

4. Отношения

Основные понятия

Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R в $A \times B$. Если $A = B$, то говорят, что R – **отношение** на A .

Бинарное отношение между конечными множествами может быть описано на словах (при помощи подходящих предикатов), как множество упорядоченных пар, как орграф и с помощью матрицы.

Отношение R на множестве A называется

рефлексивным, если $x R x$ для всех $x \in A$;

симметричным, если $x R y \Rightarrow y R x$ для всех $x, y \in A$;

кососимметричным если $(x R y \text{ и } y R x \Rightarrow x = y)$ для всех $x, y \in A$;

транзитивным, если $(x R y \text{ и } y R z \Rightarrow x R z)$ для всех $x, y, z \in A$

Отношение R^* называют **замыканием отношения** R относительно свойства P , если

- 1) R^* обладает свойством P ;
- 2) $R \subset R^*$;
- 3) R^* – подмножество любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P .

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется **отношением эквивалентности**. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ является подмножество

$$E_x = \{x \in A \mid z R x\}$$

Разбиение множества A представляет собой совокупность подмножеств A_1, A_2, \dots, A_n в A , удовлетворяющих требованиям:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ и } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j$$

Подмножества A_i из предыдущего определения называются **блоками** разбиения. Если R – отношение эквивалентности на A , то различные классы эквивалентности образуют **разбиение** A .

Рефлексивное, кососимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется **частичным порядком**. Множества, на которых определено такое отношение, в свою очередь, называются **частично упорядоченными множествами**.

Линейный порядок на множестве – это такой частичный порядок, при котором можно сравнить любую пару элементов.

Если R – отношение частичного порядка на множестве A и $x R y$, $x \neq y$, то x называется **предшественником**. В том случае, когда x предшествует y и нет такого элемента z , для которого $x R z$ и $z R y$, то говорят, что x – **непосредственный предшественник** y . Последний факт обозначают так: $x \prec y$.

Демонстрационные задачи

1. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве опишите блоки, на которые разбивается множество :
 - (а) $A = \mathbb{Z}$, R задается условием: $x R z$ тогда и только тогда, когда $x - y$ – четное число;
 - (б) $A = \mathbb{R}^2$ задается по правилу: $(a, b) R (c, d)$ в том случае, когда $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
2. Отношение R на множестве \mathbb{Z} определяется так: $x R y$ в том и только том случае, когда $x^2 - y^2$ делится на 3. Покажите, что R является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.