2. Теория множеств

Основные понятия

Множество – это совокупность объектов, называемых его элементами.

Символом $\varnothing$ обозначается **пустое** множество, а U – универсальное.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество **натуральных** чисел.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ – множество **целых** чисел.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ – множество **рациональных** чисел.

$\mathbb{R} = \{$все десятичные дроби$\}$ – множество **вещественных** чисел.

Подмножеством множества S называется множество , все элементы которого принадлежат S. Этот факт обозначается так: $A \subset S$.

Два множества называются **равными** тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого.

Объединением множеств и называется множество

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

Пересечением множеств и называется множество

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$$

Дополнением множества до называется множество

$$A \setminus B = x \,|\, x \in A \wedge x \notin B$$

Дополнением множества (до универсального множества U) называется множество

$$\overline{A} = \{x \,|\, x \notin A\}$$

Симметрической разностью двух множеств и называется множество

$$A \triangle B = \{x \,|\, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Из любого тождества множеств можно получить **двойственное**, если заменить $\cap$ на $\cup$, $\varnothing$ на U и наоборот.

Декартовым произведением множеств и является множество

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, A \in A \wedge b \in B\}$$

Элементы $A \times B$ называются **упорядоченными парами**.

Мощность множеств, счетное множество и их свойства.

Множества называются равномощными, эквивалентными, если между ними есть взаимно-однозначное соответствие, то есть такое попарное соответствие, когда каждому элементу одного множества сопоставляется один-единственный элемент другого множества и наоборот, при этом различным элементам одного множества сопоставляются различные элементы другого.

Два множества, равномощные с одним и тем же третьим множеством, равномощны. Если множества M и N равномощны, то и множества всех подмножеств каждого из этих множеств M и N , также равномощны.

Под подмножеством данного множества понимается такое множество, каждый элемент которого является элементом данного множества. Так множество легковых автомобилей и множество грузовых автомобилей будут подмножествами множества автомобилей.

Мощность множества действительных чисел, называют мощностью континуума. Наименьшей бесконечной областью является мощность множества натуральных чисел. .

Часто мощности называют кардинальными числами. Это понятие введено немецким математиком Г. Кантором. Если множества обозначают символическими буквами M, N, то кардинальные числа обозначают через m, n. Г.Кантор доказал, что множество всех подмножеств данного множества имеет мощность большую, чем само множество .

Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется счетным множеством

Счётные множества, их свойства

Множество - равномощное множеству всех натуральных чисел $(1, 2, 3, \ldots, n-1)$, например множество целых чисел, множество чётных чисел, множество рациональных чисел; все другие бесконечные множества являются несчётными бесконечными множествами. Это означает, что все элементы счётного множества можно перенумеровать, то есть обозначить натуральными числами. Говорят, также, что счётное множество имеет мощность, а всякое множество, равномощное с множеством всех подмножеств какого-нибудь счётного множества, имеет мощность или мощность континуума. Бесконечное множество считается счётным, если можно установить одно-однозначное соответствие между его элементами и натуральными числами. Мощность счётного множества, например, множества простых чисел, меньше мощности любого бесконечного несчётного множества. Отношение между счётным множеством и бесконечным несчётным множеством выражается следующими теоремами:

1) Мощность бесконечного множества не изменяется от прибавления к нему счётного множества;

2) Мощность несчётного множества не изменяется от удаления из него счётного множества;

3) Любое подмножество счётного множества счётно;

4) Сумма двух счётных множеств счётна;

4) Сумма конечного и счётного множества счётна;

6) Если множество счётно, то множество всех конечных последовательностей его элементов также счётно;

7) Множество алгебраических чисел счётно.

Домашнее задание

Часть I

1. Определите с помощью предикатов следующий множества:

$$S = \{2, 5, 8, 11, \ldots\};$$
$$T = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \ldots\}$$

2. Что можно сказать о непустых множествах A и B, если имеет место равенство $A \times B = B \times A$?
Непустые множества A B и C удовлетворяют соотношению $A \times B = B \times C$. Следует ли отсюда, что $B = C$? Объясните свой ответ.

3. *Показательным множеством* $P(A)$ называется множество, элементами которого являются подмножества множества . Иначе говоря, $P(A) = \{C \mid C \subset A\}$.

а) Найдите $P(A)$, если $A = \{1, 2, 3\}$.

б) Докажите, что $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ для любых множеств A и B.

в) Покажите на примере, что $P(A) \cup P(B)$ не всегда совпадает с $P(A \cup B)$,