2. Принцип включения и исключения и приложения.

Пусть A – конечное множество. Обозначим через $|A|$ число его элементов, т.е. если множество A содержит n элементов, то $|A| = n$.

Пусть множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов. Введём обозначение $A_{12} = A_1 \cap A_2$. Легко убедиться, что

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_{12}|.$$

Это одна из важнейших формул комбиаторики, которую называют *формулой сложения*. С её помощью можно получить формулу для количества элементов в объединении любого числа множеств.

Например, для трёх множеств(обозначая $A_{ij} = A_i \cup A_j$), где $i = 1{,}2;\ j = 2, 3;\ i \neq j, A_{123} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$):

$$\begin{aligned}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= |A_2 \cap (A_2 \cap A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cup (A_1 \cap A_3)| = \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13}|\end{aligned}$$

Учитывая, что $A_{12} \cap A_{13} = A_{123}$ окончательно получаем

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + |A_{123}|.$$

Полученные выше формулы являются частными случаями общей формулы влючений и сключений для n конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Домашнее задание

Часть I

1. Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое – туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

2. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников читал книги a, b и c. Результаты опроса оказались таковы: книгу a читали 25 учащихся, книгу b – 22, книгу c – также 22. Книги a или b читали 33 ученика, a или c – 32, b или c – 31. Все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только под одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих книг?