Измерительно-вычислительная система для оценки вертикального профиля двуокиси азота в атмосфере

18.02.23

Содержание

1 Введение

in process

2 Основная часть

in process

2.1 DOAS

in process

2.2 Обратные задачи

Рассмотрим неизвестный сигнал $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ и предположим, что последний проверяется каким-либо сенсорным устройством, что приводит к вектору данных $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_L]$ из L измерения. Восстановление f из вектора данных $\mathbf{y}$ называется обратной задачей.

Следующие допущения являются стандартными:

- Чтобы учесть неточности датчиков предполагается, что вектор данных $\mathbf{u}$ это результат случайного вектора $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_L] = [\langle f, \phi_1 \rangle, \dots, \langle f, \phi_L \rangle]$, колеблющийся в соответствии с некоторым распределением шума. Записи $\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \widetilde{\mathbf{y}}$ называются идеальными измерениями(измерения, которые были бы получены в отсутствие шума).

- Измерения предполагаются несмещенными и линейными, т.е. $\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \Phi^* f$, для некоторых функционалов выборки $\{\phi_1, \dots, \phi_L\} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ моделирующих систему сбора данных.

2.3 Некорректность обратных задач

Для решения обратной задачи можно аппроксимировать среднее $\mathbb{E}[Y]$ по его одновыборочной эмпирической оценке $\mathbf{y}$ и решить линейную задачу:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\alpha \tag{1}$$

К сожалению, такие задачи в целом некорректны:

- **Решений может не быть**. Если $\mathbf{G}$ не сюръективен, $\mathcal{R}(\mathbf{G}) \subseteq \mathbb{R}^L$. Следовательно, зашумленный вектор данных $\mathbf{y}$ не гарантируется принадлежность к $\mathcal{R}(\mathbb{G})$.

- **Может существовать более одного решения**. Если $L < N$ действительно (или, в более общем смысле, если $\mathbf{G}$ не инъективен), $\mathcal{N}(\mathbf{G}) \neq \{\mathbf{0}\}$. Следовательно, если α^* является решением (1), тогда $\alpha^* + \beta$ также является решением $\forall \beta \in \mathcal{N}(\mathbf{G})$:

$$\mathbf{G}(\alpha^* + \beta) = \mathbf{G}\alpha^* + \mathbf{G}\beta = \mathbf{G}\alpha^* = \mathbf{y}$$

- **Решения могут быть численно неустойчивыми**. Если $\mathbf{G}$ например, сюръективно, то $\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}$ является правой инверсией $\mathbf{G}$, а также $\alpha^*(\mathbf{y}) = \mathbf{G}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}$ является решением (1). У нас есть тогда

$$||\alpha^*(\mathbf{y})|| \le ||\mathbf{G}||_2||(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}||_2||\mathbf{y}||_2 = \underbrace{\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})}}{\lambda_{\min}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})}}_{\text{может быть очень большим}} ||\mathbf{y}||_2, \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^L.$$

3 Постановка задачи

В экспериментальных исследованиях результатом измерения является конечный набор значений $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, где ξ_i – наклонное содержание NO_2 для зинитного угла направления визирования z_i. По набору этих значений требуется оценить значения вертикального распределения NO_2 $n(h)$ в заданном наборе точек области определения.

В задаче восстановления NO_2 результат измерения имеет вид:

$$\xi_i = \int_0^H m(z_i, h)n(h)dh + \nu_i = \sum_{j=1}^{M} m(z_i, h_j)n(h_j)\triangle h + \nu_i = (a_i, n) + \nu_i \tag{2}$$

где a_i – послойная воздушная масса, которая рассчитывается из модели переноса излучения. Она связывает наклонное содержание NO_2 $\boldsymbol{\xi}$ с вертикальным распределением концентраций $n(h)$.

Схему измерений можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\xi} = A\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\nu} \tag{3}$$

На основании измерения вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ требуется оценить значение вектора $Un \in \mathbb{R}^N$, где $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ – оператор, которому сопоставляется матрица с учётом априорной информации о значениях координат вектора $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_M)$.

1) Координаты вектора $\boldsymbol{n}$ неотрицательны: $n_i > 0, i = 1, \ldots, M$.

2) Восстановленный профиль $\boldsymbol{n}$ является унимодальным:

$$\begin{cases} n_i \le n_{i+1}, & i \le k \\ n_{i+1} \le n_i, & i \ge k \end{cases}, \qquad 1 \le k \le M, \qquad i = 1, \ldots, M-1. \tag{4}$$

4 Предложенный метод

Решение будем искать как решение задачи на минимакс, тогда:

$$\min_{\boldsymbol{n}} \max_{i=1,\ldots,M} |\xi_i - (a_i, \boldsymbol{f})| \tag{5}$$

С учетом априорной информации:

$$\min_{\boldsymbol{f},k} \max_{i=1,\ldots,M} |\xi_i - (a_i, \boldsymbol{f})| \tag{6}$$

Данную задачу можно представить как задачу линейного программирования:

$$(c, d) \sim \min$$

$$c = (1, 0, \ldots, 0), \qquad d = (z, n_1, \ldots, n_M), \qquad 1 \leq k \leq M$$

$$\begin{cases} n_1 - n_2 \leq 0 \\ n_2 - n_3 \leq 0 \\ \qquad \ldots \\ n_{k-1} - n_k \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_N - n_{N-1} \leq 0 \\ n_{N-1} - n_{N-2} \leq 0 \\ \qquad \ldots \\ n_{k+1} - n_k \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -n_1 \leq 0 \\ -n_2 \leq 0 \\ \quad \ldots \\ -n_N \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 \geq \left| \sum_{j=1}^N a_{1j} f_j - \xi_1 \right| \\ z_2 \geq \left| \sum_{j=1}^N a_{2j} f_j - \xi_2 \right| \\ \qquad \ldots \\ z_n \geq \left| \sum_{j=1}^N a_{nj} f_j - \xi_n \right| \end{cases}$$

5 Эксперименты

in process

6 Заключение

in process

Список литературы

[1] Author 1 - "Name 1"

[2] Author 2 - "Name 2"

[3] Author 3 - "Name 3"