Rotacije opisane s kvaternioni

Seminar

Timotej Mlakar
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

5. julij 2023

Kazalo

1 Uvod

Rotacije prostora $\mathbb{R}^3$ po navadi opišemo z linearnimi preslikavami oziroma njim pripadajočimi matrikami. Za take preslikave potrebujemo 4 podatke, in sicer kot rotacije, ter tri koordinate, ki predstavljajo smer, okoli katere rotiramo prostor, vendar je uporaba matrik računsko zelo zahtevna. V ta namen bomo v članku pogledali, kako lahko z uporabo kvaternionov opišemo rotacije na preprostejši in računsko manj zahteven način.

Za motivacijo uporabimo analog rotacij v dveh dimenzijah, in sicer množenje kompleksnih števil. Spomnimo se, da množenje kompleksnega števila z z enotskim kompleksnim številom $e^{i\theta}$ zavrti z okoli koordinatnega izhodišča za kot θ. Podobno bi želeli narediti v 3-razsežnem prostoru, vendar za to potrebujemo množenje trikomponentnih števil. Ta problem je rešil Sir William Rowan Hamilton [1], ko je oktobra leta 1843 dognal identitete za množenje v 4-razsežnem prostoru. Ta ugotovitev je bila tako odmevna, da je trenutek za vedno zabeležen v kamnu na mostu, kjer je vklesano [1]

Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge.

Pri uporabi matrik njihov geometrijski pomen ni takoj očiten. Za smer rotacije in kot potrebujemo nekaj dodatnih korakov. Če želimo komponirati več rotacij, potrebujemo množenje matrik, kar pa spet zahteva veliko računskih operacij. Kvaternioni nam omogočajo, da na preprost način poiščemo smer in kot že iz zapisa kvaterniona, kompozicija pa se nam prevede na množenje kvaternionov. Za to potrebujemo precej manj operacij.

V članku bomo pogledali osnovne definicije *kvaternionske algebre*, pravokotnosti ter komutativnosti kvaternionov in njihov polarni zapis. Kasneje si bomo ogledali predstavitev preslikave rotacije s kvaternioni ter izpeljali formulo za rotacijo poljubnega vektorja v $\mathbb{R}^3$.

[1]Besedilo je vzeto iz slike spomenika W. R. Hamiltonu, ki danes stoji ob mostu Brougham Brige v Dublinu. Slike so iz arhiva matematika Johna Baeza [2].

2 Kvaternionska algebra

2.1 Definicije in oznake

Najprej vpeljimo pojem *Kvaternionske algebre.* Definicije v tem poglavju smo povzeli po Yan-Binu [3] in Weinerju [4].

Naj bo $\mathbb{H}$ 4-razsezem vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Bazne elemente označimo z $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$, elemente prostora $\mathbb{H}$ pišemo $q = q_0\mathbf{1} + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 + \vec{q}$ in jih imenujemo *kvaternioni.* Definiramo običajno seštevanje in množenje s skalarjem za vektorske prostore

$$
\begin{gathered}
p + q = (p_0 + q_0) + (\vec{p} + \vec{q}), \\
\lambda q = \lambda\,(q_0 + \vec{q}) = \lambda q_0 + (\lambda\vec{q}).
\end{gathered}
$$

Vektorski prostor opremimo z operacijo množenja tako, da definiramo *produkte njegovih baznih elementov*, in sicer

$$
\begin{gathered}
\mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1}i = i, \quad \mathbf{1}j = j, \quad \mathbf{1}k = k, \\
ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\
i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\mathbf{1}.
\end{gathered}
$$

Množenje tako prevedemo na množenje baznih elementov in lahko produkt elementov p in q napišemo kot

$$
pq = (p_0 q_0 - \vec{p}\vec{q}) + (p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}),
$$

kjer je $\vec{p}\vec{q}$ običajni skalarni produkt, $\vec{p} \times \vec{q}$ pa vektorski produkt v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1 *Vektorski prostor $\mathbb{H}$, opremljen s zgoraj definirano operacijo množenja, imenujeno* kvaternionska algebra*.*

Omenimo še, da v $\mathbb{H}$ tako definirano množenje ni komutativno, razmislek prepustimo bralcu. O komutativnosti kvaternionov bomo več povedali v kasnejšem razdelku.

Opomba 1 *Za $p, q \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ velja*

$$
(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq).
$$

Definicija 2 *Naj bo $q = q_0 + \vec{q} \in \mathbb{H}$. S $\overline{q} = q_0 - \vec{q}$ označimo* konjugirani kvaternion *q.*

Bralec lahko preveri, da je $q\overline{q} \in \mathbb{R}$. Tako lahko definiramo še

$$
q^{-1} = \frac{1}{q\overline{q}}\overline{q}.
$$

Prav tako lahko vidimo da je $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$. Ker množenje kvaternionov ni komutativno, v splošnem $\overline{pq} \neq \overline{qp}$. Potrebujemo še pomen pravokotnosti v algebri $\mathbb{H}$, zato definiramo skalarni produkt.

Definicija 3 *Naj bosta $p, q \in \mathbb{H}$. Definiramo skalarni produkt kvaternionov*

$$\langle p, q \rangle = \tfrac{1}{2}(\overline{p}q + \overline{q}p).$$

Norma porojena s skalarnim produktom je tedaj

$$|q| = ||q|| = \sqrt{\langle q, q \rangle}.$$

Opomba 2 *Iz definicije skalarnega produkta takoj sledi $\langle q, q \rangle = q\overline{q} = \overline{q}q$. Norma na $\mathbb{H}$ je multiplikativna.*

Za poljubna $p, q \in \mathbb{H}$ torej velja $|pq| = |p||q|$.

$$|pq|^2 = \langle pq, pq \rangle = pq\overline{pq}.$$

Spomnimo se, da $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$. Torej je

$$pq\overline{pq} = p \cdot q \cdot \overline{q} \cdot \overline{p} = p|q|^2\overline{p}.$$

Ker je $|q|^2$ skalar, pri množenju komutira s kvaternioni.

$$p|q|^2\overline{p} = |q|^2 p\overline{p} = |q|^2|p|^2 = |p|^2|q|^2.$$

Sledi torej $|pq| = |p||q|$.

Analogno kompleksni ravnini, kjer potrebujemo enotska kompleksna števila, bomo za rotacijo potrebovali enotske kvaternione.

Definicija 4 *Naj bo $q \in \mathbb{H}$. Kvaternion q imenujemo* versor *oziroma* enotski kvaternion*, če velja $|q| = 1$. Množico versorjev označimo s $\boldsymbol{Q}_e$*

Če za $u \in \mathbb{H}$ velja $u = \vec{u}$ in $|u| = 1$, kvaternion u imenujemo čisti *oziroma* pravi *versor. Množico pravih versorjev označimo z $\boldsymbol{U}_e$.*

Z $\mathbb{R}$ od tu naprej označujemo $\{q \in \mathbb{H}; \vec{q} = 0\}$ množico skalarnih kvaternionov, podobno od tu naprej z $\mathbb{R}^3$ označujemo množico čistih kvaternionov $\{q \in \mathbb{H}; q_0 = 0\}$. Omenimo, da je $\mathbf{Q}_e$ podgrupa edinka za množenje.

Opomba 3 *Za čista versorja $u, v \in \boldsymbol{U}_e$ velja*

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff uv + vu = 0.$$

Naj bosta $u, v \in \mathbf{U}_e$. Za poljuben versor iz $\mathbf{U}_e$ velja $\overline{u} = -u$.

$$\langle u, v \rangle = \tfrac{1}{2}(\overline{u}v + \overline{v}u) = \tfrac{1}{2}(-uv - vu) = -\tfrac{1}{2}(uv + vu).$$

Od tu sledi, da je $\langle u, v \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $uv + vu = 0$.

Tukaj opomnimo še naslednje: naj bo $u \in \mathbf{U}_e$. Ker $|u| = 1$ sledi, da je u neničeln kvaternion. Ker je $\mathbf{U}_e \subset \mathbb{H}$ in je $\mathbb{H}$ algebra, je vsak neničenli kvaternion obrnljiv. Vemo torej, da obstaja tak u^{-1} da je

$$uu^{-1} = 1.$$

Ker za poljuben $q \in \mathbb{H}$ velja $q^{-1} = \frac{1}{\overline{q}q}\overline{q}$, za $u \in \mathbf{U}_e$ pa $u\overline{u} = |u|^2$, je

$$u^{-1} = \frac{\overline{u}}{|u|^2} = \frac{-u}{1} = -u.$$

Če združimo ti dve dejstvi, velja

$$uu^{-1} = -uu = -u^2 = 1 \Rightarrow u^2 = -1.$$

2.2 Zapis kvaternionov v polarni obliki

Podobno kot kompleksna števila lahko kvaternione zapišemo v polarni obliki. Število $z = \mathrm{x} + i\mathrm{y}$ zapišemo kot $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, z *eulerjevo formulo* pa ga zapišemo kot $z = |z|e^{i\theta}$. V kompleksni ravnini je ta zapis dobro definiran, saj imamo le eno kompleksno enoto i, v kvaternionih pa imamo celo množico čistih enotskih kvaternionov $\mathbf{U}_e$, s katerimi lahko zapišemo kvaternion.

Trditev 1 *Naj bo $q \in \boldsymbol{Q}_e$. Tedaj obstajata $\theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \boldsymbol{U}_e$, da je*

$$q = \boldsymbol{1}\cos\theta + u\sin\theta.$$

Dokaz: Enakost pokažemo za enotske kvaternione, saj poljuben kvaternion lahko dobimo kot produkt enotskega s skalarjem. Naj bo $q = q_0 + \vec{q} \in \mathbf{Q}_e$. Ker sta q_0 in $\vec{q}$ glede na definirani skalarni produkt pravokotna, opazujemo trikotnik s katetama dolžine q_0 in $|\vec{q}|$, ter hipotenuzo dolžine 1. Definiramo $\theta := \arccos(q_0)$. Tu dopuščamo, da je q_0 tudi negativen, ali pa enak ± 1. Tedaj je $\vec{q} = u\sin\theta$ za nek $u \in \mathbf{U}_e$, ki kaže v smeri $\vec{q}$. Velja torej

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos\theta + u\sin\theta.$$

□

Dokaz trditve je povzet po Lyonsu. [5]

Opomba 4 *Tdritev nam zagotavlja* le obstoj *in ne enoličnosti.*

Preprost protiprimer za enoličnost je naslednji: vzemimo $q \in \mathbf{Q}_e, q = \mathbf{1}\cos\theta + u\sin\theta$ ter poglejmo $\theta' = -\theta$ in $u' = \overline{u} = -u$. Tedaj je

$$\mathbf{1}\cos\theta' + u'\sin\theta' = \mathbf{1}\cos(-\theta) - u\sin(-\theta) = \mathbf{1}\cos\theta + u\sin\theta = q.$$

Vidimo, da ima q torej 2 zapisa. Podobno sklepanje ponovimo za kvaternion 0. Za kvaternion 0 v enakosti zadoščata vsaka $u \in \mathbf{U}_e$ in $\theta \in \mathbb{R}$, saj je 0 možno dobiti le z množenjem enotskega kvaterniona s skalarjem 0.

Zaradi lažjega računanja bomo polarni zapis kvaternionov spremenili v eksponentni zapis. Spet se najprej spomnimo kompleksne ravnine, kjer lahko vsak $z \in \mathbb{C}$ zapišemo kot $|z|e^{i\varphi}$ za nek $\varphi \in \mathbb{R}$. To naredimo, saj je algebraična manipulacija kompleksnih izrazov lažja.

Vzamemo Taylorjev razvoj e^t:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \cdots.$$

V Taylorjev razvoj vstavimo $t = u\theta, u \in \mathbf{U}_e, \theta \in \mathbb{R}$. Dobimo

$$e^{u\theta} = 1 + u\theta + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^3}{6} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \cdots.$$

Spomnimo se, da velja $u^2 = -1$, ker je $u \in \mathbf{U}_e$. Ker e^t konvergira absolutno, lahko vrsto preuredimo, in sicer:

$$\begin{gathered}
1 + u\theta + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^3}{6} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \cdots = \\
(1 + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \cdots) + (u\theta + \frac{(u\theta)^3}{6} + \cdots) = \\
(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \cdots) + u(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \cdots)
\end{gathered}$$

V levem in desnem oklepaju vidimo Taylorjev razvoj funkcij kosinus in sinus. Sledi torej

$$e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta.$$

Zgornjo trditev lahko sedaj spremenimo v lepšo obliko, t.j. za vsak $q \in \mathbf{Q}_e$ obstajata $\theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \mathbf{U}_e$, da velja $q = e^{u\theta}$.

2.3 O komutativnosti kvaternionov

Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$. Vemo, da produkt kvaternionov ni komutativen, t. j. $pq \neq qp$. Če p in q zapišemo v polarni obliki, $p = e^{u\theta}, q = e^{v\varphi}$, lahko produkta napišemo kot $pq = e^{u\theta}e^{v\varphi}$ in $qp = e^{v\varphi}e^{u\theta}$. Zaradi nekomutativnosti prav tako sledi, da $e^{u\theta}e^{v\varphi} \neq e^{v\varphi}e^{u\theta}$. Če bi tak produkt obstajal, bi v eksponentu imeli primer nekomutativne vsote, kar pa je seveda v protislovju z definicijo vsote iz algebre $\mathbb{H}$.

Zanima nas, kdaj taki kvaternioni komutirajo.

Trditev 2 *Naj bosta* $p, q \in \boldsymbol{Q}_e$ *taka, da obstaja* $u \in \boldsymbol{U}_e$*, da* $p = e^{u\theta}$ *in* $q = e^{u\varphi}$ *za neka* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$*. Tedaj je* $pq = qp$*.*

Dokaz: Zapišemo $p = \cos\theta + u\sin\theta$, $q = \cos\varphi + u\sin\varphi$. Spomnimo se, da skalarji komutirajo z vsemi kvaternioni. Torej je

$$\begin{aligned}
pq &= (\cos\theta + u\sin\theta)(\cos\varphi + u\sin\varphi) \\
&= \cos\theta(\cos\varphi + u\sin\varphi) + u\sin\theta(\cos\varphi + u\sin\varphi) \\
&= (\cos\varphi + u\sin\varphi)\cos\theta + (u\cos\varphi + u^2\sin\varphi)\sin\theta \\
&= (\cos\varphi + u\sin\varphi)\cos\theta + (\cos\varphi + u\sin\varphi)u\sin\theta \\
&= (\cos\varphi + u\sin\varphi)(\cos\theta + u\sin\theta) = qp.
\end{aligned}$$

□

Trditev nam pove, da kvaternioni z različnim realnim argumentom in istim versorjem med sabo komutirajo. Prav tako komutirata kvaterniona, ki sta zapisana s konjugiranima versorjema, saj je to ekvivalentno negativnemu argumentu v polarnem zapisu.

3 Preslikava rotacije

3.1 Preslikava

Definicija 5 *Naj bo* $q \in \boldsymbol{Q}_e$*. Označimo preslikavi* $L_q, R_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *levega in desnega množenja:*

$$L_q x = qx,\ R_q x = xq.$$

Vidimo, da sta L_q in R_q linearni preslikavi. Naj bosta $x, y \in \mathbb{H}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$L_q(\alpha x + \beta y) = q(\alpha x + \beta y).$$

Uporabimo komutativnost skalarjev in levo distributivnost nad kvaternioni:

$$q(\alpha x + \beta y) = \alpha q x + \beta q y = \alpha L_q x + \beta L_q y.$$

S podobnim računom pokažemo, da je R_q tudi linearna. Poleg tega vidimo, da sta preslikavi ortogonalni, t.j., da ohranjata skalarni produkt. Iz tega sledi tudi, da sta preslikavi L_q in R_q izometriji prostora.

Ti preslikavi med sabo komutirata, saj za $p, q \in \mathbf{Q}_e$ in fiksen $x \in \mathbb{H}$:

$$(L_p \circ R_q)x = p(xq) = (px)q = (R_q \circ L_p)x.$$

Njun kompozitum je prav tako ortogonalna preslikava Definiramo torej kompozitum preslikav kot posebno preslikavo

Definicija 6 *Naj bosta $p, q \in \boldsymbol{Q}_e$. S $C : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ označimo kompozitum levega in desnega množenja*

$$C_{p,q} = L_p \circ R_q = R_q \circ L_p.$$

Preslikava $C_{p,q}$ je za poljubna $p, q \in \mathbf{Q}_e$ bijektivna in ortogonarlna. Ortogonalnost sledi iz kompozicije dveh ortogonalnih preslikav, surjektivnost je očitna. Injektivnost preverimo z uporabo pravil krajšanja v kvaternionski algebri. Namreč, ker kvaternione lahko okrajšamo, iz enakosti $C_{p,q}x = C_{p,q}y$, oziroma $pxq = pyq$, sledi $x = y$.

Naj bodo $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbf{Q}_e$. Poglejmo preslikavi C_{p_1,q_1}, C_{p_2,q_2}. Če preslikavi komponiramo, je rezultat ponovno preslikava take oblike, t.j. $C_{p_1p_2,q_2q_1}$. Inverz te preslikave je prav tako ortogonalna preslikava, namreč

$$C_{p,q}^{-1} = C_{p^{-1},q^{-1}}.$$

Imamo torej grupo preslikav za komponiranje nad $\mathbf{Q}_e$. Izkaže se, da je ta grupa kar grupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ [6]. Opomnimo samo, da se pri komponiranju teh preslikav vrstni red desnega množenja obrne.

Posebej omenimo množico preslikav oblike $C_{q,\overline{q}}$. Vemo, da se da q zapisati v polarni obliki kot $\cos\theta + u \sin\theta = e^{u\theta}$ za neka $u \in \mathbf{U}_e, \theta \in \mathbb{R}$. Ker je $q \in \mathbf{Q}_e$, je $\overline{q} = e^{-u\theta}$. Preslikavo $C_{q,\overline{q}}$ je torej možno zapisati kot

$$Cx := C_{q,\overline{q}}x = e^{u\theta}xe^{-u\theta}.$$

Ker je C ortogonalna preslikava, ohranja skalarni produkt. Spomnimo se, da so skalarni kvaternioni in čisti kvaternioni pravokotni. Naj bosta $\alpha \in \mathbb{R}$ in $u \in \mathbb{R}^3$, njun skalarni produkt je $\langle \alpha, u \rangle = \frac{1}{2}(\overline{\alpha}u + \overline{u}\alpha)$. Ker je $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\overline{\alpha} = \alpha$. Torej je to dalje enake $\frac{1}{2}(\alpha u - \alpha u) = 0$. Podprostor skalarjev je torej invarianten za preslikavo C.

Izrek 1 *Naj bo $u \in \boldsymbol{U}_e$ in $\theta \in \mathbb{R}$. Preslikava $C = C_{q,\overline{q}}$, kjer je $q = e^{u\theta}$, je rotacija ravnine, pravokotne na u, za kot 2θ.*

Dokaz: Najprej pogledamo, kaj se zgodi z kvaternioni, ki ležijo na ogrinjači versorja u. Naj bo $u \in \mathbf{U}_e$.

$$C_{q,\overline{q}}u = e^{u\theta}ue^{-u\theta}.$$

Ker je hkrati tudi $u \in \mathbf{Q}_e$, se u da zapisati kot $\cos\frac{\pi}{2} + u\sin\frac{\pi}{2} = e^{u\frac{\pi}{2}}$. Spomnimo se, da kvaternioni, izraženi z istim versorjem, med sabo komutirajo. Torej je

$$e^{u\theta}ue^{-u\theta} = e^{u\theta}e^{-u\theta}u = u.$$

Vidimo, da je tudi $Lin\{u\}$ invariantna. Preslikava C torej fiksira dve dimenziji prostora $\mathbb{H}$. Ker je preslikava C ortogonalna, ohranja tudi ortogonalni komplement $Lin\{u\}$. Označimo $L^{\perp} = (Lin\{u\})^{\perp}$. Naj bo $v \in L^{\perp}$. Za bazo ravnine, pravokotne na u, vzamemo kvaterniona v in $w = uv = u \times v$. Za v velja naslednje:

$$\begin{aligned}
ve^{-u\theta} &= v(\cos\theta - u\sin\theta)\\
&= v\cos\theta - vu\sin\theta\\
&= v\cos\theta + uv\sin\theta\\
&= (\cos\theta + u\sin\theta)v = e^{u\theta}v.
\end{aligned}$$

Torej, če s C slikamo v:

$$Cv = e^{u\theta}ve^{-u\theta} = e^{u\theta}e^{u\theta}v = e^{2u\theta}.$$

Če $e^{2u\theta}v$ zapišemo kot $v\cos 2\theta + uv\sin 2\theta = v\cos 2\theta + w\sin 2\theta$, vidimo podobno, kot bi imeli rotacijo $\mathbb{R}^2$. Prav tako s C preslikamo w:

$$Cw = e^{u\theta}we^{-u\theta} = e^{u\theta}uve^{-u\theta} = e^{u\theta}ue^{u\theta}v = e^{u\theta}e^{u\theta}uv = e^{2u\theta}w.$$

Žapišemo še w kot $w\cos 2\theta + wu\sin 2\theta = w\cos 2\theta - v\sin 2\theta$.

Ker je $\mathbb{H}$ algebra, je obenem tudi vektorski prostor. Zato je smiselno napisati matriko preslikave C glede na bazo $\{u, v, w\}$ podprostora $\mathbb{R}^3$. Preslikava C tedaj ustreza matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Preslikava C torej predstavlja transformacijo $\mathbb{H}$, ki fiksira skalarje $\mathbb{R}$ in eno dimenzijo podprostora $\mathbb{R}^3$, ki sovpada z u, drugi dve pa obrne.

$\square$

Omenimo še, da C ohranja orientacijo, saj je ortogonalna preslikava. Imamo torej rotacijo ravnine v pozitivni smeri.

3.1.1 Primer uporabe

Zgled 1 *Preslikajmo* $(1,-2,3)$ *za kot* $\frac{\pi}{4}$ *okoli smeri* $(1,1,1)$.

Imamo kvaterniona $v = 0 + (1,-2,3)$ in $u = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Najprej izračunajmo kvaternion, s katerim bomo množili:

$$q = e^{u\frac{\pi}{8}} = \cos\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\pi}{8}(1,1,1).$$

Preslikamo v:

$$Cv = qv\overline{q} = (\cos\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\pi}{8}(1,1,1))(1,-2,3)(\cos\tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\pi}{8}(1,1,1))$$

Za lažje računanje označimo $\cos\frac{\pi}{8} = a$ in $\sin\frac{\pi}{8} = b$. Najprej izračunajmo $v\overline{q}$:

$$\begin{aligned}
v\overline{q} &= v\cdot\vec{q} + q_0 v - v\times\vec{q} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}b + a(1,-2,3) - \frac{1}{\sqrt{3}}b(-5,2,3) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}b + \Big(a + \frac{5}{\sqrt{3}}b, -2a - \frac{2}{\sqrt{3}}b, 3a - \frac{3}{\sqrt{3}}b\Big) \\
&= q_0' + \vec{q}'.
\end{aligned}$$

Izračunamo še qq':

$$\begin{aligned}
qq' &= q_0 q_0' - \vec{q}\vec{q}' + q_0\vec{q}' + q_0'\vec{q} + \vec{q}\times\vec{q}' \\
&= a\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}b - \frac{1}{\sqrt{3}}b(1,1,1)\Big(a + \frac{5}{\sqrt{3}}b, -2a - \frac{2}{\sqrt{3}}b, 3a - \frac{3}{\sqrt{3}}b\Big) \\
&+ a\Big(a + \frac{5}{\sqrt{3}}b, -2a - \frac{2}{\sqrt{3}}b, 3a - \frac{3}{\sqrt{3}}b\Big) \\
&+ \frac{2}{\sqrt{3}}b\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}b(1,1,1) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}}b(1,1,1)\times\Big(a + \frac{5}{\sqrt{3}}b, -2a - \frac{2}{\sqrt{3}}b, 3a - \frac{3}{\sqrt{3}}b\Big) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}ab - \frac{2}{\sqrt{3}}ab \\
&+ \Big(a^2 + \frac{5}{\sqrt{3}}ab, -2a^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}ab, 3a^2 - \frac{3}{\sqrt{3}}ab\Big) \\
&+ \frac{2}{3}(b^2, b^2, b^2) \\
&+ \Big(\frac{5}{\sqrt{3}}ab - \frac{1}{3}b^2, -\frac{2}{\sqrt{3}}ab + \frac{8}{3}b^2, -\frac{3}{\sqrt{3}}ab - \frac{7}{3}b^2\Big).
\end{aligned}$$

Če vstavimo nazaj vrednosti a in b, dobimo kvaternion $0+(2.94,-2.04,1.09)$

3.2 Izbira baze

Želimo preslikati poljublno točko $\nu \in \mathbb{R}^3$ okoli izbrane smeri, ki jo določa versor u. Denimo, da nas zanima rotacija za kot θ. Po prejšnjem izreku vemo, da taki transformaciji zadošča preslikava $Cx = e^{u\frac{\theta}{2}} x e^{-u\frac{\theta}{2}}$. Vemo, da je $Lin\{u\}$ invarianten za C, prav tako pa poznamo sliko kvaterniona, pravokotnega na u.

Izbrali bomo bazo pravokotnih kvaternionov, saj poznamo njihove slike, nato pa ν razvili po dobljeni bazi. Prvi bazni kvaternion naj bo kar u. Naslednji kvaternion, ki mora biti za uporabo izreka pravokoten na u, dobimo z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo, in sicer:

$$\begin{aligned}
&\text{prvi kvaternion} && u_1 = u, \\
&\text{drugi kvaternion} && u_2 = \nu - \frac{\langle \nu, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \\
&\text{tretji kvaternion} && u_3 = u_1 u_2.
\end{aligned}$$

Kvaternioni so med sabo pravokotni, saj smo uporabili Gram-Schmidtov proces za en kvaternion, drugi pa je očitno pravokoten na oba druga, v skladu z izrekom. Razpišimo bazne kvaternione:

$$\begin{gathered}
u_1 = u, \\
v = u_2 = \nu - \frac{\langle \nu, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \nu - \langle \nu, u \rangle u, \text{ saj je } \langle u, u \rangle = 1.
\end{gathered}$$

Kvaterniona ne bomo normalizirali, saj je preslikava C izometrija, in torej ohranja razdalje.

$$w = u_3 = u_1 u_2 = u(\nu - \langle \nu, u \rangle u).$$

Imamo torej bazo $B = \{u, v, w\} = \{u, \nu - \langle \nu, u \rangle u, u(\nu - \langle \nu, u \rangle u)\}$ za $\mathbb{R}^3$. Zapišemo ν po bazi : $\nu = \langle \nu, u \rangle u + v$. Ker poznamo slike vseh baznih kvaternionov in je C linearna preslikava, lahko sedaj zapišemo sliko poljubnega kvaterniona ν:

$$\begin{aligned}
C\nu &= C(\langle \nu, u \rangle u + v) \\
&= \langle \nu, u \rangle Cu + Cv \\
&= \langle \nu, u \rangle u + \cos\theta v + \sin\theta w.
\end{aligned}$$

Ker sta v in w odvisna le od u in ν, zapišimo sliko glede na njiju:

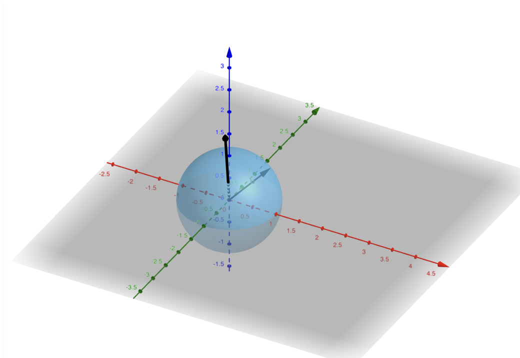
$$\begin{aligned}
C\nu &= \langle \nu, u \rangle u + \cos\theta v + \sin\theta w \\
&= \langle \nu, u \rangle u + \cos\theta(\nu - \langle \nu, u \rangle u) + \sin\theta u(\nu - \langle \nu, u \rangle u) \\
&= \langle \nu, u \rangle (1 - \cos\theta) u + \cos\theta \nu + \sin\theta u \times \nu.
\end{aligned}$$

Tukaj opazimo, da velja naslednja enakost: $u(\nu - \langle \nu, u \rangle u) = u \times \nu$. S tem smo zapisali sliko poljubnega kvaterniona pri željeni rotaciji in izpeljali formulo za rotacijo poljubnega vektorja okoli poljubne smeri za željeni kot.

3.2.1 Primer uporabe

Zgled 2 *Preslikajmo* $(1, -2, 3)$ *za kot* $\frac{\pi}{4}$ *okoli smeri* $(1, 1, 1)$ *še po izpeljani formuli.*

Vzamemo kvaterniona $\nu = (1, -2, 3), u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.



Slika 1: Kvaterniona ν in u v $\mathbb{R}^3$.

Ker sta ν in $u \in \mathbb{R}^3$, skalarni produkt $\langle \nu, u \rangle$ ustreza kar običajnemu skalarnemu produktu vektorjev ν, u v $\mathbb{R}^3$.

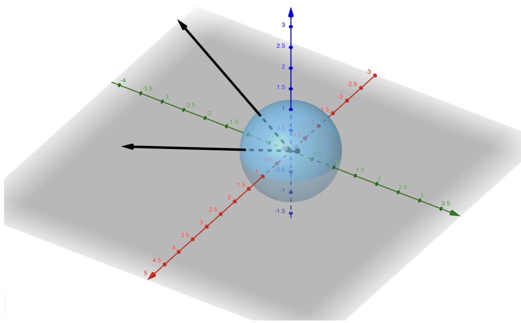
$$\begin{aligned} \langle \nu, u \rangle = \nu \cdot u &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -2, 3) \cdot (1, 1, 1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

pogledamo še njun vektorski produkt

$$\begin{aligned} u \times \nu &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \times (1, -2, 3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(5, -2, -3). \end{aligned}$$

Vstavimo u in ν ter dobljene rezultate v končo formulo

$$\begin{aligned}
C\nu &= \langle \nu, u\rangle (1-\cos\theta)u + \cos\theta\nu + \sin\theta u \times \nu \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}(1-\cos\frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) + \cos\frac{\pi}{4}(1,-2,3) + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(5,-2,-3) \\
&= \frac{2}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-2,3) + \frac{1}{\sqrt{6}}(5,-2,-3) \\
&= \Big(\frac{4-2\sqrt{2}}{6} + \frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{6}}{6}, \frac{4-2\sqrt{2}}{6} - \frac{6\sqrt{2}}{6} - \frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{4-2\sqrt{2}}{6} + \frac{9\sqrt{2}}{6} - \frac{3\sqrt{6}}{6}\Big) \\
&\approxeq (2.94, -2.04, 1.09).
\end{aligned}$$



Slika 2: Kvaternioni u, ν ter preslikani ν.

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

quaternion kvaternion

quaternion conjugate konjugirana vrednost kvaterniona

unit quaternion enotski kvaternion

pure quaternion pravi oziroma čisti kvaternion

versor versor, enotski čisti kvaternion

isometry izometrija

span linearna ogrinjača

Gram-Schmidt orthogonalisation process Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Literatura

[1] Ken Shoemake. Animating rotation with quaternion curves. In *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 245–254, 1985.

[2] John Baez. John Baez's stuff. `https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/node24.html`. Accessed : 2023-06-02.

[3] Yan-Bin Jia. Quaternions and rotations. *Com S*, 477(577):15, 2008.

[4] Joel L Weiner and George R Wilkens. Quaternions and rotations in $\mathbb{E}^4$. *The American Mathematical Monthly*, 112(1):69–76, 2005.

[5] David W Lyons. Quaternions. `https://math.libretexts.org/Bookshelves/Abstract_and_Geometric_Algebra/Introduction_to_Groups_and_Geometries_(Lyons)/01%3A_Preliminaries/1.02%3A_Quaternions`, oct 10 2021. Accessed : 2023-06-03.

[6] Matej Brešar, Christoph Hanselka, Igor Klep, and Jurij Volčič. Skolem–Noether algebras. *Journal of Algebra*, 498:294–314, 2018.