

Rotacije opisane s Kvaternioni

Timotej Mlakar

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

17. april 2023

Definicija

Naj bo V 4-razsežen vektorski prostor z bazo $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$. Elemente V označimo $\mathbf{q} = q_0\mathbf{1} + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \vec{q}$. Vektorski prostor V opremimo s operacijo množenja:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}\mathbf{1} &= \mathbf{1}, & \mathbf{1}i &= i, & \mathbf{1}j &= j, & \mathbf{1}k &= k, \\ ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -\mathbf{1}\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Tedaj V postane 4-razsežna algebra nad \mathbb{R} , ki jo označimo s \mathbb{H} in imenujemo Kvaternionska Algebra.

Oznaka

$$\bar{q} = q_0 - \vec{q}.$$

Oznaka

$$\bar{q} = q_0 - \vec{q}.$$

Definicija

Naj bo $q \in \mathbb{H}$. Inverz q za množenje je tedaj

$$q^{-1} = \frac{1}{q\bar{q}}\bar{q}$$

Definicija

Na \mathbb{H} vpeljemo skalarni produkt, sicer za $p, q \in \mathbb{H}$:

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}(\bar{p}q + \bar{q}p)$$

Norma, porojena s skalarnim produktom je

$$||q|| = |q| = \sqrt{\langle q, q \rangle}$$

Opomba

Za vsak $q \in \mathbb{H}$ je $\langle q, q \rangle = q\bar{q} = \bar{q}q$ in

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}}$$

Definicija

Na \mathbb{H} vpeljemo skalarni produkt, sicer za $p, q \in \mathbb{H}$:

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}(\bar{p}q + \bar{q}p)$$

Norma, porojena s skalarnim produktom je

$$||q|| = |q| = \sqrt{\langle q, q \rangle}$$

Opomba

Za vsak $q \in \mathbb{H}$ je $\langle q, q \rangle = q\bar{q} = \bar{q}q$ in

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}}$$

Opomba

Norma na \mathbb{H} je multiplikativna.

Oznaka

$$Q_e = \{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\}$$

$$U_e = \{u \in \mathbb{H}; |u| = 1 \wedge u = \bar{u}\}$$

Oznaka

$$\mathbf{Q}_e = \{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\}$$

$$\mathbf{U}_e = \{u \in \mathbb{H}; |u| = 1 \wedge u = \bar{u}\}$$

Opomba

Za $u \in \mathbf{U}_e$ velja

$$u^2 = -1.$$

Za poljubna $u, v \in \mathbf{U}_e$ velja

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff uv + vu = 0 \iff uv = -vu.$$

Trditev

Naj bo $q \in \mathbf{Q}_e$. Obstajata $\theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \mathbf{U}_e$, da je

$$q = \cos \theta + u \sin \theta.$$

Opomba

Polarni zapis kvaterniona ni enoličen.

Trditev

Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$ taka, da $\exists u \in \mathbf{U}_e$, da je $p = e^{u\theta}$ in $q = e^{u\varphi}$, za neka $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Tedaj je $pq = qp$.

Definicija

Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$. Definiramo preslikavo $C_{p,q} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$C_{p,q}x := pqx.$$

Definicija

Naj bosta $p, q \in \mathbf{Q}_e$. Definiramo preslikavo $C_{p,q} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$C_{p,q}x := pqx.$$

Definicija

Posebej označimo preslikavo $C = C_{q,\bar{q}}$, za $q = e^{u\theta}$; $u \in \mathbf{U}_e, \theta \in \mathbb{R}$

$$Cx := C_{q,\bar{q}}x = e^{u\theta}xe^{-u\theta}.$$

Izrek

Naj bo $u \in \mathbf{U}_e$ in $\theta \in \mathbb{R}$ ter $q = e^{u\theta}$. Preslikava $C = C_{q,\bar{q}}$ je rotacija ravnine, pravokotne na u za kot 2θ .