

## Тест 2

### А.

1. На множестве  $\mathbb{R}$  определено отношение  $R$ :  $(x, y) \in R$ , если  $x^3 - x = y^3 - y$ .

(а) Проверьте, что  $R$  является отношением эквивалентности.

- рефлексивность  $xRx$ :  $x^3 - x = x^3 - x$ . ✓
- симметричность  $xRy \Rightarrow yRx$ :  $x^3 - x = y^3 - y \Rightarrow y^3 - y = x^3 - x$ . ✓
- транзитивность  $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ :  
 $x^3 - x = y^3 - y \wedge y^3 - y = z^3 - z \Rightarrow x^3 - x = z^3 - z$ . ✓

(б) Определите класс эквивалентности  $[1]$ .

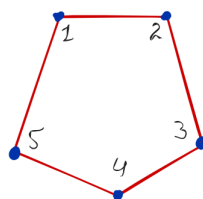
Классом эквивалентности  $[a] \subset X$  элемента  $a \in X$  называется подмножество элементов, эквивалентных  $a$ ; то есть,

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}.$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 1^3 - 1 = 0\} = \{-1, 0, 1\}.$$

2. Нарисуйте или обоснуйте, почему не существует непересекающийся(планарный) граф с 5 вершинами, степени всех вершин которого равны  $d(v) = 2$ .

$$d(v_1) = \dots = d(v_5) = 2$$



3. Пусть у нас есть двудольный граф  $G = (V, E)$ ,  $V = A \cup B$ ,  $|A| = |B| = n$ .

Двудольный граф – это граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует рёбер между вершинами одной и той же части графа.

(а) Каково максимально возможное число рёбер, которые может иметь граф  $G$ ?

$$n^2.$$

(б) Каково минимально возможное число рёбер, которые может иметь граф  $G$ ?

$$n.$$

### В.

1. На множестве  $\mathbb{N}$  задано отношение  $R$ :  $(m, n) \in R$ , если  $|m - n| \leq 2$ .

(a) Выясните, является ли  $R$  отношением эквивалентности.

- рефлексивность  $mRm$ :  $|m - m| \leq 2$ . ✓
- симметричность  $mRn \Rightarrow nRm$ :  $|m - n| \leq 2 \Rightarrow |n - m| \leq 2$ . ✓
- транзитивность  $mRn \wedge nRk \Rightarrow mRk$ :  
 $|m - n| \leq 2 \wedge |n - k| \leq 2 \not\Rightarrow |m - k| \leq 2$ . ×

В качестве контрпримера можно взять  $m = 0, n = 2, k = 4$ .

(b) Определите все  $n \in \mathbb{N}$ , для которых  $(1, n) \in R \circ R$ .

$$\underbrace{|1 - m| \leq 2}_{m=\{1,2,3\}} \wedge \underbrace{|m - n| \leq 2}_{m-2 \leq n \leq 2+m} \implies n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. Существует ли простой граф с 5 вершинами и суммой степеней всех вершин 22. Если да, нарисуйте его. В противном случае обоснуйте ответ.

Нет, сумма степеней графа на  $n$  вершинах не может быть больше суммы степеней полного графа на  $n$  вершинах  $K_n$ . В нашем случае в  $K_5$   $\sum d(v) = 5 * 4 = 20$ , а по условию задачи сумма степеней равна 22, чего быть не может.

3. Пусть у нас есть полный граф  $K_n$ : с вершинами  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Сколько смежных подграфов графа  $K_n$  имеют ровно два ребра?

$$C_n^3$$

C.

1. На потенциальном множестве  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  мы имеем отношение  $R$ :  $(A, B) \in R$ , если  $A \subset B \cup \{1\}$ .

(a) Определите, является ли  $R$  рефлексивным или транзитивным.

- рефлексивность  $ARA$ :  $A \subset A \cup \{1\}$ . ✓
- транзитивность  $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$ :  
 $A \subset B \cup \{1\} \wedge B \subset C \cup \{1\} \Rightarrow A \subset C \cup \{1\}$ . ✓

(b) Положим  $B = \{2, 4\}$ . Сколько множеств  $A$  удовлетворяет  $(B, A) \in R^{-1}$ ?

$$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$$

$$A \subset \underbrace{\overbrace{B}^{\{1,2,4\}} \cup \{1\}}_{\{2,4\}} \implies A = \mathcal{P}(\{1, 2, 4\})$$

2. Нарисуйте или обоснуйте, почему не существует непересекающийся граф с 6 вершинами, в котором степени всех вершин равны  $d(v) = 3$ .

Это граф  $K_{3,3}$ , который не является планарным.

См. док-во

3. Пусть у нас есть полный граф  $K_n$  с вершинами  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Сколько путей длины 3 ведёт между вершинами 1 и 4?

$$(n-2) \cdot (n-3)$$

D.

1. На множестве  $\mathbb{N}$  рассмотрим отношение  $R$ , определённое следующим образом:  
 $(m, n) \in R$ ,  $m \cdot n^4$  – нечётное число.

(a) Определите, является ли  $R$  рефлексивным или симметричным.

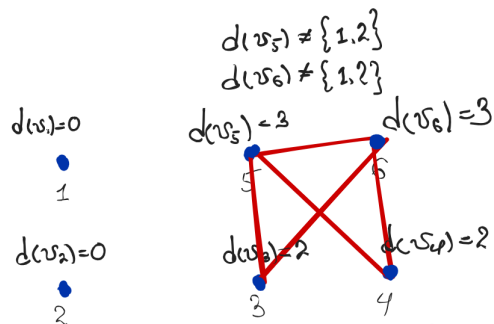
$m$  и  $n$  должны быть нечётными числами

- рефлексивность  $mRm$ :  $m \cdot m^4$  – нечет. ✓
- симметричность  $mRn \Rightarrow nRm$ :  $m \cdot n^4$  – нечет  $\Rightarrow n \cdot m^4$  – нечет. ✓

(b) Выясните, какие числа  $n \in \mathbb{N}$  удовлетворяют  $(n, 1) \in R^{-1}$ .

$$\{n | n = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}^+\}$$

2. Нарисуйте или объясните, почему не существует простого графа с шестью вершинами, для которого справедливо: две вершины имеют степень  $d = 0$ , две вершины имеют степень  $d = 2$ , и две другие вершины имеют степени  $d \notin \{1, 2\}$ .



3. Пусть у нас есть полный граф  $K_n$  с вершинами  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Сколько подграфов графа  $K_n$ , имеющих максимум одно ребро?

$$C_n^2$$