

Rotacije opisane s kvaternioni

Seminar

Timotej Mlakar
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

3. april 2023

1 Uvod

Rotacije \mathbb{R}^3 navadno opisujemo z linearnimi preslikavami oziroma njim pripadajočimi matrikami. Zaradi narave matričnega množenja so lahko take operacije precej računsko časovno in prostorsko zahtevne. Tako lahko rotacije \mathbb{R}^3 predstavimo kot stranske učinke transformacij $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$.

Najprej se spomnimo rotacij na $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Naj bo $w = \frac{v}{|v|}$ za poljuben $v \in \mathbb{C}$. Preslikava $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \varphi(z) = wz$ je bijektivna preslikava, ki zavrti celotno kompleksno ravnino za kot $\arg(z)$ okoli izhodišča.

Če v zapišemo v polarnem zapisu kot $|z|e^{i\theta}$, je tedaj preslikava

$$\varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \\ \varphi(\theta, z) = ze^{i\theta}$$

zvezno odvedljiva na $[0, 2\pi] \times \mathbb{C}$. Za fiksen $z \in \mathbb{C}$ preslikava φ opiše krožnico z radijem $|z|$, za fiksen θ pa preslikava opiše rotacijo ravnine za kot θ .

Vemo torej, da se vsak $z \in \mathbb{C}$ da zapisati v polarnih koordinatah. Spomnemo se zapisa

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos\theta + |z|i\sin\theta,$$

kjer je $\theta \in \mathbb{R}$. Zapis ni enoličen, saj nam vsaka $\theta' = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ opiše isto kompleksno število. Tak zapis bomo v podobnem smislu uporabili kasneje.

Definiramo $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + iy$. S preprostim računom pokažemo, da je Φ izomorfizem.

Vidimo, da namesto množenja vektorja z matriko lahko rotacijo realne ravnine predstavimo s preprostim množenjem dveh kompleksnih števil. To motivira podobni razmislek za rotacije v \mathbb{R}^3 .

2 Kvaternionska algebra

2.1 Definicije in oznake

Definicija 1 Naj bo V 4-razsežen vektorski prostor nad \mathbb{R} . Izberemo bazo $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$. Elementi V so oblike $\mathbf{q} = q_0\mathbf{1} + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \vec{q}$. Vektorski prostor V opremimo z operacijo množenja tako, da definiramo množenje njegovih baznih elementov, in sicer

$$\begin{aligned}\mathbf{1}\mathbf{1} &= \mathbf{1}, & \mathbf{1}i &= i, & \mathbf{1}j &= j, & \mathbf{1}k &= k, \\ ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Naj bosta $p, q \in \mathbb{H}$. Definiramo seštevanje in množenje s skalarjem kot običajno

$$\begin{aligned}p + q &= (p_0 + q_0) + (\vec{p} + \vec{q}), \\ \lambda q &= \lambda(q_0 + \vec{q}) = \lambda q_0 + (\lambda \vec{q}).\end{aligned}$$

Prav tako definiramo običajno množenje v skladu z definicijo množenja baznih elementov. Tedaj lahko produkt pq napišemo kot

$$pq = (p_0q_0 - \vec{p}\vec{q}) + (p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}),$$

kjer je $\vec{p}\vec{q}$ običajni skalarni produkt v \mathbb{R}^3 . Tedaj V postane 4-razsežna algebra nad \mathbb{R} , označimo \mathbb{H} in jo imenujemo Kvaternionska algebra.

Opomba 1 Za $p, q \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq).$$

Definicija 2 Naj bo $q = q_0 + \vec{q} \in \mathbb{H}$. S $\bar{q} = q_0 - \vec{q}$ označimo konjugirani kvaternion q .

Velja, da je $q\bar{q} \in \mathbb{R}$. Tako lahko definiramo še

$$q^{-1} = \frac{1}{q\bar{q}}\bar{q}.$$

Prav tako lahko vidimo da je $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$. Ker množenje kvaternionov ni komutativno, v splošnem $\overline{pq} \neq \bar{q}\bar{p}$. Ker je \mathbb{H} algebra, je na njej smiselno definirati skalarni produkt.

Definicija 3 Naj bosta $p, q \in \mathbb{H}$. Definiramo skalarni produkt kvaternionov

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}(\bar{p}q + \bar{q}p).$$

Norma porojena s skalarnim produktom je tedaj

$$|q| = ||q|| = \sqrt{\langle q, q \rangle}.$$

Opomba 2 Iz definicije skalarnega produkta takoj sledi $\langle q, q \rangle = q\bar{q} = \bar{q}q$. Podobno kot absolutna vrednost na \mathbb{R} in \mathbb{C} je norma na kvaternionih multiplikativna.

Za poljubna $p, q \in \mathbb{H}$ torej velja $|pq| = |p||q|$. Oglejmo si $|pq|^2$

$$|pq|^2 = \langle pq, pq \rangle = pq\bar{p}\bar{q}.$$

Spomnimo se, da $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$. Torej je

$$pq\bar{p}\bar{q} = p \cdot q \cdot \bar{q} \cdot \bar{p} = p|q|^2\bar{p}.$$

Ker je $|q|^2$ skalar, pri množenju komutira s kvaternioni. Torej

$$p|q|^2\bar{p} = |q|^2p\bar{p} = |q|^2|p|^2 = |p|^2|q|^2.$$

Sledi torej $|pq| = |p||q|$.

Podobno kot pri rotaciji kompleksne ravnine, kjer množimo s števili iz enotske krožnice, tukaj potrebujemo enotske kvaternione.

Definicija 4 Naj bo $q \in \mathbb{H}$. Kvaternion q imenujemo versor oziroma enotski kvaternion, če velja $|q| = 1$. Če je $q \in \mathbb{H}$ poljuben $|q| \neq 1$ versor kvaterniona q dobimo z normiranjem. Označimo ga z $U_q = \frac{q}{|q|}$. Množico versorjev označimo s \mathbf{Q}_e

Če velja $u \in \mathbb{H}, u = \vec{u}$ in $|u| = 1$, kvaternion u imenujemo čisti oziroma pravi versor. Množico pravih versorjev označimo z \mathbf{U}_e .

Kvaternione oblike $q = q_0\mathbf{1}, q_0 \in \mathbb{R}$ imenujemo skalarni kvaternioni.

Če vzamemo množici \mathbf{Q}_e in \mathbf{U}_e skupaj z operacijo množenja se izkaže, da sta podgrupi edinki \mathbb{H} . Ker je $\mathbf{U}_e \subseteq \mathbf{Q}_e$, je tudi \mathbf{U}_e podgrupa edinka grupe \mathbf{Q}_e . Ker nobena od teh množic ni zaprta za seštevanje, ni nobena ideal \mathbb{H} .

Opomba 3 Za čista versorja $u, v \in \mathbf{U}_e$ velja da $\langle u, v \rangle = 0 \iff uv + vu = 0$.

Naj bosta $u, v \in \mathbf{U}_e$. Za poljuben versor iz \mathbf{U}_e velja $\bar{u} = -u$. Pogledamo $\langle u, v \rangle$:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\bar{u}v + \bar{v}u) = \frac{1}{2}(-uv - vu) = -\frac{1}{2}(uv + vu).$$

Od tu sledi da $\langle u, v \rangle = 0 \iff uv + vu = 0$.

Tukaj opomnimo še naslednje: naj bo $u \in \mathbf{U}_e$. Ker $|u| = 1$ sledi, da je u neničeln kvaternion. Ker je $\mathbf{U}_e \subset \mathbb{H}$ in je \mathbb{H} algebra, je vsak neničeln kvaternion obrnljiv. Vemo torej, da obstaja tak u^{-1} da je

$$uu^{-1} = 1.$$

Ker je za poljuben $q \in \mathbb{H}$, $q^{-1} = \frac{1}{\bar{q}q}\bar{q}$, za $u \in \mathbf{U}_e$ pa velja $u\bar{u} = |u|^2$, je

$$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{|u|^2} = \frac{-u}{1} = -u.$$

Če združimo ti dve dejstvi, velja še naslednja enakost:

$$uu^{-1} = -uu = -u^2 = 1 \Rightarrow u^2 = -1.$$

2.2 Zapis kvaternionov v polarni obliki

Podobno kot kompleksna števila lahko kvaternione zapišemo v polarni obliki. T.j. kompleksno število $z = x + iy$ lahko zapišemo kot $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Z *eulerjevo formulo* lahko to kompleksno število zapišemo kot $z = e^{i\theta}$.

V kompleksni ravnini je ta zapis dobro definiran, saj imamo le eno kompleksno enoto i . V kvaternionih pa imamo celo množico čistih enotskih kvaternionov \mathbf{U}_e , s katerimi lahko zapišemo kvaternion.

Trditev 1 Naj bo $q \in \mathbb{H}$. Tedaj obstajajo $r, \theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \mathbf{U}_e$, da

$$q = r(\mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta).$$

Opomba 4 Preden dokažemo trditev opazimo, da tukaj zagotavljamo le obstoj in ne enoličnosti.

Preprost protiprimer za enoličnost je $q \in \mathbf{Q}_e$, $q = \mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta$. Pogledamo $\theta' = -\theta$ in $u' = \bar{u} = -u$. Tedaj je

$$\mathbf{1} \cos \theta' + u' \sin \theta' = \mathbf{1} \cos(-\theta) - u \sin(-\theta) = \mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta = q.$$

Vidimo, da ima q torej 2 zapisa.

Opomba 5 Če v trditvi za r vzamemo 1, dobimo vse kvaternione oblike $\mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta$. Torej je množica $\{\mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta; \theta \in \mathbb{R}, u \in \mathbf{U}_e\}$ enaka \mathbf{Q}_e .

Dokaz: Naj bo $q \in \mathbb{H}$. Razpišemo $q = q_0 + \vec{q}$. Definiramo $q' = \frac{1}{|q|}(q_0 + \vec{q}) = q'_0 + \vec{q}'$. Velja $|q'| = \frac{1}{|q|}|q| = 1$.

Ker je $q'_0 \mathbf{1}$ pravokoten na \vec{q}' , velja pitagorov izrek:

$$|q'_0|^2 + |\vec{q}'|^2 = |q'|^2 = 1.$$

Naj bo $\theta \in \mathbb{R}$. Za q'_0 vzamemo $\mathbf{1} \cos \theta$. Podobno želimo narediti še s \vec{q}' . Ker je \vec{q}' čisti kvaternion (t.j. $\vec{q}' \in \mathbb{H} - \mathbb{R}$), želimo k drugemu delu zapisa dati čisti enotski kvaternion. Naj bo torej $u \in \mathbf{U}_e$. Pogledamo $\mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta$.

$$|\mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta|^2 = \cos^2 \theta + |u|^2 \sin^2 \theta.$$

Ker je $u \in \mathbf{U}_e$, je $|u| = 1$.

$$\Rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Imamo torej $q' = q'_0 + \vec{q}' = \mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta$. Sledi

$$q = |q| \cdot q' = |q|(\mathbf{1} \cos \theta + u \sin \theta).$$

□

Zaradi lažjega računanja bomo polarni zapis kvaternionov spremeniti v eksponentni zapis. Spet se najprej spomnimo kompleksne ravnine, kjer lahko vsak $z \in \mathbb{C}$ zapišemo kot $|z|e^{i\varphi}$ za nek $\varphi \in \mathbb{R}$. To naredimo, saj je tako algebraična manipulacija kompleksnih izrazov lažja.

Vzamemo Taylorjev razvoj e^t . Velja

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

V Taylorjev razvoj vstavimo $t = u\theta$, $u \in \mathbf{U}_e$, $\theta \in \mathbb{R}$. Dobimo

$$e^{u\theta} = 1 + u\theta + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^3}{6} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \dots$$

Spomnimo se, da ker je $u \in \mathbf{U}_e$, velja $u^2 = -1$. Ker e^t konvergira enakomerno povsod, lahko vrsto preuredimo, in sicer:

$$\begin{aligned} & 1 + u\theta + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^3}{6} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \dots = \\ & (1 + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \dots) + (u\theta + \frac{(u\theta)^3}{6} + \dots) = \\ & (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots) + u(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots) \end{aligned}$$

V levem in desnem oklepaju vidimo taylorjev razvoj funkcij \cos in \sin . Sleditorej

$$e^{u\theta} = \cos \theta + u \sin \theta.$$

Zgornjo trditev lahko sedaj spremenimo v lepšo obliko, t.j. za vsak $q \in \mathbf{Q}_e$ obstajata $\theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \mathbf{U}_e$, da velja $q = e^{u\theta}$.

Opomba 6 Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$. Vemo, da produkt kvaternionov ni komutativen, t. j. $pq \neq qp$. Če p in q zapišemo v polarni obliki, $p = e^{u\theta}$, $q = e^{v\varphi}$, lahko produkta napišemo kot

$$pq = e^{u\theta} e^{v\varphi} \text{ in } qp = e^{v\varphi} e^{u\theta}.$$

Zaradi nekomutativnosti prav tako sledi da $e^{u\theta} e^{v\varphi} \neq e^{v\varphi} e^{u\theta}$. Če bi tak produkt obstajal, bi v eksponentu imeli primer nekomutativne vsote, kar pa je seveda v protislovju z definicijo vsote iz algebre \mathbb{H} .

Zanima nas, kdaj taki kvaternioni komutirajo.

Trditev 2 Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$ taka, da $\exists u \in \mathbf{U}_e$, da $p = e^{u\theta}$ in $q = e^{u\varphi}$ za neka $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Tedaj je $pq = qp$.

Dokaz: Zapišemo $p = \cos \theta + u \sin \theta$, $q = \cos \varphi + u \sin \varphi$. Spomnimo se, da skalarji komutirajo z vsemi kvaternioni. Torej je

$$\begin{aligned} pq &= (\cos \theta + u \sin \theta)(\cos \varphi + u \sin \varphi) \\ &= \cos \theta(\cos \varphi + u \sin \varphi) + u \sin \theta(\cos \varphi + u \sin \varphi) \\ &= (\cos \varphi + u \sin \varphi) \cos \theta + (u \cos \varphi + u^2 \sin \varphi) \sin \theta \\ &= (\cos \varphi + u \sin \varphi) \cos \theta + (\cos \varphi + u \sin \varphi) u \sin \theta \\ &= (\cos \varphi + u \sin \varphi)(\cos \theta + u \sin \theta) = qp. \end{aligned}$$

□

Trditev nam pove, da kvaternioni z različnim realnim argumentom in istim versorjem med sabo komutirajo. Lahko torej zapišemo, da

$$p, q \in \mathbb{H}. pq = qp \iff U_p = U_q.$$

Prav tako komutirata kvaterniona, ki sta zapisana s konjugiranimi versorjema, saj je to ekvivalentno negativnemu argumentu v polarnem zapisu.

3 Preslikava rotacije

3.1 Preslikava

Definicija 5 Naj bo $q \in \mathbf{Q}_e$. Označimo preslikavi $L_q, R_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ levega in desnega množenja:

$$L_q x = qx, R_q x = xq.$$

Vidimo, da sta L_q in R_q linearni preslikavi. Naj bosta $x, y \in \mathbb{H}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$L_q(\alpha x + \beta y) = q(\alpha x + \beta y).$$

Uporabimo komutativnost skalarjev in levo distributivnost nad kvaternioni:

$$q(\alpha x + \beta y) = \alpha qx + \beta qy = \alpha L_q x + \beta L_q y.$$

S podobnim računom pokažemo, da je R_q tudi linearna. Poleg tega vidimo, da sta preslikavi ortogonalni, t.j., da ohranjata skalarni produkt. Iz tega sledi tudi, da sta preslikavi L_q in R_q izometriji prostora. Ti preslikavi med sabo komutirata, saj za $p, q \in \mathbf{Q}_e$ in fiksen $x \in \mathbb{H}$:

$$(L_p \circ R_q)x = p(xq) = (px)q = (R_q \circ L_p)x.$$

Njun kompozitum je prav tako ortogonalna preslikava. Definiramo torej kompozitum preslikav kot posebno preslikavo

Definicija 6 Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$. S $C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ označimo kompozitum levega in desnega množenja

$$C_{p,q} = L_p \circ R_q = R_q \circ L_p.$$

C je za poljubna $p, q \in \mathbf{Q}_e$ bijektivna in ortogonalna. Ortogonalnost sledi iz kompozicije dveh ortogonalnih preslikav, surjektivnost je očitna. Injektivnost preverimo z uporabo pravil krajsanja v kvaternionski algebri \mathbb{H} . Če je namreč $C_{p,q}x = C_{p,q}y$, je to enako $pxq = pyq$. Ker lahko kvaternione okrajšamo, sledi $x = y$.

Naj bodo $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbf{Q}_e$. Označimo preslikavi $C_{p_1, q_1}, C_{p_2, q_2}$. Če preslikavi komponiramo, je rezultat ponovno preslikava take oblike, t.j. $C_{p_1 p_2, q_2 q_1}$. Inverz te preslikave je prav tako ortogonalna preslikava, namreč $C_{p,q}^{-1} = C_{p^{-1}, q^{-1}}$. Imamo torej grupo preslikav za komponiranje nad \mathbf{Q}_e . Opomnimo samo, da se pri komponiranju teh preslikav vrstni red desnega množenja obrne.

Posebej omenimo množico preslikav oblike $C_{q, \bar{q}}$. Vemo, da se da q zapisati v polarni obliki kot $\cos \theta + u \sin \theta = e^{u\theta}$ za neka $u \in \mathbf{U}_e, \theta \in \mathbb{R}$. Ker je $q \in \mathbf{Q}_e$, je $\bar{q} = e^{-u\theta}$. Preslikavo $C_{q, \bar{q}}$ je torej možno zapisati kot

$$Cx := C_{q,\bar{q}}x = e^{u\theta}xe^{-u\theta}.$$

Ker je C ortogonalna preslikava, ohranja skalarni produkt. Spomnimo se, da so skalarni kvaternioni in čisti kvaternioni pravokotni, saj če $\alpha \in \mathbb{R}$ in $q \in \mathbb{H} - \mathbb{R}$, je $\langle \alpha, q \rangle = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}q + \bar{q}\alpha)$. Ker je $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\bar{\alpha} = \alpha$. Torej je dalje skalarni produkt enak $\frac{1}{2}(\alpha q - \alpha q) = 0$. Prostor skalarjev je torej invarianten za preslikavo C . Od tu naprej označujemo prostor čistih kvaternionov z $\mathbb{H} - \mathbb{R} = \mathbb{E}^3$.

Izrek 1 *Naj bo $u \in \mathbf{U}_e$ in $\theta \in \mathbb{R}$. Preslikava $C = C_{q,\bar{q}}$ je rotacija ravnine, pravokotne na u za kot 2θ .*

Dokaz: Najprej pogledamo, kaj se zgodi z kvaternioni, ki ležijo na ogrinjači versorja u . Naj bo $u \in \mathbf{U}_e$.

$$C_{q,\bar{q}}u = e^{u\theta}ue^{-u\theta}.$$

Ker je hkrati tudi $u \in \mathbf{Q}_e$, se u da zapisati kot $\cos \frac{\pi}{2} + u \sin \frac{\pi}{2} = e^{u\frac{\pi}{2}}$. Spomnimo se, da kvaternioni, izraženi z istim versorjem, med sabo komutirajo. Torej je

$$e^{u\theta}ue^{-u\theta} = e^{u\theta}e^{-u\theta}u = u.$$

Vidimo torej, da je tudi $\text{Lin}\{u\}$ invariantna. Preslikava C torej fiksira dve dimenziji prostora \mathbb{H} . Ker je preslikava C ortogonalna, ohranja tudi ortogonalni komplement $\text{Lin}\{u\}$. Označimo $L^\perp = (\text{Lin}\{u\})^\perp$. Naj bo $v \in L^\perp$. Za bazo ravnine, pravokotne na u , vzamemo kvaterniona v in $w = uv = u \times w$. Za v velja naslednje:

$$\begin{aligned} ve^{-u\theta} &= v(\cos \theta - u \sin \theta) \\ &= v \cos \theta - vu \sin \theta \\ &= v \cos \theta + uv \sin \theta \\ &= (\cos \theta + u \sin \theta)v = e^{u\theta}v. \end{aligned}$$

Torej, če s C slikamo v :

$$C(v) = e^{u\theta}ve^{-u\theta} = e^{u\theta}e^{u\theta}v = e^{2u\theta}.$$

Če $e^{2u\theta}v$ zapišemo kot $v \cos 2\theta + uv \sin 2\theta = v \cos 2\theta + w \sin 2\theta$, vidimo podobno, kot bi imeli rotacijo \mathbb{R}^2 . Prav tako s C preslikamo w :

$$C(w) = e^{u\theta}we^{-u\theta} = e^{u\theta}uwe^{-u\theta} = e^{u\theta}ue^{u\theta}v = e^{u\theta}e^{u\theta}uv = e^{2u\theta}w.$$

Zapišemo še w kot $w \cos 2\theta + wu \sin 2\theta = w \cos 2\theta - v \sin 2\theta$.

Ker je \mathbb{H} algebra, je obenem tudi vektorski prostor. Zato je smiselno napisati matriko preslikave C glede na bazo $\{v, w\}$. C tedaj ustreza matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Preslikava C torej predstavlja transformacijo \mathbb{H} , ki fiksira skalarje \mathbb{R} in eno dimenzijo prostora \mathbb{E}^3 , ki sovпада z u , drugi dve pa obrne.

□

Omenimo še, da C ohranja orientacijo, saj je ortogonalna preslikava. C torej zarotira ravnino v pozitivni smeri.

3.2 Izbira smeri in baze

4 Vektorsko polje nad \mathbb{H}

Motivacija

4.1 Vpeljava vektorskega polja s preslikavo C

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

proper pravi

pure pravi, čisti

versor versor, enotski kvaternion

dot product skalarni produkt

by-product stranski učinek

Literatura

- [1] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 2. izdaja, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2001.
- [2] N. Calkin in H. S. Wilf, Recounting the rationals, *Amer. Math. Monthly* **107** (2000), 360–363.
- [3] J. Grasselli, *Elementarna teorija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2009.