Тест 2

A.

1. На множестве $\mathbb{R}$ определено отношение R: $(x, y) \in R$, если $x^3 - x = y^3 - y$.

(a) Проверьте, что R является отношением эквивалентности.

- рефлексивность xRx: $x^3 - x = x^3 - x$. ✓
- симметричность $xRy \Rightarrow yRx$: $x^3 - x = y^3 - y \;\Rightarrow\; y^3 - y = x^3 - x$. ✓
- транзитивность $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$:
  $x^3 - x = y^3 - y \;\wedge\; y^3 - y = z^3 - z \;\Rightarrow\; x^3 - x = z^3 - z$. ✓

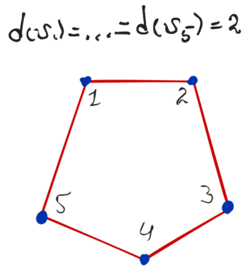
(b) Определите класс эквивалентности [1].

Классом эквивалентности $[a] \subset X$ элемента $a \in X$ называется подмножество элементов, эквивалентных a; то есть,

$$[a] = \{\, x \in X \mid x \sim a \,\}.$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{R} | x^3 - x = 1^3 - 1 = 0\} = \{-1, 0, 1\}.$$

2. Нарисуйте или обоснуйте, почему не существует непересекающийся(планарный) граф с 5 вершинами, степени всех вершин которого равны $d(v) = 2$.



3. Пусть у нас есть двудольный граф $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, $|A| = |B| = n$.

Двудольный граф – это граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует рёбер между вершинами одной и той же части графа.

(a) Каково максимально возможное число рёбер, которые может иметь граф G?

$$n^2.$$

(b) Каково минимально возможное число рёбер, которые может иметь граф G?

$$n.$$

B.

1. На множестве $\mathbb{N}$ задано отношение R: $(m, n) \in R$, если $|m - n| \leq 2$.

(a) Выясните, является ли R отношением эквивалентности.

- рефлексивность mRm: $|m - m| \leq 2$. ✓
- симметричность $mRn \Rightarrow nRm$: $|m - n| \leq 2 \;\Rightarrow\; |n - m| \leq 2$. ✓
- транзитивность $mRn \wedge nRk \Rightarrow mRk$:
  $|m - n| \leq 2 \;\wedge\; |n - k| \leq 2 \;\not\Rightarrow\; |m - k| \leq 2.$ $\boxed{\times}$
  В качестве контрпримера можно взять $m = 0, n = 2, k = 4$.

(b) Определите все $n \in \mathbb{N}$, для которых $(1, n) \in R \circ R$.

$$\underbrace{|1 - m| \leq 2}_{m=\{1,2,3\}} \wedge \underbrace{|m - n| \leq 2}_{m-2 \leq n \leq 2+m} \quad \Longrightarrow \quad n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. Существует ли простой граф с 5 вершинами и суммой степеней всех вершин 22. Если да, нарисуйте его. В противном случае обоснуйте ответ.
Нет, сумма степеней графа на n вершинах не может быть больше суммы степеней полного графа на n вершинах K_n. В нашем случае в K_5 $\sum d(v) = 5 * 4 = 20$, а по условию задачи сумма степеней равна 22, чего быть не может.

3. Пусть у нас есть полный граф K_n: с вершинами $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Сколько смежных подграфов графа K_n имеют ровно два ребра?

$$C_n^3$$

C.

1. На потенциальном множестве $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ мы имеем отношение R: $(A, B) \in R$, если $A \subset B \cup \{1\}$.

(a) Определите, является ли R рефлексивным или транзитивным.

- рефлексивность ARA: $A \subset A \cup \{1\}$. ✓
- транзитивность $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$:
  $A \subset B \cup \{1\} \ \wedge \ B \subset C \cup \{1\} \ \Rightarrow \ A \subset C \cup \{1\}$. ✓

(b) Положим $B = \{2, 4\}$. Сколько множеств A удовлетворяет $(B, A) \in R^{-1}$?

$$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$$

$$A \subset \overbrace{\underbrace{B}_{\{2,4\}} \cup \{1\}}^{\{1,2,4\}} \quad \Longrightarrow \quad A = \mathcal{P}(\{1, 2, 4\})$$

2. Нарисуйте или обоснуйте, почему не существует непересекающийся граф с 6 вершинами, в котором степени всех вершин равны $d(v) = 3$.
Это граф $K_{3,3}$, который не является планарным.

3. Пусть у нас есть полный граф K_n с вершинами $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Сколько путей длины 3 ведёт между вершинами 1 и 4?

$$(n-2) \cdot (n-3)$$

D.

1. На множестве $\mathbb{N}$ рассмотрим отношение R, определённое следующем образом: $(m, n) \in R$, $m \cdot n^4$ – нечётное число.

(a) Определите, является ли R рефлексивным или симметричным.

(b) Выясните, какие числа $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют $(n, 1) \in R^{-1}$.

2. Нарисуйте или объясните, почему не существует простого графа с шестью вершинами, для которого справедливо: две вершины имеют степень $d = 0$, две вершины имеют степень $d = 2$, и две другие вершины имеют степени $d \notin \{1, 2\}$.

3. Пусть у нас есть полный граф K_n с вершинами $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Сколько подграфов графа K_n, имеющих максимум одно ребро?

$$C_n^2$$