4. Отношения

Основные понятия

Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R в $A \times B$. Если $A = B$, то говорят, что R – **отношение** на A.

Бинарное отношение между конечными множествами может быть описано на словах (при помощи подходящих предикатов), как множество упорядоченных пар, как орграф и с помощью матрицы.

Отношение R на множестве A называется

рефлексивыным, если $x\,R\,x$ для всех $x \in A$;

симметричным, если $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ для всех $x, y \in A$;

кососимметричным если ($x\,R\,y$ и $y\,R\,x \Rightarrow x = y$) для всех $x, y \in A$;

транзитивным, если ($x\,Ry$ и $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$) для всех $x, y, z \in A$

Отношение R^* называют **замыканием отношения** R относительно свойства P, если

1) R^* обладает свойством P;

2) $R \subset R^*$;

3) R^* – подмножество любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется **отношением эквивалентности**. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ является подмножество

$$E_x = \{x \in A \,|\, z\,R\,x\}$$

Разбиение множества A представляет собой совокупность подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в A, удовлетворяющих требованиям:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{ и } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j$$

Подмножества A_i из предыдущего определения называются **блоками** разбиения. Если R – отношение эквивалентности на A, то различные классы эквивалентности образуют **разбиение** A.

Рефлексивное, кососимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется **частичным порядком**. Множества, на которых определено такое отношение, в свою очередь, называются **частично упорядоченными множествами.**

Линейный порядок на множестве – это такой частичный порядок, при котором можно сравнить любую пару элементов.

Если R – отношение частичного порядка на множестве A и $x\,R\,y$, $x \neq y$, то x называется **предшественником** . В том случае, когда x предшествует y и нет такого элемента z, для которого $x\,R\,z$ и $z\,R\,y$, то говорят, что x – **непосредственный предшественник** y. Последний факт обозначают так: $x \prec y$.

Демонстрационные задачи

1. Ниже определены отношения на множествах. Опишите на словах замыкание по транзитивности в каждом случае.

(а) $A = \mathbb{Z}$, R задается условием: $x\,R\,z$ тогда и только тогда, когда $x - -y$ – четное число;

(б) $A = \mathbb{R}^2$ задается по правилу: $(a,b)\,R\,(c,d)$ в том случае, когда $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

2. Отношение R на множестве $\mathbb{Z}$ определяется так: $x\,R\,y$ в том и только том случае, когда $x^2 - y^2$ делится на 3. Покажите, что R является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.