

Домашняя работа по графам

1. В группе имеется девять студентов. Каждый из них послал по сообщению каким-то трем другим студентам. Возможна ли ситуация, при которой каждый студент получит сообщения от тех же трех студентов, кому он послал свои сообщения?
2. Пусть G есть граф, построенный на вершинах $1, 2, \dots, 15$, в котором вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда их наибольший общий делитель больше единицы. Сколько компонент связности имеет такой граф?
3. Какое максимальное количество ребер может быть в простом слабо связном ориентированном графе на 10 вершинах, не являющимся сильно связным?
4. Какое максимальное число ребер может быть в простом двудольном неориентированном графе на 11 вершинах?
5. Сколько различных остовных подграфов может иметь простой связный граф G , построенный на m ребрах?
6. Лес — это граф, каждая компонента связности которого является деревом. Рассмотрим лес, построенный на 41 вершине и имеющий семь компонент связности. Сколько ребер в таком графе?
7. Дано дерево на семи вершинах. Известно, что в этом дереве по меньшей мере три вершины имеют степень 1, и как минимум две вершины имеют степень 3. Найдите последовательность степеней вершин этого графа.
8. Имеется кусок проволоки длиной 12 сантиметров. На какое минимальное количество кусков его следует разрезать, чтобы из этих кусков можно было бы изготовить каркас кубика размерами $1 \times 1 \times 1$ при условии, что проволоку в процессе изготовления кубиков можно сгибать?
9. Сколько может быть совершенных паросочетаний в дереве на $n > 2$ вершинах?
10. Сколько существует совершенных паросочетаний в полном графе на $2n$ вершинах? Дайте ответ для $n = 10$.
11. Определите минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в графе C_{11} , представляющем собой простой цикл, построенный на 11 вершинах.
12. Найти количество X -насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$, где X — это доля меньшего размера. Решите эту задачу для $n = 8$, $m = 23$.
13. В полном графе K_3 существует единственный гамильтонов цикл, в полном графе K_4 — три цикла. Вывести формулу для подсчета количества гамильтоновых циклов в произвольном полном графе K_n .