

# **Toplina**

## **(Zagreb, 5.2014.)**

Mladen Pavičić

mpavicic@humboldt-club.hr ; Web: <http://www.humboldt-club.hr/pavicic>

Gradjevinski fakultet u Zagrebu

# Totalni diferencijali $U, S, H, a$

Unutarnja energija, entropija, entalpija i Helmholtzova funkcija (str. 3) zatvorenog  $pVT$  sistema su funkcije od  $T$  i  $V$  (jer je  $p = p(T, V)$ ). Dakle, za  $Z = Z(x, y)$ ,  $Z = U, S, H, a$  je:

$$dZ = \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)_T dV \quad (9)$$

# Totalni diferencijali $U, S, H, a$

Unutarnja energija, entropija, entalpija i Helmholtzova funkcija (str. 3) zatvorenog  $pVT$  sistema su funkcije od  $T$  i  $V$  (jer je  $p = p(T, V)$ ). Dakle, za  $Z = Z(x, y)$ ,  $Z = U, S, H, a$  je:

$$dZ = \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)_T dV \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V \right)_T = \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)_T \right)_V \quad (10)$$

jer su  $U, S, H, a$  i njihove derivacije neprekidne.

# Helmholtzova funkcija

Helmholtzova funkcija se definira kao:  $a = U - TS$ . Za reverzibelne procese, prema 1. zakonu termodinamike (1) i  $\delta W = pdV$  je:

$$da = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV$$

# Helmholtzova funkcija

Helmholtzova funkcija se definira kao:  $a = U - TS$ . Za reverzibelne procese, prema 1. zakonu termodinamike (1) i  $\delta W = pdV$  je:

$$da = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV$$

Prema jednadžbi (9) je  $\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_V = -S$  i  $\left(\frac{\partial a}{\partial V}\right)_T = -p$

# Helmholtzova funkcija

Helmholtzova funkcija se definira kao:  $a = U - TS$ . Za reverzibelne procese, prema 1. zakonu termodinamike (1) i  $\delta W = pdV$  je:

$$da = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV$$

Prema jednadžbi (9) je  $\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_V = -S$  i  $\left(\frac{\partial a}{\partial V}\right)_T = -p$

Iz jednadžbe (10) slijedi:  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$  (11)

# Helmholtzova funkcija

Helmholtzova funkcija se definira kao:  $a = U - TS$ . Za reverzibelne procese, prema 1. zakonu termodinamike (1) i  $\delta W = pdV$  je:

$$da = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV$$

Prema jednadžbi (9) je  $\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_V = -S$  i  $\left(\frac{\partial a}{\partial V}\right)_T = -p$

Iz jednadžbe (10) slijedi:  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$  (11)

(To je jedna od četiri Maxwellove termodinamičke jednadžbe.)

# Svojstva tvari

Materijali i tvari se sastoje od molekula, no, većina njihovih toplinskih svojstava se mogu izvesti iz dva zakona termodinamike

# Svojstva tvari

Materijali i tvari se sastoje od molekula, no, većina njihovih toplinskih svojstava se mogu izvesti iz dva zakona termodinamike

Kvantna mehanika ili atomistika se za dobivanje većine svojstava materijala ne koristi jer su odgovarajući kvantni algoritmi prezahtjevni čak i za najveće kompjuterske grozdove (GRID).

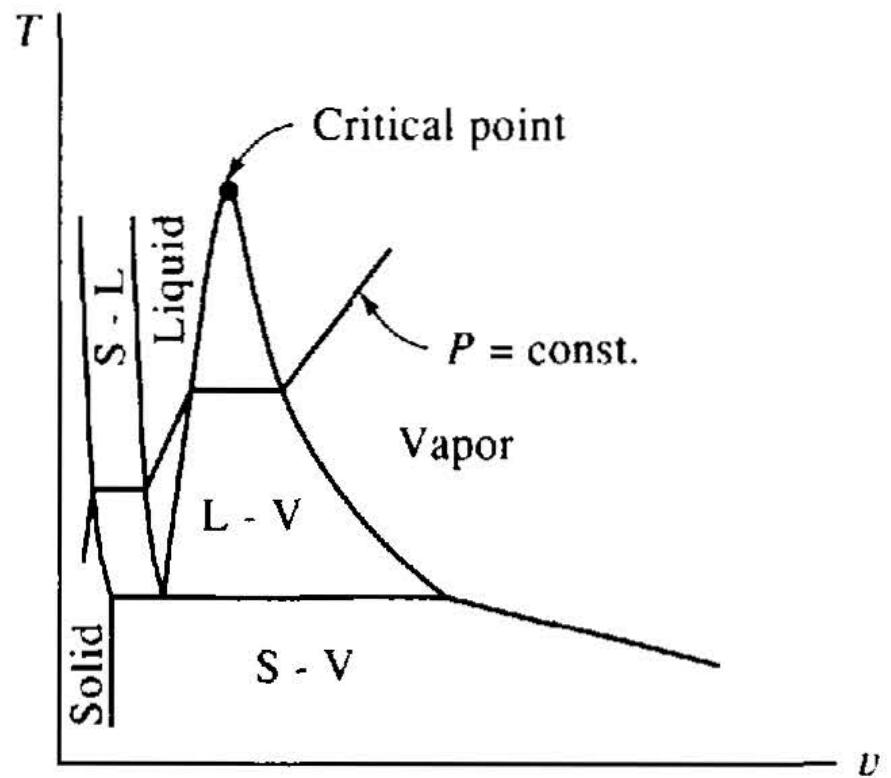
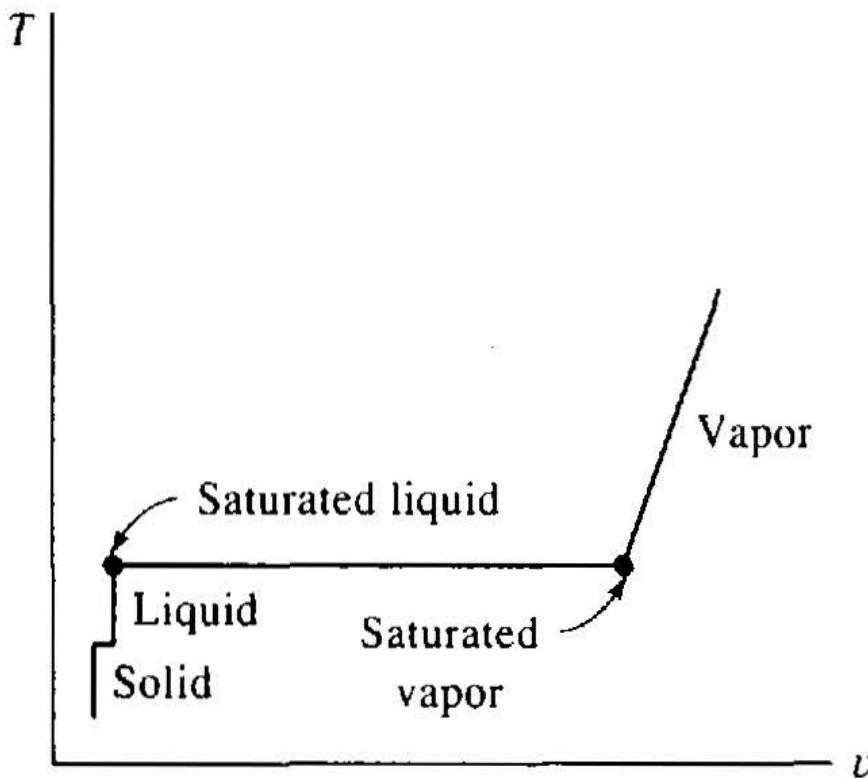
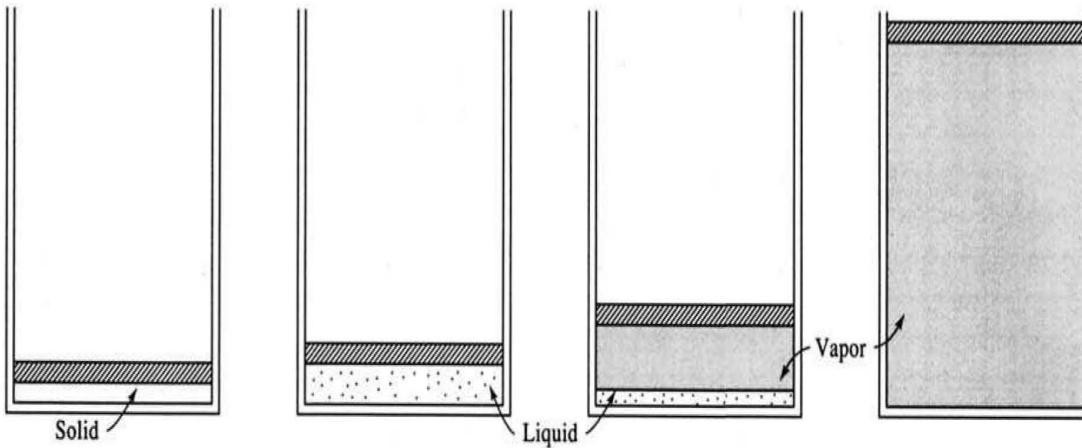
# Svojstva tvari

Materijali i tvari se sastoje od molekula, no, većina njihovih toplinskih svojstava se mogu izvesti iz dva zakona termodinamike

Kvantna mehanika ili atomistika se za dobivanje većine svojstava materijala ne koristi jer su odgovarajući kvantni algoritmi prezahtjevni čak i za najveće kompjuterske grozdove (GRID).

Zbog toga ćemo sva svojstva izvesti iz naša dva osnovna zakona termodinamike da bismo mogli bolje razumijeti i uspješnije koristiti empirijske formule i kompjuterske simulacije.

# Agregatna stanja/faze



# Terminologija

*Intenzivno svojstvo* je ono koje ne ovisi o masi sistema; npr. temperatura, tlak, gustoća, brzina. Kad kombiniramo dva sistema, intenzivna svojstva se ne sumiraju.

# Terminologija

*Intenzivno svojstvo* je ono koje ne ovisi o masi sistema; npr. temperatura, tlak, gustoća, brzina. Kad kombiniramo dva sistema, intenzivna svojstva se ne sumiraju.

*Ekstenzivno svojstvo* je ono koje ovisi o masi sistema; npr. volumen, količina gibanja, kinetička energija. Kad kombiniramo dva sistema, extenzivna svojstva se sumiraju.

# Terminologija

*Intenzivno svojstvo* je ono koje ne ovisi o masi sistema; npr. temperatura, tlak, gustoća, brzina. Kad kombiniramo dva sistema, intenzivna svojstva se ne sumiraju.

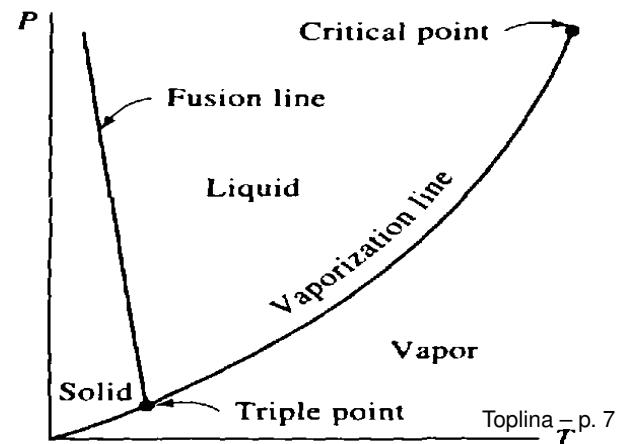
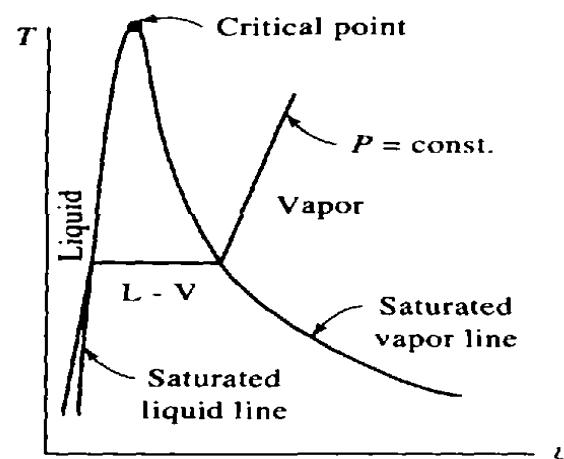
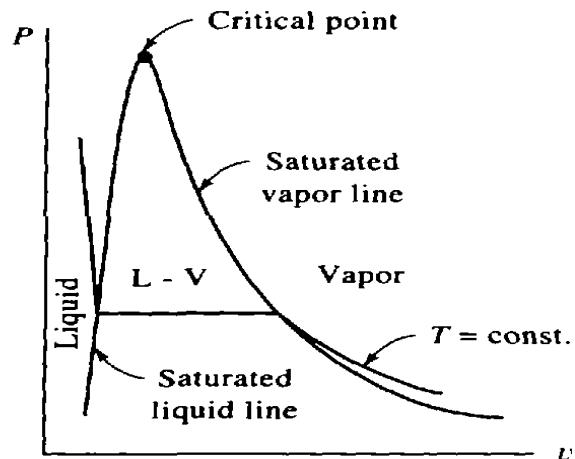
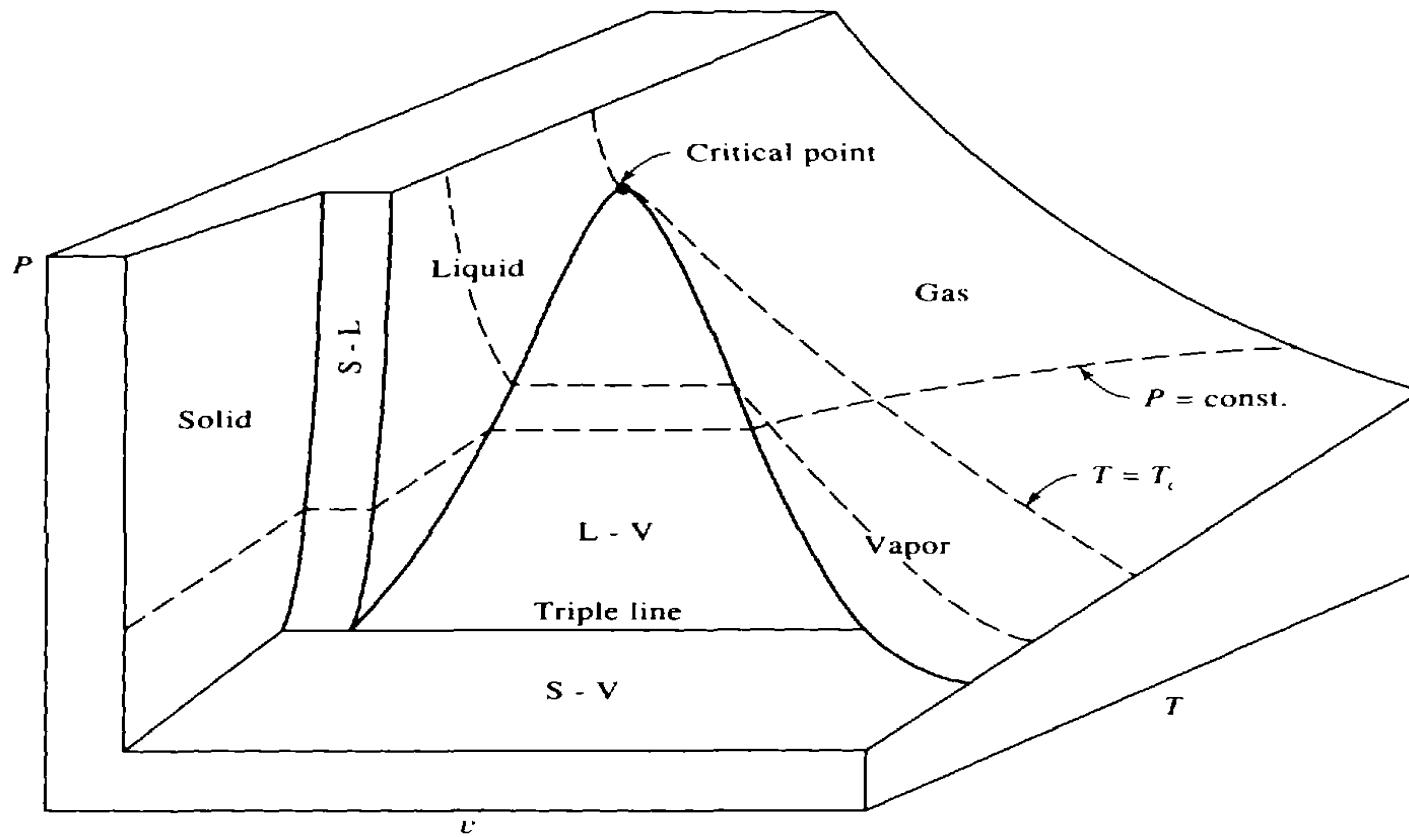
*Ekstenzivno svojstvo* je ono koje ovisi o masi sistema; npr. volumen, količina gibanja, kinetička energija. Kad kombiniramo dva sistema, extenzivna svojstva se sumiraju.

*Specifična svojstvo* dobivamo kad ekstenzivna svojstvo podijelimo s masom. Npr. specifični volumen je

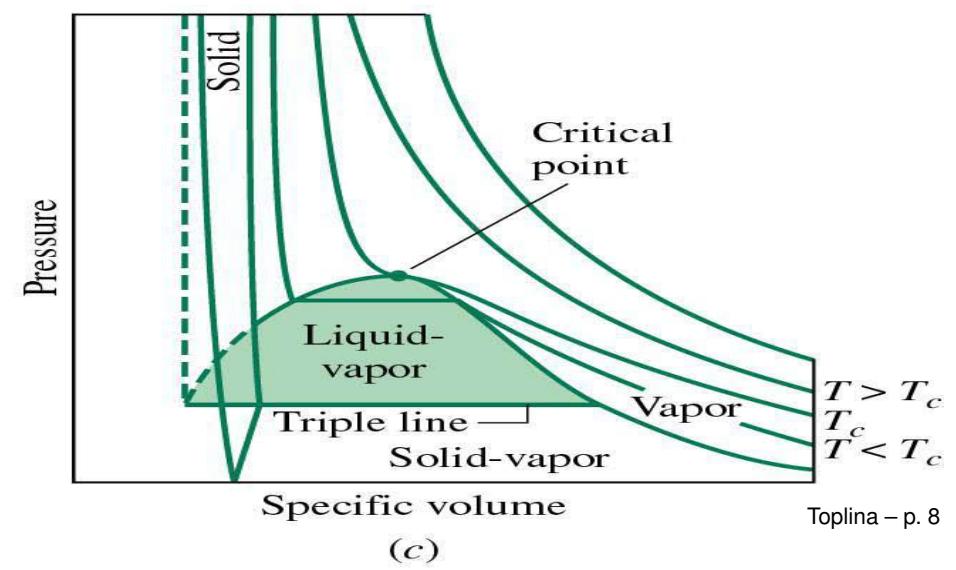
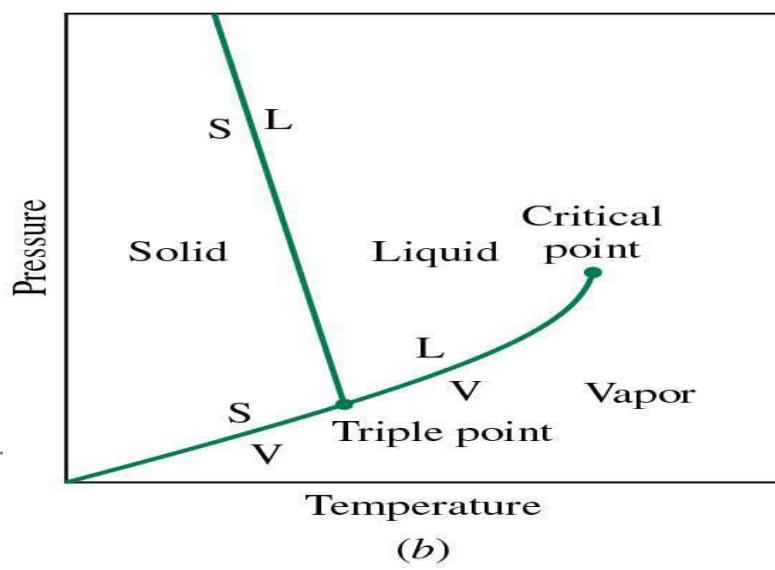
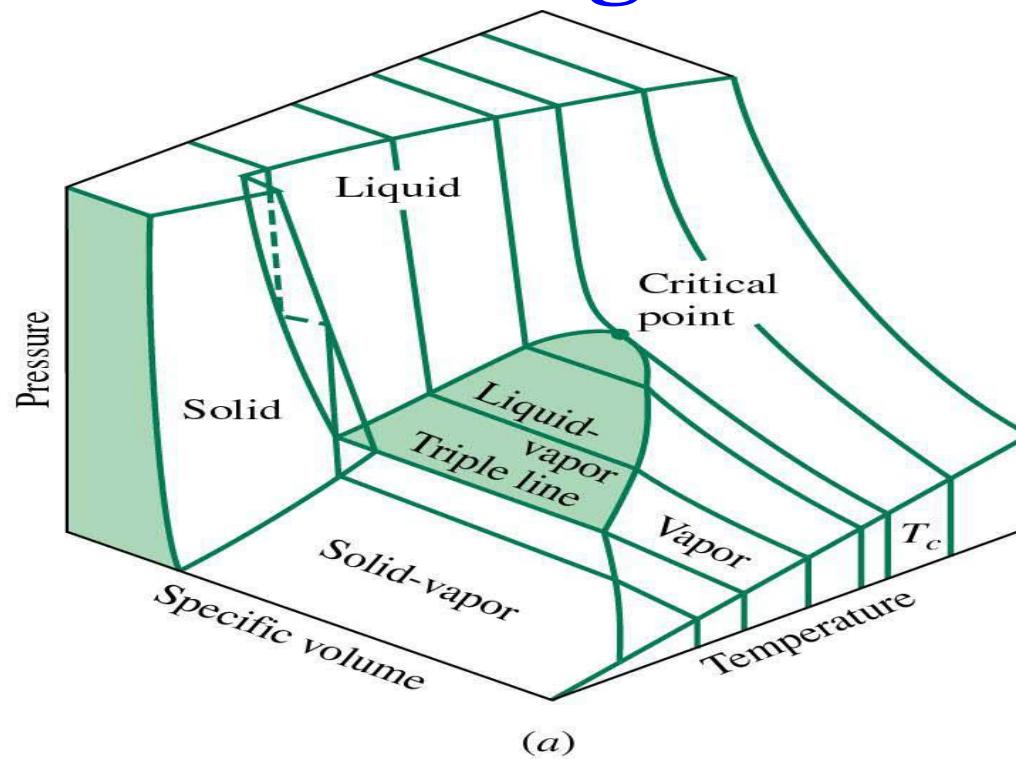
$$v = \frac{V}{m}.$$

Često se označavaju malim slovima.

# PvT-diagram



# PvT-diagram



# Smjese plinova

U smjesi od  $N$  čistih komponenti ukupna masa i broj molova je:

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i,$$

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_N = \sum_{i=1}^N n_i$$

# Smjese plinova

U smjesi od  $N$  čistih komponenti ukupna masa i broj molova je:

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i,$$

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_N = \sum_{i=1}^N n_i$$

Podsjetimo se: 1 mol =  $6.02214179 \times 10^{23}$  molekula.

# Smjese plinova

U smjesi od  $N$  čistih komponenti ukupna masa i broj molova je:

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i,$$

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_N = \sum_{i=1}^N n_i$$

Podsjetimo se: 1 mol =  $6.02214179 \times 10^{23}$  molekula.

Maseni i molarni udjeli komponente  $i$  su:

$$c_i \equiv \frac{m_i}{m} \quad y_i \equiv \frac{n_i}{n}$$

# Molekularna masa

Molekularna masa  $i$ -te komponente je

$$M_i \equiv \frac{m_i}{n_i}$$

# Molekularna masa

Molekularna masa  $i$ -te komponente je

$$M_i \equiv \frac{m_i}{n_i}$$

Masene i molarne udjele povezujemo pomoću nje:

$$c_i = \frac{n_i M_i}{m} = \frac{y_i M_i}{\sum_{j=1}^N y_j M_j}$$

# Molekularna masa

Molekularna masa  $i$ -te komponente je

$$M_i \equiv \frac{m_i}{n_i}$$

Masene i molarne udjele povezujemo pomoću nje:

$$c_i = \frac{n_i M_i}{m} = \frac{y_i M_i}{\sum_{j=1}^N y_j M_j}$$

$$y_i = \frac{\frac{m_i}{M_i}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M_j}} = \frac{\frac{c_i}{M_i}}{\sum_{j=1}^N \frac{c_j}{M_j}}$$

# Molekularna masa

Molekularna masa  $i$ -te komponente je

$$M_i \equiv \frac{m_i}{n_i}$$

Masene i molarne udjele povezujemo pomoću nje:

$$c_i = \frac{n_i M_i}{m} = \frac{y_i M_i}{\sum_{j=1}^N y_j M_j}$$

$$y_i = \frac{\frac{m_i}{M_i}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M_j}} = \frac{\frac{c_i}{M_i}}{\sum_{j=1}^N \frac{c_j}{M_j}}$$

Srednja molekularna masa je

$$M \equiv \frac{m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{n} = \sum_{i=1}^N \frac{n_i M_i}{n} = \sum_{i=1}^N y_i M_i$$

# Idealne i ne-idealne smjese

Ekstenzivna svojstva smjese  $N$  komponenata ovise o intenzivnim svojstvima, npr.  $T$  i  $P$  i o broju molova komponenti. Npr.,  $U = U(T, P, n_1, \dots, n_N)$

# Idealne i ne-idealne smjese

Ekstenzivna svojstva smjese  $N$  komponenata ovise o intenzivnim svojstvima, npr.  $T$  i  $P$  i o broju molova komponenti. Npr.,  $U = U(T, P, n_1, \dots, n_N)$

*Parcijalna molarne svojstva* su npr.:

$$\bar{u}_i \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}, \quad \bar{v}_i \equiv \left. \frac{\partial V}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}$$

# Idealne i ne-idealne smjese

Ekstenzivna svojstva smjese  $N$  komponenata ovise o intenzivnim svojstvima, npr.  $T$  i  $P$  i o broju molova komponenti. Npr.,  $U = U(T, P, n_1, \dots, n_N)$

*Parcijalna molarne svojstva* su npr.:

$$\bar{u}_i \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}, \quad \bar{v}_i \equiv \left. \frac{\partial V}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}$$

Za ne-idealne smjese vrijedi:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(T, P, n_1, \dots, n_N), \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(T, P, n_1, \dots, n_N)$$

# Idealne i ne-idealne smjese

Ekstenzivna svojstva smjese  $N$  komponenata ovise o intenzivnim svojstvima, npr.  $T$  i  $P$  i o broju molova komponenti. Npr.,  $U = U(T, P, n_1, \dots, n_N)$

*Parcijalna molarne svojstva* su npr.:

$$\bar{u}_i \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}, \quad \bar{v}_i \equiv \left. \frac{\partial V}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}$$

Za ne-idealne smjese vrijedi:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(T, P, n_1, \dots, n_N), \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(T, P, n_1, \dots, n_N)$$

dok za idealne smjese idealnih plinova dobivamo:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(T, P), \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(T, P)$$

# Idealne i ne-idealne smjese

Ekstenzivna svojstva smjese  $N$  komponenata ovise o intenzivnim svojstvima, npr.  $T$  i  $P$  i o broju molova komponenti. Npr.,  $U = U(T, P, n_1, \dots, n_N)$

*Parcijalna molarna svojstva* su npr.:

$$\bar{u}_i \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}, \quad \bar{v}_i \equiv \left. \frac{\partial V}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_j, i \neq j}$$

Za ne-idealne smjese vrijedi:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(T, P, n_1, \dots, n_N), \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(T, P, n_1, \dots, n_N)$$

dok za idealne smjese idealnih plinova dobivamo:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(T, P), \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(T, P)$$

Mađutim za entropiju i u idealnoj smjesi plinova imamo:

$$\bar{s}_i = \bar{s}_i(T, P, n_1, \dots, n_N).$$

# Rad i toplina

Rad također nije funkcija stanja;  $w \neq w(P, v)$

# Rad i toplina

Rad također nije funkcija stanja:  $w \neq w(P, v)$

Pretpostavimo suprotno:

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P dV + \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v dP$$

# Rad i toplina

Rad također nije funkcija stanja:  $w \neq w(P, v)$

Pretpostavimo suprotno:

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P dV + \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v dP$$

Iz  $\delta w = Pdv$  slijedi

$$\frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P = P, \quad \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v = 0$$

# Rad i toplina

Rad također nije funkcija stanja;  $w \neq w(P, v)$

Pretpostavimo suprotno:

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P dV + \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v dP$$

Iz  $\delta w = Pdv$  slijedi

$$\frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P = P, \quad \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v = 0$$

Prva jednažba daje  $w = Pv + f(P)$ . Derivacija ove i druga jednažba daju

$$\frac{df(P)}{dP} = -v.$$

# Rad i toplina

Rad također nije funkcija stanja:  $w \neq w(P, v)$

Pretpostavimo suprotno:

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P dV + \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v dP$$

Iz  $\delta w = Pdv$  slijedi

$$\frac{\partial w}{\partial v} \Big|_P = P, \quad \frac{\partial w}{\partial P} \Big|_v = 0$$

Prva jednačba daje  $w = Pv + f(P)$ . Derivacija ove i druga jednačba daju

$$\frac{df(P)}{dP} = -v.$$

No, funkcija koja ovisi samo o  $P$  ne može ovisiti o  $v$ . Dakle, pretpostavka vodi u kontradikciju i dobivamo  $w \neq w(P, v)$ .

# Gibbsova funkcija

Promatramo  $m$  kemijskih komponenti s  $n_1, n_2, \dots, n_m$  molova. ( $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ )

# Gibbsova funkcija

Promatramo  $m$  kemijskih komponenti s  $n_1, n_2, \dots, n_m$  molova. ( $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ )

Iz 1. i 2. zakona termodinamike i  $\delta w = Pdv$  za jednu komponentu slijedi:  $du = Tds - Pdv$

# Gibbsova funkcija

Promatramo  $m$  kemijskih komponenti s  $n_1, n_2, \dots, n_m$  molova. ( $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ )

Iz 1. i 2. zakona termodinamike i  $\delta w = Pdv$  za jednu komponentu slijedi:  $du = Tds - Pdv$

No, entropija ovisi i o molovima komponenti i zato prelazimo na definicije koje uključuju molove za sve varijable i definiramo *Gibbsovu funkciju* :

$$G \equiv U + PV - TS$$

# Gibbsova funkcija

Promatramo  $m$  kemijskih komponenti s  $n_1, n_2, \dots, n_m$  molova. ( $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ )

Iz 1. i 2. zakona termodinamike i  $\delta w = Pdv$  za jednu komponentu slijedi:  $du = Tds - Pdv$

No, entropija ovisi i o molovima komponenti i zato prelazimo na definicije koje uključuju molove za sve varijable i definiramo *Gibbsovu funkciju* :

$$G \equiv U + PV - TS$$

Za opću smjesu komponenti i unutrašnja energija ovisi o molovima komponenti pa dobivamo:

$$dG = TdS - PdV + \sum_{i=1}^N \bar{\mu}_i dn_i, \quad \bar{\mu}_i = \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{S, V, n_j \neq i}$$

gdje  $\bar{\mu}_i$  nazivamo *kemijskim potencijalom*.

# Ravnoteža sistema

Uzmimo najopćenitiji heterogeni termodinamički sistem (tvar, materijal, spoj). Dakle, više različitih kemijskih spojeva u raznim agregatnim stanjima, preciznije: *fazama* (jedno agregatno stanje može imati nekoliko faza). Dakle, kemijski potencijali će se razlikovati za različite faze i to ćemo označiti s dva indeksa.

# Ravnoteža sistema

Uzmimo najopćenitiji heterogeni termodinamički sistem (tvar, materijal, spoj). Dakle, više različitih kemijskih spojeva u raznim agregatnim stanjima, preciznije: *fazama* (jedno agregatno stanje može imati nekoliko faza). Dakle, kemijski potencijali će se razlikovati za razlike faze i to ćemo označiti s dva indeksa.

Neka indeks  $_s$  znači sistem, a indeks  $_o$  okolinu. Okolina je reverzibilna, tako da imamo:

$$dS_o = -\frac{\delta Q}{T} \quad \Rightarrow \quad dS_s + dS_o \geq 0 \quad \Rightarrow \quad dS_s \geq \frac{\delta Q}{T}$$

# Ravnoteža sistema

Uzmimo najopćenitiji heterogeni termodinamički sistem (tvar, materijal, spoj). Dakle, više različitih kemijskih spojeva u raznim agregatnim stanjima, preciznije: *fazama* (jedno agregatno stanje može imati nekoliko faza). Dakle, kemijski potencijali će se razlikovati za razlike faze i to ćemo označiti s dva indeksa.

Neka indeks  $_s$  znači sistem, a indeks  $_o$  okolinu. Okolina je reverzibilna, tako da imamo:

$$dS_o = -\frac{\delta Q}{T} \quad \Rightarrow \quad dS_s + dS_o \geq 0 \quad \Rightarrow \quad dS_s \geq \frac{\delta Q}{T}$$

Kad sistem dođe u ravnotežu:  $dS_s = \frac{\delta Q}{T}$

# Ravnoteža sistema

$$(1) \quad \Rightarrow \quad dU_s - TdS_s + PdV_s = 0$$

# Ravnoteža sistema

$$(1) \quad \Rightarrow \quad dU_s - TdS_s + PdV_s = 0$$

$$dG_s = dU_s + PdV_s + V_s dP - S_s dT - TdS_s = V_s dp - S_s dT$$

# Ravnoteža sistema

$$(1) \quad \Rightarrow \quad dU_s - TdS_s + PdV_s = 0$$

$$dG_s = dU_s + PdV_s + V_s dP - S_s dT - TdS_s = V_s dp - S_s dT$$

Za  $P = const$  i  $T = const$  je uvjet ravnoteže:  $(dG_s)_{T,p} = 0$

# Ravnoteža sistema

$$(1) \quad \Rightarrow \quad dU_s - TdS_s + PdV_s = 0$$

$$dG_s = dU_s + PdV_s + V_s dP - S_s dT - TdS_s = V_s dp - S_s dT$$

Za  $P = const$  i  $T = const$  je uvjet ravnoteže:  $(dG_s)_{T,p} = 0$

$$dG_s = \sum_{k=1}^{\pi} d(n_k G_k)_{T,p} = \sum_{k=1}^{\pi} \sum_{i=1}^N \mu_{k,i} dn_{k,i} = 0 \quad (*)$$

gdje je  $\pi$  broj faza.

# Primjer ravnoteže

Nadite uvjete ravnoteže zatvorenog sistema s dva spoja (1,2) i dvije faze ( $\alpha$ ,  $\beta$ ).

# Primjer ravnoteže

Nadite uvjete ravnoteže zatvorenog sistema s dva spoja (1,2) i dvije faze ( $\alpha, \beta$ ).

Iz slijedeće tri jednadžbe, od kojih prva slijedi iz jednadžbe (\*),

$$\mu_{\alpha,1}dn_{\alpha,1} + \mu_{\alpha,2}dn_{\alpha,2} + \mu_{\beta,1}dn_{\beta,1} + \mu_{\beta,2}dn_{\beta,2} = 0,$$

$$n_{\alpha,1} + n_{\beta,1} = const_1, \quad n_{\alpha,2} + n_{\beta,2} = const_2,$$

dobivamo:  $(\mu_{\alpha,1} - \mu_{\beta,1})dn_{\alpha,1} + (\mu_{\alpha,2} - \mu_{\beta,2})dn_{\alpha,2} = 0,$

# Primjer ravnoteže

Nadite uvjete ravnoteže zatvorenog sistema s dva spoja (1,2) i dvije faze ( $\alpha, \beta$ ).

Iz slijedeće tri jednadžbe, od kojih prva slijedi iz jednadžbe (\*),

$$\mu_{\alpha,1}dn_{\alpha,1} + \mu_{\alpha,2}dn_{\alpha,2} + \mu_{\beta,1}dn_{\beta,1} + \mu_{\beta,2}dn_{\beta,2} = 0,$$

$$n_{\alpha,1} + n_{\beta,1} = const_1, \quad n_{\alpha,2} + n_{\beta,2} = const_2,$$

dobivamo:  $(\mu_{\alpha,1} - \mu_{\beta,1})dn_{\alpha,1} + (\mu_{\alpha,2} - \mu_{\beta,2})dn_{\alpha,2} = 0$ ,

odakle slijede uvjeti ravnoteže:

$$\mu_{\alpha,1} = \mu_{\beta,1}, \quad \mu_{\alpha,2} = \mu_{\beta,2}$$

# Opća ravnoteža

Općenito vrijedi:

$$\mu_{\alpha,i} = \mu_{\beta,i} = \dots = \mu_{\pi,i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

# Opća ravnoteža

Općenito vrijedi:

$$\mu_{\alpha,i} = \mu_{\beta,i} = \dots = \mu_{\pi,i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

Dakle,  $\pi - 1$  jednadžbi za svaku komponentu, tj. ukupno  $m(\pi - 1)$  jednadžbi.

# Opća ravnoteža

Općenito vrijedi:

$$\mu_{\alpha,i} = \mu_{\beta,i} = \cdots = \mu_{\pi,i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

Dakle,  $\pi - 1$  jednadžbi za svaku komponentu, tj. ukupno  $m(\pi - 1)$  jednadžbi.

Zatim,  $\mu_i$  ovise o  $P$ ,  $T$  i o  $(m - 1)\pi$  faznih udjela. ( $m - 1$  jer je  $n_m = n - n_1 - \cdots - n_{m-1}$ .)

# Opća ravnoteža

Općenito vrijedi:

$$\mu_{\alpha,i} = \mu_{\beta,i} = \cdots = \mu_{\pi,i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

Dakle,  $\pi - 1$  jednadžbi za svaku komponentu, tj. ukupno  $m(\pi - 1)$  jednadžbi.

Zatim,  $\mu_i$  ovise o  $P$ ,  $T$  i o  $(m - 1)\pi$  faznih udjela. ( $m - 1$  jer je  $n_m = n - n_1 - \cdots - n_{m-1}$ .)

Slijedi da je  $2 + (m - 1)\pi$  varijabli u ravnoteži i da zadovoljavaju  $m(\pi - 1)$  ravnotežnih uvjeta.

# Gibbsovo pravilo faza

Dobivamo da je broj neovisnih termodinamičkih veličina svakog heterogenog spoja jednak

$$2 + (m - 1)\pi - m(\pi - 1) = 2 + m - \pi$$

# Gibbsovo pravilo faza

Dobivamo da je broj neovisnih termodinamičkih veličina svakog heterogenog spoja jednak

$$2 + (m - 1)\pi - m(\pi - 1) = 2 + m - \pi$$

To je Gibbsovo *pravilo faza*:

broj termodinamičkih stupnjeva slobode je

$$F = 2 - \pi + m$$

# Gibbsovi primjeri

$$F \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m + 2 \geq \pi$$

# Gibbsovi primjeri

$$F \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m + 2 \geq \pi$$

Pogledajmo nekoliko primjera za jedan spoj:  $m = 1$ .

# Gibbsovi primjeri

$$F \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m + 2 \geq \pi$$

Pogledajmo nekoliko primjera za jedan spoj:  $m = 1$ .

$$m = 1 \quad \& \quad m + 2 \geq \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_{\max} = 3$$

# Gibbsovi primjeri

$$F \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m + 2 \geq \pi$$

Pogledajmo nekoliko primjera za jedan spoj:  $m = 1$ .

$$m = 1 \quad \& \quad m + 2 \geq \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_{\max} = 3$$

Dakle, niti jedan spoj ne može istovremeno biti u više od 3 faze iako pojedini spojevi kao npr. sumpor i voda mogu imati i više od 6 krutih faza koje su potpuno različite po svojim svojstvima.

# Trojna linija i točka

Slijedeći primjer za jedan spoj:  $m = 1$  je:

# Trojna linija i točka

Slijedeći primjer za jedan spoj:  $m = 1$  je:

$$m = 1 \quad & \quad \pi = 3 \quad \Rightarrow \quad F = 0$$

# Trojna linija i točka

Slijedeći primjer za jedan spoj:  $m = 1$  je:

$$m = 1 \quad & \quad \pi = 3 \quad \Rightarrow \quad F = 0$$

Dakle, kad su prisutne sve tri faze, onda su za mogući volumen fiksirani i tlak  $p$  i temperatura  $T$ . To je tzv. *trojna linija u pVT dijagramu* (v. str. 23), odnosno *trojna točka u pT dijagramu* (v. str. 24).

# Trojna linija i točka

Slijedeći primjer za jedan spoj:  $m = 1$  je:

$$m = 1 \quad & \quad \pi = 3 \quad \Rightarrow \quad F = 0$$

Dakle, kad su prisutne sve tri faze, onda su za mogući volumen fiksirani i tlak  $p$  i temperatura  $T$ . To je tzv. *trojna linija u pVT dijagramu* (v. str. 23), odnosno *trojna točka u pT dijagramu* (v. str. 24).

Postoji samo jedan jedini element od svih poznatih elemenata i spojeva koji nema trojnu točku: helij

# Latentna toplina

Još jedan važan primjer:

# Latentna toplina

Još jedan važan primjer:

$$m = 1 \quad \& \quad \pi = 2 \quad \Rightarrow \quad F = 1$$

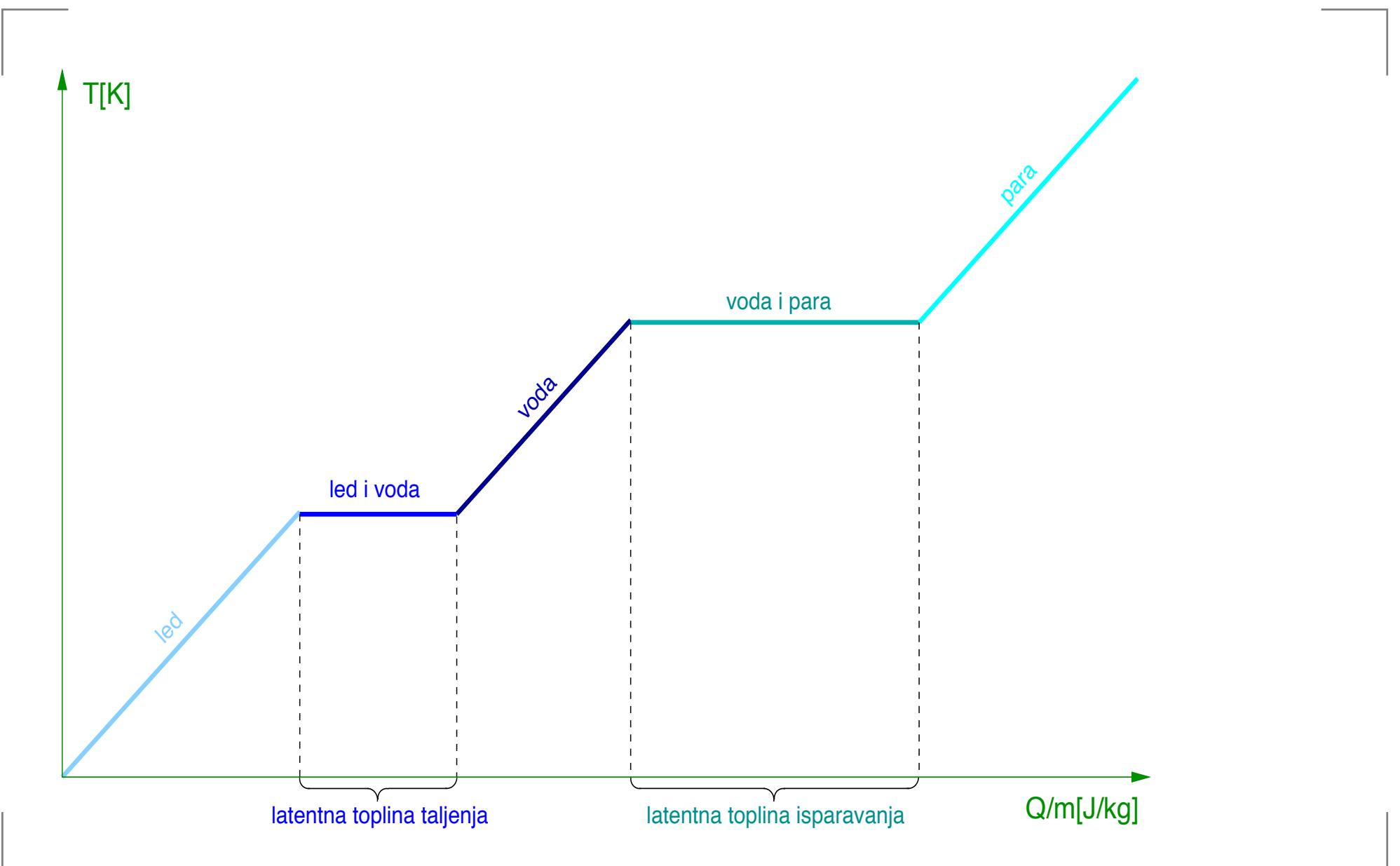
# Latentna toplina

Još jedan važan primjer:

$$m = 1 \quad \& \quad \pi = 2 \quad \Rightarrow \quad F = 1$$

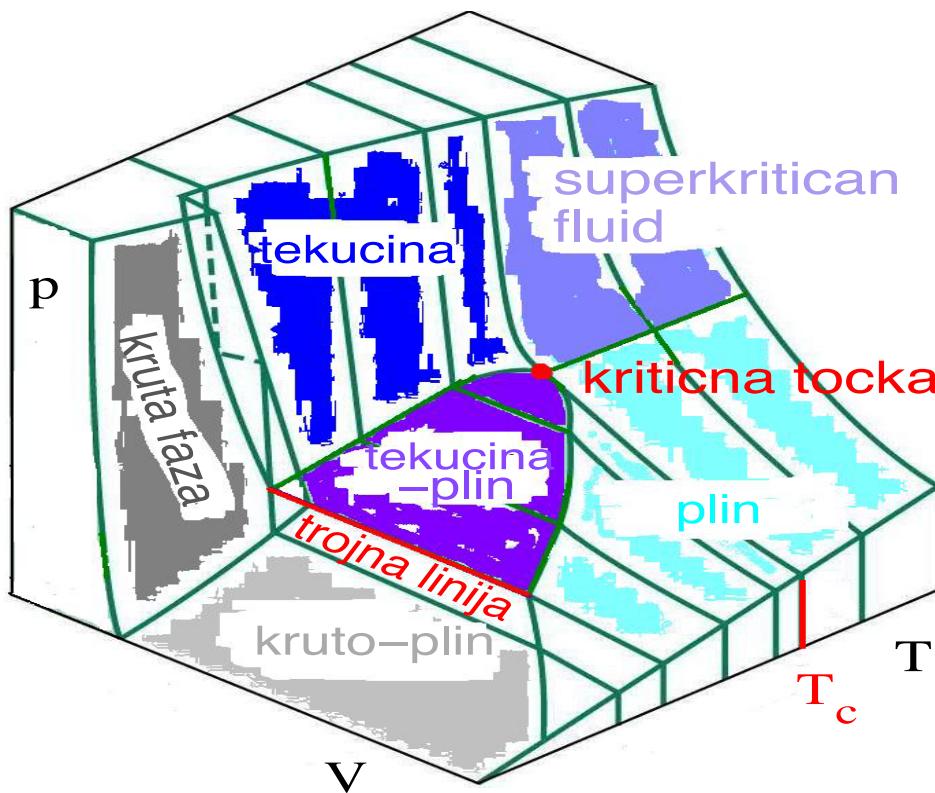
Dakle, kad su prisutne dvije faze, onda imamo samo jedan stupanj slobode: možemo, npr., odabrati proizvoljan tlak, ali time automatski određujemo temperaturu  $T$ . Ako se, npr., volumen kod isparavanja ili sublimacije ili taljenja mijenja tako da održava odabrani tlak, onda temperatura kod takvog konstantnog tlaka također mora ostati konstantna. Slijedi da tada dovođenje topline ne podiže temperaturu već samo mijenja masu jedne faze s obzirom na drugu—to je, tzv., *latentna toplina* — v. str. 22.

# T-Q dijagram za vodu



# pVT 3D diagrami

Odnos molarnog volumena prema tlaku i temperaturi za različite tvari prikazujemo 3D pVT dijagramima:

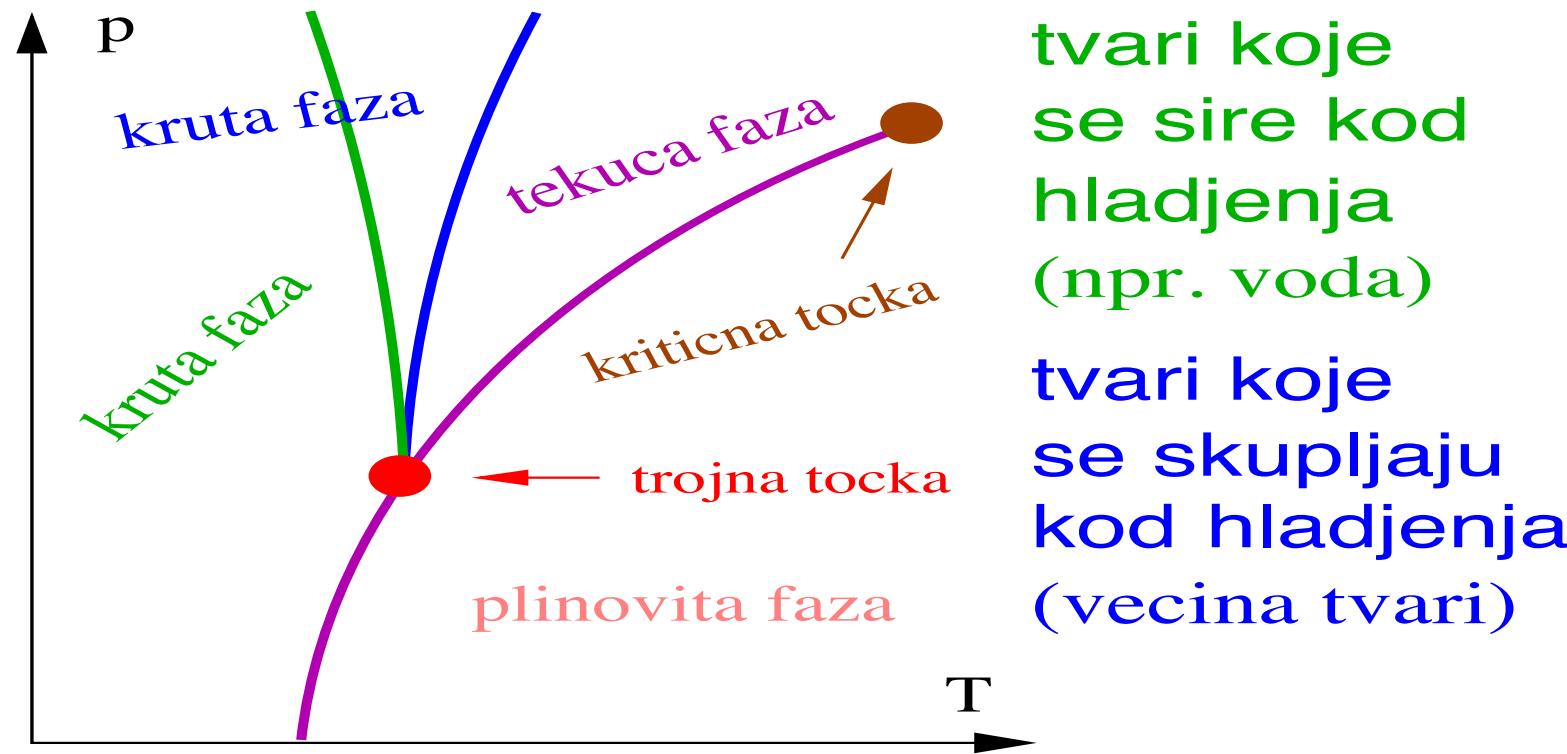


superkritičan fluid je onaj koji se nikakvim tlakom ne može ukapljiti

kritična točka je posljednja točka koegzistencije tekuće i plinovite faze na najvišoj temperaturi  $T_c$

# pT diagrami

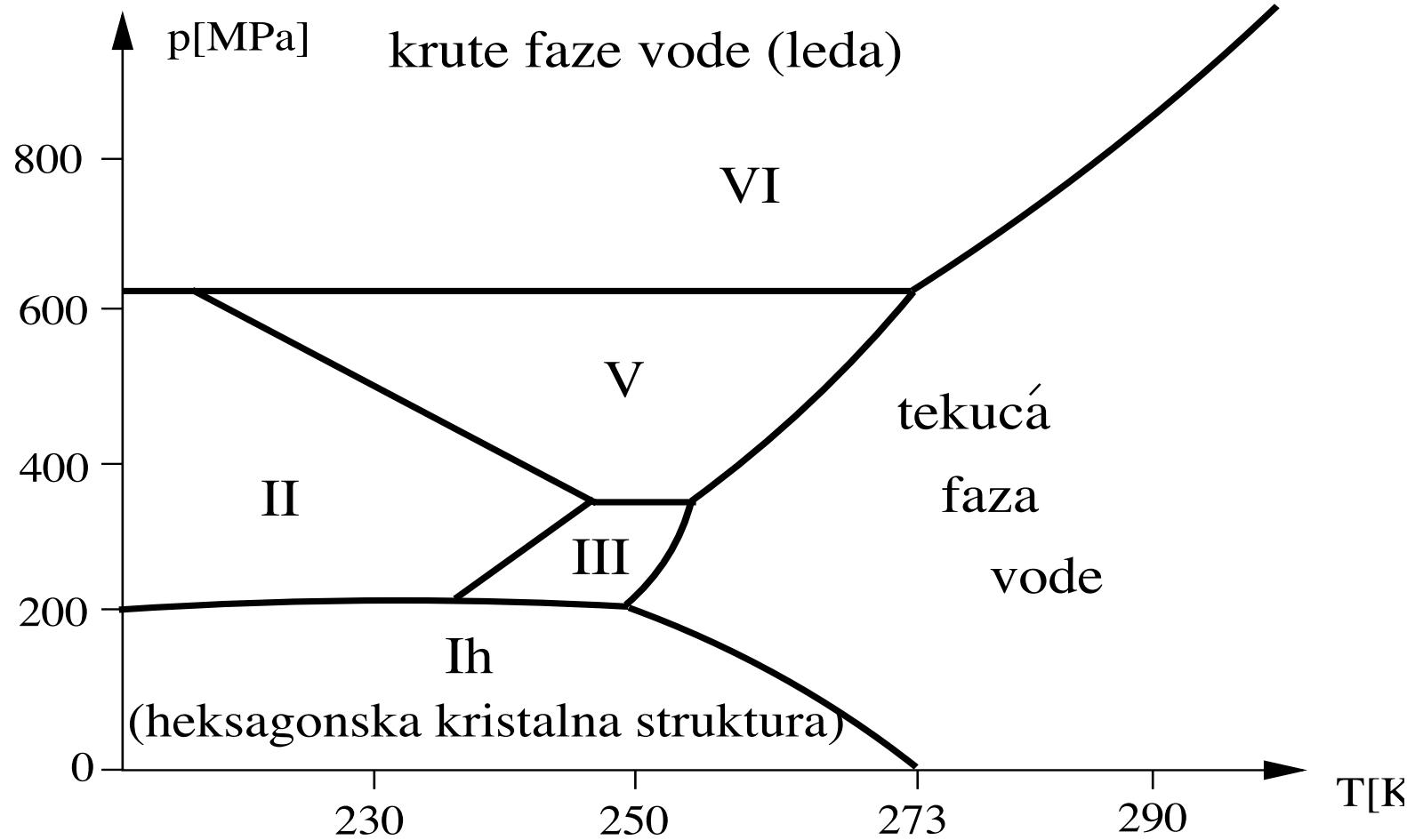
Pojedina svojstva tvari se bolje vide na pT diagramima



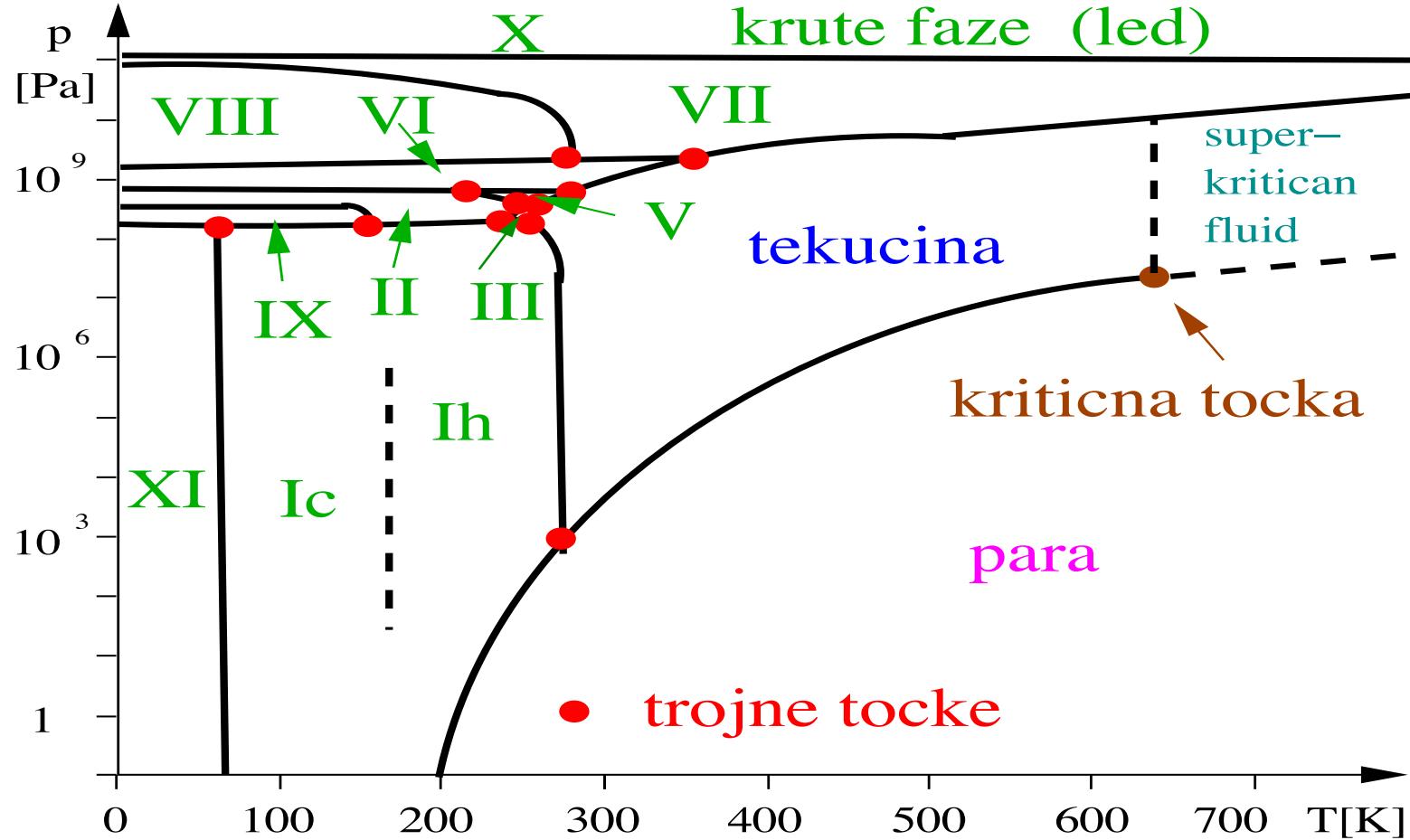
tvari koje  
se sire kod  
hladjenja  
(npr. voda)

tvari koje  
se skupljaju  
kod hladjenja  
(vecina tvari)

# pT diagram vode

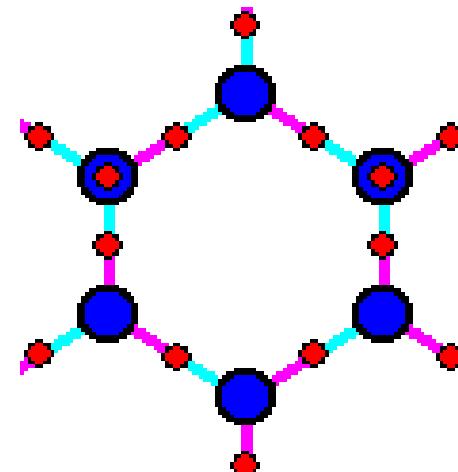
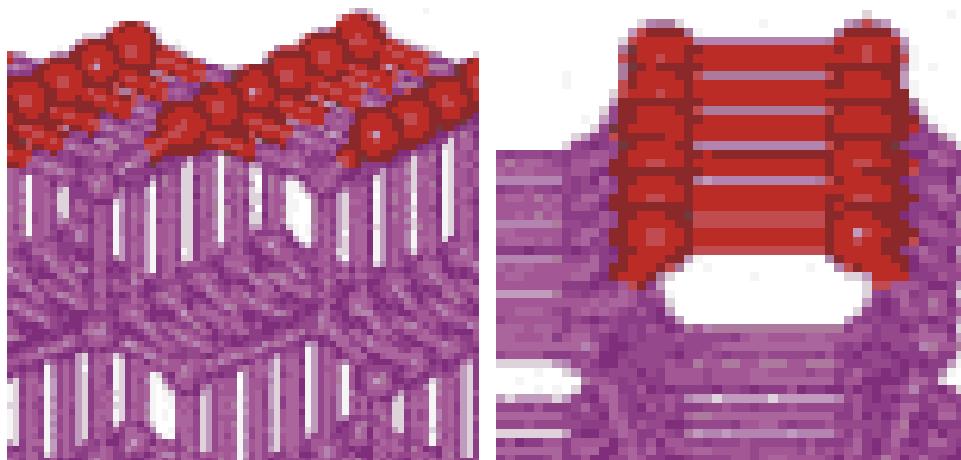


# Krute faze vode



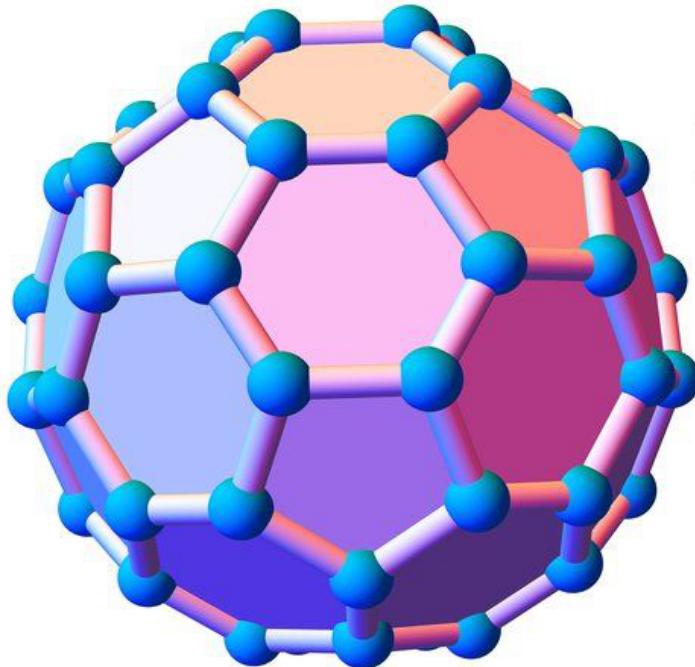
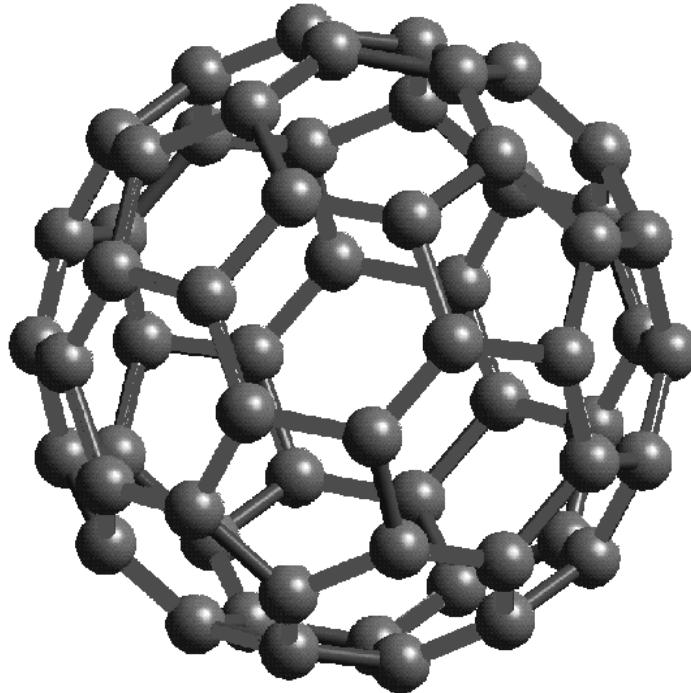
# Krute faze vode

Ih faza leda ima veći volumen i manju specifičnu gustoću od (tekuće faze) vode zbog svog heksagonalnog oblika (“rupa” u sredini) koji nastaje zahvaljujući tzv. vodikovoj vezi (jaka dipol-dipol interakcija između susjednih  $\text{H}_2\text{O}$  molekula—svijetloplave veze na trećoj slici).



# Krute faze ugljika (1)

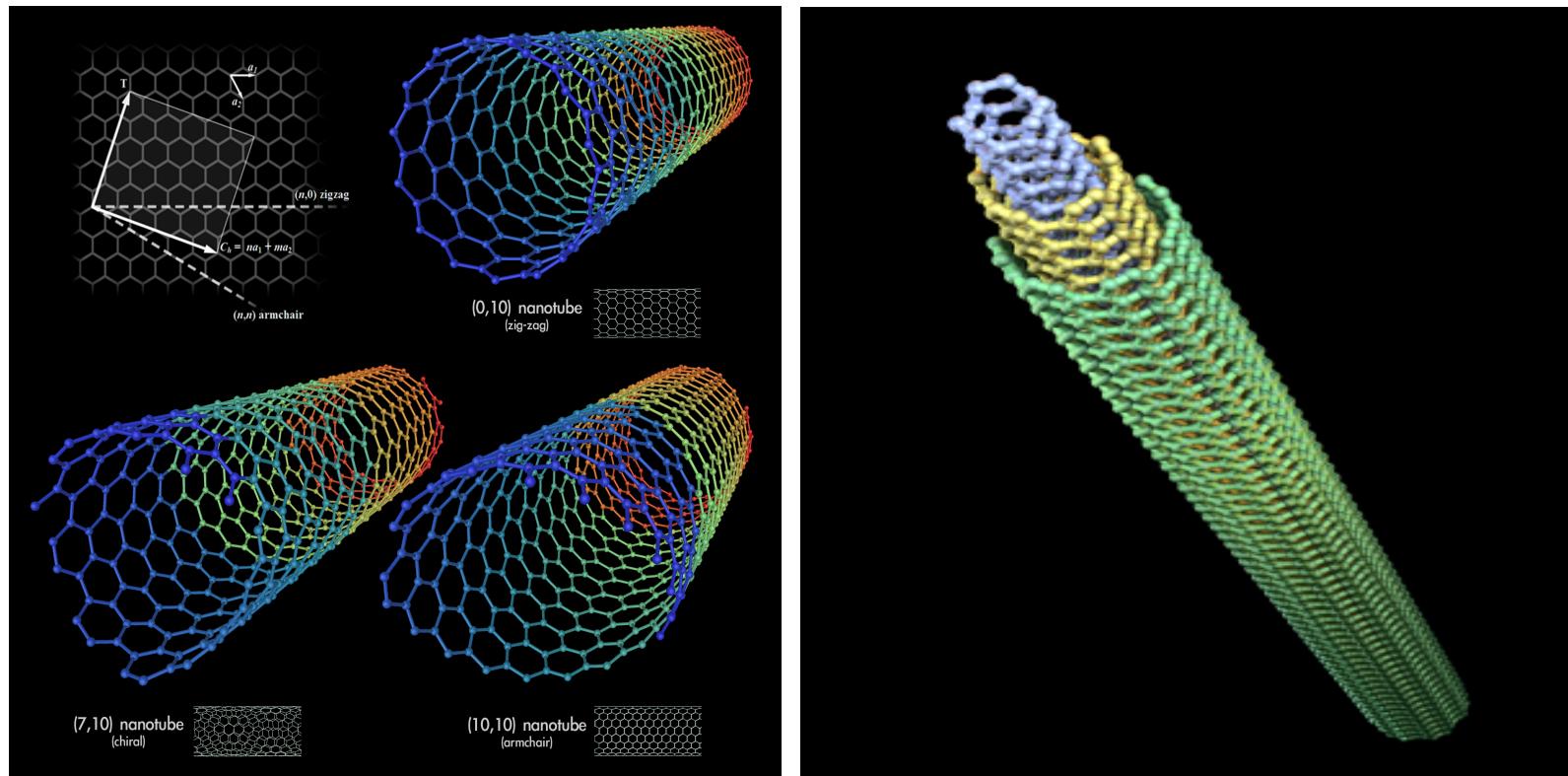
Krute faze se još nazivaju *alotropima*. Vizuelno najpoznatiji je vjerojatno Buckminsterfullerene alotrop ugljika.



SCIENCEPHOTOLIBRARY

# Krute faze ugljika (2)

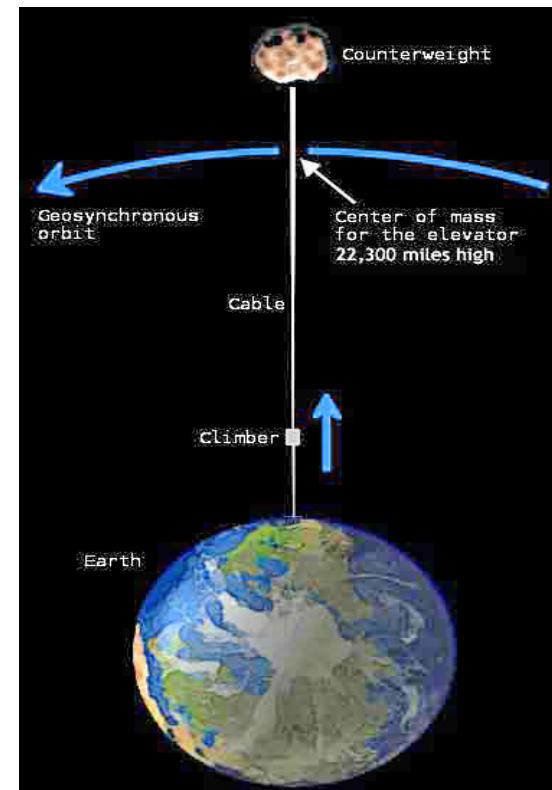
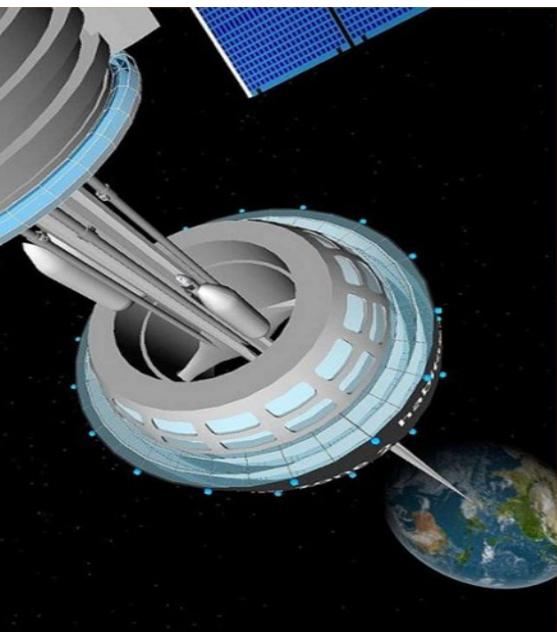
Sljedeći allotrop ugljika je *ugljikova nano cijev* (carbon nano tube, CNT).



[http://www.bibliotecapleyades.net/luna/esp\\_lunaiapetus05.htm](http://www.bibliotecapleyades.net/luna/esp_lunaiapetus05.htm)

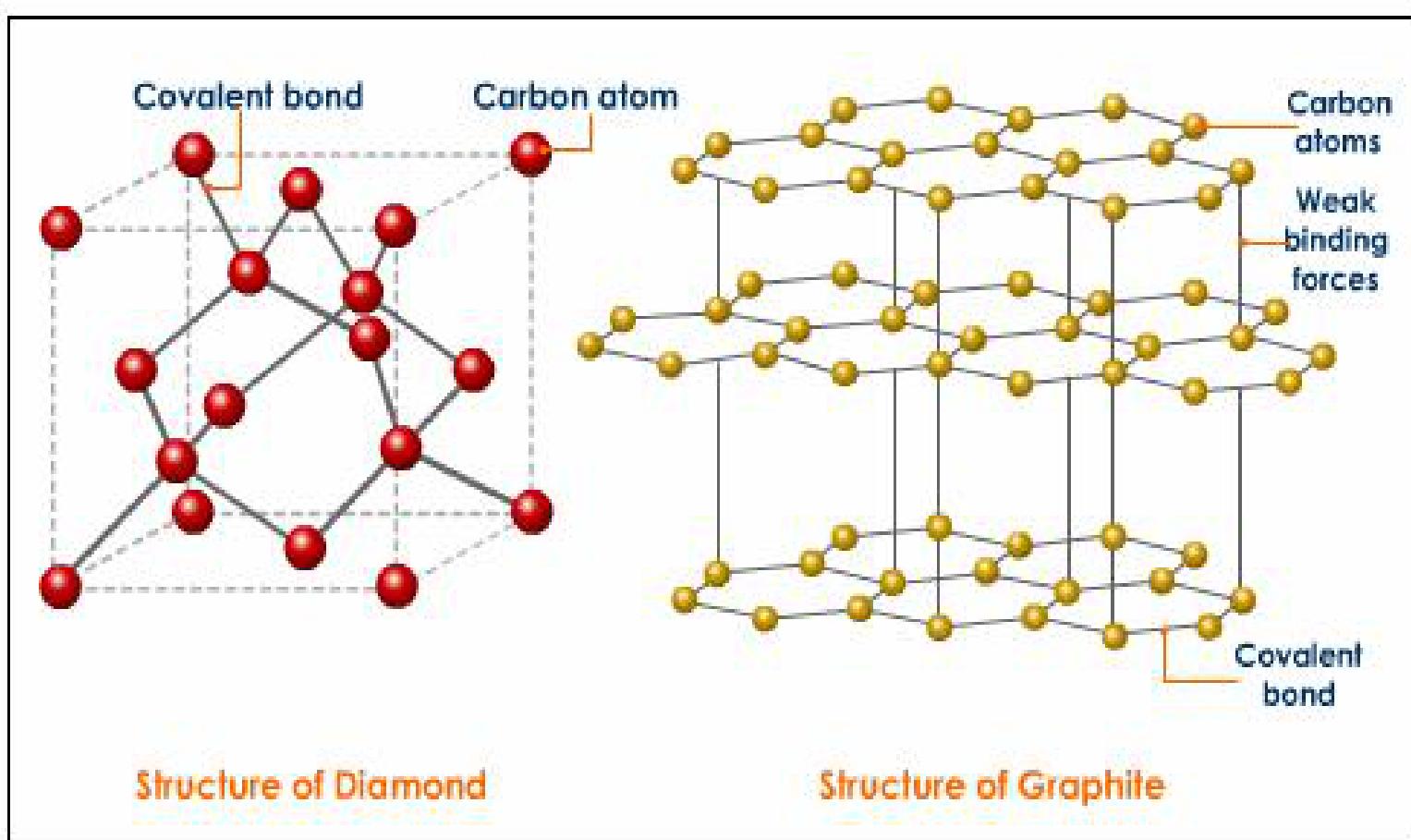
# Krute faze ugljika (3)

Poznat po proračunima za orbitalnu stanicu u geosinhronoj orbiti. <http://wordlesstech.com/2011/01/04/space-elevator-from-carbon-nanotubes/>



# Krute faze ugljika (4)

Dva klasična allotropa, <http://wn.com/allotrope>



# Svojstva alotropa ugljika

## Svojstva 4 alotropa ugljika

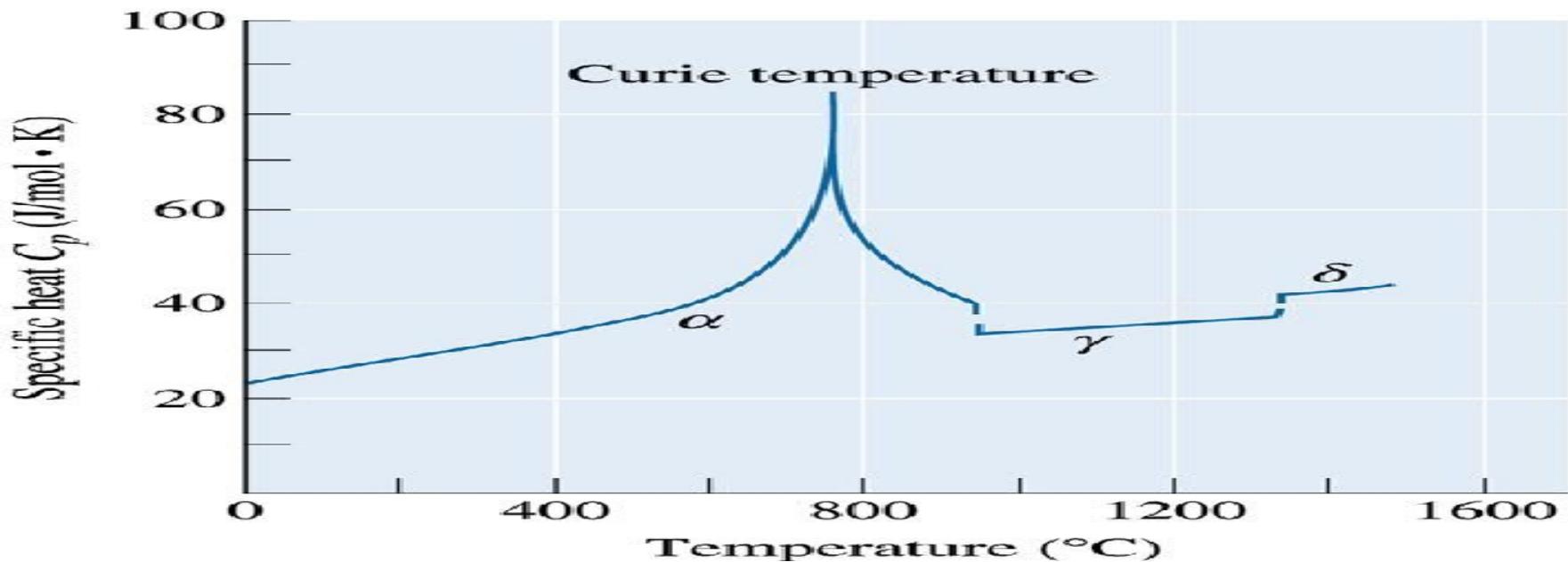
	<b>DIAMOND</b>	<b>GRAPHITE</b>	<b>C<sub>60</sub></b>	<b>CNTs</b>
<b>Color</b>	Colorless <sup>1</sup>	Steel black to grey <sup>1</sup>	Black solid / Magenta in solution	black
<b>Density (g/cm<sup>3</sup>)</b>	3.515 <sup>2,5</sup>	1.9-2.3 <sup>5</sup>	1.69 <sup>5</sup>	1.33-1.4 <sup>8</sup>
<b>Specific Gravity</b>	3.52 <sup>3</sup>	2.2 <sup>4</sup>	1.7-1.9 <sup>7</sup>	<b>2</b>
<b>Hardness (Moh's Scale)</b>	10 <sup>1</sup>	1-2 <sup>1</sup>	<b>1-2</b>	<b>1-2</b>
<b>Melting Point (°C)</b>	3550 <sup>5</sup>	3652 – 3697 <sup>5</sup>	>800 (sublimes) <sup>6</sup>	<i>Similar to graphite</i>
<b>Boiling Point (°C)</b>	4827 <sup>5</sup>	4200 <sup>5</sup>	n/a	n/a
<b>Electrical Conductivity</b>	Insulator <sup>1</sup>	Conductor <sup>1</sup>	Semi-conductor <sup>6</sup>	Conductor to semi-conductor <sup>1</sup>
<b>Hybridization</b>	sp <sup>3</sup> - tetrahedral <sup>1</sup>	sp <sup>2</sup> – trigional planar <sup>1</sup>	sp <sup>2</sup> – trigional planar	sp <sup>2</sup> – trigional planar <sup>1</sup>
<b>Crystal Shape and/or Structure</b>	Cubic <sup>1</sup>	Tabular <sup>1</sup>	Truncated icosahedron <sup>1</sup>	Cylindrical <sup>1</sup>

# Faze željeza

Željezo ima 3 krute faze:  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ .

# Faze željeza

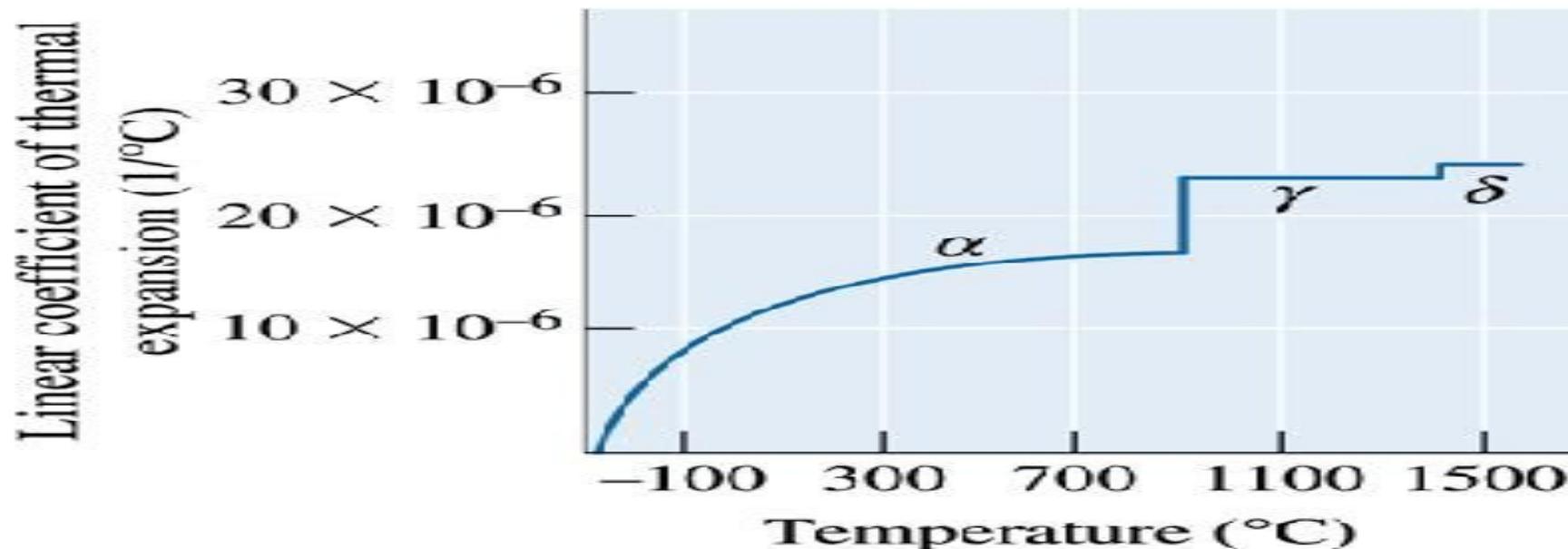
Željezo ima 3 krute faze:  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ .



Toplinski koeficijenti i magnetizam se naglo mijenjaju u fazi  $\alpha$  željeza kod temperature od oko  $750^\circ\text{C}$  i opet kod promjene faze  $\alpha \rightarrow \gamma$  na oko  $950^\circ\text{C}$

# Faze željeza

Željezo ima 3 krute faze:  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ .



Prilikom prelaska iz faze  $\alpha$  u fazu  $\gamma$  i iz faze  $\gamma$  u  $\delta$  koeficijent rastezanja se skokovito mijenja.

# Faze željeza

Željezo ima 3 krute faze:  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ .

Kad se čelik zagrije do temperature  $1000^{\circ}\text{C}$  (faza  $\gamma$ ) njegov se strukturalni integritet reducira na oko 10% integreteta koji je imao do  $900^{\circ}\text{C}$  (faza  $\alpha$ ).



# Alotropi željeza (1)

Kad se rastopljeno željezo hlađi ono se prvo kristalizira u prostorno centriranu kubičnu rešetku na temperaturi od  $1538^{\circ}\text{ C}$ . To je  $\delta$  alotrop ili  $\delta$  faza željeza.

# Alotropi željeza (1)

Kad se rastopljeno željezo haldi ono se prvo kristalizira u prostorno centriranu kubičnu rešetku na temperaturi od  $1538^{\circ}\text{ C}$ . To je  $\delta$  alotrop ili  $\delta$  faza željeza.

Kad se dalje haldi, kristalna struktura se mijenja u plošno centrirarnu kubičnu rešetku na  $1394^{\circ}\text{ C}$ .  $\gamma$  alotrop (faza) željeza.

# Alotropi željeza (1)

Kad se rastopljeno željezo haldi ono se prvo kristalizira u prostorno centriranu kubičnu rešetku na temperaturi od  $1538^{\circ}\text{ C}$ . To je  $\delta$  alotrop ili  $\delta$  faza željeza.

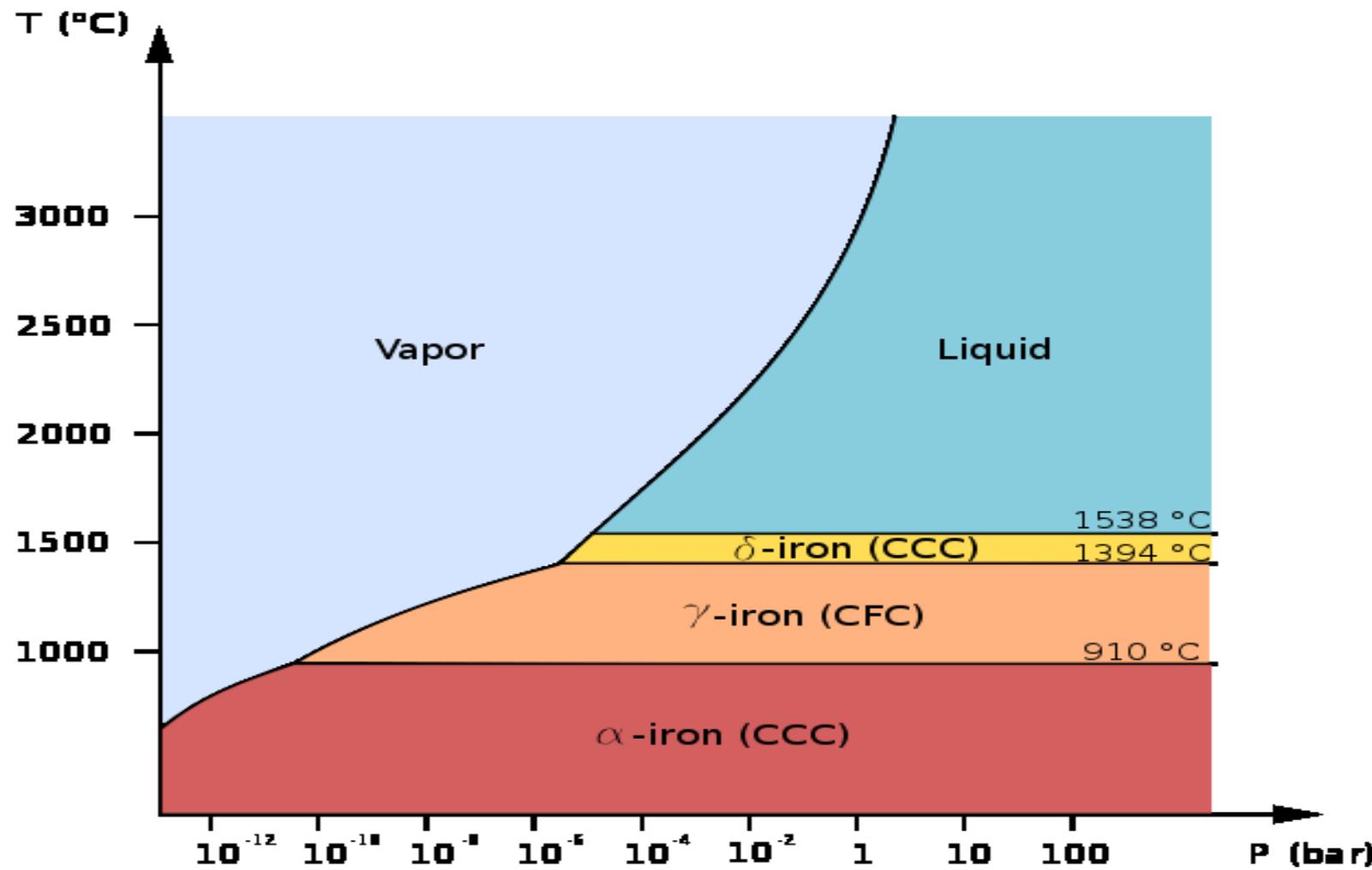
Kad se dalje haldi, kristalna struktura se mijenja u plošno centrirarnu kubičnu rešetku na  $1394^{\circ}\text{ C}$ .  $\gamma$  alotrop (faza) željeza.

Na kraju se kristalna struktura ponovo mijenja u prostorno centrirarnu kubičnu rešetku na  $912^{\circ}\text{ C}$ .  $\alpha$  alotrop (faza) željeza.

Na  $770^{\circ}\text{ C}$  (*Curieova točka*) željezo postaje magnetično.

# Alotropi željeza (2)

Dijagram alotropa.



# Vodenje topline

U promjeni faza i promjeni temperatura faza tvari, a time i u razvoju požara, bitnu ulogu igra vođenje topline. Tri su načina vođenja topline:

# Vodenje topline

U promjeni faza i promjeni temperatura faza tvari, a time i u razvoju požara, bitnu ulogu igra vođenje topline. Tri su načina vođenja topline:

- kondukcijom

# Vodenje topline

U promjeni faza i promjeni temperatura faza tvari, a time i u razvoju požara, bitnu ulogu igra vođenje topline. Tri su načina vođenja topline:

- kondukcijom
- konvekcijom

# Vodenje topline

U promjeni faza i promjeni temperatura faza tvari, a time i u razvoju požara, bitnu ulogu igra vođenje topline. Tri su načina vođenja topline:

- kondukцијом
- konvekcijom
- radijacijom (zračenjem)

# Energija u prijelazu

Toplinska kondukcija je spontani prijenos energije kroz materijal iz područja više u područje niža temperature pri čemu se međusobni položaj područja unutar materijala ili ne mijenja (kruta tijela) ili neznatno mijenja (tekućine i plinovi pod posebnim uvjetima).

# Energija u prijelazu

Toplinska kondukcija je spontani prijenos energije kroz materijal iz područja više u područje niža temperature pri čemu se međusobni položaj područja unutar materijala ili ne mijenja (kruta tijela) ili neznatno mijenja (tekućine i plinovi pod posebnim uvjetima).

Prijenos topline zasniva se na molekularnom gibanju i za neke materijale (vodiče) još i na gibanju slobodnih elektrona.

# Energija $\leftrightarrow$ temperatura

Pri tome se kinetička energija molekula smanjuje od područja više prema području niže temperature zbog međusobnih nepotpuno elastičnih sudara molekula (i elektrona).

# Energija $\leftrightarrow$ temperatura

Pri tome se kinetička energija molekula smanjuje od područja više prema području niže temperature zbog međusobnih nepotpuno elastičnih sudara molekula (i elektrona).

Za idealni plin, toplinska vodljivost ( $\lambda$ ) je proporcionalna prosječnoj molekularnoj brzini ( $v$ ), srednjem slobodnom putu ( $l$ ) i molarnom toplinskem kapacitetu ( $C$ ):  $\lambda = \frac{1}{3}Cvl$ .

# Energija $\leftrightarrow$ temperatura

Pri tome se kinetička energija molekula smanjuje od područja više prema području niže temperature zbog međusobnih nepotpuno elastičnih sudara molekula (i elektrona).

Za idealni plin, toplinska vodljivost ( $\lambda$ ) je proporcionalna prosječnoj molekularnoj brzini ( $v$ ), srednjem slobodnom putu ( $l$ ) i molarном toplinskom kapacitetu ( $C$ ):  $\lambda = \frac{1}{3}Cvl$ .

U krutim materijalima, toplina se prenosi valovima vibracija kristalne rešetke (fononima) i slobodnim elektronima (u vodičima). Slobodni elektroni iz područja viših temperatura prelaze u područje nižih temperatura gdje se dio njihove kinetičke energije prenosi na atome zbog sudara s fononomima. Ovdje govorimo o interakciji individualnog (elektrona) i kolektivnog (molekula; vibracije) gibanja. Kod vodiča se većina energije prenosi elektronima, a kod toplinskih izolatora fononima.

# Energija $\leftrightarrow$ temperatura

Pri tome se kinetička energija molekula smanjuje od područja više prema području niže temperature zbog međusobnih nepotpuno elastičnih sudara molekula (i elektrona).

Za idealni plin, toplinska vodljivost ( $\lambda$ ) je proporcionalna prosječnoj molekularnoj brzini ( $v$ ), srednjem slobodnom putu ( $l$ ) i molarном toplinskom kapacitetu ( $C$ ):  $\lambda = \frac{1}{3}Cvl$ .

U krutim materijalima, toplina se prenosi valovima vibracija kristalne rešetke (fononima) i slobodnim elektronima (u vodičima). Slobodni elektroni iz područja viših temperatura prelaze u područje nižih temperatura gdje se dio njihove kinetičke energije prenosi na atome zbog sudara s fononomima. Ovdje govorimo o interakciji individualnog (elektrona) i kolektivnog (molekula; vibracije) gibanja. Kod vodiča se većina energije prenosi elektronima, a kod toplinskih izolatora fononima.

Uočimo važnu razliku između toplinske i električne vodljivosti. Električna vodljivost raste kad temperatura pada jer tada vibracije molekula manje "smetaju" gibanju elektrona (sjetimo se supravodljivosti blizu absolutne nule). Toplinska vodljivost, naprotiv, raste s temperaturom, tj. prosječnom energijom molekula koja rezultira povećanim prijenosom topline.

# Toplina ↔ temperatura

Unutrašnja energija svakog područja u materijalu je proporcionalna temperaturi.

# Toplina $\leftrightarrow$ temperatura

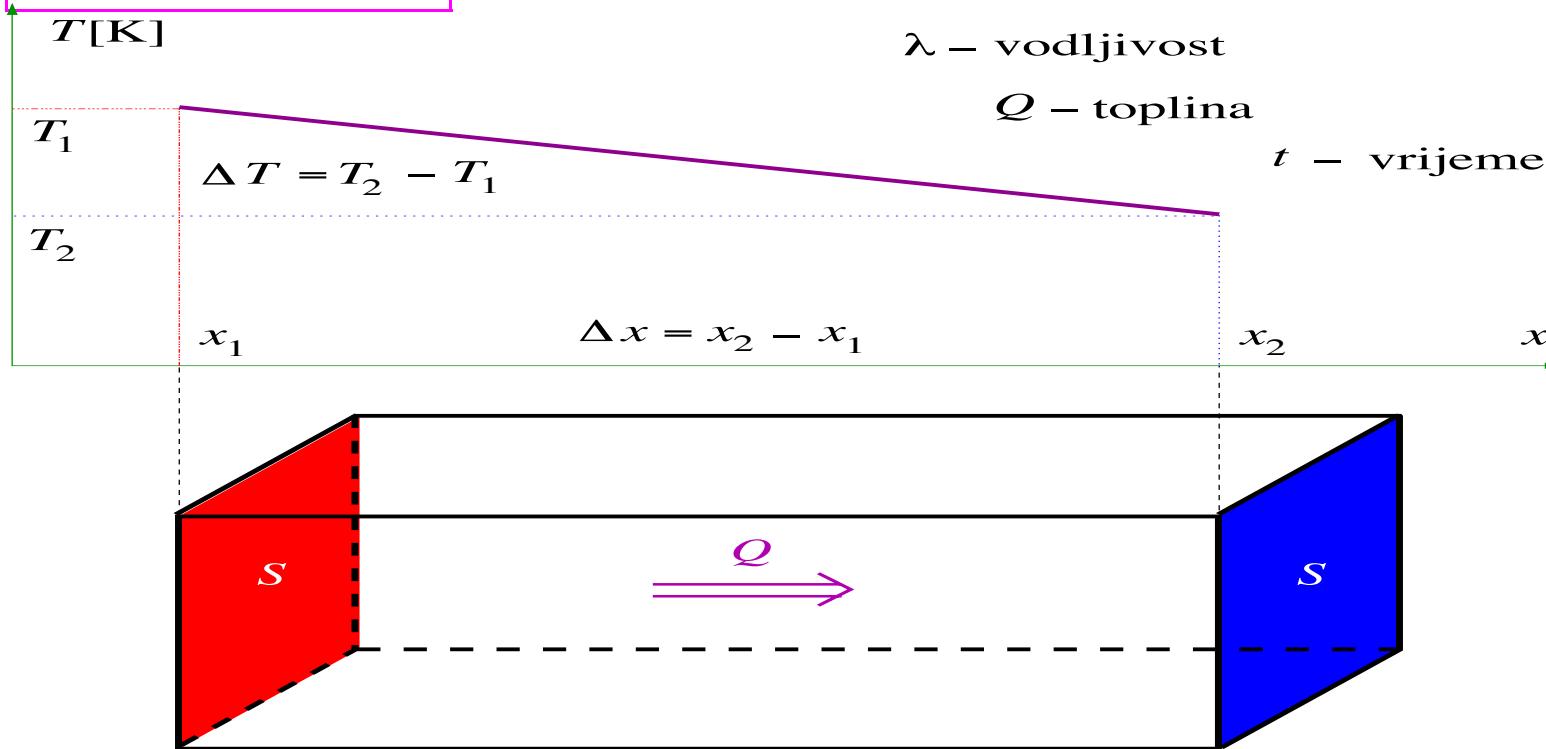
Unutrašnja energija svakog područja u materijalu je proporcionalna temperaturi. Fourierov zakon kondukcije:

$$Q = -\lambda St \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (19)$$

# Toplina $\leftrightarrow$ temperatura

Unutrašnja energija svakog područja u materijalu je proporcionalna temperaturi. Fourierov zakon kondukcije:

$$Q = -\lambda S t \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (19)$$



# Konduksijski otpor

Fourierov zakon kondukcije u 3D:

$$\vec{Q} = -\lambda S t \text{grad} T \quad (20)$$

(ireverzibilni disipativni proces)

# Konduksijski otpor

Fourierov zakon kondukcije u 3D:

$$\vec{Q} = -\lambda S t \text{grad} T \quad (20)$$

(ireverzibilni disipativni proces)

Jednadžba (19) se može napisati kao:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R} t \quad (21)$$

# Konducijski otpor

Fourierov zakon kondukcije u 3D:

$$\vec{Q} = -\lambda S t \text{grad} T \quad (20)$$

(ireverzibilni disipativni proces)

Jednadžba (19) se može napisati kao:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R} t \quad (21)$$

$R = \frac{\Delta x}{\lambda S}$  nazivamo toplinskim otporom kondukcije.

# Konvekcija

Konvekcija je primarni oblik prijenosa topline kod požara. To je spontani ili prisilni prijenos topline kroz fluid (tekućina, plin) strujanjem fluida.

# Konvekcija

Konvekcija je primarni oblik prijenosa topline kod požara. To je spontani ili prisilni prijenos topline kroz fluid (tekućina, plin) strujanjem fluida.

Newtonov zakon konvekcije:

$$Q = hSt\Delta T = hS(T_1 - T_2)t \quad (22)$$

gdje su  $h$  – konvekcijski toplinski koeficijent,  $S$  – promatrana površina čvrste plohe uz koju struji fluid i kroz koju ulazi (izlazi) toplina,  $T_1, T_2$  temperature fluida neposredno uz promatrano čvrstu plohu i daleko od nje,  $t$  – vrijeme prijenosa topline.

# Konvekcija

Konvekcija je primarni oblik prijenosa topline kod požara. To je spontani ili prisilni prijenos topline kroz fluid (tekućina, plin) strujanjem fluida.

Newtonov zakon konvekcije:

$$Q = hSt\Delta T = hS(T_1 - T_2)t \quad (22)$$

gdje su  $h$  – konvekcijski toplinski koeficijent,  $S$  – promatrana površina čvrste plohe uz koju struji fluid i kroz koju ulazi (izlazi) toplina,  $T_1, T_2$  temperature fluida neposredno uz promatrano čvrstu plohu i daleko od nje,  $t$  – vrijeme prijenosa topline.

# Konvekcijski otpor

Slično Fourierovom zakonu kondukcije (21), Newtonov zakon konvekcije (22) se može napisati kao:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R} t \quad (23)$$

# Konvekcijski otpor

Slično Fourierovom zakonu kondukcije (21), Newtonov zakon konvekcije (22) se može napisati kao:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R} t \quad (23)$$

$R = \frac{1}{hS}$  nazivamo toplinskim otporom konvekcije.

# Konvekcijski otpor

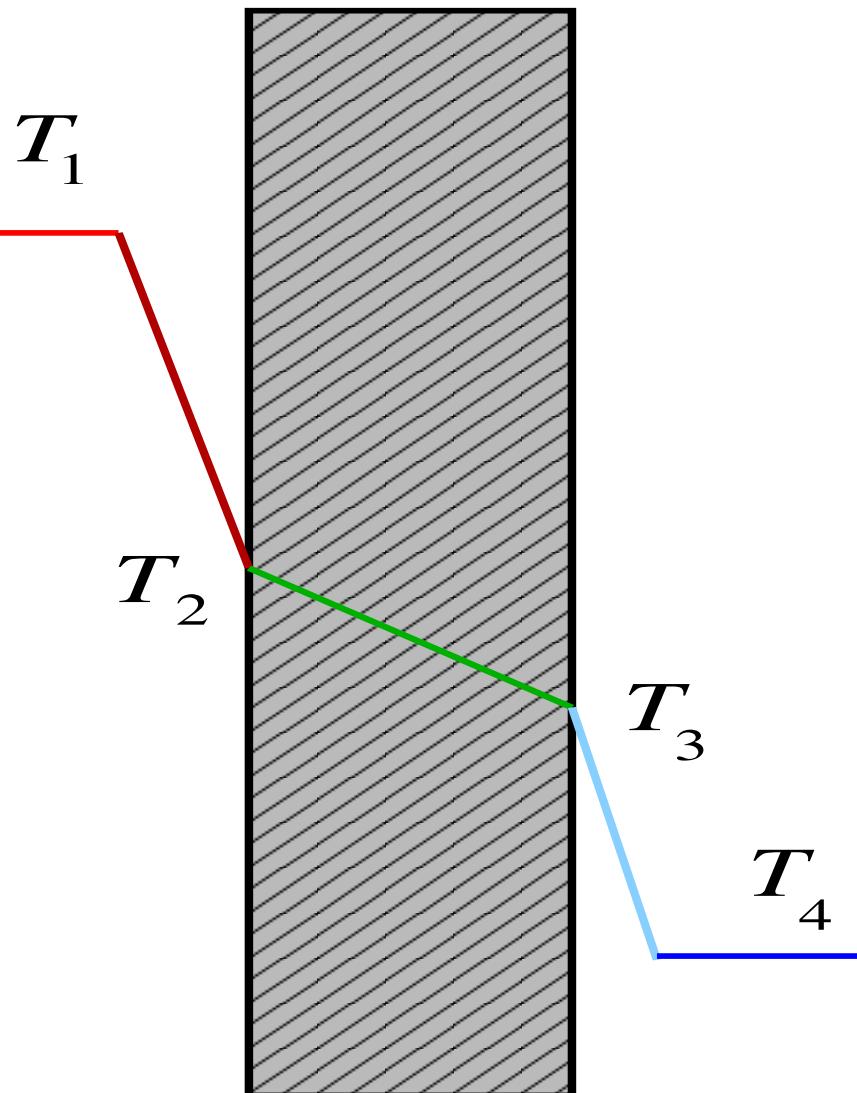
Slično Fourierovom zakonu kondukcije (21), Newtonov zakon konvekcije (22) se može napisati kao:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R} t \quad (23)$$

$R = \frac{1}{hS}$  nazivamo toplinskim otporom konvekcije.

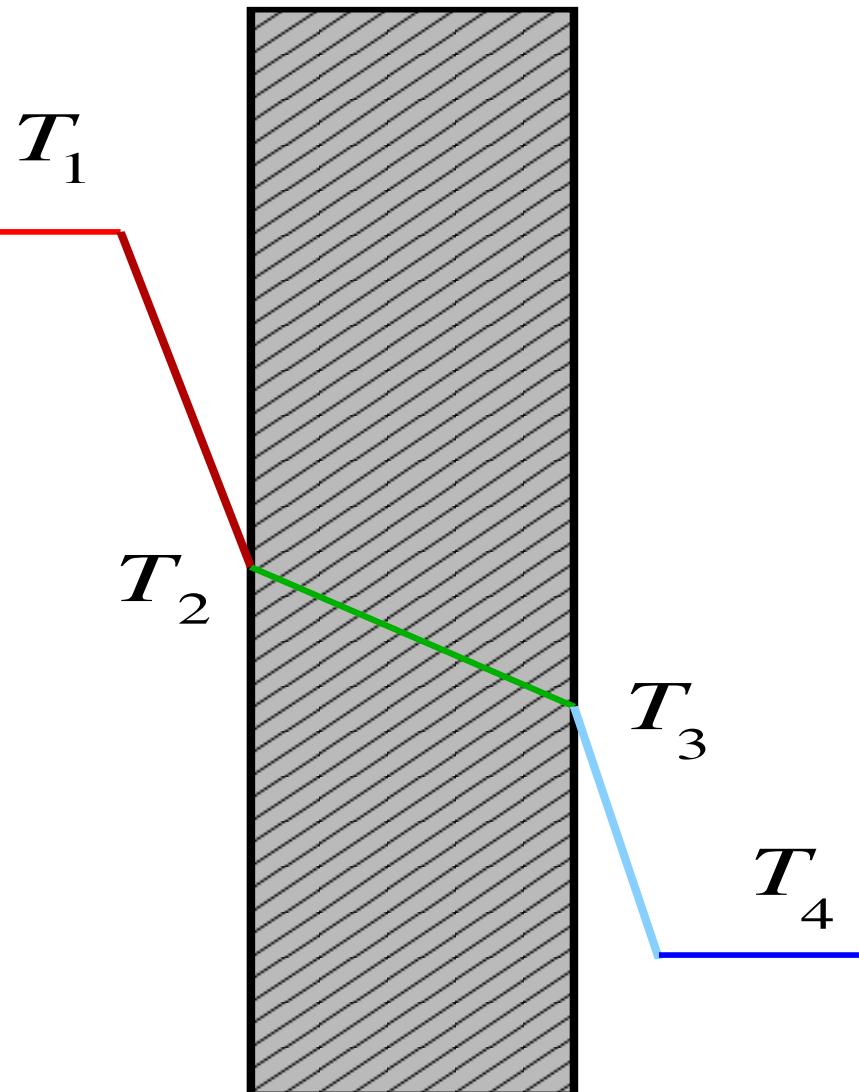
$h$  se dobiva mjerenjem ili se računa kompjuterskim simulacijama; vrijednosti za razne fluide i/ili razne uvjete se razlikuju za nekoliko redova veličine

# Kombinacije



Na nižim temperaturama,  
pa čak i kod požara u  
zatvorenim prostorima,  
dovoljno je kombinirati  
samo konvekciju i  
kondukciju, za  
određivanje ukupno  
prenesene topline.

# Kombinacije



Na nižim temperaturama,  
pa čak i kod požara u  
zatvorenim prostorima,  
dovoljno je kombinirati  
samo konvekciju i  
kondukciju, za  
određivanje ukupno  
prenesene topline.

Na višim temperaturama  
moramo uzeti u  
obzir i zračenje

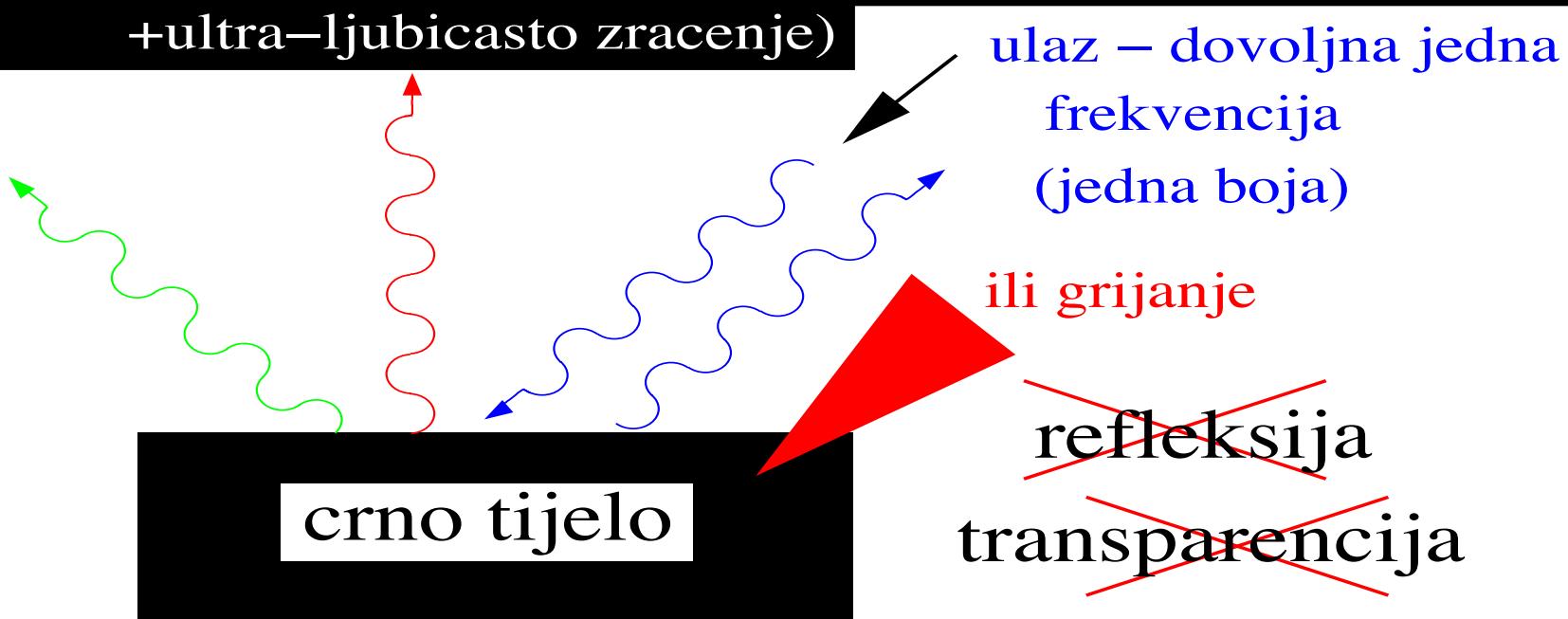
# Zračenje crnog tijela

Crno tijelo ne propušta i ne reflektira već samo absorbira upadno zračenje ili se jednostavno grije, a emitira zračenje svih frekvencija.

# Zračenje crnog tijela

Crno tijelo ne propušta i ne reflektira već samo absorbira upadno zračenje ili se jednostavno grijije, a emitira zračenje svih frekvencija.

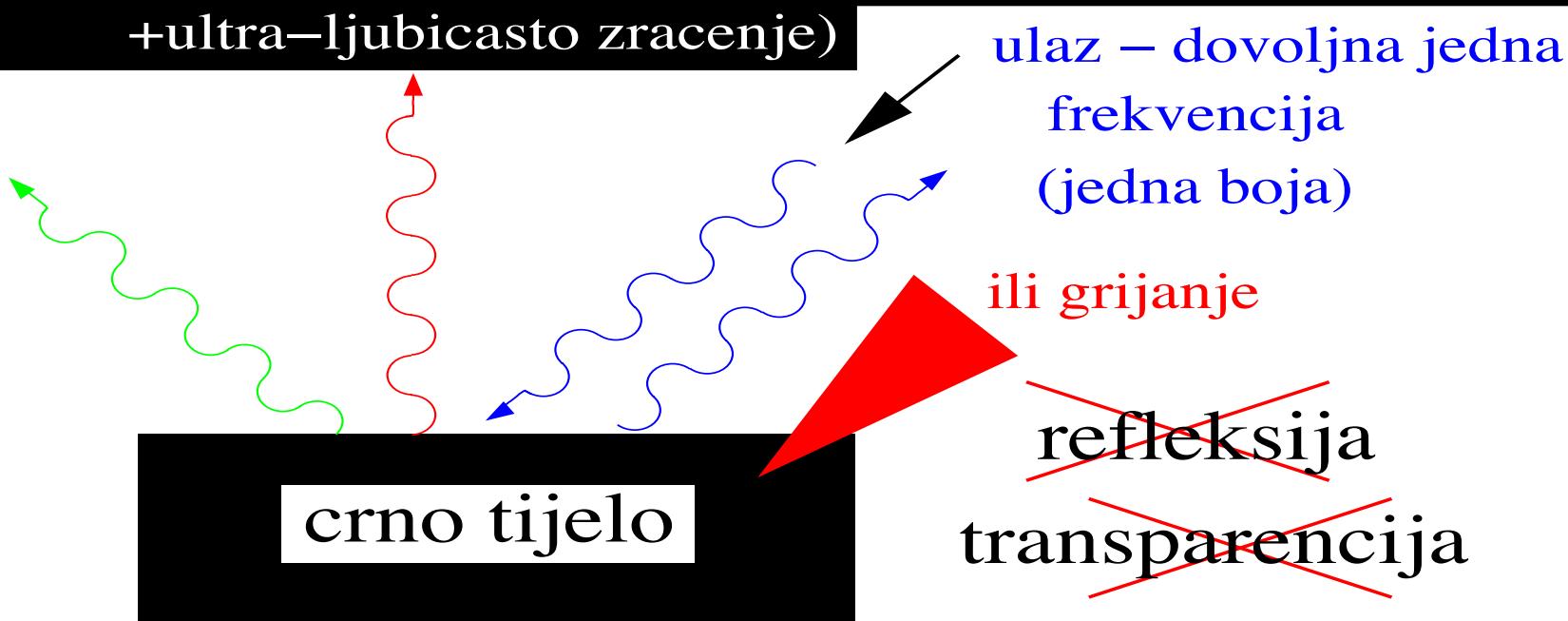
izlaz (zracenje) – sve frekvencije (sve boje + infracrveno  
+ultra–ljubicasto zracenje)



# Zračenje crnog tijela

Crno tijelo ne propušta i ne reflektira već samo absorbira upadno zračenje ili se jednostavno grijije, a emitira zračenje svih frekvencija.

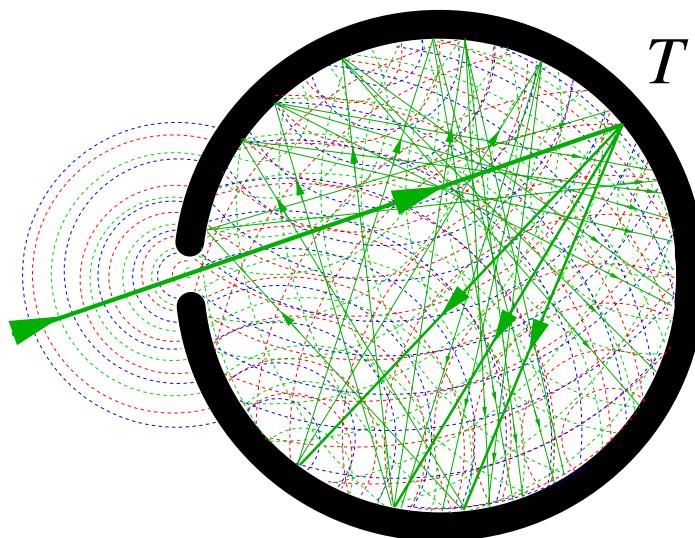
izlaz (zracenje) – sve frekvencije (sve boje + infracrveno  
+ultra–ljubicasto zracenje)



Tijelo je u toplinskoj ravnoteži, na konstantnoj temperaturi  $T$

# Modeliranje izvora

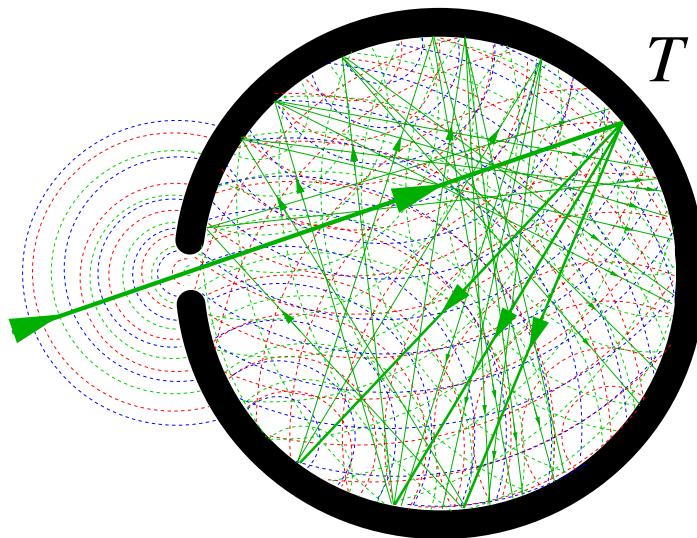
Za praktičnu realizaciju crnog tijela često se koristi šupljina kao ova prikazana na slici.



Svrha ovog oblika je da se maksimalno onemogući refleksija. Ovdje je prikazana ulazna zelena laserska zraka koja održava crno tijelo na temperaturi  $T$ . Crno tijelo istovremeno absorbira zelenu lasersku zraku i zrači na svim frekvencijama (u svim bojama).

# Modeliranje izvora

Za praktičnu realizaciju crnog tijela često se koristi šupljina kao ova prikazana na slici.



Svrha ovog oblika je da se maksimalno onemogući refleksija. Ovdje je prikazana ulazna zelena laserska zraka koja održava crno tijelo na temperaturi  $T$ . Crno tijelo istovremeno absorbira zelenu lasersku zraku i zrači na svim frekvencijama (u svim bojama).

Šupljina će nam ujedno poslužiti kao model izvora zračenja koji će nam omogućiti da lakše izvedemo konačne formule kasnije.

# Modeliranje zračenja

U tijelu na temperaturi  $T$  atomi imaju određenu prosječnu energiju, što znači da se elektroni u njima stalno ekscitiraju.

# Modeliranje zračenja

U tijelu na temperaturi  $T$  atomi imaju određenu prosječnu energiju, što znači da se elektroni u njima stalno ekscitiraju.

Prilikom njihove deekscitacije atom emitira svjetlost (fotone) točno određenih frekvencija.

# Modeliranje zračenja

U tijelu na temperaturi  $T$  atomi imaju određenu prosječnu energiju, što znači da se elektroni u njima stalno ekscitiraju.

Prilikom njihove deekscitacije atom emitira svjetlost (fotone) točno određenih frekvencija.

Ovo ograničenje na frekvencije koje dozvoljavaju energetski nivoi atoma koristimo za spektralnu identifikaciju vrsta atoma i spojeva prilikom izgaranja—njihova spektralna “legitimacija”.

# Modeliranje zračenja

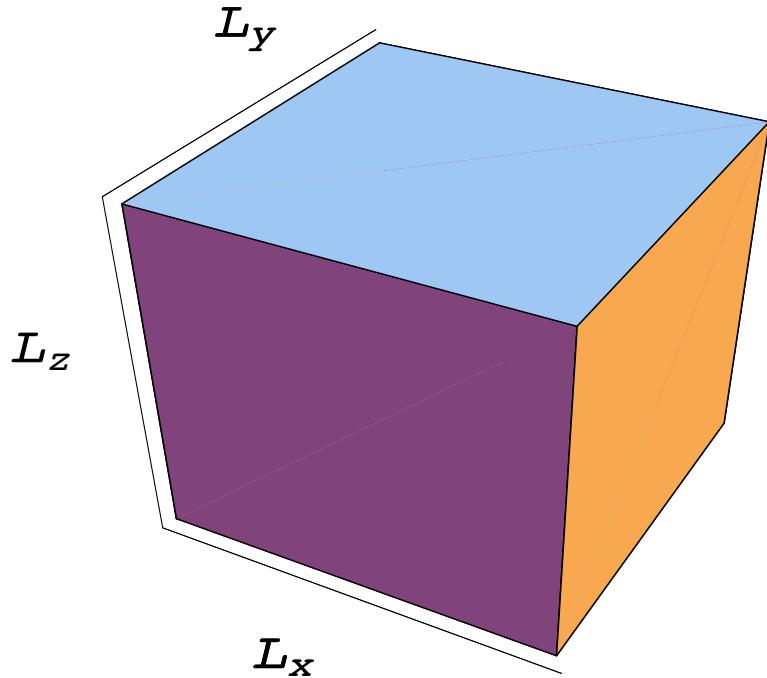
U tijelu na temperaturi  $T$  atomi imaju određenu prosječnu energiju, što znači da se elektroni u njima stalno ekscitiraju.

Prilikom njihove deekscitacije atom emitira svjetlost (fotone) točno određenih frekvencija.

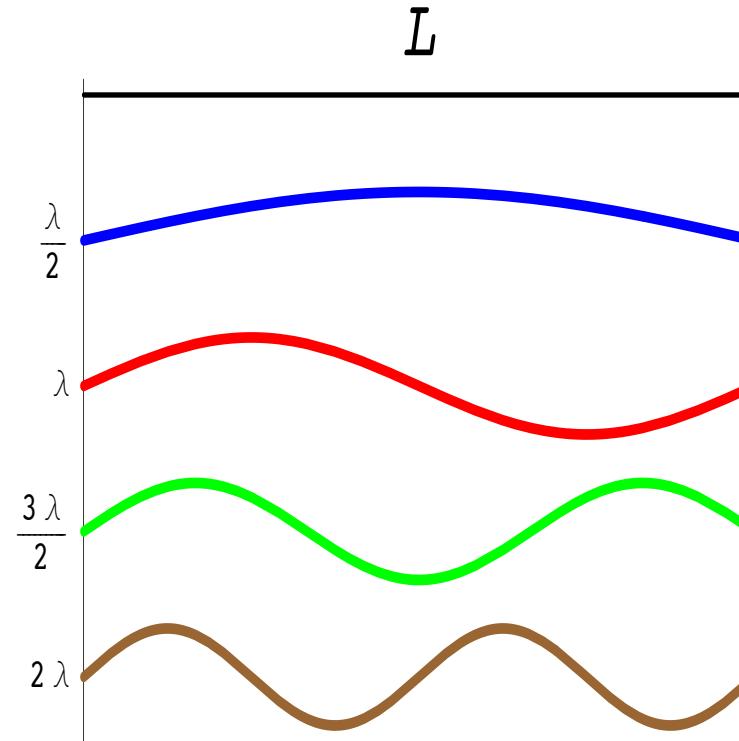
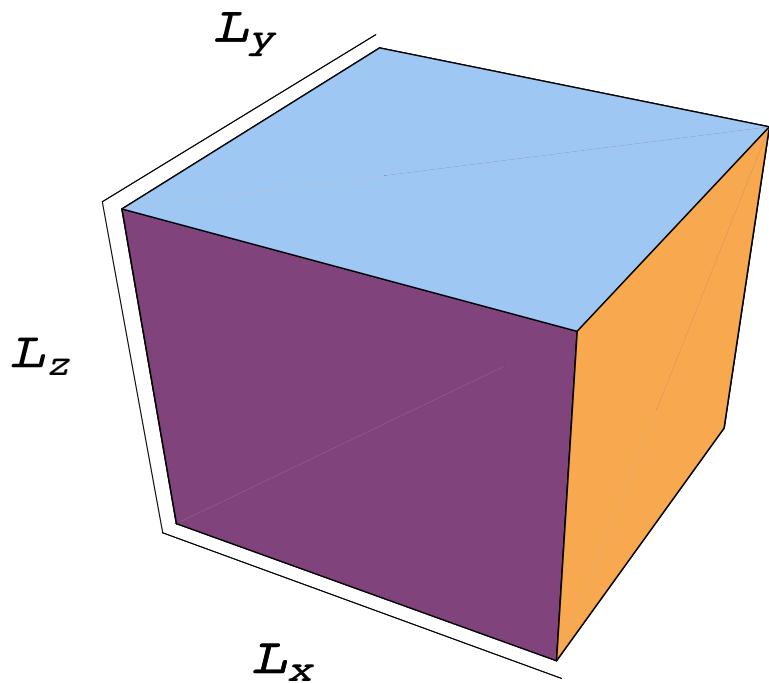
Ovo ograničenje na frekvencije koje dozvoljavaju energetski nivoi atoma koristimo za spektralnu identifikaciju vrsta atoma i spojeva prilikom izgaranja—njihova spektralna “legitimacija”.

Te “kvantizirane” frekvencije simuliramo jednostavnim modelom stojnih valova u kocki s bridovima duljine  $L$ .

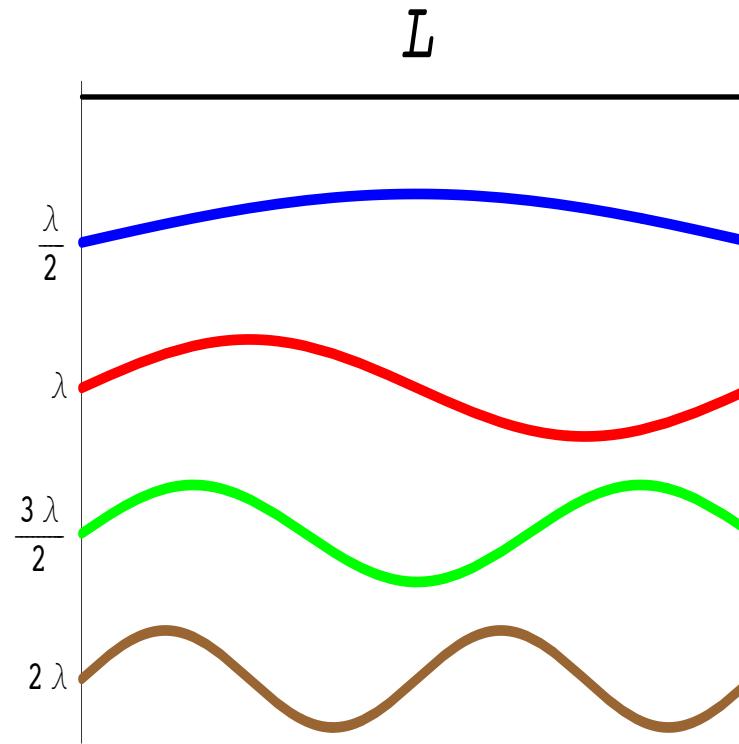
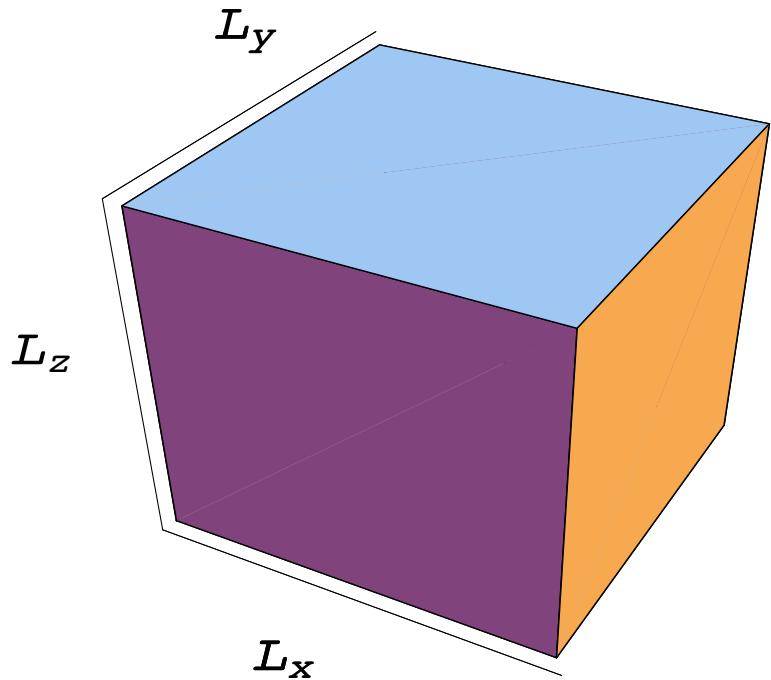
# Stojni valovi



# Stojni valovi



# Stojni valovi



Valne duljine stojnih valova moraju zadovoljavati uvjete:

$$n_x \frac{\lambda}{2} = L_x, \quad n_y \frac{\lambda}{2} = L_y, \quad n_z \frac{\lambda}{2} = L_z, \quad n_x, n_y, n_z = 1, \dots, N$$

# Broj stanja fotona

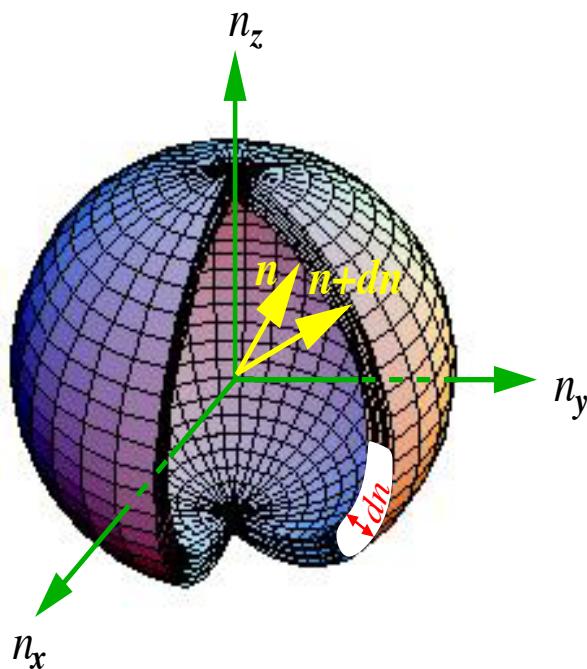
Frekvencija pojedinih stanja (stojnih valova; u materijalu—emitiranih fotona) je:

$$\nu = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{cn}{2L}$$

# Broj stanja fotona

Frekvencija pojedinih stanja (stojnih valova; u materijalu—emitiranih fotona) je:

$$\nu = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{cn}{2L}$$



Broj stanja između  $n$  i  $n + dn$ , dakle, između  $\nu$  i  $\nu + d\nu$ , je  $dn = \frac{2L}{c}d\nu$ .

Volumen ljeske u prvom oktantu je

$$d\mu = \frac{\pi}{2}n^2dn = \frac{4\pi L^3}{c^3}\nu^2d\nu$$

(Negativna stanja u ostalim oktantima nemaju fizikalni smisao.)

# Ukupan broj stanja

Budući da imamo dvije nezavisne ravnine polarizacije fotona (dva nezavisna stanja), trebamo rezultat pomnožiti s 2 i podijeliti s volumenom  $L^3$  da bismo dobili *ukupan broj fotonskih stanja* u intervalu  $d\nu$  po jedinici volumena:

$$\frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu = g(\nu) d\nu \quad (24)$$

# Ukupan broj stanja

Budući da imamo dvije nezavisne ravnine polarizacije fotona (dva nezavisna stanja), trebamo rezultat pomnožiti s 2 i podijeliti s volumenom  $L^3$  da bismo dobili *ukupan broj fotonskih stanja* u intervalu  $d\nu$  po jedinici volumena:

$$\frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu = g(\nu) d\nu \quad (24)$$

( $g(\nu)$  nazivamo gustoćom broja fotonskih stanja na frekvenciji  $\nu$ )

# Vjerojatnosti energija

Foton ima energiju u smjeru gibanja. Vjerojatnost da će u smjeru  $x$  imati energiju  $dE_x$  je  $dw_x = f(E_x)dE_x$ , gdje je  $f$  funkcija raspodjele energije. Analogno je  $dw_y = f(E_y)dE_y$  i  $dw_z = f(E_z)dE_z$ .

# Vjerojatnosti energija

Foton ima energiju u smjeru gibanja. Vjerojatnost da će u smjeru  $x$  imati energiju  $dE_x$  je  $dw_x = f(E_x)dE_x$ , gdje je  $f$  funkcija raspodjele energije. Analogno je  $dw_y = f(E_y)dE_y$  i  $dw_z = f(E_z)dE_z$ .

Vjerojatnosti neovisnih događaja se množe, pa je vjerojatnost da foton ima energiju u rasponu  $d^3E = dE_x dE_y dE_z$  jednaka  $d^3w = dw_x dw_y dw_z = \rho(E) d^3E$ , gdje je:

$$\rho(E) = f(E_x)f(E_y)f(E_z) \quad (25)$$

# Rastav energije

S druge strane i u relativističkoj i u klasičnoj teoriji mora vrijediti:  $E = E_x + E_y + E_z$

# Rastav energije

S druge strane i u relativističkoj i u klasičnoj teoriji mora vrijediti:  $E = E_x + E_y + E_z$

(U klasičnoj mehanici to slijedi iz oblika za kinetičku energiju:  $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = E_x + E_y + E_z$ .

Isto dobivamo za relativističku energiju

$$E = m^2v^2c^2 + m_0^2c^2 = m^2c^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + m_0^2c^2.$$

# Rastav energije

S druge strane i u relativističkoj i u klasičnoj teoriji mora vrijediti:  $E = E_x + E_y + E_z$

(U klasičnoj mehanici to slijedi iz oblika za kinetičku energiju:  $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = E_x + E_y + E_z$ .

Isto dobivamo za relativističku energiju

$$E = m^2v^2c^2 + m_0^2c^2 = m^2c^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + m_0^2c^2.$$

Funkcija raspodjele energije ima, dakle, i oblik

$$\rho(E) = f(E) = f(E_x + E_y + E_z) \quad (26)$$

# Eksponencijalna vjerojatnost

Jedini način da vrijedi i (25) i (26) je da funkcija raspodjele energije imaju eksponencijalni oblik:

$$f(E) = Ce^{-\alpha E}, f(E_x) = C_x e^{-\alpha E_x}, f(E_y) = C_y e^{-\alpha E_y}, f(E_z) = C_z e^{-\alpha E_z}.$$

jer je tada (uz  $C = C_x C_y C_z$ )

$$f(E) = Ce^{-\alpha E_x - \alpha E_y - \alpha E_z} = C_x e^{-\alpha E_x} C_y e^{-\alpha E_y} C_z e^{-\alpha E_z}.$$

Minus predznak osigurava da je  $0 \leq f(E) \leq 1$ .

# Eksponencijalna vjerojatnost

Jedini način da vrijedi i (25) i (26) je da funkcija raspodjele energije imaju eksponencijalni oblik:

$$f(E) = Ce^{-\alpha E}, f(E_x) = C_x e^{-\alpha E_x}, f(E_y) = C_y e^{-\alpha E_y}, f(E_z) = C_z e^{-\alpha E_z}.$$

jer je tada (uz  $C = C_x C_y C_z$ )

$$f(E) = Ce^{-\alpha E_x - \alpha E_y - \alpha E_z} = C_x e^{-\alpha E_x} C_y e^{-\alpha E_y} C_z e^{-\alpha E_z}.$$

Minus predznak osigurava da je  $0 \leq f(E) \leq 1$ .

Tada (25) dobiva oblik

$$\rho(E) = Ce^{-\alpha E} \quad (27)$$

# Eksponencijalna vjerojatnost

Jedini način da vrijedi i (25) i (26) je da funkcija raspodjele energije imaju eksponencijalni oblik:

$$f(E) = Ce^{-\alpha E}, f(E_x) = C_x e^{-\alpha E_x}, f(E_y) = C_y e^{-\alpha E_y}, f(E_z) = C_z e^{-\alpha E_z}.$$

jer je tada (uz  $C = C_x C_y C_z$ )

$$f(E) = Ce^{-\alpha E_x - \alpha E_y - \alpha E_z} = C_x e^{-\alpha E_x} C_y e^{-\alpha E_y} C_z e^{-\alpha E_z}.$$

Minus predznak osigurava da je  $0 \leq f(E) \leq 1$ .

Tada (25) dobiva oblik

$$\rho(E) = Ce^{-\alpha E} \quad (27)$$

*Energija jednog fotona je  $h\nu$ , gdje je  $h$  Planckova konstanta. ( $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js)*

# Eksponencijalna vjerojatnost

Jedini način da vrijedi i (25) i (26) je da funkcija raspodjele energije imaju eksponencijalni oblik:

$$f(E) = Ce^{-\alpha E}, f(E_x) = C_x e^{-\alpha E_x}, f(E_y) = C_y e^{-\alpha E_y}, f(E_z) = C_z e^{-\alpha E_z}.$$

jer je tada (uz  $C = C_x C_y C_z$ )

$$f(E) = Ce^{-\alpha E_x - \alpha E_y - \alpha E_z} = C_x e^{-\alpha E_x} C_y e^{-\alpha E_y} C_z e^{-\alpha E_z}.$$

Minus predznak osigurava da je  $0 \leq f(E) \leq 1$ .

Tada (25) dobiva oblik

$$\rho(E) = Ce^{-\alpha E} \quad (27)$$

*Energija jednog fotona je  $h\nu$ , gdje je  $h$  Planckova konstanta. ( $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js) U našem slučaju imamo  $N$  fotona, pa je  $E = Nh\nu$  i  $\rho(E) = \rho(N, \nu)$ .*

# Temperatura

Implicitno  $\rho(E)$  ovisi i o temperaturi  $T$  jer ona određuje energiju zračenja, pa dakle i vjerojatnost da će neki fotoni imati energiju  $E$ .

# Temperatura

Implicitno  $\rho(E)$  ovisi i o temperaturi  $T$  jer ona određuje energiju zračenja, pa dakle i vjerojatnost da će neki fotoni imati energiju  $E$ .

$\alpha$  ima dimenziju  $E^{-1}$  i jedini je član koji može ovisiti o  $T$ . Dakle,  $\alpha = \alpha(T)$ .

# Temperatura

Implicitno  $\rho(E)$  ovisi i o temperaturi  $T$  jer ona određuje energiju zračenja, pa dakle i vjerojatnost da će neki fotoni imati energiju  $E$ .

$\alpha$  ima dimenziju  $E^{-1}$  i jedini je član koji može ovisiti o  $T$ . Dakle,  $\alpha = \alpha(T)$ .

Trebamo odrediti kakva je  $\alpha(T)$  funkcija.

# Temperatura

Implicitno  $\rho(E)$  ovisi i o temperaturi  $T$  jer ona određuje energiju zračenja, pa dakle i vjerojatnost da će neki fotoni imati energiju  $E$ .

$\alpha$  ima dimenziju  $E^{-1}$  i jedini je član koji može ovisiti o  $T$ . Dakle,  $\alpha = \alpha(T)$ .

Trebamo odrediti kakva je  $\alpha(T)$  funkcija.

$\alpha^{-1}$  kao funkcija od  $T$  treba biti proporcionalna srednjoj energiji fotona na temperaturi  $T$  koja odgovara energiji  $N h\nu$  od  $N$  fotona.

# Fotonski plin

Kod idealnog plina je prosječna kinetička energija jednoatomnih čestica plina linearno proporcionalna temperaturi plina  $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$

# Fotonski plin

Kod idealnog plina je prosječna kinetička energija jednoatomnih čestica plina linearno proporcionalna temperaturi plina  $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$

Fotoni se također ponašaju kao čestice: gibaju se pravocrtno, sudaraju s drugim česticama i stijenkama, zadovoljavaju zakone o očuvanju količine gibanja i energije.

# Fotonski plin

Kod idealnog plina je prosječna kinetička energija jednoatomnih čestica plina linearno proporcionalna temperaturi plina  $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$

Fotoni se također ponašaju kao čestice: gibaju se pravocrtno, sudaraju s drugim česticama i stijenkama, zadovoljavaju zakone o očuvanju količine gibanja i energije.

Zato, kod toplinskog zračenja (v. sliku na str. 45) s fotonima različitih frekvencija (energija) iz izvora na temperaturi  $T$ , govorimo o fotonskom plinu s prosječna energijom također linearno proporcionalnom temperaturi plina  $\langle E \rangle \sim T$

$$\alpha \in C$$

Slijedi da je  $\alpha^{-1} \sim T$  i to ćemo pisati kao  $\alpha = \frac{1}{kT}$ .

$$\alpha \in C$$

Slijedi da je  $\alpha^{-1} \sim T$  i to ćemo pisati kao  $\alpha = \frac{1}{kT}$ .

Konstanta proporcionalnosti  $k$  se mjeranjem pokazuje jednakom Boltzmannovoj konstanti preko Stefan-Boltzmannovog zakona koji slijedi niže.

( $k$  se može i izračunati korištenjem Bose-Einsteinove statistike, ali to prelazi okvire ove prezentacije.)

$$\alpha \in C$$

Slijedi da je  $\alpha^{-1} \sim T$  i to ćemo pisati kao  $\alpha = \frac{1}{kT}$ .

Konstanta proporcionalnosti  $k$  se mjeranjem pokazuje jednakom Boltzmannovoj konstanti preko Stefan-Boltzmannovog zakona koji slijedi niže.

( $k$  se može i izračunati korištenjem Bose-Einsteinove statistike, ali to prelazi okvire ove prezentacije.)

Odredimo sad konstantu  $C$  iz (27). Suma vjerojatnosti za sve fotone frekvencije  $\nu$  mora biti jednaka 1, odakle slijedi:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \rho(N, \nu) = C \sum_{N=1}^{\infty} e^{\frac{-Nh\nu}{kT}} = C \frac{1}{1 - e^{-h\nu/kT}} = 1$$

# Energija zračenja

Prosječna energija zračenja frekvencije  $\nu$  je suma umnožaka energije fotona na toj frekvenciji za  $N$  fotona— $Nh\nu$ —i vjerojatnosti— $\rho(\nu)$ —da ćemo u cijelokupnom zračenju imati  $N$  fotona te frekvencije:

$$\sum_{N=1}^{\infty} Nh\nu(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})e^{-Nh\nu} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (28)$$

# Energija zračenja

Prosječna energija zračenja frekvencije  $\nu$  je suma umnožaka energije fotona na toj frekvenciji za  $N$  fotona— $Nh\nu$ —i vjerojatnosti— $\rho(\nu)$ —da ćemo u cjelokupnom zračenju imati  $N$  fotona te frekvencije:

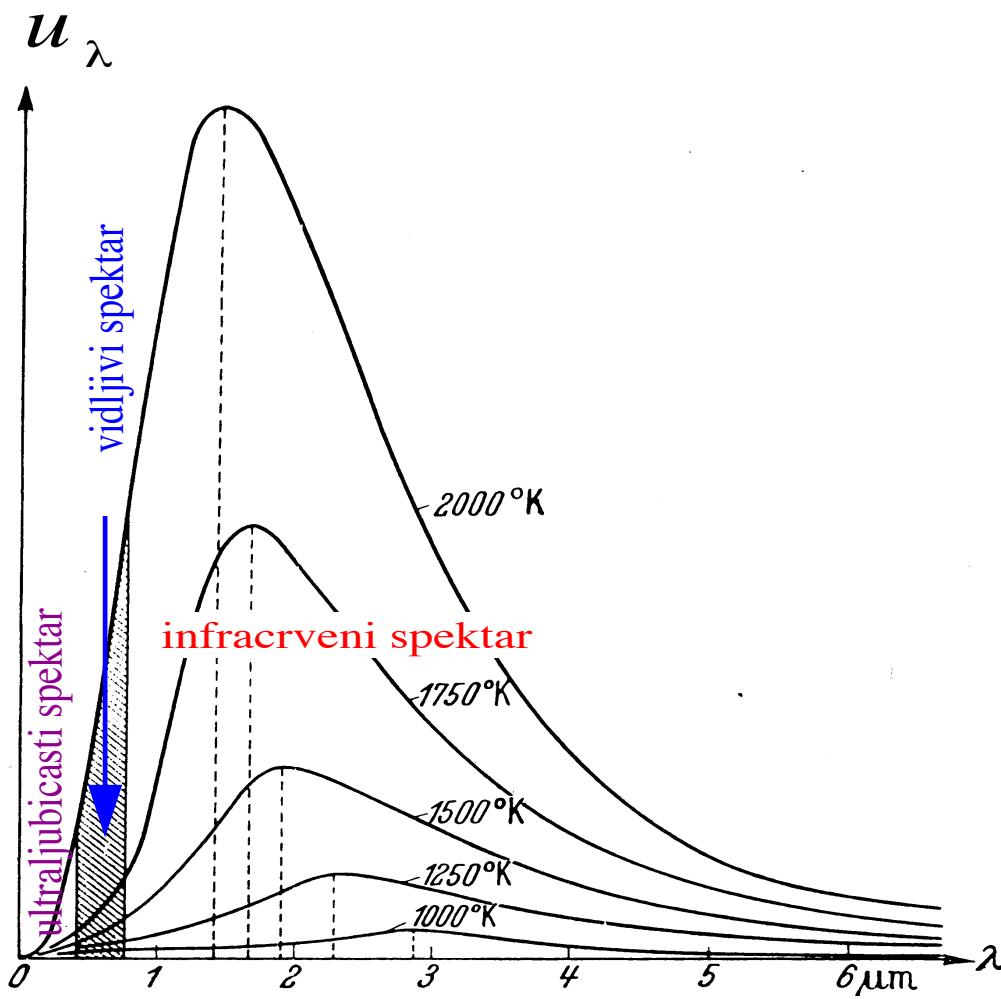
$$\sum_{N=1}^{\infty} Nh\nu(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})e^{-Nh\nu} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (28)$$

Energija zračenja po jedinici volumena je umnožak broja stanja (24) i prosječne energije (28)

$$u_{\nu}(T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = u_{\lambda}(T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (29)$$

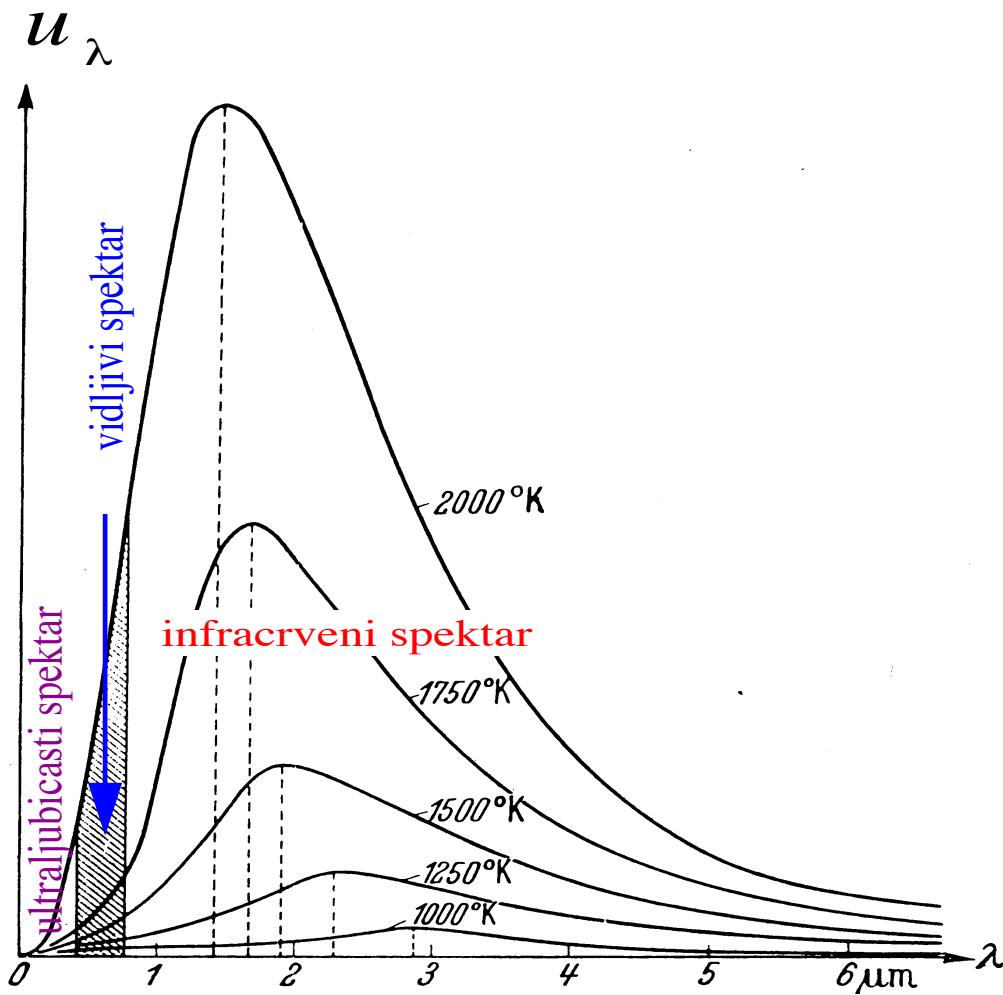
# Planckova distribucija

Distribucija gustoće energije zračenja  $u_\lambda(T)$



# Planckova distribucija

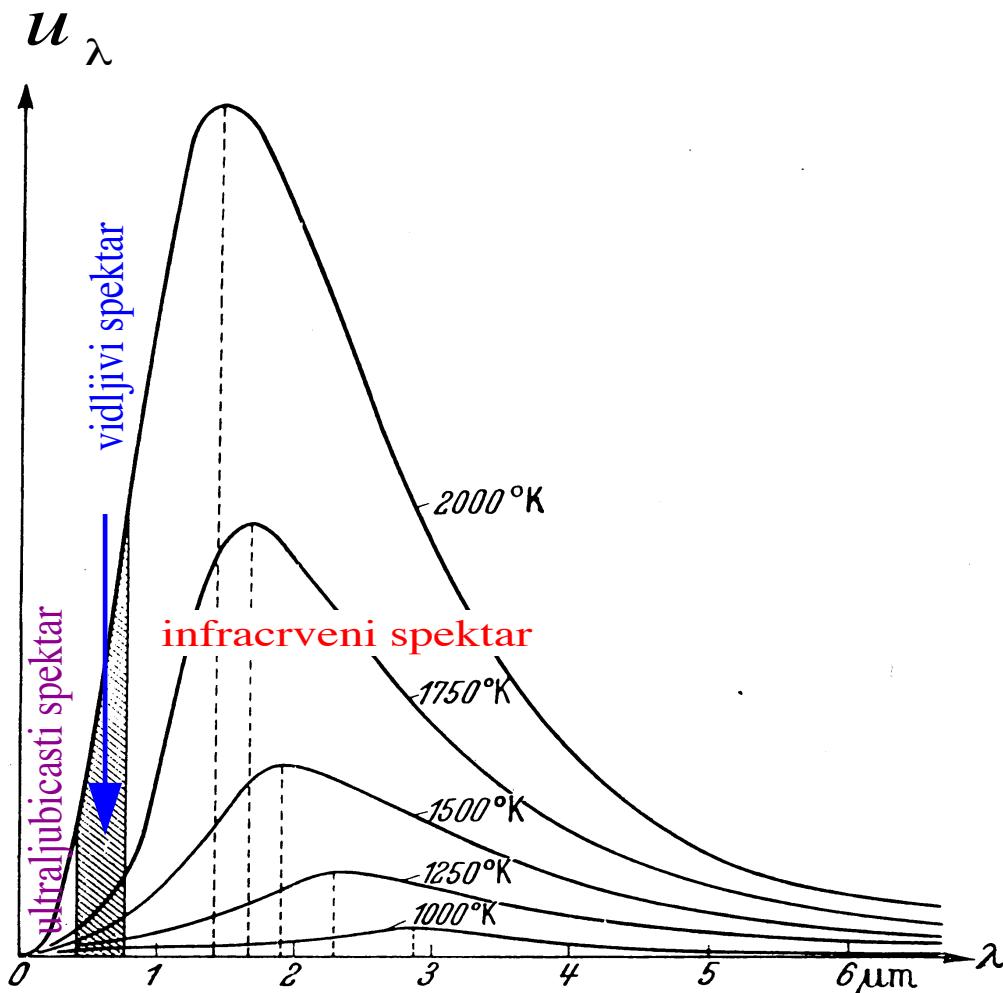
Distribucija gustoće energije zračenja  $u_\lambda(T)$



Zračenje je fotonski plin: usporedi Planckovu distribuciju s Maxwellovim zakonom distribucije brzina čestica idealnog plina

# Planckova distribucija

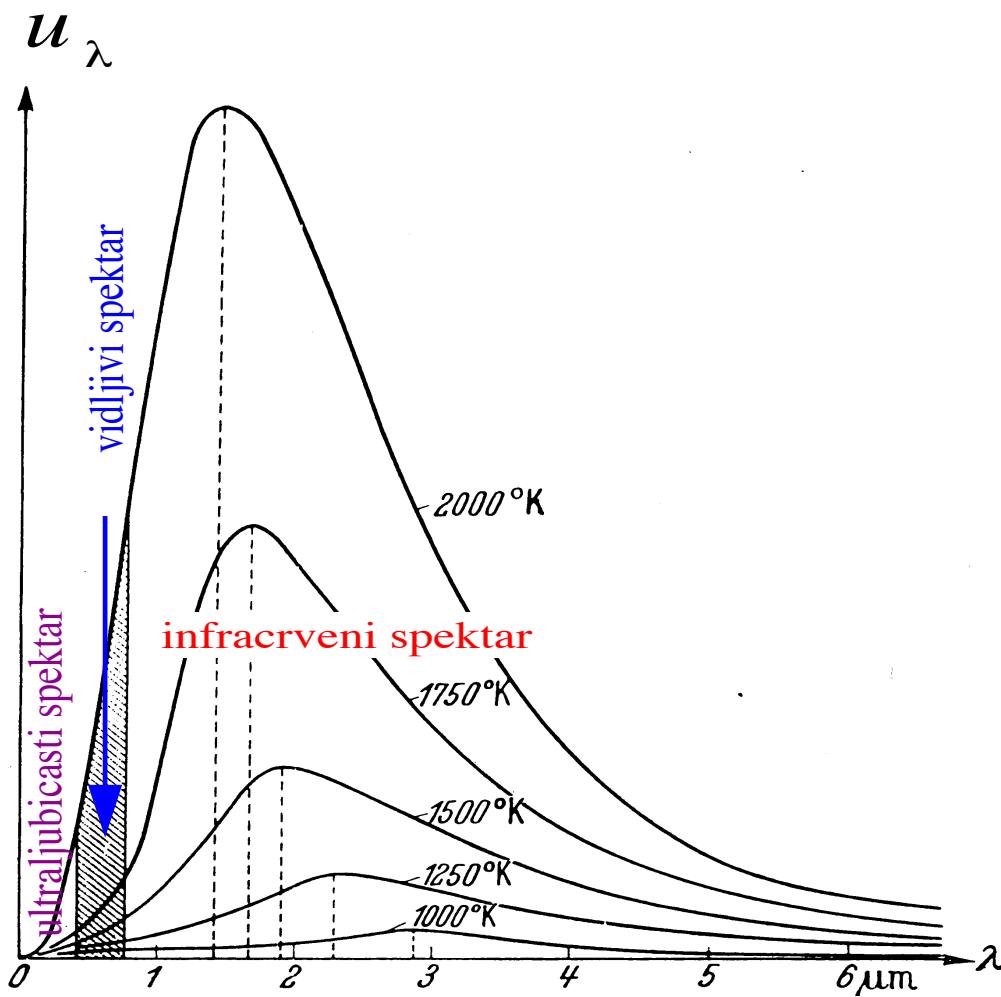
Distribucija gustoće energije zračenja  $u_\lambda(T)$



Za sve toplinske izvore od praktičkog interesa, većina zračenja je u infracrvenom spektru.

# Planckova distribucija

Distribucija gustoće energije zračenja  $u_\lambda(T)$



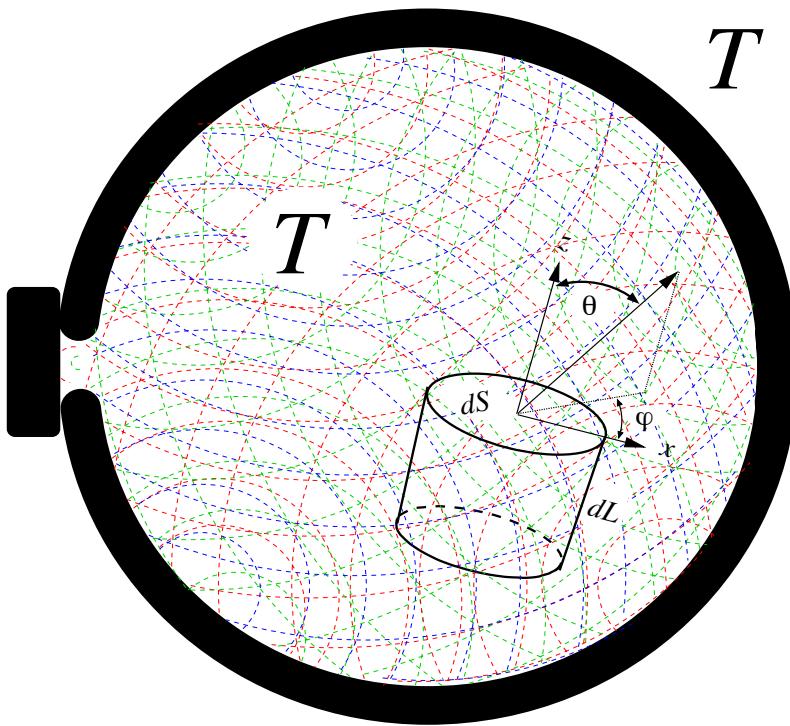
Plamen niže  
temperature  
nije značajan izvor  
toplinskog zračenja.

# Intenzitet zračenja

Intenzitet zračenja

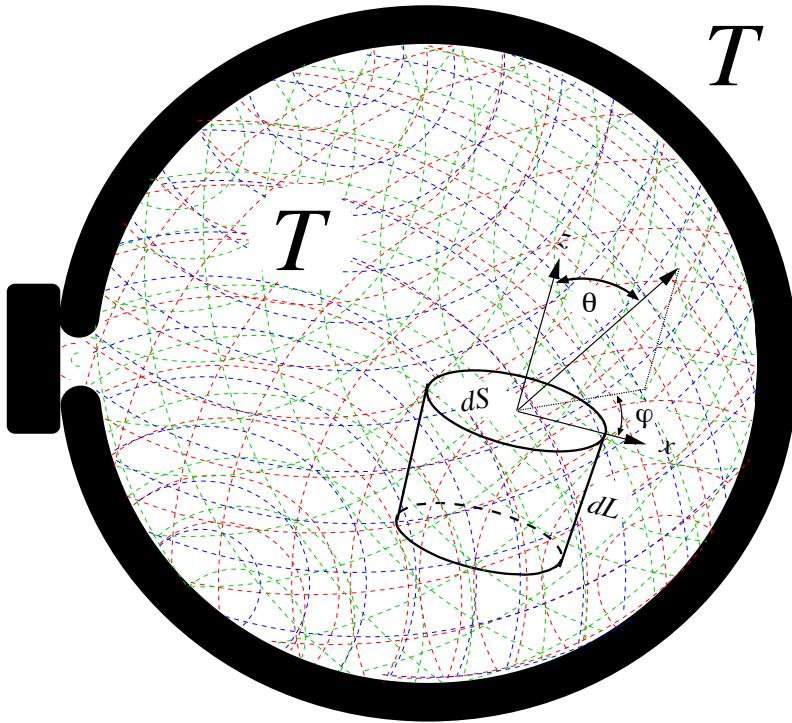
$I(\nu, T)$  je snaga (energija u jedinici vremena) zračenja frekvencije  $\nu$ , na temperaturi  $T$ , po površini i po prostornom kutu.

# Intenzitet zračenja



Promatrajmo energiju zračenja u zamišljenom cilindru s idealno reflektirajućim stjenkama plašta visine  $dL$  i šupljom bazom površine  $dS$  smještenom unutar "kugle crnog tijela" kao na slici. Računamo energiju  $du'$  po jedinici frekvencije unutar cilindra.

# Intenzitet zračenja

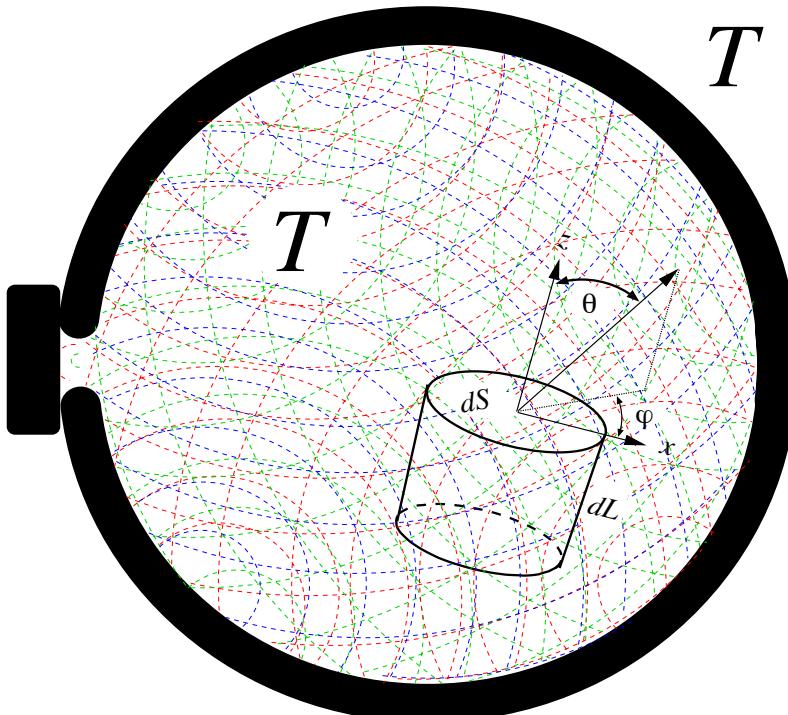


Zračenje intenziteta  $I(\nu)$  ulazi u cilindar u  $\theta, \phi$  smjeru s obzirom na okomicu (os cilindra). Azimut  $\phi$  se mijenja od 0 do  $2\pi$ , a  $\theta$  od 0 do  $\pi/2$  kad zračenje ulazi kroz gornju bazu i od  $\pi/2$  do  $\pi$  kad ulazi kroz donju bazu, dakle, ukupno od 0 do  $\pi$ .

# Intenzitet zračenja

Zračenje je izotropno

→ količina koja ulazi u cilindar neovisna o azimutu  $\phi$ .



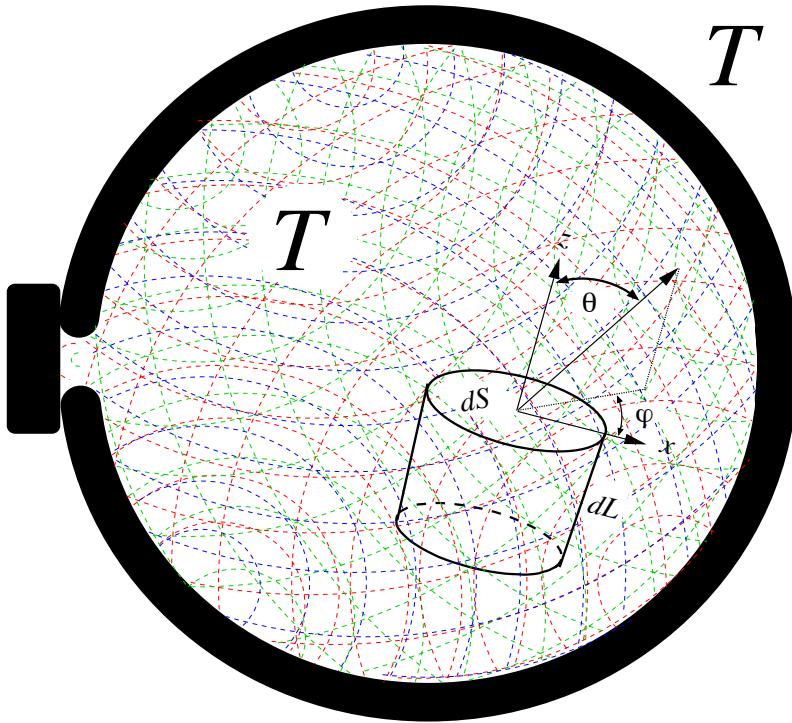
→ Vrijeme potrebno da zračenje napuni cilindar (od  $t = 0$ ) ovisi samo o  $\theta$ . Vertikalna komponenta brzine fotona je  $c \cos \theta$ , pa je  $dt = dL/c \cos \theta$ . Intenzitet zračenja se računa po jediničnoj površini okomitoj na smjer fotona; u smjeru  $\theta$  se presjek zračenja kroz  $dS$  smanjuje na  $\cos \theta dS$ .

# Intenzitet zračenja

Intenzitet zračenja računamo po jediničnoj površini okomitoj na smjer fotona: u smjeru  $\theta$  se presjek zračenja kroz  $dS$  smanjuje na  $\cos \theta dS$ . Prema tome za energiju koja ispunjava volumen cilindra dobivamo:

$$\begin{aligned} du' &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\nu, T) \frac{dL}{c \cos \theta} \cos \theta dS \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi}{c} I(\nu, T) dV \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{c} I(\nu, T) dV \quad (30) \end{aligned}$$

# Intenzitet zračenja

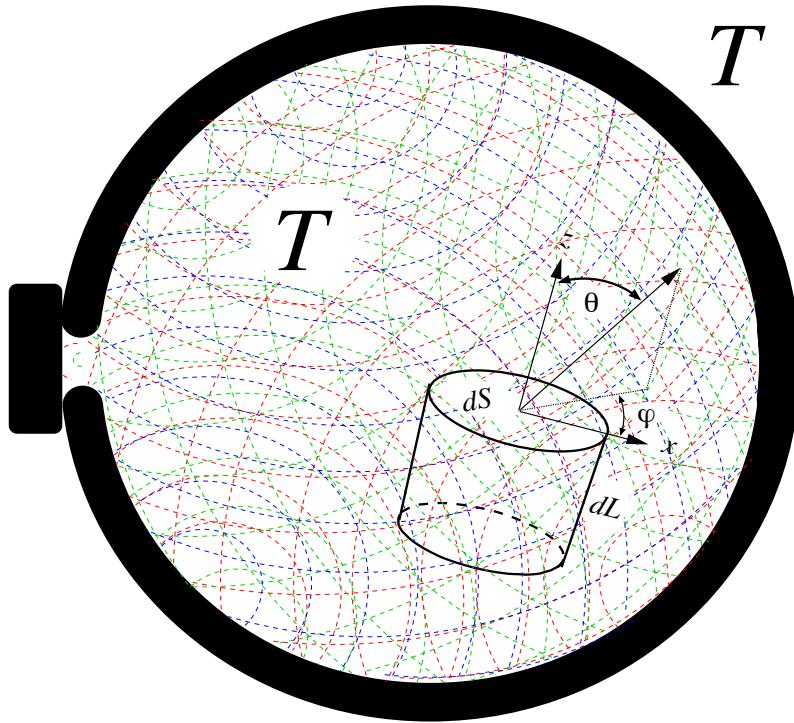


Budući da je  $dV = dL dS$  volumen cilindra, iz (29) i (30) slijedi ( $u = du'/dV$ ):

$$I(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u_\nu(T)$$

$$= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (30)$$

# Intenzitet zračenja



Budući da je  $dV = dL dS$  volumen cilindra, iz (29) i (30) slijedi ( $u = du'/dV$ ):

$$I(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u_\nu(T)$$

$$= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (30)$$

No više nego intenzitet (snaga) zračenja po pojedinim frekvencijama, od praktičnog interesa je ukupna snaga po svim frekvencijama.

# Stefan-Boltzmann-ov zakon

Ukupan intenzitet (snagu) zračenja, kojeg nazivamo *tokom* (ili *fluksom*) zračenja s površine crnog tijela, dobivamo integriranjem  $I(\nu)$  iz jednadžbe (30) po svim frekvencijama:

$$I(T) = \int_0^{\infty} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3} T^4$$

# Stefan-Boltzmann-ov zakon

Ukupan intenzitet (snagu) zračenja, kojeg nazivamo *tokom* (ili *fluksom*) zračenja s površine crnog tijela, dobivamo integriranjem  $I(\nu)$  iz jednadžbe (30) po svim frekvencijama:

$$I(T) = \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3} T^4$$

To je *Stefan-Boltzmann-ov zakon*:

$$I(T) = \sigma T^4 \quad (32)$$

# Stefan-Boltzmann-ov zakon

Ukupan intenzitet (snagu) zračenja, kojeg nazivamo *tokom* (ili *fluksom*) zračenja s površine crnog tijela, dobivamo integriranjem  $I(\nu)$  iz jednadžbe (30) po svim frekvencijama:

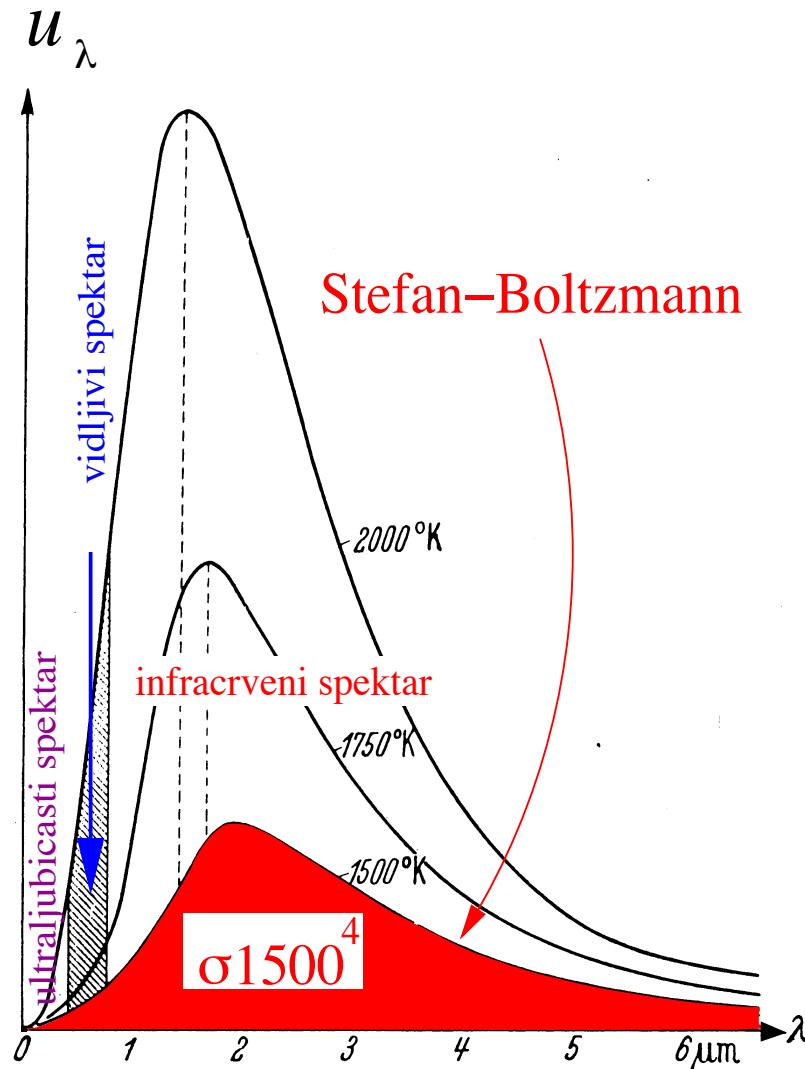
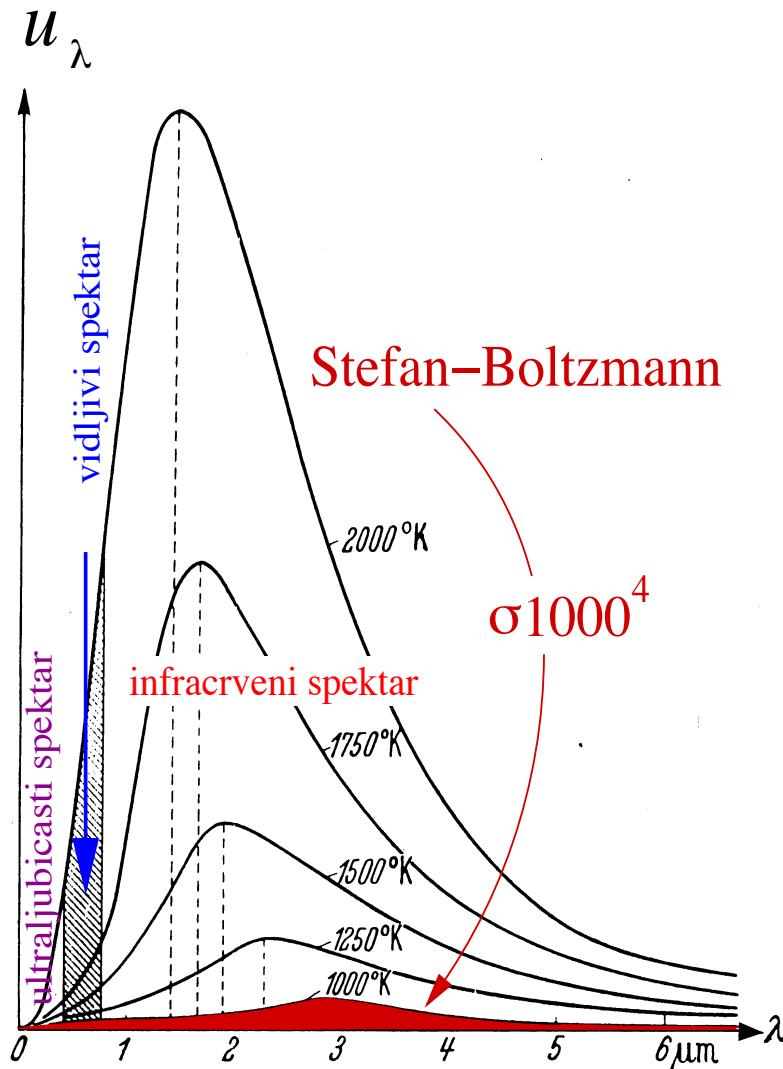
$$I(T) = \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3} T^4$$

To je *Stefan-Boltzmann-ov zakon*:

$$I(T) = \sigma T^4 \quad (32)$$

$\sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  je *Stefan-Boltzmann-ova konstanta*

# Grafički prikaz S-B-a



# Primjene

Stefan-Boltzmann-ov zakon nam kaže da je na dvostruko višoj temperaturi ukupna snaga zračenja 16 puta veća i zato ukupno zračenje treba uzeti u obzir prilikom simulacija požara, posebno kod visoko-temperaturnih sagorijevanja i flashovera.

[http://fire.nist.gov/videotest/xmasTreeVideos/tree\\_fire.mpg](http://fire.nist.gov/videotest/xmasTreeVideos/tree_fire.mpg)

# Primjene

Stefan-Boltzmann-ov zakon nam kaže da je na dvostruko višoj temperaturi ukupna snaga zračenja 16 puta veća i zato ukupno zračenje treba uzeti u obzir prilikom simulacija požara, posebno kod visoko-temperaturnih sagorijevanja i flashovera.

[http://fire.nist.gov/videotest/xmasTreeVideos/tree\\_fire.mpg](http://fire.nist.gov/videotest/xmasTreeVideos/tree_fire.mpg)

Poznavanje zračenja za odabrane frekvencije je važno za simulaciju požara i za mjerjenja temperature i određivanje vrste izgaranja i distribucije po frekvencijama. Ako možemo odrediti maksimalan tok, onda primjenjujemo *Wienov zakon* →

# Wien-ov zakon

Podjimo od  $\lambda$ -oblika jednadžbe (30):  $I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$  i potražimo za koji  $\lambda$  dobivamo maximum:

$$\frac{dI(\lambda, T)}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 5(1 - e^{-hc/\lambda_{\max} kT})$$

# Wien-ov zakon

Podjimo od  $\lambda$ -oblika jednadžbe (30):  $I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$  i potražimo za koji  $\lambda$  dobivamo maximum:

$$\frac{dI(\lambda, T)}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 5(1 - e^{-hc/\lambda_{\max} kT})$$

Odmah vidimo da je rješenje  $hc/\lambda_{\max} kT \approx 5$ .

# Wien-ov zakon

Podjimo od  $\lambda$ -oblika jednadžbe (30):  $I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$  i potražimo za koji  $\lambda$  dobivamo maximum:

$$\frac{dI(\lambda, T)}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 5(1 - e^{-hc/\lambda_{\max} kT})$$

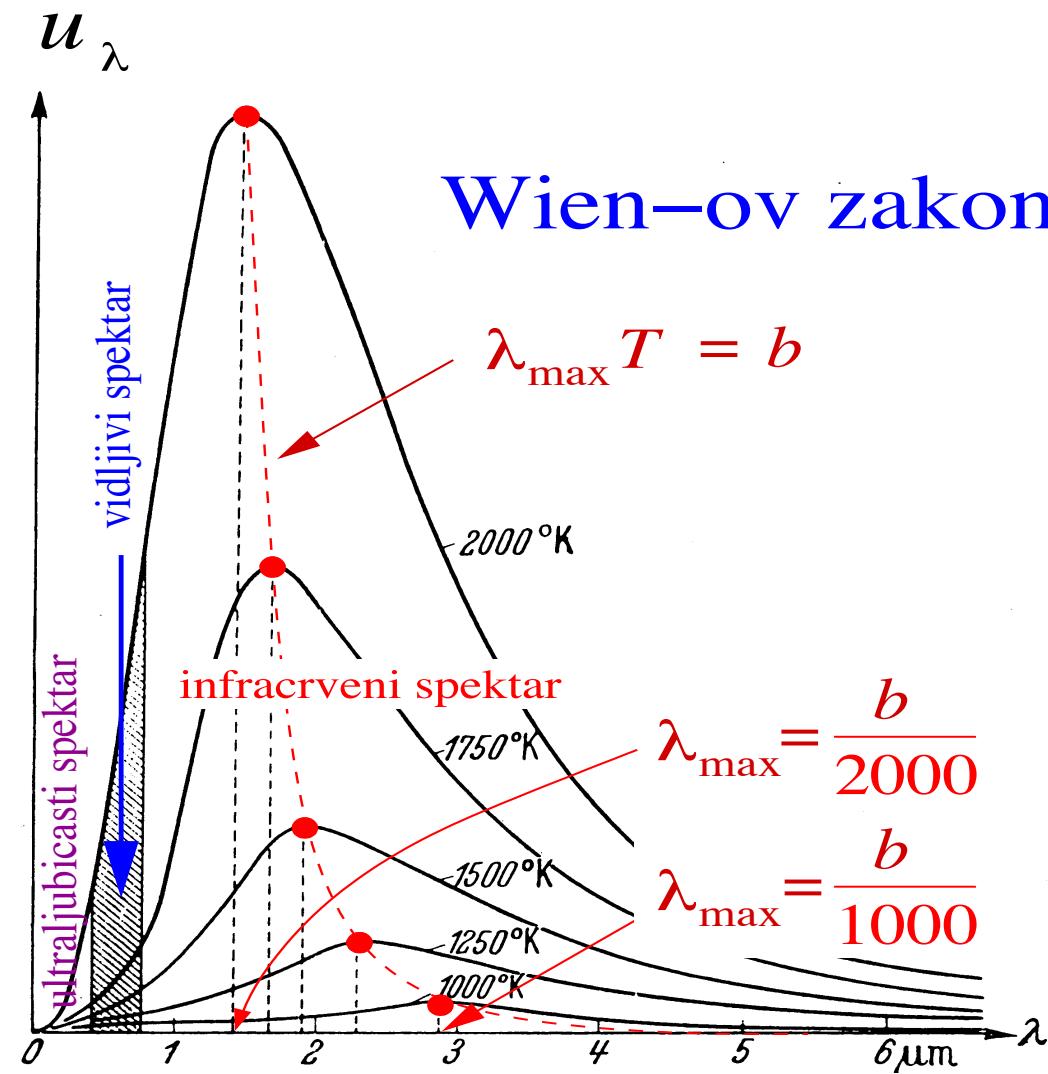
Odmah vidimo da je rješenje  $hc/\lambda_{\max} kT \approx 5$ .

Numeričkim računanjem se dobiva Wienov zakon

$$\boxed{\lambda_{\max} T = b} \quad b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

Crkane linije na slici na str. 57 prikazuju  $\lambda_{\max}$  za tamo prikazane temperature

# Grafički prikaz Wien-a



# Absorbcija, refleksija, transmisijsa

Kad je neko realistično tijelo ozračeno, onda ono dio energije zračenja može absorbitati (faktor absorbcije  $\alpha$ ), reflektirati (faktor refleksije  $\rho$ ) i transmitirati (faktor transmisije  $\tau$ ):

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (33)$$

# Absorbcija, refleksija, transmisijsa

Kad je neko realistično tijelo ozračeno, onda ono dio energije zračenja može absorbitati (faktor absorbcije  $\alpha$ ), reflektirati (faktor refleksije  $\rho$ ) i transmitirati (faktor transmisije  $\tau$ ):

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (33)$$

Većina krutih tijela, čak i kad su transparentna u vidljivom području, nije transparentna za infracrveno zračenje. Dakle, za naše primjene, (33) se pojednostavljuje u

$$\alpha + \rho = 1$$

# Absorbcija, refleksija, transmisijsa

Kad je neko realistično tijelo ozračeno, onda ono dio energije zračenja može absorbitati (faktor absorbcije  $\alpha$ ), reflektirati (faktor refleksije  $\rho$ ) i transmitirati (faktor transmisije  $\tau$ ):

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (33)$$

Većina krutih tijela, čak i kad su transparentna u vidljivom području, nije transparentna za infracrveno zračenje. Dakle, za naše primjene, (33) se pojednostavljuje u

$$\alpha + \rho = 1$$

Za plinove je obrnuto:  $\alpha + \tau = 1$

# Sivo tijelo

Intenzitet zračenja (emisija) sivog (realističnog) tijela  $I_s$  je manji od onog za crno tijelo  $I$ :  $I_s(T) = \epsilon I(T) = \epsilon \sigma T^4$ , gdje je  $\epsilon(T) < 1$  faktor ukupne emisije.

# Sivo tijelo

Intenzitet zračenja (emisija) sivog (realističnog) tijela  $I_s$  je manji od onog za crno tijelo  $I$ :  $I_s(T) = \epsilon I(T) = \epsilon \sigma T^4$ , gdje je  $\epsilon(T) < 1$  faktor ukupne emisije.

Analogno je monokromatski (v. str. 57):

$$I_s(\lambda, T) = \epsilon_\lambda I(\lambda, T),$$

gdje je  $\epsilon_\lambda(T)$  faktor monokromatske emisije.

# Sivo tijelo

Intenzitet zračenja (emisija) sivog (realističnog) tijela  $I_s$  je manji od onog za crno tijelo  $I$ :  $I_s(T) = \epsilon I(T) = \epsilon \sigma T^4$ , gdje je  $\epsilon(T) < 1$  faktor ukupne emisije.

Analogno je monokromatski (v. str. 57):

$$I_s(\lambda, T) = \epsilon_\lambda I(\lambda, T),$$

gdje je  $\epsilon_\lambda(T)$  faktor monokromatske emisije.

Faktor monokromatske emisije i faktor monokromatske absorpcije  $\alpha_\lambda(T)$  su na danoj frekvenciji i temperaturi jednaki:  $\alpha_\lambda(T) = \epsilon_\lambda(T)$

# Sivo tijelo

Intenzitet zračenja (emisija) sivog (realističnog) tijela  $I_s$  je manji od onog za crno tijelo  $I$ :  $I_s(T) = \epsilon I(T) = \epsilon \sigma T^4$ , gdje je  $\epsilon(T) < 1$  faktor ukupne emisije.

Analogno je monokromatski (v. str. 57):

$$I_s(\lambda, T) = \epsilon_\lambda I(\lambda, T),$$

gdje je  $\epsilon_\lambda(T)$  faktor monokromatske emisije.

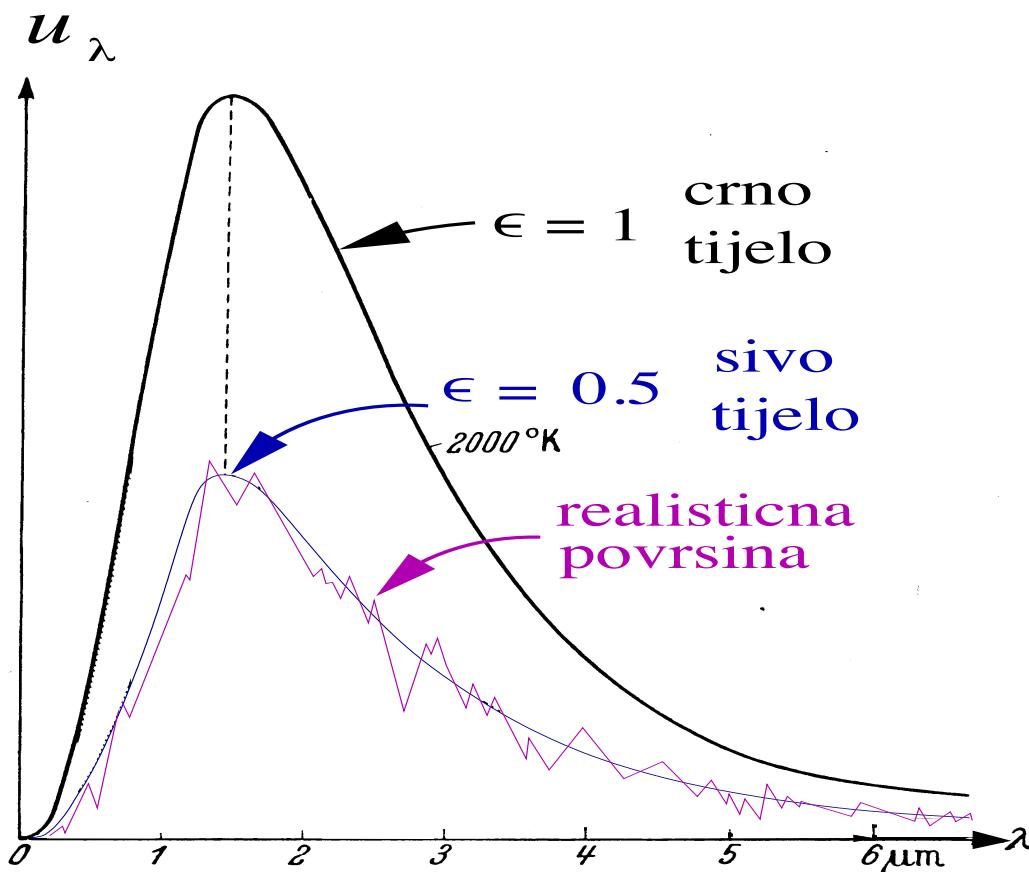
Faktor monokromatske emisije i faktor monokromatske absorbcije  $\alpha_\lambda(T)$  su na danoj frekvenciji i temperaturi jednaki:  $\alpha_\lambda(T) = \epsilon_\lambda(T)$

To je *Kirchhoff-ov zakon*.

# Sivo tijelo—aproksimacija realnog

*Sivo tijelo* je zapravo aproksimacija realističnog tijela:

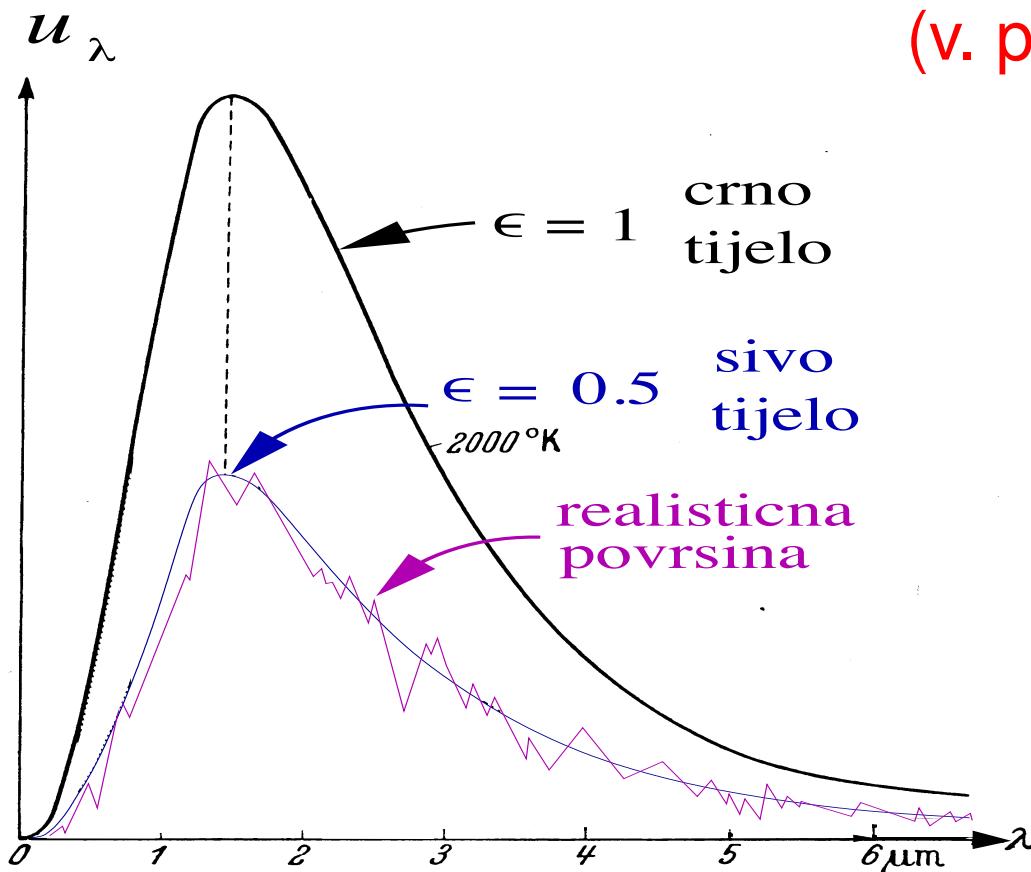
$$(\epsilon_\lambda)_{sivo} = const = \epsilon$$



# Sivo tijelo—aproksimacija realnog

Sivo tijelo je zapravo aproksimacija realističnog tijela:

$$(\epsilon_\lambda)_{sivo} = const = \epsilon$$

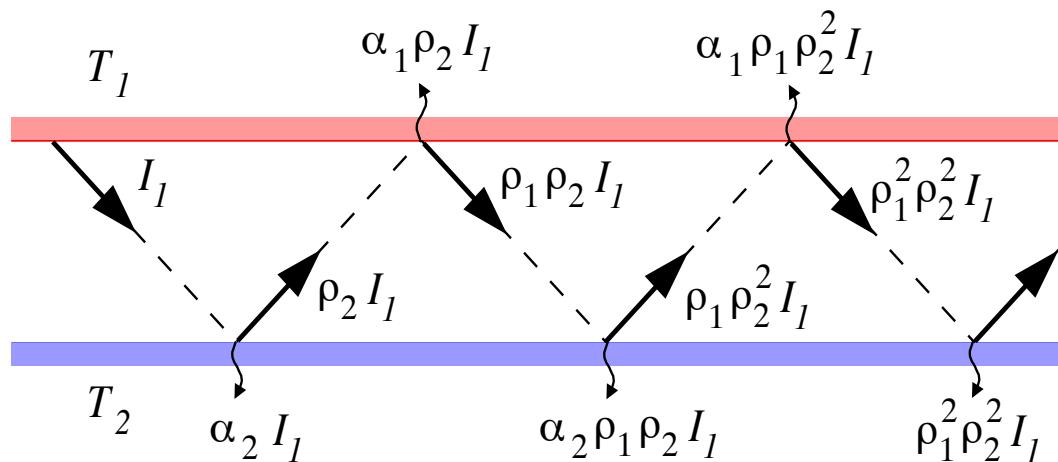


(v. prethodnu stranicu)

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^\infty I_s(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty (\epsilon_\lambda)_s I(\lambda) d\lambda \\ &= \epsilon \int_0^\infty I(\lambda) d\lambda \\ &= \epsilon \sigma T^4 \end{aligned}$$

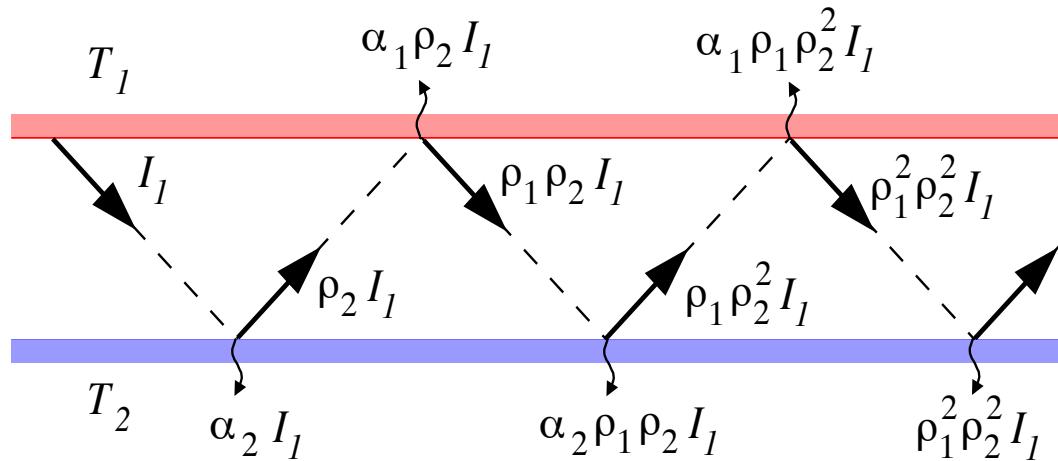
# Sive površine

Simulacija interakcije s okolinom: dvije beskonačne sive ravnine:



# Sive površine

Simulacija interakcije s okolinom: dvije beskonačne sive ravnine:



Toplina prenesena u jedinici vremena i kroz jediničnu površinu s ravnine 1 na ravninu 2 je:

$$\frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{tS} = \alpha_2 I_I + \alpha_2 \rho_1 \rho_2 I_I + \alpha_2^2 \rho_1^2 \rho_2 I_I + \dots = \frac{\alpha_2 I_I}{1 - \rho_1 \rho_2}$$

# Sive površine

Analogno dobivamo:  $\frac{Q_{2 \rightarrow 1}}{tS} = \frac{\alpha_1 I_2}{1 - \rho_1 \rho_2}$

# Sive površine

Analogno dobivamo:  $\frac{Q_{2 \rightarrow 1}}{tS} = \frac{\alpha_1 I_2}{1 - \rho_1 \rho_2}$

Dakle, ukupna izmijenjena snaga zračenja je

$$\frac{Q_{1 \leftrightarrow 2}}{tS} = \frac{\alpha_2 I_1 - \alpha_1 I_2}{1 - \rho_1 \rho_2} \quad (34)$$

# Sive površine

Analogno dobivamo:  $\frac{Q_{2 \rightarrow 1}}{tS} = \frac{\alpha_1 I_2}{1 - \rho_1 \rho_2}$

Dakle, ukupna izmijenjena snaga zračenja je

$$\frac{Q_{1 \leftrightarrow 2}}{tS} = \frac{\alpha_2 I_1 - \alpha_1 I_2}{1 - \rho_1 \rho_2} \quad (34)$$

Uzimajući  $\tau = 0$ , iz (33) i Kirchhoffovog zakona slijedi  $\rho = 1 - \alpha = 1 - \epsilon$  pa se (34), primjenom (32), pojednostavljuje u

$$Q_{1 \leftrightarrow 2} = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} t \quad (35)$$

Mnoge druge realističnije interakcije zračenjem su dobavljive iz literature.

# Otpor zračenja

(35) se može napisati i u obliku

$$Q_{1 \leftrightarrow 2} = \frac{T_1 - T_2}{R} t, \quad (36)$$

gdje je  $R$  toplinski otpor zračenja:

$$R = \frac{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}{(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)\sigma S} \quad (37)$$

# Otpor zračenja

(35) se može napisati i u obliku

$$Q_{1 \leftrightarrow 2} = \frac{T_1 - T_2}{R} t, \quad (36)$$

gdje je  $R$  toplinski otpor zračenja:

$$R = \frac{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}{(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)\sigma S} \quad (37)$$

analogno prikazu toplina kondukcije i konvekcije, (21) i (23), na str. 40 i 42.

# Otpori u seriji

Toplina koja na jednoj strani uđe, mora na drugoj izaći.  
Dakle  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ , odakle je

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \dots = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n}$$

# Otpori u seriji

Toplina koja na jednoj strani uđe, mora na drugoj izaći.  
Dakle  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ , odakle je

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \dots = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2 + T_3 R_1}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1 - T_3}{R_3} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

# Otpori u seriji

Toplina koja na jednoj strani uđe, mora na drugoj izaći.  
Dakle  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ , odakle je

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \dots = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2 + T_3 R_1}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1 - T_3}{R_3} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow R_3 = R_1 + R_2; \quad \text{slično: } R_4 = R_1 + R_2 + R_3$$

# Otpori u seriji

Toplina koja na jednoj strani uđe, mora na drugoj izaći.  
Dakle  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ , odakle je

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \dots = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2 + T_3 R_1}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1 - T_3}{R_3} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow R_3 = R_1 + R_2; \quad \text{slično: } R_4 = R_1 + R_2 + R_3$$

Indukcijom dobivamo:

$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i \quad (38)$$

# Otpori u paraleli

Ukupna toplina je suma svih pojedinačnih:

$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ , odakle je

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} + \dots + \frac{T_1 - T_2}{R_n} = \frac{T_1 - T_2}{R_p}$$

# Otpori u paraleli

Ukupna toplina je suma svih pojedinačnih:

$$Q_p = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n, \text{ odakle je}$$

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} + \cdots + \frac{T_1 - T_2}{R_n} = \frac{T_1 - T_2}{R_p}$$

Slijedi:  $\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (39)$

# Otpori u paraleli

Ukupna toplina je suma svih pojedinačnih:

$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ , odakle je

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} + \dots + \frac{T_1 - T_2}{R_n} = \frac{T_1 - T_2}{R_p}$$

Slijedi:  $\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$  (39)

Pogledajmo sad primjenu dobivenih rezultata na požar visokih temperatura s intenzivnim toplinskim tokovima u zatvorenim prostorima.