

6. Графы

Основные понятия

Граф $G = (V, E)$ состоит из множества V чьи элементы называют вершинами графа, и множества E его ребер, соединяющих некоторые пары вершин.

Вершины u и v графа называют **смежными**, если они соединены каким-то ребром e , про которое говорят, что оно инцидентно вершинам u и v .

Степенью вершины v считают число $\delta(v)$ ребер графа, инцидентных v .

Граф, в котором существует маршрут (называемый **эйлеровым**), начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий по каждому ребру графа ровно один раз, называется **Эйлеровым** графом. Связный граф с двумя или более вершинами является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.

Лемма об эстафете утверждает, что сумма степеней вершин произвольного графа $G = (V, E)$ равна удвоенному числу его ребер.

Простым принято называть граф $G = (V, E)$ с конечным множеством вершин V и конечным множеством ребер E , в котором нет петель и кратных ребер.

Логическая матрица отношения на множестве вершин простого графа G , которое задается его ребрами, называется **матрицей смежности**.

Подграфом графа $G = (V, E)$ называют граф $G' = (V', E')$ в котором $E' \subset E$ и $V' \subset V$.

Маршрутом длины k в графе называют такую последовательность различных вершин v_0, v_1, \dots, v_k , в которой каждая пара соседних вершин $v_{i-1}v_i$ соединена ребром.

Циклом в графе является замкнутый маршрут v_0, v_1, \dots, v_0 у которого все вершины, кроме первой и последней, различны.

Граф, не содержащий циклов, называют **ациклическим**.

Связным является тот граф, в котором каждая пара вершин соединена маршрутом.

Количество компонент связности графа можно подсчитать с помощью **алгоритма связности**.

Гамильтоновым называют такой цикл в графе, который проходит через каждую вершину графа, причем только один раз. Граф, в котором существует гамильтонов цикл, называют **гамильтоновым**.

Связный ациклический граф $G = (V, E)$ является **деревом**. Следующие утверждения о связном графе $G = (V, E)$ с n вершинами и m ребрами эквивалентны:

- а) G – дерево;
- б) любую пару вершин G связывает единственный путь;
- в) G связан и $m = n - 1$
- г) G связан, а удаление любого его ребра нарушает это свойство;
- д) G ациклический, но соединяя любую пару вершин новым ребром, мы получаем цикл.

Остовным деревом графа G называют такой его подграф, который является деревом и содержит все вершины графа G . Алгоритм поиска минимального остовного дерева позволяет найти остовное дерево минимального общего веса в нагруженном графе и может быть использован для решения задачи поиска кратчайшего соединения.

Дерево с одной выделенной вершиной называют **деревом с корнем**, а выделенную вершину – его **корнем**. Вершины, стоявшие непосредственно под вершиной v (и соединенные с ней ребрами), называются **сыновьями** вершины v . Вершины, расположенные в самом низу дерева (они не имеют сыновей), называются **листьями**. Вершины, отличные от корня и листьев, называют **внутренними** вершинами графа. **Нулевое дерево** – это дерево, не имеющее ни одной вершины.

Каждая вершина дерева с корнем является корнем какого-то другого дерева, называемого **поддеревом**. В **двоичном дереве с корнем** каждая вершина имеет не более двух сыновей, а два поддерева вершины V называют **левым** и **правым** поддеревьями, ассоциированными с V . Двоичное дерево с корнем называют **полным**, если каждая его вершина, за исключением листьев, имеет ровно по два сына.

Глубиной вершины v дерева с корнем T принято считать длину единственного маршрута, соединяющего ее с корнем. **Глубиной графа** называют максимальную глубину его вершин.

Демонстрационные задачи

1. Известно, что дерево T имеет три вершины степени 3 и четыре вершины степени 2. Остальные вершины дерева имеют степень 1. Сколько вершин степени 1 есть у дерева ? (Указание: обозначьте число вершин дерева через n и примените лемму об эстафете.)