

## Тест 2

### А.

1. На множестве  $\mathbb{R}$  определено отношение  $R$ :  $(x, y) \in R$ , если  $x^3 - x = y^3 - y$ .
  - (a) Проверьте, что  $R$  является отношением эквивалентности.
  - (b) Определите класс эквивалентности  $[1]$ .
2. Нарисуйте или обоснуйте, почему не существует непересекающийся(планарный) граф с 5 вершинами, степени всех вершин которого равны  $d(v) = 2$ .
3. Пусть у нас есть двудольный граф  $G = (V, E)$ ,  $V = A \cup B$ ,  $|A| = |B| = n$ .
  - (a) Каково максимально возможное число рёбер, которые может иметь граф  $G$ ?
  - (b) Каково минимально возможное число рёбер, которые может иметь граф  $G$ ?

### В.

1. На множестве  $\mathbb{N}$  задано отношение  $R$ :  $(m, n) \in R$ , если  $|m - n| \leq 2$ .
  - (a) Выясните, является ли  $R$  отношением эквивалентности.
  - (b) Определите все  $n \in \mathbb{N}$ , для которых  $(1, n) \in R \circ R$ .
2. Существует ли простой граф с 5 вершинами и суммой степеней всех вершин 22. Если да, нарисуйте его. В противном случае обоснуйте ответ.
3. Пусть у нас есть полный граф  $K_n$  с вершинами  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Сколько смежных подграфов графа  $K_n$  имеют ровно два ребра?

**C.**

1. На потенциальном множестве  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  мы имеем отношение  $R$ :  $(A, B) \in R$ , если  $A \subset B \cup \{1\}$ .
  - (a) Определите, является ли  $R$  рефлексивным или транзитивным.
  - (b) Положим  $B = \{2, 4\}$ . Сколько множеств  $A$  удовлетворяет  $(B, A) \in R^{-1}$ ?
2. Нарисуйте или обоснуйте, почему не существует непересекающийся граф с 6 вершинами, в котором степени всех вершин равны  $d(v) = 3$ .
3. Пусть у нас есть полный граф  $K_n$  с вершинами  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Сколько путей длины 3 ведёт между вершинами 1 и 4?

**D.**

1. На множестве  $\mathbb{N}$  рассмотрим отношение  $R$ , определённое следующим образом:  $(m, n) \in R$ ,  $m \cdot n^4$  – нечётное число.
  - (a) Определите, является ли  $R$  рефлексивным или симметричным.
  - (b) Выясните, какие числа  $n \in \mathbb{N}$  удовлетворяют  $(n, 1) \in R^{-1}$ .
2. Нарисуйте или объясните, почему не существует простого графа с шестью вершинами, для которого справедливо: две вершины имеют степень  $d = 0$ , две вершины имеют степень  $d = 2$ , и две другие вершины имеют степени  $d \notin \{1, 2\}$ .
3. Пусть у нас есть полный граф  $K_n$  с вершинами  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Сколько подграфов графа  $K_n$ , имеющих максимум одно ребро?