Rotacije opisane s kvaternioni
Seminar

Timotej Mlakar
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

3. junij 2023

Kazalo

1 Uvod

Rotacije prostora $\mathbb{R}^3$ navadno opišemo z linearnimi preslikavami prostora oziroma njim pripadajočimi matrikami. V splošni uporabi je za opis orientacije objekta tako imenovan *sistem Eulerjevih kotov*. Znameniti *Eulerjev izrek o rotacijah* namreč pravi, da se da vsako rotacijo opisati s tremi parametri oziroma koti.

Težava nastopi, ko moramo tako rotacijo zapisati. Za vsakega od kotov potrebujemo svojo preslikavo, ki jo nato komponiramo z drugima dvema, da dobimo končno preslikavo:

$$R = BCD,$$

kjer je R končna rotacija, B, C, D pa so rotacije posameznih ravnin glede na želeni kot/parameter. Za elemente matrike, ki pripada R, potrebujemo 9 podatkov [1], ki jih izračunamo z matričnim množenjem.

V splošnem sistem deluje, vendar problem nastopi, kadar moramo zaporedoma aplicirati več takih preslikav; problem je v številu operacij pri matričnem množenju. To nas motivira, da uporabimo drug, bolj učinkovit pristop.

Za motivacijo uporabimo analog rotacij v dveh dimenzijah, in sicer množenje kompleksnih števil. Spomnio se, da množenje kompleksnega števila z z enotskim komplekstim številom $e^{i\theta}$ zavrti z okoli koordinatnega izhodišča za kot θ. Podobno bi želeli narediti v našem, 3-razsežnem prostoru, vendar za to potrebujemo množenje. Ta problem je rešil Sir William Rowan Hamilton [2], ko je oktobra leta 1843 na mostu Brougham Bridge dognal identitete za množenje v 4-razsežnem prostoru. Ta ugotovitev je bila tako odmevna, da je trenutek za vedno zabeležen v kamnu na mostu, kjer je vklesano

Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge. [3]

Ekvivalentno Eulerjevim kotom s pomočjo kvaternionov dobimo tako imenovane *Eulerjeve parametre*, s katerimi lahko poljubno rotacijo/orientacijo opišemo samo s štirimi parametri. Prav tako je za večkratno apliciranje preslikav rotacij sedaj potrebnih veliko manj operacij. To nas motivira, da predpise preslikav rotacij zapišemo s kvaternionskim množenjem.

2 Kvaternionska algebra

2.1 Definicije in oznake

Definicija 1 *Naj bo V 4-razsežen vektorski prostor nad R. Izberemo bazo $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$. Elementi V so oblike $\boldsymbol{q} = q_0\mathbf{1} + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 + \vec{q}$, imenujemo jih* kvaternioni. *Vektorski prostor V opremimo z operacijo množenja tako, da definiramo množenje njegovih baznih elementov, in sicer*

$$\begin{gathered}\mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1}i = i, \quad \mathbf{1}j = j, \quad \mathbf{1}k = k,\\ ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,\\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -\mathbf{1}\mathbf{1}.\end{gathered}$$

Naj bosta $p, q \in \mathbb{H}$. Definiramo seštevanje in množenje s skalarjem kot običajno

$$\begin{gathered}p + q = (p_0 + q_0) + (\vec{p} + \vec{q}),\\ \lambda q = \lambda\,(q_0 + \vec{q}) = \lambda q_0 + (\lambda \vec{q}).\end{gathered}$$

Prav tako definiramo običajno množenje v skladu z definicijo množenja baznih elementov. Tedaj lahko produkt pq napišemo kot

$$pq = (p_0 q_0 - \vec{p}\vec{q}) + (p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}),$$

kjer je $\vec{p}\vec{q}$ običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$. Tedaj V postane 4-razsežna algebra nad $\mathbb{R}$, označimo $\mathbb{H}$ in jo imenujemo Kvaternionska algebra. [4]

Opomba 1 *Za $p, q \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ velja*

$$(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq).$$

Definicija 2 *Naj bo $q = q_0 + \vec{q} \in \mathbb{H}$. S $\overline{q} = q_0 - \vec{q}$ označimo* konjugirani kvaternion *q.*

Velja, da je $q\overline{q} \in \mathbb{R}$. Tako lahko definiramo še

$$q^{-1} = \frac{1}{q\overline{q}}\overline{q}.$$

Prav tako lahko vidimo da je $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$. Ker množenje kvaternionov ni komutativno, v splošnem $\overline{pq} \neq \overline{qp}$. Ker je $\mathbb{H}$ algebra, je na njej smiselno definirati skalarni produkt.

Definicija 3 *Naj bosta $p, q \in \mathbb{H}$. Definiramo skalarni produkt kvaternionov*

$$\langle p, q \rangle = \tfrac{1}{2}(\overline{p}q + \overline{q}p). \text{ [5]}$$

Norma porojena s skalarnim produktom je tedaj

$$|q| = ||q|| = \sqrt{\langle q, q \rangle}.$$

Opomba 2 *Iz definicije skalarnega produkta takoj sledi $\langle q, q \rangle = q\overline{q} = \overline{q}q$. Podobno kot absolutna vrednost na $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ je norma na kvaternionih multiplikativna.*

Za poljubna $p, q \in \mathbb{H}$ torej velja $|pq| = |p||q|$. Oglejmo si $|pq|^2$

$$|pq|^2 = \langle pq, pq \rangle = pq\overline{pq}.$$

Spomnimo se, da $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$. Torej je

$$pq\overline{pq} = p \cdot q \cdot \overline{q} \cdot \overline{p} = p|q|^2\overline{p}.$$

Ker je $|q|^2$ skalar, pri množenju komutira s kvaternioni. Torej

$$p|q|^2\overline{p} = |q|^2 p\overline{p} = |q|^2|p|^2 = |p|^2|q|^2.$$

Sledi torej $|pq| = |p||q|$. [5]

Podobno kot pri rotaciji kompleksne ravnine, kjer množimo s števili iz enotske krožnice, tukaj potrebujemo enotske kvaternione.

Definicija 4 *Naj bo $q \in \mathbb{H}$. Kvaternion q imenujemo* versor *oziroma* enotski kvaternion*, če velja $|q| = 1$. Množico versorjev označimo s $\boldsymbol{Q}_e$*

Če za $u \in \mathbb{H}$ velja $u = \vec{u}$ in $|u| = 1$, kvaternion u imenujemo čisti *oziroma* pravi *versor. Množico pravih versorjev označimo z $\boldsymbol{U}_e$.*

Z $\mathbb{R}$ od tu naprej označujemo $\{q \in \mathbb{H}; \vec{q} = 0\}$ množico skalarnih kvaternionov, podobno od tu naprej z $\mathbb{R}^3$ označujemo množico čistih kvaternionov $\{q \in \mathbb{H}; q_0 = 0\}$. [5]

Opomba 3 *Za čista versorja $u, v \in \boldsymbol{U}_e$ velja, da*

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff uv + vu = 0.$$

Naj bosta $u, v \in \mathbf{U}_e$. Za poljuben versor iz $\mathbf{U}_e$ velja $\overline{u} = -u$. Pogledamo $\langle u, v \rangle$:

$$\langle u, v \rangle = \tfrac{1}{2}(\overline{u}v + \overline{v}u) = \tfrac{1}{2}(-uv - vu) = -\tfrac{1}{2}(uv + vu).$$

Od tu sledi da $\langle u, v\rangle = 0 \iff uv + vu = 0$.

Tukaj opomnimo še naslednje: naj bo $u \in \mathbf{U}_e$. Ker $|u| = 1$ sledi, da je u neničeln kvaternion. Ker je $\mathbf{U}_e \subset \mathbb{H}$ in je $\mathbb{H}$ algebra, je vsak neničenli kvaternion obrnljiv. Vemo torej, da obstaja tak u^{-1} da je

$$uu^{-1} = 1.$$

Ker je za poljuben $q \in \mathbb{H}, q^{-1} = \frac{1}{\overline{q}q}\overline{q}$, za $u \in \mathbf{U}_e$ pa velja $u\overline{u} = |u|^2$, je

$$u^{-1} = \frac{\overline{u}}{|u|^2} = \frac{-u}{1} = -u.$$

Če združimo ti dve dejstvi, velja še naslednja enakost:

$$uu^{-1} = -uu = -u^2 = 1 \Rightarrow u^2 = -1.$$

2.2 Zapis kvaternionov v polarni obliki

Podobno kot kompleksna števila lahko kvaternione zapišemo v polarni obliki. T.j. kompleksno število $z = \mathrm{x} + i\mathrm{y}$ lahko zapišemo kot $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Z *eulerjevo formulo* lahko to kompleksno število zapišemo kot $z = e^{i\theta}$.

V kompleksni ravnini je ta zapis dobro definiran, saj imamo le eno kompleksno enoto i. V kvaternionih pa imamo celo množico čistih enotskih kvaternionov $\mathbf{U}_e$, s katerimi lahko zapišemo kvaternion.

Trditev 1 *Naj bo $q \in \boldsymbol{Q}_e$. Tedaj obstajata $\theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \boldsymbol{U}_e$, da je*

$$q = \mathbf{1}\cos\theta + u\sin\theta.$$

Dokaz: Enakost pokažemo za enotske kvaternione, saj poljuben kvaternion lahko dobimo kot produkt enotskega s skalarjem. Naj bo $q = q_0 + \vec{q} \in \mathbf{Q}_e$. Ker sta q_0 in $\vec{q}$ glede na definirani skalarni produkt pravokotna, opazujemo trikotnik s katetama dolžine q_0 in $|\vec{q}|$, ter hipotenuzo dolžine 1. Definiramo $\theta := \arccos(q_0)$. Tu dopuščamo, da je q_0 tudi negativen, ali pa enak ± 1. Tedaj je $\vec{q} = u\sin\theta$ za nek $u \in \mathbf{U}_e$, ki kaže v smeri $\vec{q}$. Velja torej

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos\theta + u\sin\theta.$$

$\square$

Dokaz je povzet po Lyonsu. [6]

Opomba 4 *Opazimo, da nam trditev zagotavlja* le obstoj *in ne enoličnosti.*

Preprost protiprimer za enoličnost je $q \in \mathbf{Q}_e, q = \mathbf{1}\cos\theta + u\sin\theta$. Pogledamo $\theta' = -\theta$ in $u' = \overline{u} = -u$. Tedaj je

$$\mathbf{1}\cos\theta' + u'\sin\theta' = \mathbf{1}\cos(-\theta) - u\sin(-\theta) = \mathbf{1}\cos\theta + u\sin\theta = q.$$

Vidimo, da ima q torej 2 zapisa. Podobno sklepanje ponovimo za kvaternion 0. Za kvaternion 0 v enakosti zadoščata vsaka $u \in \mathbf{U}_e$ in $\theta \in \mathbb{R}$, saj je 0 možno dobiti le z množenjem enotskega kvaterniona s skalarjem 0.

Zaradi lažjega računanja bomo polarni zapis kvaternionov spremeniti v eksponentni zapis. Spet se najprej spomnimo kompleksne ravnine, kjer lahko vsak $z \in \mathbb{C}$ zapišemo kot $|z|e^{i\varphi}$ za nek $\varphi \in \mathbb{R}$. To naredimo, saj je tako algebraična manipulacija kompleksnih izrazov lažja.

Vzamemo Taylorjev razvoj e^t:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \cdots.$$

V Taylorjev razvoj vstavimo $t = u\theta, u \in \mathbf{U}_e, \theta \in \mathbb{R}$. Dobimo

$$e^{u\theta} = 1 + u\theta + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^3}{6} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \cdots.$$

Spomnimo se, da ker je $u \in \mathbf{U}_e$, velja $u^2 = -1$. Ker e^t konvergira enakomerno povsod, lahko vrsto preuredimo, in sicer:

$$\begin{gathered}1 + u\theta + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^3}{6} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \cdots = \\ (1 + \frac{(u\theta)^2}{2} + \frac{(u\theta)^4}{24} + \cdots) + (u\theta + \frac{(u\theta)^3}{6} + \cdots) = \\ (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \cdots) + u(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \cdots)\end{gathered}$$

V levem in desnem oklepaju vidimo Taylorjev razvoj funkcij cos in sin. Sledi torej

$$e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta.$$

Zgornjo trditev lahko sedaj spremenimo v lepšo obliko, t.j. za vsak $q \in \mathbf{Q}_e$ obstajata $\theta \in \mathbb{R}$ in $u \in \mathbf{U}_e$, da velja $q = e^{u\theta}$.

Opomba 5 *Naj bosta $p, q \in \boldsymbol{Q}_e$. Vemo, da produkt kvaternionov ni komutativen, t. j. $pq \neq qp$. Če p in q zapišemo v polarni obliki, $p = e^{u\theta}, q = e^{v\varphi}$, lahko produkta napišemo kot*

$$pq = e^{u\theta}e^{v\varphi} \text{ in } qp = e^{v\varphi}e^{u\theta}.$$

Zaradi nekomutativnosti prav tako sledi, da $e^{u\theta}e^{v\varphi} \neq e^{v\varphi}e^{u\theta}$. Če bi tak produkt obstajal, bi v eksponentu imeli primer nekomutativne vsote, kar pa je seveda v protislovju z definicijo vsote iz algebre $\mathbb{H}$.

Zanima nas, kdaj taki kvaternioni komutirajo.

Trditev 2 *Naj bosta $p, q \in \boldsymbol{Q}_e$ taka, da $\exists u \in \boldsymbol{U}_e$, da $p = e^{u\theta}$ in $q = e^{u\varphi}$ za neka $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Tedaj je $pq = qp$.*

Dokaz: Zapišemo $p = \cos\theta + u\sin\theta$, $q = \cos\varphi + u\sin\varphi$. Spomnimo se, da skalarji komutirajo z vsemi kvaternioni. Torej je

$$\begin{aligned} pq &= (\cos\theta + u\sin\theta)(\cos\varphi + u\sin\varphi) \\ &= \cos\theta(\cos\varphi + u\sin\varphi) + u\sin\theta(\cos\varphi + u\sin\varphi) \\ &= (\cos\varphi + u\sin\varphi)\cos\theta + (u\cos\varphi + u^2\sin\varphi)\sin\theta \\ &= (\cos\varphi + u\sin\varphi)\cos\theta + (\cos\varphi + u\sin\varphi)u\sin\theta \\ &= (\cos\varphi + u\sin\varphi)(\cos\theta + u\sin\theta) = qp. \end{aligned}$$

$\square$

Trditev nam pove, da kvaternioni z različnim realnim argumentom in istim versorjem med sabo komutirajo. Prav tako komutirata kvaterniona, ki sta zapisana s konjugiranima versorjema, saj je to ekvivalentno negativnemu argumentu v polarnem zapisu.

3 Preslikava rotacije

3.1 Preslikava

Definicija 5 *Naj bo $q \in \boldsymbol{Q}_e$. Označimo preslikavi $L_q, R_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ levega in desnega množenja:*

$$L_q x = qx,\ R_q x = xq.$$

Vidimo, da sta L_q in R_q linearni preslikavi. Naj bosta $x, y \in \mathbb{H}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$L_q(\alpha x + \beta y) = q(\alpha x + \beta y).$$

Uporabimo komutativnost skalarjev in levo distributivnost nad kvaternioni:

$$q(\alpha x + \beta y) = \alpha qx + \beta qy = \alpha L_q x + \beta L_q y.$$

S podobnim računom pokažemo, da je R_q tudi linearna. Poleg tega vidimo, da sta preslikavi ortogonalni, t.j., da ohranjata skalarni produkt. Iz tega sledi tudi, da sta preslikavi L_q in R_q izometriji prostora.

Ti preslikavi med sabo komutirata, saj za $p, q \in \mathbf{Q}_e$ in fiksen $x \in \mathbb{H}$:

$$(L_p \circ R_q)x = p(xq) = (px)q = (R_q \circ L_p)x.$$

Njun kompozitum je prav tako ortogonalna preslikava Definiramo torej kompozitum preslikav kot posebno preslikavo

Definicija 6 *Naj bosta $p, q \in \boldsymbol{Q}_e$. S $C : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ označimo kompozitum levega in desnega množenja*

$$C_{p,q} = L_p \circ R_q = R_q \circ L_p.$$

C je za poljubna $p, q \in \mathbf{Q}_e$ bijektivna in ortogonarlna. Ortogonalnost sledi iz kompozicije dveh ortogonalnih preslikav, surjektivnost je očitna. Injektivnost preverimo z uporabo pravil krajšanja v kvaternionski algebri $\mathbb{H}$. Če je namreč $C_{p,q}x = C_{p,q}y$, je to enako $pxq = pyq$. Ker lahko kvaternione okrajšamo, sledi $x = y$.

Naj bodo $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbf{Q}_e$. Poglejmo preslikavi C_{p_1,q_1}, C_{p_2,q_2}. Če preslikavi komponiramo, je rezultat ponovno preslikava take oblike, t.j. $C_{p_1p_2,q_2q_1}$. Inverz te preslikave je prav tako ortogonalna preslikava, namreč $C_{p,q}^{-1} = C_{p^{-1},q^{-1}}$. Imamo torej grupo preslikav za komponiranje nad $\mathbf{Q}_e$. Izkaže se, da je ta grupa kar grupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ [7]. Opomnimo samo, da se pri komponiranju teh preslikav vrstni red desnega množenja obrne.

Posebej omenimo množico preslikav oblike $C_{q,\overline{q}}$. Vemo, da se da q zapisati v polarni obliki kot $\cos\theta + u \sin\theta = e^{u\theta}$ za neka $u \in \mathbf{U}_e, \theta \in \mathbb{R}$. Ker je $q \in \mathbf{Q}_e$, je $\overline{q} = e^{-u\theta}$. Preslikavo $C_{q,\overline{q}}$ je torej možno zapisati kot

$$Cx := C_{q,\overline{q}}x = e^{u\theta}xe^{-u\theta}.$$

Ker je C ortogonalna preslikava, ohranja skalarni produkt. Spomnimo se, da so skalarni kvaternioni in čisti kvaternioni pravokotni, saj ce $\alpha \in \mathbb{R}$ in $q \in \mathbb{R}^3$, je $\langle \alpha, q \rangle = \frac{1}{2}(\overline{\alpha}q + \overline{q}\alpha)$. Ker je $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\overline{\alpha} = \alpha$. Torej je dalje skalarni produkt enak $\frac{1}{2}(\alpha q - \alpha q) = 0$. Prostor skalarjev je torej invarianten za preslikavo C.

Izrek 1 *Naj bo $u \in \boldsymbol{U}_e$ in $\theta \in \mathbb{R}$. Preslikava $C = C_{q,\overline{q}}$ je rotacija ravnine, pravokotne na u za kot 2θ.*

Dokaz: Najprej pogledamo, kaj se zgodi z kvaternioni, ki ležijo na ogrinjači versorja u. Naj bo $u \in \mathbf{U}_e$.

$$C_{q,\overline{q}}u = e^{u\theta}ue^{-u\theta}.$$

Ker je hkrati tudi $u \in \mathbf{Q}_e$, se u da zapisati kot $\cos\frac{\pi}{2} + u\sin\frac{\pi}{2} = e^{u\frac{\pi}{2}}$. Spomnimo se, da kvaternioni, izraženi z istim versorjem, med sabo komutirajo. Torej je

$$e^{u\theta}ue^{-u\theta} = e^{u\theta}e^{-u\theta}u = u.$$

Vidimo torej, da je tudi $Lin\{u\}$ invariantna. Preslikava C torej fiksira dve dimenziji prostora $\mathbb{H}$. Ker je preslikava C ortogonalna, ohranja tudi ortogonalni komplement $Lin\{u\}$. Označimo $L^{\perp} = (Lin\{u\})^{\perp}$. Naj bo $v \in L^{\perp}$. Za bazo ravnine, pravokotne na u, vzamemo kvaterniona v in $w = uv = u \times w$. Za v velja naslednje:

$$\begin{aligned}
ve^{-u\theta} &= v(\cos\theta - u\sin\theta) \\
&= v\cos\theta - vu\sin\theta \\
&= v\cos\theta + uv\sin\theta \\
&= (\cos\theta + u\sin\theta)v = e^{u\theta}v.
\end{aligned}$$

Torej, če s C slikamo v:

$$Cv = e^{u\theta}ve^{-u\theta} = e^{u\theta}e^{u\theta}v = e^{2u\theta}.$$

Če $e^{2u\theta}v$ zapišemo kot $v\cos 2\theta + uv\sin 2\theta = v\cos 2\theta + w\sin 2\theta$, vidimo podobno, kot bi imeli rotacijo $\mathbb{R}^2$. Prav tako s C preslikamo w:

$$Cw = e^{u\theta}we^{-u\theta} = e^{u\theta}uve^{-u\theta} = e^{u\theta}ue^{u\theta}v = e^{u\theta}e^{u\theta}uv = e^{2u\theta}w.$$

Zapišemo še w kot $w\cos 2\theta + wu\sin 2\theta = w\cos 2\theta - v\sin 2\theta$.

Ker je $\mathbb{H}$ algebra, je obenem tudi vektorski prostor. Zato je smiselno napisati matriko preslikave C glede na bazo $\{u, v, w\}$. C tedaj ustreza matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Preslikava C torej predstavlja transformacijo $\mathbb{H}$, ki fiksira skalarje $\mathbb{R}$ in eno dimenzijo podprostora $\mathbb{R}^3$, ki sovpada z u, drugi dve pa obrne.

□

Omenimo še, da C ohranja orientacijo, saj je ortogonalna preslikava. Imamo torej rotacijo ravnine v pozitivni smeri. [5]

3.2 Izbira baze

Želimo preslikati poljublno točko $\nu \in \mathbb{R}^3$ okoli izbrane smeri, ki jo določa versor u. Denimo, da nas zanima rotacija za kot θ. Po prejšnjem izreku vemo, da taki transformaciji zadošča preslikava $Cx = e^{u\frac{\theta}{2}}xe^{-u\frac{\theta}{2}}$. Vemo, da je $Lin\{u\}$ invarianten za C, prav tako pa poznamo sliko kvaterniona, pravokotnega na u.

Izbrali bomo bazo pravokotnih kvaternionov, saj poznamo njihove slike, nato pa ν razvili po dobljeni bazi. Prvi bazni kvaternion naj bo kar u. Naslednji kvaternion vektor, ki mora biti zavoljo uporabe izreka pravokoten na u, dobimo z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo, in sicer:

$$\begin{aligned} &\text{prvi kvaternion} && u_1 = u, \\ &\text{drugi kvaternion} && u_2 = \nu - \frac{\langle \nu, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u, \\ &\text{tretji kvaternion} && u_3 = u_1 u_2. \end{aligned}$$

Kvaternioni so med sabo pravokotni, saj smo uporabili Gram-Schmidtov proces za en kvaternion, drugi pa je očitno pravokoten na oba druga, v skladu z izrekom. Razpišimo bazne kvaternione:

$$u_1 = u,$$
$$v = u_2 = \nu - \frac{\langle \nu, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = \nu - \langle \nu, u\rangle u, \text{ saj} \langle u, u\rangle = 1.$$

Kvaterniona ne bomo normalizirali, saj je preslikava C izometrija, in torej ohranja razdalje.

$$w = u_3 = u_1 u_2 = u(\nu - \langle \nu, u\rangle u).$$

Imamo torej bazo $B = \{u, v, w\} = \{u, \nu - \langle \nu, u\rangle u, u(\nu - \langle \nu, u\rangle u)\}$ za R^3. Zapišemo ν po bazi : $\nu = \langle \nu, u\rangle u + v$. Ker poznamo slike vseh baznih kvaternionov in je C linearna preslikava, lahko sedaj zapišemo sliko poljubnega kvaterniona ν:

$$\begin{aligned} C\nu &= C(\langle \nu, u\rangle u + v) \\ &= \langle \nu, u\rangle Cu + Cv \\ &= \langle \nu, u\rangle u + \cos\theta v + \sin\theta w. \end{aligned}$$

Ker sta v in w odvisna le od u in ν, zapišimo sliko glede na njiju:

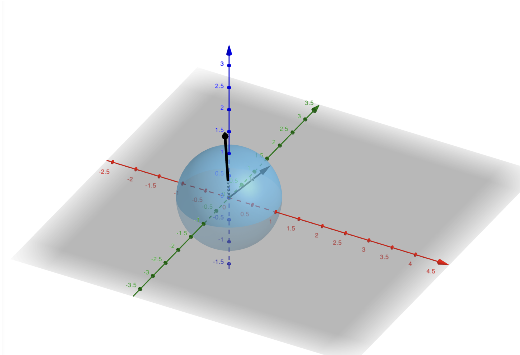
$$\begin{aligned} C\nu &= \langle \nu, u\rangle u + \cos\theta v + \sin\theta w \\ &= \langle \nu, u\rangle u + \cos\theta(\nu - \langle \nu, u\rangle u) + \sin\theta u(\nu - \langle \nu, u\rangle u) \\ &= \langle \nu, u\rangle(1 - \cos\theta)u + \cos\theta\nu + \sin\theta u \times \nu. \end{aligned}$$

Tukaj opazimo, da velja naslednja enakost: $u(\nu - \langle \nu, u \rangle u) = u \times \nu$. S tem smo zapisali sliko poljubnega kvaterniona pri željeni rotaciji.

3.2.1 Primer uporabe

Zgled 1 *Preslikajmo* $(1, -2, 3)$ *za kot* $\frac{\pi}{4}$ *okoli smeri* $(1, 1, 1)$.

Vzamemo kvaterniona $\nu = (1, -2, 3), u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.



Slika 1: Kvaterniona ν in u v $\mathbb{R}^3$.

Ker sta ν in $u \in \mathbb{R}^3$, skalarni produkt $\langle \nu, u \rangle$ ustreza kar običajnemu skalarnemu produktu vektorjev ν, u v $\mathbb{R}^3$.

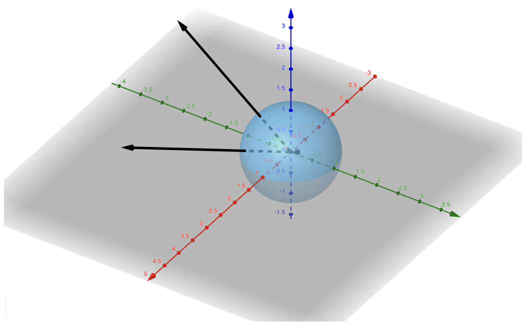
$$\begin{aligned} \langle \nu, u \rangle = \nu \cdot u &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -2, 3) \cdot (1, 1, 1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

pogledamo še njun vektorski produkt

$$\begin{aligned} u \times \nu &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \times (1, -2, 3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(5, -2, -3). \end{aligned}$$

Vstavimo u in ν ter dobljene rezultate v končo formulo

$$
\begin{aligned}
C\nu &= \langle \nu, u\rangle(1-\cos\theta)u + \cos\theta\nu + \sin\theta u \times \nu \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}(1-\cos\frac{\pi}{4})\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) + \cos\frac{\pi}{4}(1,-2,3) + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(5,-2,-3) \\
&= \frac{2}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-2,3) + \frac{1}{\sqrt{6}}(5,-2,-3) \\
&= \Big(\frac{4-2\sqrt{2}}{6} + \frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{6}}{6}, \frac{4-2\sqrt{2}}{6} - \frac{6\sqrt{2}}{6} - \frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{4-2\sqrt{2}}{6} + \frac{9\sqrt{2}}{6} - \frac{3\sqrt{6}}{6}\Big) \\
&\approxeq (2.94, -2.04, 1.09).
\end{aligned}
$$



Slika 2: Kvaternioni u, ν ter preslikani ν.

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

Euler's rotation theorem Eulerjev izrek o rotacijah
Euler angles Eulerjevi koti
transformation transformacija, preslikava
matrix matrika
origin koordinatno izhodišče
quaternion kvaternion
dot product skalarni produkt
cross product vektorski produkt
quaternion conjugate konjugirana vrednost kvaterniona
norm norma
unit quaternion enotski kvaternion
pure quaternion pravi oziroma čisti kvaternion
versor versor, enotski čisti kvaternion
polar form polarni zapis, polarna oblika
orthogonal pravokoten
Taylor expansion Taylorjev razvoj
uniform convergence enakomerna konvergenca
orthogonal transformation ortogonalna preslikava
isometry izometrija
invariant invarianten
span linearna ogrinjača
Gram-Schmidt orthogonalisation process Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Literatura

[1] Eugene Salamin. Application of quaternions to computation with rotations. Technical report, Working Paper, 1979.

[2] Ken Shoemake. Animating rotation with quaternion curves. In *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 245–254, 1985.

[3] John Baez. John Baez's stuff. `https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/node24.html`. Accessed : 2023-06-02.

[4] Erik B Dam, Martin Koch, and Martin Lillholm. *Quaternions, interpolation and animation*, volume 2. Citeseer, 1998.

[5] Joel L Weiner and George R Wilkens. Quaternions and rotations in $\mathbb{E}^4$. *The American Mathematical Monthly*, 112(1):69–76, 2005.

[6] David W Lyons. Quaternions. `https://math.libretexts.org/Bookshelves/Abstract_and_Geometric_Algebra/Introduction_to_Groups_and_Geometries_(Lyons)/01%3A_Preliminaries/1.02%3A_Quaternions`, oct 10 2021. Accessed : 2023-06-03.

[7] Matej Brešar, Christoph Hanselka, Igor Klep, and Jurij Volčič. Skolem–Noether algebras. *Journal of Algebra*, 498:294–314, 2018.