TD04 – Nombres Complexes

☐ **Exercice 1 : ☼ Calculs algébriques.** Calculer : $(1 \pm i)^2$, $(2+3i)(4-i)$, $\dfrac{1}{3+i}$, $\dfrac{2-i}{i+2}$, $\dfrac{4i-1}{i+\sqrt{3}}$

☐ **Exercice 2 : ☼ Du binôme.** Calculer $(\sqrt{3}+i)^3$ de deux façons :
- En développant au moyen du produit remarquable $(a+b)^3 = \cdots$.
- En utilisant la représentation exponentielle.

☐ **Exercice 3 : ✎ Modules et arguments.** Donner le module et un argument des nombres suivants : $3-\sqrt{3}i$, $-1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{6} \pm i\sqrt{2}$, $\pm 1 \pm i$ (quatre cas), $(1+i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{2+3i}{6-4i}$, $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

☐ **Exercice 4 : ☼ Formules d'addition, le retour.**
1. Retrouver les formules donnant $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$ au moyen de l'exponentielle complexe.
2. En développant $(\cos x + i \sin x)^2$, retrouver les formules donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ au moyen de $\cos x$ et $\sin x$.

☐ **Exercice 5 : ☼ Des modules.** Calculer le module des complexes suivants :

a) $(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{5})(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{5})$ b) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$ c) $\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$

d) $\dfrac{(2-3\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(6+4\mathrm{i})(15-8\mathrm{i})}$ e) $(3-2\mathrm{i})^4$ f) $\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{543}$

☐ **Exercice 6 : ☼ Avec le moins de calculs possibles !** Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

a) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$ b) $(1-\mathrm{i})^{12}(\sqrt{3}-3\mathrm{i})$ c) $\left(\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}\right)^{11}$ d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{20}$

☐ **Exercice 7 : ✎ Des sommes.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$.

☐ **Exercice 8 : ☼ À savoir par cœur.** Factoriser $X^2 - 2\cos\varphi X + 1$.

☐ **Exercice 9 : ✎ ✎ Du second degré.**
Résoudre les équations suivantes :
1. $z^2 - 2\mathrm{i}z - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$
2. $z^2 - (11+5\mathrm{i})z + 24 + 27\mathrm{i} = 0$
3. $(1-\mathrm{i})z^2 - 2(3-2\mathrm{i})z + 9 - 7\mathrm{i} = 0$
4. $(2-\mathrm{i})z^2 - (3+\mathrm{i})z - 2 + 6\mathrm{i} = 0$
5. $z^2 - [m(1+\mathrm{i})+2]z + \mathrm{i}m^2 + m(1+\mathrm{i}) + 1 = 0$
6. $z^2 - 2e^{\mathrm{i}\theta}z + 2\mathrm{i}\sin\theta e^{\mathrm{i}\theta} = 0$

☐ **Exercice 10 : ✎ ✎ Encore des équations.**
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 1 + i(3z+5) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2+4z+1)^2 + (3z+5)^2 = 0$.
3. En déduire quatre nombres réels a, b, c et d tels que

$$(z^2+4z+1)^2 + (3z+5)^2 = (z^2+az+b)(z^2+cz+d)$$

☐ **Exercice 11 : ✎ Racines carrées.** Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3-4i$.

☐ **Exercice 12 : ✎ Un système somme-produit ?** Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=1 \end{array}\right.$.

☐ **Exercice 13 : ✎ ✎ Un autre calcul de somme.** Soit n un entier strictement positif, θ un réel appartenant à $]0,\pi[$. On considère :

$$S_n=\sum_{p=1}^{n}\cos^p(\theta)\cos(p\theta),\quad S'_n=\sum_{p=1}^{n}\cos^p(\theta)\sin(p\theta),\quad \text{et}\quad \Sigma_n=S_n+iS'_n.$$

Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison. En déduire la valeur de Σ_n puis de S_n et S'_n en fonction de n et θ.

☐ **Exercice 14 : ✎ Factorisation de sinus.**

1. **a)** Montrer que $\forall z\in\mathbb{C},\ z^3-1=(z-1)(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})$.

b) En déduire que $\forall (a,\,b)\in\mathbb{C}^3,\ a^3-b^3=(a-b)(a-be^{2i\pi/3})(a-be^{-2i\pi/3})$ puis que $a^3-b^3=(a-b)(ae^{-i\pi/3}-be^{i\pi/3})(ae^{i\pi/3}-be^{-i\pi/3})$.

c) À partir de la formule précédente, montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin(3x).$$

2. Retrouver le développement de $\sin(3x)$ en posant $\sin(3x)=\sin(2x+x)$ puis vérifier la formule de 1.c) en développant $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.

☐ **Exercice 15 : ✎ ✎ Un peu de géométrie.** Soient $(a,b,c)\in\mathbb{U}^3$ tels que $b\neq c$. On note $A=\dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2}$. Montrer que $A\in\mathbb{R}_+$.

☐ **Exercice 16 : ✎ Encore des racines.**

1. Calculer les racines 3ièmes de $2i$.

2. Développer $(2+i)^3$ et en déduire les racines 3ièmes de $2+11i$.

☐ **Exercice 17 : ✎ Une équation.** Résoudre $\exp(z)=1+i$.

☐ **Exercice 18 : ✎ ✎ Lien complexes-arithmétique.** Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\mathbb{U}_m\subset\mathbb{U}_n \Leftrightarrow m|n$. (lire « m divise n »).

Applications des formules de Moivre et d'Euler

Remarque. La formule de Moivre et les formules d'Euler sont utiles pour transformer des expressions trigonométriques de l'une en l'autre des formes suivantes :

(P) Expressions polynomiales en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. *par exemple* $\cos^3(\theta) + 4\sin^2(\theta)\cos(\theta)$

(L) Combinaisons linéaires de $\cos(m\theta)$ et de $\sin(n\theta)$, où $m, n \in \mathbb{N}$. *par exemple* $3\cos(4\theta) + \sin(3\theta)$

Méthode : *Linéarisation : passer de (P) à (L)*

Dans l'expression de type **(P)** à linéariser, en utilisant les formules d'Euler :

- Remplacer $\cos^n(\theta)$ par $\frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n}{2^n}$ et $\sin^n(\theta)$ par $\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^n}{2^n i^n}$,
- Développer les expressions $(e^{i\theta} \pm e^{-i\theta})^n$ ainsi créées,
- Regrouper les termes $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$ obtenus en $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$.

Exemple : $\cos^2(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \dfrac{2\cos(2x)+2}{4} = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$.

☐ **Exercice 19 :** Linéariser de la même façon $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos^4(x)$, $\sin^4(x)$.

☐ **Exercice 20 :** Linéariser les produits suivants pour $\varphi \in \mathbb{R}$:

1. $\cos^2\varphi\sin^4\varphi$, $\cos^4\varphi\sin^5\varphi$, $\cos^2\varphi\sin^5\varphi$

2. $2^{2n}\cos^{2n}(\varphi)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $2^{2n+1}\sin^{2n+1}(\varphi)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Remarque. Linéariser une expression trigonométrique permet par exemple de l'intégrer. Par exemple, on voit qu'une primitive de $\cos^3\theta$ est $\dfrac{1}{12}\sin 3\theta + \dfrac{3}{4}\sin\theta$.

Méthode : *Factorisation : passer de (L) à (P)*

Dans l'expression de type **(L)** a factoriser, en utilisant la formule de Moivre :

- Remplacer $\cos(n\theta)$ par $\mathbf{Re}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$ et $\sin(n\theta)$ par $\mathbf{Im}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$,
- Développer les expressions $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ainsi créées,
- Garder la partie réelle pour $\cos(n\theta)$, ou la partie imaginaire pour $\sin(n\theta)$ du résultat.

Exemple : Développons $\cos(2x)$.
$\cos(2x) = \mathbf{Re}(e^{2ix})$ or $e^{2ix} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x)$
d'où $\cos(2x) = \mathbf{Re}(e^{2ix}) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

☐ **Exercice 21 :** Développer de la même façon : $\cos(3x)$, $\sin(3x)$, $\cos(4x)$, $\sin(4x)$, $\cos(5x)$, $\sin(5x)$.

☐ **Exercice 22 :** Calculer, pour $\varphi \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(9\varphi)$ en fonction de $\cos(\varphi)$ uniquement et $\sin(8\varphi)$ en fonction de $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$.

b) $\tan(6\varphi)$ et $\tan(7\varphi)$ en fonction de $\tan(\varphi)$.

Remarque. Factoriser une expression trigonométrique permet par exemple d'en étudier le signe plus simplement. Par exemple on voit que $\cos 3\theta - 3\cos\theta = \cdots = -4\cos\theta\sin^2\theta$ est du signe de $-\cos\theta$, i.e. négative sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ mod 2π et positive sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ mod 2π.

Légende. ☼ : exercice de base. ✎ exercice à savoir faire rapidement. ✎✎ prendra surement plus de temps. ✎✎✎ demande du temps et des idées.