# 1. Базовая комбинаторика, биномиальная теорема

## Основные правила

**Правило суммы** гласит, что если $A$ и $B$ – несвязанные события, причем существует $n_i$ возможных исходов события $A$ и $n_2$ возможных исхода события $B$, то возможное число исходов события «$A$ или $B$» равно сумме $n_1 + n_2$.

**Правило произведения** утверждает, что если дана последовательность $k$ событий с $n_1$ возможными исходами первого, $n_2$ – второго, и т.д., вплоть до $n_k$ возможных исходов последнего, то общее число исходов последовательности $k$ событий равно произведению $n_1 \cdot n_2 \ldots \cdot n_k$.

Мы выбираем $k$ элементов из множества $S$ мощности $n$. Если при этом порядок последовательности имеет значение, то мы получаем $(n, k)$-**размещение**, а в противном случае – $(n, k)$-**сочетание**. **Размещение с повторениями** получается в том случае, если в последовательности выбираемых элементов мы разрешаем появляться одинаковым, иначе мы имеем дело с размещением без повторений. Аналогично определяются сочетания с повторениями и без повторений.

## Биномиальная теорема

**Бином Ньютона** – это формула:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^{n-k} b^k \quad \text{, где} \quad C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$C(n,k) = C(n, n-k).$$

Формула Паскаля:

$$C(n-1, k-1) + C(n-1, k) = C(n,k), \quad 0 < k < n.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
C(n-1,k-1) + C(n-1,k) &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)k}\right) = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = C(n,k)
\end{aligned}$$

Общие количества всех $(n, k)$-размещений и $(n, k)$-сочетаний, как с повторениями, так и без оных даны в таблице:

| | Порядок существенен | Порядок не существенен |
|---|---|---|
| Элементы повторяются | размещения с повторениями $n^k$ | сочетания с повторениями $\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ |
| Элементы не повторяются | размещения без повторений $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ | сочетания без повторении $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ |

**Теорема о перестановках** утверждает, что существует

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

различных перестановок $n$ объектов, $n_1$ из которых относятся к типу 1, $n_2$ – к типу 2, и т.д. вплоть до $n_r$ объектов типа $r$.

**Пример.** Сколькими способами можно распределить 15 студентов по трем учебным группам по пять студентов в каждой?

**Решение.** У нас есть 15 объектов, которые нужно организовать в три группы по пять. Это можно сделать

$$\frac{15!}{5!5!5!} = 68795$$

различными способами.

# Домашнее задание

## Часть I

**1.** У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды?

**2.** Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6000, можно составить, используя только нечетные цифры?

**3.** Пусть $S$ – множество четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: , 1, 2, 3, и 6, причем  на первом месте, естественно, стоять не может.

- **а)** Какова мощность множества $S$?
- **б)** Сколько чисел из $S$ в своей десятичной записи не имеют повторяющихся цифр?
- **в)** Как много четных среди чисел пункта (б)?
- **г)** Сколько чисел из пункта (б) окажутся больше, чем 4000?

**4.** Комитет из 20 членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

**5.**

- **а)** Ресторан в своем меню предлагает пять различных главных блюд. Каждый из компании в шесть человек заказывает свое главное блюдо. Сколько разных заказов может получить официант?
- **б)** Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

**6.** Вы покупаете пять рождественских открыток в магазине, который может предложить четыре разных типа приглянувшихся Вам открыток.

- **а)** Как много наборов из пяти открыток ы можете купить?
- **б)** Сколько наборов можно составить, если ограничиться только двумя типами открыток из четырех, но купить все равно пять открыток?

**7.** Воспользуйтесь формулой Паскаля для доказательства равенства:

$$C(n,k) + 2C(n,k+1) + C(n,k+2) = C(n+2,k+2), \text{при} \quad 0 \leq k \leq n-2$$

**8.** Положив в биноме Ньютона $a = b = 1$, покажите, что для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива формула:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

Выведите отсюда, что в множестве $S$ из $n$ элементов содержится ровно $2^n$ различных подмножеств. (Указание: определите сначала, сколько подмножеств мощности $k$ содержится в $S$.)

**9.**

**а)** Сколько разных «слов» можно получить из слова

«АБРАКАДАБРА»?

**б)** Сколько из них начинаются с буквы «К»?

**в)** В скольких из них обе буквы «Б» стоят рядом?