{-1})^{-1}\subset D^{-1}$ ve Tanım 13.2.e) ile $D^{-1}\in\mathfrak{D}$ elde edilir.

b) Tanım 13.2 c) ve d) birlikte aşağıdaki koşula denktir:

$$\forall\ D\in\mathfrak{D} \text{ için } \ \exists\ E\in\mathfrak{D}, \text{ öyle ki } \ E\circ E^{-1}\subset D.$$

Bunun için önce c) ve d)'nin sağlandığını kabul edelim. Buradan

$$D\in\mathfrak{D}\ \Rightarrow\ \exists\ E_1\in\mathfrak{D} \text{ ö.k. } E_1\circ E_1\subset D\ \Rightarrow\ \exists\ E_2\in\mathfrak{D} \text{ ö.k. } E_2^{-1}\subset E_1 .$$

Eğer $E:=E_1\cap E_2$ olarak tanımlanırsa, $E\circ E^{-1}\subset D$ olduğu görülür. Gerçekten

$$\begin{aligned}
(x,y)\in E\circ E^{-1} &\Rightarrow\ \exists z\in X \text{ ö.k. } (x,z)\in E^{-1} \text{ ve } (z,y)\in E=E_1\cap E_2\\
&\Rightarrow\ \exists z\in X \text{ ö.k. } (z,x)\in E=E_1\cap E_2 \text{ ve } (z,y)\in E_1\\
&\Rightarrow\ \exists z\in X \text{ ö.k. } (x,z)\in E_2^{-1}\subset E_1 \text{ ve } (z,y)\in E_1\\
&\Rightarrow\ (x,y)\in E_1\circ E_1\subset D
\end{aligned}$$

Şimdi de yukarıdaki koşulun sağlandığını kabul edelim. Her $D\in\mathfrak{D}$ için $E\circ E^{-1}\subset D$ olacak şekilde bir $E\in\mathfrak{D}$ mevcut olsun. Buradan $E^{-1}\subset D$ ve $F:=E\cap E^{-1}$ olarak tanımlanırsa $F\in\mathfrak{D}$ olup $F\circ F\subset D$ sağlanır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
(x,y)\in F\circ F &\Rightarrow \exists z\in X \text{ ö.k. } (x,z)\in F \text{ ve } (z,y)\in F\\
&\Rightarrow \exists z\in X \text{ ö.k. } (x,z)\in E^{-1} \text{ ve } (z,y)\in E\\
&\Rightarrow\ (x,y)\in E\circ E^{-1}\subset D
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece c) ve d) elde edilmiş ve kanıt tamamlanmıştır.

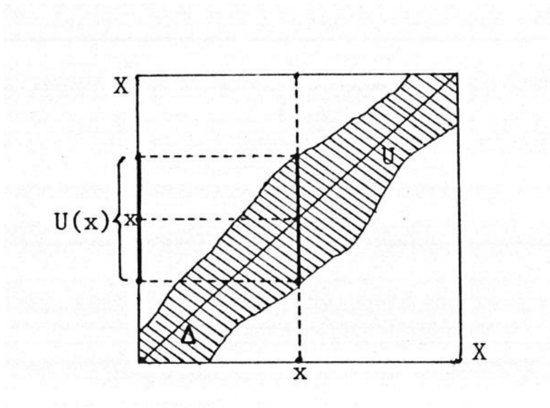
c) $\mathfrak{D}$'nin simetrik elemanları $\mathfrak{D}$ için bir taban oluştururlar. Gerçekten, eğer $E\in\mathfrak{D}$ ise yukarıdaki a) şıkkından dolayı $E^{-1}\in\mathfrak{D}$ dir. Buradan $D=E\cap E^{-1}\in\mathfrak{D}$ simetrik olup $D\subset E$ sağlanır.

Bir X kümesi üzerinde verilen her düzgün yapı X üzerinde bir topoloji üretir.

Tanım 13.6. $(X,\mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ise her $x\in X$ ve $U\in\mathfrak{D}$ için

$$U(x):=\{\, y\in X \mid (x,y)\in U \,\}$$

şeklinde tanımlanır. Bkz. şekil 13.2.



Şekil 13.2

Teorem 13.2. *$(X,\mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ise*

a) Her $x\in X$ için $\mathcal{U}_x=\{\, U(x) \mid U\in\mathfrak{D}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojinin x noktasındaki komşuluk sistemini oluşturur. Bu topolojiyi $\tau_{\mathfrak{D}}$ ile gösterelim.

b) $(X,\mathfrak{D})$ Hausdorfftur $\Leftrightarrow$ $(X,\tau_{\mathfrak{D}})$ topolojik uzayı Hausdorfftur.

Kanıt. a) $\mathcal{U}_x$ ailesinin Teorem 3.2'nin koşullarını sağladığını göstermek yeter:

i) $U(x)\in\mathcal{U}_x$ ise $U\in\mathfrak{D}$ ve $\Delta\subset U$ olduğundan $(x,x)\in U$ ve dolayısıyla $x\in U(x)$ dir.

ii) $U(x)\in\mathcal{U}_x$ ve $V\supset U(x)$ ise $V\in\mathcal{U}_x$ dir. Çünkü $U\in\mathfrak{D}$ ve

$$W:=U\cup\{(x,y) \mid y\in V\}$$

olarak tanımlanırsa, $W\supset U$ olduğundan $W\in\mathfrak{D}$ ve $V=W(x)$ olduğu görülür.

iii) $U_1(x), U_2(x)\in\mathcal{U}_x$ ise $U_1, U_2\in\mathfrak{D}$ ve $U_1\cap U_2\in\mathfrak{D}$ dir. Buradan $U_1(x)\cap U_2(x)=(U_1\cap U_2)(x)$ elde edilir. Gerçekten

$$y\in U_1(x)\cap U_2(x) \Leftrightarrow (x,y)\in U_1 \text{ ve } (x,y)\in U_2 \Leftrightarrow (x,y)\in U_1\cap U_2$$
$$\Leftrightarrow y\in(U_1\cap U_2)(x).$$

Şu halde $U_1(x)\cap U_2(x)\in\mathcal{U}_x$ dir.

iv) $U(x)\in \mathcal{U}_x$ olsun. Buradan $U\in \mathfrak{D}$ dir. Tanım 13.2. c)'ye göre

$$\exists\, V\in \mathfrak{D} \text{ öyle ki } V\circ V\subset U$$

dir. Buna göre $V(x)\in \mathcal{U}_x$ istenen özelliği sağlar. Çünkü $y\in V(x)$ ise $(x, y)\in V$ dir. Buradan her $z\in V(y)$ için $(y, z)\in V$ ve dolayısıyla $(x, z)\in V\circ V\subset U$ dir. Şu halde $z\in U(x)$ dir. Sonuç olarak $V(y)\subset U(x)$ olup b) şıkkı ile $U(x)\in \mathcal{U}_y$ elde edilir.

Böylece verilen bir $(X,\mathfrak{D})$ düzgün uzayı üzerinde, düzgün yapı yardımıyla bir topoloji tanımlanır. $\tau_{\mathfrak{D}}$ ile gösterilen bu topolojiye, $\mathfrak{D}$ ile üretilen *düzgün uzay topolojisi* veya kısaca *düzgün topoloji* denir.

Bir $(X,\mathfrak{D})$ düzgün uzayı topolojik uzay olarak, aksi belirtilmedikçe, $\tau_{\mathfrak{D}}$ düzgün topolojisi ile gözönüne alınacaktır.

b) $(X,\mathfrak{D})$ Hausdorff, yani $\bigcap \{U \mid U\in \mathfrak{D}\} = \Delta$ olsun. $x, y\in X$ ve $x\neq y$ ise $(x, y)\notin \Delta$ ve hipoteze göre $(x, y)\notin U$ olacak şekilde bir $U\in \mathfrak{D}$ vardır. $\mathfrak{D}$'nin simetrik elemanları bir taban oluşturduklarından

$$\exists\, V\in \mathfrak{D},\quad V = V^{-1} \text{ öyle ki } V\circ V\subset U.$$

sağlanır. Buradan $V(x)\cap V(y)=\varnothing$ olduğu görülür. Çünkü eğer $z\in V(x)\cap V(y)$ olsaydı, $(x, z)\in V$ ve $(z, y)\in V^{-1} = V$ olurdu. Bu ise $(x, y)\in V\circ V\subset U$ olduğundan $(x, y)\notin U$ ile çelişir.

Tersine olarak, $(X,\tau_{\mathfrak{D}})$ Hausdorff olsun. $(x, y)\notin \Delta$ ise $x\neq y$ olup

$$\exists\, U(x)\in \mathcal{U}_x,\ V(y)\in \mathcal{U}_y \text{ öyle ki } U(x)\cap V(y) = \varnothing$$

sağlanır. Buradan $U, V\in \mathfrak{D}$ ve dolayısıyla $U\cap V\in \mathfrak{D}$ dir. Fakat $(x, y)\notin U\cap V$ olduğundan $(x, y)\notin \bigcap \{U \mid U\in \mathfrak{D}\}$ dir. Şu halde $\bigcap \{U \mid U\in \mathfrak{D}\} = \Delta$ dır. Böylece kanıt tamamlanır. □

Uyarı 13.3. Bir X kümesi üzerinde verilen farklı düzgün yapılar da aynı topolojiyi üretebilirler. Örneğin $X := (0,\infty)$ olsun. X üzerindeki

$$d(x, y) := |\, x - y\,| \quad \text{ve} \quad \rho(x, y) := |\ln x - \ln y\,|$$

metrikleri aynı topolojiyi üretirler, yani $\tau_d = \tau_\rho$ sağlanır.

X üzerinde d ve ρ metriklerinin ürettikleri düzgün yapıların birer tabanı, sırasıyla

$$\mathfrak{B}_d := \{ D_\varepsilon = \{(x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon \} \mid \varepsilon > 0 \}$$

ve

$$\mathfrak{B}_\rho := \{ U_\varepsilon = \{(x, y) \mid \rho(x, y) < \varepsilon \} \mid \varepsilon > 0 \}$$

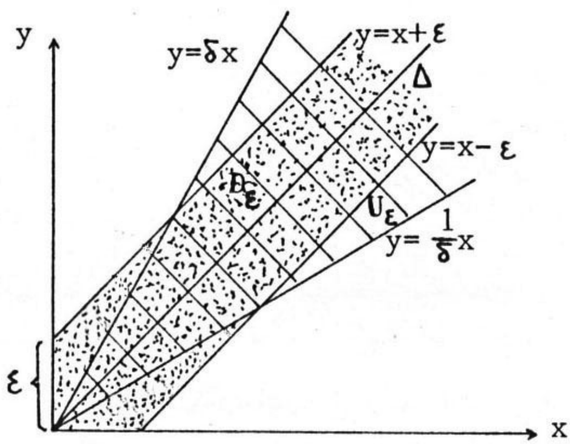
dir. Diğer yandan

$$d(x, y) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$$

ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\varepsilon = \ln\delta$ olacak şekilde bir tek $\delta > 1$ sayısı bulunduğundan

$$\rho(x, y) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\delta} \, . \, x < y < \delta \, . \, x$$

olup bu iki düzgün yapı birbirinden farklıdır (bkz. şekil 13.3).



Şekil 13. 3

Diğer yandan bir metriğin ürettiği düzgün uzayın topolojisi, o metriğin ürettiği metrik topoloji ile aynı, yani $\tau_{\mathfrak{D}_d} = \tau_d$ dir, çünkü her $x \in X$ için $D_\varepsilon(x) = K(x,\varepsilon)$ dir. Şu halde $\mathfrak{D}_d$ ve $\mathfrak{D}_\rho$ farklı düzgün yapıları aynı topolojiyi üretmektedir.

Tanım 13.7. $(X, \mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $U \in \mathfrak{D}$ için

$$U(A) := \bigcup_{x \in A} U(x) = \{ y \in X \mid \exists\ x \in A : (x, y) \in U \}$$

şeklinde tanımlanan küme A kümesinin bir komşuluğudur. Bu komşuluğa, A'nın *düzgün komşuluğu* denir.

Teorem 13.3. *$(X, \mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın düzgün topolojiye göre kapanışı $\overline{A}$, A'nın düzgün komşuluklarının arakesitine eşittir, yani*

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathfrak{D}} U(A)$$

sağlanır.

Kanıt. $x \in U(y) \Leftrightarrow y \in U^{-1}(x)$ ve her $U \in \mathfrak{D}$ için $U^{-1} \in \mathfrak{D}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathfrak{D} \text{ için } U(x) \cap A \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathfrak{D} \text{ için } \exists\ y \in A : y \in U(x) \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathfrak{D} \text{ için } \exists\ y \in A : x \in U^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathfrak{D} \text{ için } x \in U^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathfrak{D} \text{ için } x \in U(A) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 13.4. *$(X, \mathfrak{D})$ bir düzgün uzay olsun. $\mathfrak{D}$'nin veya bir tabanının elemanlarının $X \times X$ çarpım uzayındaki içleri ve kapanışları da $\mathfrak{D}$ için ayrı ayrı birer taban oluştururlar.*

Kanıt. Önce $\mathfrak{D}$'nin elemanlarının çarpım uzayındaki içlerinin $\mathfrak{D}$ için bir taban oluşturduğunu gösterelim:

$U \in \mathfrak{D}$ keyfi verilsin. $V^3 \subset U$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathfrak{D}$ vardır (bkz. P.3.c). Buradan her $(x, y) \in V$ için

$$V(x) \times V(y) = \{(z, z') \in X \times X \mid (x, z) \in V,\ (y, z') \in V \} \subset V^3$$

elde edilir. Çünkü $(x, y) \in V$ olduğundan $(z, z') \in V(x) \times V(y)$ ise (x, z), $(y, z') \in V$ dir. Buradan $(z, x) \in V^{-1} = V$ ve $(x, y) \in V$ dir. Şu halde $(z, y) \in V^2$ dir. Fakat $(y, z') \in V$ olduğundan $(z, z') \in V^3$ elde edilir. Buna göre V^3, çarpım uzayında, V'nin her noktasının bir komşuluğudur. Diğer yandan $V \subset V^3 \subset U$ olduğundan $V \subset \overset{\circ}{U}$ dir. Şu halde $\overset{\circ}{U} \in \mathfrak{D}$ ve $\overset{\circ}{U} \subset U$ olduğundan iddianın birinci kısmı gösterilmiş olur.

Diğer yandan, verilen keyfi bir $U \in \mathfrak{D}$ ve $V^3 \subset U$ koşulunu sağlayan simetrik bir $V \in \mathfrak{D}$ için yukarıdakine benzer düşünce ile $\overline{V} \subset V^3$ elde edilir. Gerçekten $(x, y) \in \overline{V}$ ise $V(x) \times V(y) \cap V \neq \varnothing$ olduğundan

$$\begin{aligned}\exists\ (z, z') \in V \text{ öyle ki, } (x, z) \in V \text{ ve } (y, z') \in V &\Rightarrow (x, z) \in V \text{ ve } (z, z') \in V \\ &\Rightarrow (x, z') \in V^2\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan, $(x, z') \in V^2$ ve $(z', y) \in V^{-1} = V$ 'den $(x, y) \in V^3$ elde edilir. Şu halde $\overline{V} \subset V^3$,ve dolayısıyla $V \subset \overline{V} \subset V^3 \subset U$ dir. Bu ise $\overline{V} \in \mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}$'nin elemanlarının $X \times X$ çarpım uzayındaki kapanışlarının da $\mathfrak{D}$ için bir taban oluşturduklarını gösterir. Böylece kanıt tamamlanır. □

Teorem 13.5. *Her düzgün uzay, düzgün topoloji ile bir* T_3*- uzayıdır.*

Kanıt. $(X, \mathfrak{D})$ bir düzgün uzay olsun. X kümesinin her noktasında kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanı bulunduğunu göstereceğiz.

$x \in X$ ve U(x), x'in herhangi bir komşuluğu olsun. $U \in \mathfrak{D}$ olduğundan $V^2 \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathfrak{D}$ vardır. Önce $V(V(x)) = V^2(x)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$\begin{aligned} z \in V(V(x)) \ &:\Leftrightarrow \exists\, y \in V(x) \text{ ö.k. } z \in V(y) \Leftrightarrow (x, y) \in V \text{ ve } (y, z) \in V \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in V^2 \Leftrightarrow z \in V^2(x)\end{aligned}$$

dir. Buradan Teorem 13.3 ile,

$$\overline{V(x)} = \bigcap_{W \in \mathfrak{D}} W(V(x)) \subset V(V(x)) = V^2(x) \subset U(x)$$

elde edilir. Şu halde U(x), x'in kapalı bir komşuluğu olan $\overline{V(x)}$'yi içermektedir. □

Teorem 13.6. *$(X, \mathfrak{D})$ bir düzgün uzay olsun.*

a) $K \subset X$ kompakt ise K kümesinin her komşuluğu, K'nın bir düzgün komşuluğunu içerir.
b) $K \subset X$ kompakt, $A \subset X$ kapalı ve $A \cap K = \varnothing$ ise A ve K'nın ayrık düzgün komşulukları vardır.

Kanıt. a) U, K'nın $(X, \tau_{\mathfrak{D}})$'de bir komşuluğu olsun. Buradan

$$\forall\ x \in K \ \text{ için } \ \exists\ V_x \in \mathfrak{D} \ \text{ ö.k. } \ V_x(x) \subset U$$

yazılabilir. $W_x \in \mathfrak{D}$, $W_x^2 \subset V_x$ koşulunu sağlayan bir eleman olsun.

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \overset{\circ}{W}_x(x)$$

olduğundan $\{\overset{\circ}{W}_x(x) \mid x \in K\}$, K'nın bir açık örtümü ve K kompakt olduğundan

$$\exists\ S \subset K, \ S \text{ sonlu ö.k. } K \subset \bigcup_{x \in S} W_x(x) .$$

Buradan $W := \bigcap_{x \in S} W_x \in \mathfrak{D}$ için $W(K) \subset U$ olduğu görülür. Gerçekten $y \in W(K)$ ise bir $z \in K$ için $(z, y) \in W$ dir. $z \in K$ olduğundan, en az bir $t \in S$ için $z \in W_t(t)$ dir. Buradan $(t, z) \in W_t$ bulunur. Diğer yandan, $(z, y) \in W$ olduğundan $(z, y) \in W_t$ dir. Bu nedenle $(t, y) \in W_t^2 \subset V_t$ ve dolayısıyla $y \in V_t(t) \subset U$ elde edilir.

b) A kapalı ve $A \cap K = \varnothing$ olduğundan $X - A$, K'nın bir komşuluğudur. O halde a)'ya göre

$$\exists\ W \in \mathfrak{D}, \text{ öyle ki } \ W(K) \subset X - A$$

yazılabilir. $V^2 \subset W$ olacak şekilde seçilen simetrik bir $V \in \mathfrak{D}$ için

$$V(K) \cap V(A) = \varnothing$$

olduğu görülür. Aksi halde $z \in V(K)$ ve $z \in V(A)$ olsaydı, uygun bir $x \in K$ ve $y \in A$ için $(x, z) \in V$ ve $(y, z) \in V$ olurdu. Buradan,

$$(x, z)\in V \ \text{ ve } \ (z, y)\in V^{-1} = V \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in V^2 \subset W \quad \Rightarrow \quad y\in W(x),$$

ve $x\in K$ olduğundan $W(x) \subset W(K)$, dolayısıyla $y\in K$ elde edilir. Fakat $y \in W(K) \subset X - A$ olduğundan bu durum $y\in A$ olması ile çelişir. □

B. Düzgün Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 13.8. $(X,\mathfrak{D})$ ve $(Y,\mathcal{C})$ iki düzgün uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $C \in \mathcal{C}$ için

$$\exists \ D\in \mathfrak{D}, \ \text{ö.k.} \ \forall \ (x, y) \in D \ \text{ için } \ (f(x), f(y)) \in C$$

sağlanıyorsa, bu f fonksiyonuna *düzgün süreklidır* denir.

Eğer f bire-bir örten ve f ile f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de düzgün sürekli iseler, bu f fonksiyonuna bir *düzgün izomorfizm* ve bu iki düzgün uzaya da *düzgün izomorf* denir.

Yukarıdaki tanım yapılırken $\mathfrak{D}$ ve $\mathcal{C}$ düzgün yapıları yerine onların birer tabanı alınsaydı elde edilen ifade ilk tanıma denk olurdu.

Örnek 13.2. a) (X,d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon ise

$$f, \ \mathfrak{D}_d \ \text{ ve } \ \mathfrak{D}_\rho \ \text{ metrik düzgün yapılarına göre düzgün süreklidir}$$
$$\Leftrightarrow \ f, \ \text{ metrik uzay anlamında düzgün süreklidir.}$$

Gerçekten,

$$\forall \ D^\rho_\varepsilon \in \mathfrak{D}_\rho \ \text{ için } \ \exists \ D^d_\delta \in \mathfrak{D}_d \ \text{ ö.k. } \forall \ (x, y)\in D^d_\delta \ \text{ için } \ (f(x), f(y))\in D^\rho_\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \ [\ \forall \ \varepsilon > 0 \ \text{ için } \ \exists \ \delta > 0 \ \text{ ö.k. } \ d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \ ]$$

sağlanır.

b) Bir ayrık düzgün uzay üzerinden herhangi bir düzgün uzaya tanımlanmış her fonksiyon düzgün süreklidir.

c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := ax + b$ $(a, b\in \mathbf{R})$ metrik düzgün yapılara göre düzgün süreklidir.

Teorem 13.7. *Düzgün sürekli her fonksiyon süreklidir.*

Kanıt. $(X,\mathfrak{D})$ ve $(Y,\mathcal{C})$ iki düzgün uzay, $f : X \to Y$ düzgün sürekli bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. $V(f(x))$, $f(x)$'in Y'deki düzgün topolojiye göre herhangi bir komşuluğu ise $V \in \mathcal{C}$ ve f düzgün sürekli olduğundan

$$\exists\, U \in \mathfrak{D}, \quad \text{ö.k.} \quad \forall\, (x, y) \in U \text{ için } \ (f(x), f(y)) \in V$$

sağlanır. Buradan $f(U(x)) \subset V(f(x))$ olduğu kolayca elde edilir. Şu halde f, x noktasında süreklidir. □

Uyarı 13.4. Her sürekli fonksiyonun düzgün sürekli olması gerekmez. Bilindiği gibi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbf{R}$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir.

Tanım 13.9. Bir $(X,\mathfrak{D})$ düzgün uzayı, düzgün topoloji ile bir kompakt topolojik uzay ise bu düzgün uzaya *kompakt düzgün uzay* denir.

Teorem 13.8. *Bir kompakt düzgün uzay üzerinde tanımlı ve sürekli olan her fonksiyon düzgün süreklidir.*

Kanıt. $(X,\mathfrak{D})$ kompakt düzgün uzay, $(Y,\mathcal{C})$ herhangi bir düzgün uzay ve $f : X \to Y$ sürekli olsun. f'nin düzgün sürekli olduğunu göstereceğiz. $W \in \mathcal{C}$ olsun. $V^2 \subset W$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathcal{C}$ alınarak, f'nin sürekliliği ile her $x \in X$ için,

$$\exists\ V_x \in \mathfrak{D}, \ \text{ö.k.} \ \ f(V_x(x)) \subset V(f(x))$$

sağlanır. Şimdi de, $U_x^2 \subset V_x$ olacak şekilde simetrik bir $U_x \in \mathfrak{D}$ seçelim. Buradan $\{(U_x(x))^o \mid x \in X\}$, X'in bir açık örtümü olup,

$$f(U_x(x)) \subset f(U_x^2(x)) \subset f(V_x(x)) \subset V(f(x)) \tag{13.1}$$

sağlanır. $(X,\tau_{\mathfrak{D}})$ kompakt olduğundan yukarıdaki açık örtümün sonlu bir

$$\{(U_x(x))^o \mid x \in S\}, \ (S \subset X \text{ sonlu})$$

altörtümü vardır.

$$U := \bigcap_{x \in S} U_x$$

olarak tanımlanırsa, $U \in \mathfrak{D}$ olup her $(u, v) \in U$ için $(f(u), f(v)) \in W$ olduğu görülür. Gerçekten $(u, v) \in U$ keyfi verilsin. $u \in X = \bigcup_{t \in S} U_t(t)$ olduğundan uygun bir $t \in S$ için $u \in U_t(t)$ dir. Buradan $(t,u) \in U_t$ dir. Diğer yandan $(u,v) \in U$ olduğundan $(t,v) \in U \circ U_t \subset U_t^2$ dir. Çünkü $U \subset U_t$ dir. Şu halde $(t,u) \in U_t \subset U_t^2$ ve $(t,v) \in U_t^2$ dir. Buradan $u \in U_t^2(t)$ ve $v \in U_t^2(t)$ elde edilir. Fakat $U_t(t)$, X 'in yukarıdaki örtümünün bir elemanı olduğundan (13.1) bağıntısına göre

$$f(u),\ f(v) \in f(U_t^2(t)) \subset V(f(t)),$$

ve dolayısıyla $(f(t), f(u)) \in V$, $(f(t), f(v)) \in V$ elde edilir. Böylece

$$(f(u), f(v)) \in V^{-1} \circ V = V^2 \subset W$$

sağlandığı gösterilmiş ve kanıt tamamlanmıştır. □

Problemler

P. 1. Uyarı 13.1'deki iddiaları gösteriniz.

P. 2. Teorem 13.1'in kanıtını tamamlayınız.

P. 3. $\mathfrak{D}$, X kümesi üzerinde bir düzgün yapı ise aşağıdakileri gösteriniz.

a) Her $U \in \mathfrak{D}$ ve her $n \in \mathbf{N}$ için $U \subset U^n$ dir.

b) Her $U \in \mathfrak{D}$ için $V^2 \subset U$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathfrak{D}$ vardır.

c) Her $U \in \mathfrak{D}$ için $V^3 \subset U$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathfrak{D}$ vardır. (Y.g.: Her $U \in \mathfrak{D}$ için $\Delta \subset U$ olduğunu göz önünde bulundurunuz.)

P. 4. Örnek 13.1'de verilen ailelerin verilen kümeler üzerinde birer düzgün yapı tanımladıklarını gösteriniz.

P. 5. $(X,\mathfrak{D})$ bir düzgün uzay ve $\mathfrak{B}\subset \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$'nin bir tabanı ise

$$\mathfrak{B}(x) = \{V(x) \mid V\in \mathfrak{B}\}$$

ailesi $(X,\tau_{\mathfrak{D}})$ topolojik uzayında x noktasının bir komşuluk tabanıdır. Gösteriniz.

P. 6. X, Y, Z düzgün uzaylar ve $f : X \to Y$ ile $g : Y \to Z$ düzgün sürekli iseler $g \circ f : X \to Z$ bileşke fonksiyonu da düzgün süreklidir. Gösteriniz.

P. 7. $(X,\mathfrak{D})$ ve $(Y,\mathcal{C})$ iki düzgün uzay ve $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ sırasıyla $\mathfrak{D}$ ve $\mathcal{C}$'nin birer tabanı iseler

f düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $B\in \mathfrak{B}_1$ için öyle bir $B^*\in \mathfrak{B}_2$ vardır ki, $(x, y) \in B \Rightarrow (f(x), f(y)) \in B^*$, $(x, y \in X)$

Gösteriniz.

P. 8. $(X,\mathfrak{D})$ ve $(Y,\mathcal{C})$ iki düzgün uzay ve $f: X \to Y$ için

$$f\times f: X\times X \to Y\times Y, \quad (f\times f)(x, y) := (f(x), f(y))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

f düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $C \in \mathcal{C}$ için, $(f\times f)^{-1}(C) \in \mathfrak{D}$ dir.

Gösteriniz.

KAYNAKLAR

[1] BIRKHOFF, G., Lattice Theory, American Mathematical Society, Third Edition, 1967

[2] BUSKES, G., van ROOIJ, A., Topological Spaces, Springer Verlag, New York Inc., 1997

[3] DUGUNDJI, J., Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1976

[4] FRANZ, W., Toplogie I (Allgemeine Topologie). Walter de Gruyter and Co. (Sammlung Göschen), Berlin, 1973

[5] GEMIGNANI, M. C., Elementary Topology, Addison Wesley, Reading, 1967

[6] GROTEMEYER, K. P., Topologie, B. I. Hochschultaschenbücher, Band 836, Mannheim, 1969

|7] JOSHI, K. D., Introduction to General Topology, Wiley Eastern Limited, 1983

[8] KARAÇAY, T., Genel Topoloji, KTÜ Trabzon, 1982

[9] LIPSCHUTZ, S., General Topology, Schaum Publ. Co., New York, 1965

[10] PERVIN, W. J., Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964

[11] PREUSS, G., Allgemeine Topologie, Springer Verlag, Berlin, 1975

[12] QUERENBURG, B. von, Mengentheoritische Topolgie, Springer Verlag, Berlin, 1976

[13] SCHUBERT, H., Topologie, B. G. Teubner, Stuttgard, 1964

[14] WILLARD, S., General Topology, Addison-Wesley Publ. Co., 1970

DİZİN