1. Базовая комбинаторика, биномиальная теорема

Основные правила

Правило суммы гласит, что если A и B – несвязанные события, причем существует n_i возможных исходов события A и n_2 возможных исхода события B, то возможное число исходов события «A или B» равно сумме $n_1 + n_2$.

Правило произведения утверждает, что если дана последовательность k событий с n_1 возможными исходами первого, n_2 – второго, и т.д., вплоть до n_k возможных исходов последнего, то общее число исходов последовательности k событий равно произведению $n_1 \cdot n_2 \ldots \cdot n_k$.

Мы выбираем k элементов из множества S мощности n. Если при этом порядок последовательности имеет значение, то мы получаем (n,k)-**размещение**, а в противном случае – (n,k)-**сочетание**. **Размещение с повторениями** получается в том случае, если в последовательности выбираемых элементов мы разрешаем появляться одинаковым, иначе мы имеем дело с размещением без повторений. Аналогично определяются сочетания с повторениями и без повторений.

Биномиальная теорема

Бином Ньютона – это формула:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^{n-k} b^k \quad \text{, где} \quad C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$C(n,k) = C(n, n-k).$$

Формула Паскаля:

$$C(n-1,k-1) + C(n-1,k) = C(n,k), \quad 0 < k < n.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
C(n-1,k-1) + C(n-1,k) &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)k}\right) = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = C(n,k)
\end{aligned}$$

Общие количества всех (n,k)-размещений и (n,k)-сочетаний, как с повторениями, так и без оных даны в таблице:

	Порядок существенен	Порядок не существенен
Элементы повторяются	размещения с повторениями n^k	сочетания с повторениями $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Элементы не повторяются	размещения без повторений $\frac{n!}{(n-k)!}$	сочетания без повторении $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

Теорема о перестановках утверждает, что существует

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

различных перестановок n объектов, n_1 из которых относятся к типу 1, n_2 – к типу 2, и т.д. вплоть до n_r объектов типа r.

Пример. Сколькими способами можно распределить 15 студентов по трем учебным группам по пять студентов в каждой?

Решение. У нас есть 15 объектов, которые нужно организовать в три группы по пять. Это можно сделать

$$\frac{15!}{5!5!5!} = 68795$$

различными способами.

Домашнее задание

Часть I

1. У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды?

2. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6000, можно составить, используя только нечетные цифры?

3. Пусть S – множество четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: , 1, 2, 3, и 6, причем на первом месте, естественно, стоять не может.

а) Какова мощность множества S?

б) Сколько чисел из S в своей десятичной записи не имеют повторяющихся цифр?

в) Как много четных среди чисел пункта (б)?

г) Сколько чисел из пункта (б) окажутся больше, чем 4000?

4. Комитет из 20 членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

5.

а) Ресторан в своем меню предлагает пять различных главных блюд. Каждый из компании в шесть человек заказывает свое главное блюдо. Сколько разных заказов может получить официант?

б) Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

6. Вы покупаете пять рождественских открыток в магазине, который может предложить четыре разных типа приглянувшихся Вам открыток.

а) Как много наборов из пяти открыток ы можете купить?

б) Сколько наборов можно составить, если ограничиться только двумя типами открыток из четырех, но купить все равно пять открыток?

7. Воспользуйтесь формулой Паскаля для доказательства равенства:

$$C(n,k) + 2C(n,k+1) + C(n,k+2) = C(n+2,k+2), \text{при} \quad 0 \le k \le n-2$$

8. Положив в биноме Ньютона $a = b = 1$, покажите, что для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива формула:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

Выведите отсюда, что в множестве S из n элементов содержится ровно 2^n различных подмножеств. (Указание: определите сначала, сколько подмножеств мощности k содержится в S.)

9.

а) Сколько разных «слов» можно получить из слова

«АБРАКАДАБРА»?

б) Сколько из них начинаются с буквы «К»?

в) В скольких из них обе буквы «Б» стоят рядом?