Курс аналитической геометрии и линейной алгебры

Глава 1

Матрица

Определение 1. *Матрица размера $m \times n$ называется совокупность n * m элементов некоторого множества, записанных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов.*

- Если элементами матрицы являются числа, то матрица называется числовой.
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3n} \end{bmatrix}$$

- Матрицу обозначают большими латинскими буквами A, B, C. Элементы матрицы малыми буквами, снабженные двумя индексами. Первый индекс - номер строки, второй - номер столбца, на пересечении которых находится элемент матрицы.

- Множество всех матриц, размера $m \times n$, обозначается M.

- *Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей строкой.* $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

- *Матрица размера $m \times 1$ называется матрицей столбцом.* $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

- *Матрица в которой $m = n$ называется квадратной матрицей, порядка n.*

- *Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается θ.*

- *Матрица, на главной диагонали которой стоят какие-то числа, а все остальные элементы равны нулю, называется диагональной.* $\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$
- *Матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, обозначается буквой $I(E)$ и называется единичной матрицей.*

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.1 Арифметические операции над матрицами

Операции сложения и умножения на число называются линейными операциями.

1.2 Сложение матриц

$$A \in M_{m\times n}, B \in M_{m\times n}$$
$$A + B = C, C \in M_{m\times n}$$

1.3 Умножение матрицы на число

$$A \in M_{m\times n}, \lambda - number$$
$$\lambda \cdot A = B$$
$$b_{ij} = a_{ij} \cdot \lambda$$

1.4 Свойства линейных операций

1. Свойство коммутативности $A + B = B + A$
2. Свойство ассоциативности $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

1.5 Умножение матриц

Матрицы можно умножать, если их размеры согласованы(количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы). В противном случае операция умножения не определена.

- Пусть

$$
\begin{gathered}
A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times k} \\
A \cdot B = C, C \in M_{m\times k} \\
c_{ij} = a_{ij} * b_{ij} + a_{i2} * b_{i2} +
\end{gathered}
$$

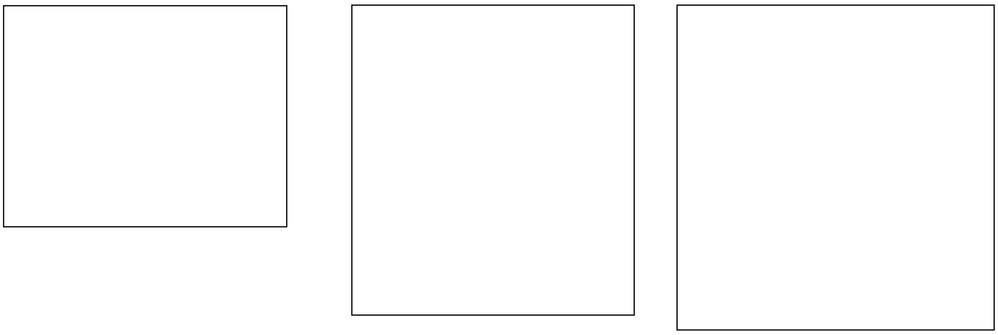

Рис. 1.1: matrix multiplication

- A $= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, B $= \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$

  A $\cdot B = [10]$

  $B \cdot A = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\0 & 0 & 0\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

- A $= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, B $= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

  A $\times B = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$

  B $\times A \neq A \times B$

- A $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, B $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

  A $\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$