向量丛和示性类2.5—截面延拓与向量丛的分类

开门见山，我们先证明一道阿里巴巴数学竞赛题：

> **（2024几何与拓扑第8题）** 设X为CW复形，$H^2(X;\mathbb{Z})=0$，$f:X\to S^2$连续，且E是S^2上的实向量丛，证明：f^*E为平凡丛。

Proof： 若$\mathrm{rank}E>2$，则作为流形有$\dim E>4$，从而容易从横截相交的理论中得出E有一个与零截面不交的处处非零截面，从而$E=E'\oplus\mathbb{R}$，进而我们有平面丛F使得$E=F\oplus\mathbb{R}^l$，下面我们说明任给一个S^2上的平面丛F，其拉回为X上的平凡丛。

注意到$E\to Y$作为向量丛可定向当且仅当$w_1(E)=0$，特别的，单连通流形上的向量丛都是可定向的，且由$\mathrm{SO}(2)$和$U(1)$的同构，我们知道任何一个定向平面丛都可以视作一个复线丛，因此可视f^*F为X上的复线丛，而熟知分类空间则有$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X)=[X,\mathbb{C}P^\infty]=[X,K(\mathbb{Z},2)]=H^2(X;\mathbb{Z})=0$，因此可知$X$上的复线丛均为平凡丛，因此我们结合平凡丛拉回仍为平凡丛，可知f^*E为平凡丛。$\square$

Topic 1—非零截面延拓

一般而言，我们关心这样一个问题：给定有限维CW复形X，以及其上的向量丛E，我们若有非零截面$s:X^k\to E$，一个自然的问题是能否将其延拓为X^{k+1}上的一个非零截面呢？

首先这个问题一般而言并没有肯定回答，比如考虑S^2上的切丛即可一窥，但倘若E的要求放宽一些，譬如其秩大于底空间的维数（这里指CW复形的维数），那么事情会大不一样。

> 这个问题对于流形而言格外的简单（由Morse理论可知任何一个光滑流形都是一个CW复形），因为我们可以引入微分拓扑中的工具和技术，设$E\to M$是m维光滑流形上的秩为n向量丛，且$n>m$，则我们断言其上一定存在一个处处非零截面，事实上，考虑$s:M\to E$为截面，则由Sard定理可知，不妨假设s与E的零截面横截相交，而注意到E作为流形是$n+m$维的，因此可知这只能说明s的像和零截面不交，进而说明s为一个处处非零的截面。

现在让我们具体来看看延拓一个非零截面会遇到哪些拓扑上的障碍：设$X^k=X^{k-1}\cup e^k\cong X^{k-1}\cup_\varphi D^k$，这里$D^k$表示一个$k$维闭球，从而现设$s_{k-1}:X^{k-1}\to E$为一个非零截面，特别的，$s_{k-1}|_{\partial e^k}$也为一个非零截面，设$D^k$到$X^k$的含入映射为$\Phi$，则整理一下，我们想问如下虚线箭头映射是否存在且保证不为0：

$$\begin{tikzcd}
\partial D^k \arrow[r, "s_{k-1}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
D^k \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[ur, dashed, "?"] & X
\end{tikzcd}$$

事实上，我们将丛拉回，即实际上转换成如下虚线箭头映射是否存在

$$
\begin{tikzcd}
\partial D^k \arrow[r] \arrow[d] & \Phi^* E \arrow[d] \\
D^k \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "?"] & D^k
\end{tikzcd}
$$

而注意到Φ^*E在D^k上平凡丛因为后者可缩，从而可知$\Phi^*E = D^k \times \mathbb{R}^l$，这里$l = \mathrm{rank}E$，从而若存在$s : D^k \to \mathbb{R}^l$的非零延拓，即有$s : D^k \to \mathbb{R}^l - \{0\} \simeq S^{l-1}$，且$s|_{S^{k-1}}$已经给定，这等价于说明$s : S^{k-1} \to S^{l-1}$的映射是零伦的，因此我们有：

总结：$s_{k-1} : X^{k-1} \to E$可以延拓至$X^k \to E$中，当且仅当如下映射复合

$$
S^{k-1} \xrightarrow{s|_{\partial e^k}} E \xrightarrow{\text{局部坐标}} \mathbb{R}^l - \{0\} \xrightarrow{\text{同伦等价}} S^{l-1},
$$

为**零伦映射**。特别的，如果$k < l$，那么由熟知的球面同伦群的基本结果，我们可知这总是可以延拓的。

因此我们作为推论，特别的有对任何一个CW复形X，我们有在模掉平凡丛意义下

$$
\mathrm{Vect}^{\infty}_{\mathbb{R}}(X) = \cdots = \mathrm{Vect}^{\dim X+1}_{\mathbb{R}}(X) = \mathrm{Vect}^{\dim X}_{\mathbb{R}}(X),
$$

也即更高维数的向量丛并不会承载更多的信息。

Topic 2—球面上向量丛的分类

一般的看，在球面上构造向量丛并不是一个复杂的任务，因为球面S^k可以分成上下半球，且上下半球都是可缩的，从而可知向量丛E限制在上下半球都是平凡的，因此唯一值得关注的就是在相交的S^{k-1}处附近的转移函数，因此不难注意到任取$f : S^{k-1} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，我们可以构造出$S^k$上一个秩为$n$的向量丛$E_f$：在两个半球相交的部分$S^{k-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$上，我们考虑

$$
S^{k-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n \ni \boxed{(p, t, v) \mapsto (p, t, f(p) \cdot v)} \in S^{k-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n,
$$

这样便可以通过给出一个转移映射进而给出向量丛的构造。

观察：一个很快的发现是，若$f \simeq g$，则我们有E_f与E_g是同构的，事实上，我们考虑同伦$H : S^{k-1} \times [0, 1] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，则不难发现由类似的叙述，$H$实际上给出了一个$S^{k-1} \times [0, 1]$上的向量丛$F$，并且$F|_{S^{k-1} \times \{0\}} = E_f$，$F|_{S^{k-1} \times \{1\}} = E_g$，则我们立刻有$E_f \cong E_g$。

因此上述构造实际上给出了一个良好定义的映射$\Phi : [S^{k-1}, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})] \to \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(S^k)$，不费任何多余的功夫，很快就可以将这个映射平凡推广到复向量丛的情形，我们紧接着证明：

定理1：$\Phi : [S^{k-1}, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})] \to \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k)$是一个双射。

Proof：为说明此事，我们构造一个反向的映射Ψ，任取一个复向量丛E，以及局部平凡化$h_\pm : E^k_\pm \to D^k_\pm \times \mathbb{C}^n$，从而显然$h_+ h_-^{-1}$确定了一个$S^{k-1}$到$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$的映射，我们现在大言不惭的定义$\Psi(E)$恰为$h := h_+ h_-^{-1}$对应的映射同伦类，但为此，我们需要先说明这是良定义的，即现在对另一组局部平凡化$h'_\pm$，以及转移映射$h' = h'_+(h'_-)^{-1}$，我们希望说明h和h'是同伦的，注意到：

$$
h' = (h'_+ \circ h_+^{-1}) \circ (h_+ \circ h_-^{-1}) \circ (h_- \circ (h'_-)^{-1}),
$$

其中$h'_+ \circ h_+^{-1} : D^k_+ \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$（这里我们含糊一下记号，理论上这是一个$E_+ \to E_+$的映射），由$D^k_+$可缩，从而可知其同伦于一个常值映射，记为矩阵$A_+$，同理后者也同伦于某个矩阵$A_-$，因此在模掉记号含糊下，我们有

$$
h' \simeq A_+ \circ h \circ A_-, \quad A_+, A_- \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),
$$

而注意到$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$道路连通（通过Jordan标准型很容易看出），从而我们可进一步让$A_\pm$均同伦到恒同映射，进而可以得到确实：$h'\simeq h$，因此我们知道之前脸不红心不跳定义的$\Psi(E)$确实是良好的。

从上述定义便可直接看出Ψ与Φ互为逆映射，即完成了证明。□

> **注：**事实上，这可平凡推广到S^n上G主丛的分类，并且有$[S^n,BG]=[S^{n-1},G]$，从而我们实际上有ΩBG也即BG的回路空间和G是弱同伦等价的，因为任意n，$\pi_n(\Omega BG)=\pi_n(G)$。

例子2：由$\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^1)=[S^0,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})]$，而$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$道路连通，从而后者只有一个元素，因此可知$S^1$上所有的复线丛都是平凡丛。

例子3：注意到$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(S^2)=[S^1,\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})]=\pi_1(\mathbb{C}-\{0\})=\mathbb{Z}$，因此我们自然好奇，每个整数分别对应着什么样的线丛呢？是否有一个生成元？

我们首先考虑$S^2=\mathbb{C}P^1$上的典范线丛η_1，回忆
$\eta_1=\{(p,v):p\in\mathbb{C}P^1,v\text{在}p\text{对应的线性子空间中}\}$，更精准的，对于点$[z_1:z_2]$，其上的纤维均形如$\lambda(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$，这里$\lambda\in\mathbb{C}^*$。特别的选取上半球为$z_1\neq 0$，则可选取局部坐标为$[z_1:z_2]\mapsto\dfrac{z_1}{z_2}$，在下半球则为$[z_1:z_2]\mapsto\dfrac{z_2}{z_1}$，现对$S^1$上的点$[z_1:z_2]$，在上半球可表示为$[1:z]$，则在下半球可表示为$[1/z:1]$，从而我们需要将$\lambda(1,z)$对应的点和$\lambda'(1/z,1)$相粘贴起来，这即表明转移映射$S^1\mapsto\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$可表示为$z\mapsto(z)$（把$\lambda'$变为$\lambda$），即乘上$z$，如果反转转移函数则自然是$z\mapsto(1/z)$。

在继续讨论S^2上的复向量丛之前，我们先证明一个一般的结果：

命题4：设$f,g:S^{k-1}\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，则有对$fg(x):=f(x)g(x)$，我们有

$$E_{fg}\oplus\underline{\mathbb{C}^n}\cong E_f\oplus E_g.$$

Proof：容易知道，$E_f\oplus E_g$对应的粘贴函数为$\mathrm{diag}\{f,g\}:S^{k-1}\to\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$，从而我们只需要说明$\mathrm{diag}\{fg,I_n\}$和$\mathrm{diag}\{f,g\}$同伦即可，由熟知的线性代数，我们有如下初等变换：

$$\boxed{\begin{pmatrix}O&-I\\I&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-f\\O&I\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}fg&O\\O&I\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix}I&O\\g&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&f^{-1}\\O&I\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}f&O\\O&g\end{pmatrix},$$

且显然对于$\begin{pmatrix}I&tf\\O&I\end{pmatrix}$给出了$\begin{pmatrix}I&f\\O&I\end{pmatrix}$到单位阵的连续同伦，故$\mathrm{diag}\{fg,I_n\}$和$\mathrm{diag}\{f,g\}$同伦，即证。□

值得一提的是，对于线丛E_f,E_g，则有$E_f\otimes E_g=E_{fg}$，因此我们有在S^2上，
$(\eta_1\otimes\eta_1)\oplus\underline{\mathbb{C}}=\eta_1\oplus\eta_1$。

注：由此可说明，S^n上的复线丛的张量积和线丛的直和是稳定等价的（作业3第五题），但这对一般的流形并不成立，比如考虑$\mathbb{C}P^2$上的典范线丛L，以及考虑$L\otimes L$，注意到
$\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}_1(\mathbb{C}P^2)\cong H^2(\mathbb{C}P^2)\cong\mathbb{Z}$，从而结合$c_1(L^{\otimes n})=nc_1(L)$，因此可知若$L\otimes L$和一些线丛的直和稳定等价，则从第一chern类的角度出发可知，一定会有$L\otimes L$和$L\oplus L$稳定等价，因为线丛一定同构于$L^{\otimes m}$之形状，而注意到前者第二chern类为0，后者为$a\smile a$，并不为0，从而可知矛盾。

关于同伦的一些评注

注意到我们在球面上向量丛的分类中，不加证明的陈述并接受了如下结果：

$$[S^{n-1},U(k)]=\pi_{n-1}(U(k))=:\langle S^{n-1},U(k)\rangle,$$

其中这里$[X,Y]$表示X到Y之间连续映射的同伦类，$\langle X,Y\rangle$为保基点的映射同伦类。一般来讲，
$[X,Y]\neq\langle X,Y\rangle$，所以我们需要花费一些口舌去解释上面这个等式。

我们首先以π_1为例，简单的回忆有

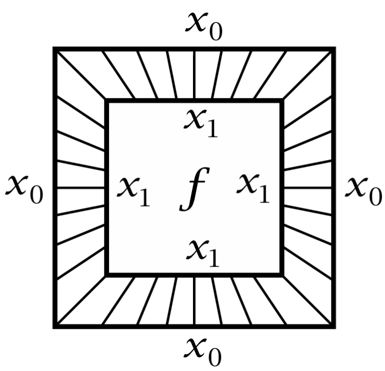
$$\boxed{[S^1, X] = \pi_1(X, x_0)/\text{共轭作用}},$$

现在我们给出一个直接的证明，为此只需构造一个双射：

1. 容易看见$\pi_1(X, x_0)$到$[S^1, X]$有一个自然的满射，我们只需小心研究其$\ker$即可；
2. 一方面，任取$[\alpha] = [r] * [\beta] * [r]^{-1}$，即$[\alpha]$与$[\beta]$同处一个共轭类中时，我们想说明$\alpha$与$\beta$是自由同伦的，注意到$\alpha$和$r * \beta * r^{-1}$保基点同伦，自然自由同伦，因此我们只需说明$r * \beta * r^{-1}$和$\beta$是自由同伦的，这是容易看到的，我们略去细节；
3. 另一方面，若两条保基点道路自由同伦，则一定共轭，这也是容易想象的。

综上我们有上式成立。

现在我们考虑π_n的情形，$\pi_n(X, x_0)$可视为映射对的同伦类：$(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$，$\pi_1$在$\pi_n$上有一个自然作用如下图所示：



现在我们证明：

$$\boxed{[S^n, X] = \pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0) = \langle S^n, X\rangle/\pi_1(X, x_0)},$$

一方面仍有$\pi_n(X, x_0)$到$[S^n, X]$的满射，我们先说明相差一个作用的保基点映射自由同伦，这可以从下图中直接看出，左右图分别表示$n = 1$和$n = 2$的真实示意图：

其中自由同伦中唯一需要注意的要点就是自由同伦过程只需要保证每个映射的边界都是x_0即可，因此我们知道了若有$[f] \sim [g]$，则f和g自由同伦。

另一方面，若$[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$，则我们希望说明若两者自由同伦，则一定保基点相差一个作用，这直接画图便可知显然，因为相当于自由同伦得到的正方体每一个侧面竖直直线都代表相同的回路，则将侧面抬到上面，再与下面连接侧面，显然新得到的方体和之前保基点同伦，而新方体便给出了一个作用后保基点映射和另外一个保基点映射之间的保基点同伦。

最一般的情形：任取拓扑空间X, Y，我们考察$\langle X, Y\rangle$和$[X, Y]$，关键在于确定出$\pi_1(Y, y_0)$在$\langle X, Y\rangle$上的作用，这里为了不含糊起见，约定X为CW复形，且x_0恰为其一个0维胞腔，则现在任取$[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$，以及$< f > \in \langle X, Y\rangle$，则考虑$(X, x_0)$为CW偶，从而可知满足HEP性质，也即存在从$X \cup Cx_0$到$X \times I$的扩张，进而可知定义在$X \cup Cx_0$到$Y$的映射：$X \times \{0\} : f$，$Cx_0 : \gamma$，从而设这个映射为$F : X \times I \to Y$，则有$F_0 = f$，且任意时刻$t$，$F_t(x_0) = \gamma(t)$，因此我们定义

$$< f >\cdot [\gamma] := [F_1],$$

表示回路γ的同伦类作用在$[f]$上，这里我们采取了右作用，具体原因我们下面给出解释：

1. 以上定义良好之说明：对$f' \simeq f$，$\gamma' \simeq \gamma$，我们想证明两者得到的$F_1' \simeq F_1$，这个直接运用HEP性质即可说明，具体可参考[Hat-P419]，并且不依赖于HEP的选取；
2. 右作用之说明，本质原因和覆叠空间作用一样，源自于曲线的乘法是从左至右的。

总结一下，我们实际上给出了$\pi_1(Y, y_0)$在$\langle X, Y\rangle$上的作用，不难看出这和我们直观在$\pi_n(X, x_0)$上的作用是吻合的，只不过在上述情形中我们并不需要HEP也可直接定义。

命题： 设(X, x_0)为CW偶，Y道路连通，则自然的映射$\langle X, Y\rangle \to [X, Y]$诱导了双射

$$\boxed{\langle X, Y\rangle/\pi_1(Y, y_0) = [X, Y].}$$

Proof： 一方面，我们说明任意$< f >$与$< f >\cdot [\gamma]$是自由同伦的，这由后者的构造过程即可看出。

另一方面，我们说明如果保基点映射f, g自由同伦，则存在$[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$使得$< f >=< g >\cdot [\gamma]$，设自由同伦为$H$，则$H(x_0, t) := \gamma(t)$决定了一条回路，容易看见这显然符合要求。$\square$

小结： 因此可知，当$\pi_1(X)$为0，也即X单连通时，我们总有$[S^n, X] = \pi_n(X)$，此时同伦群也不依赖于基点选取。但细心的读者不难发现，$U(k)$一般而言并不单连通，比如$U(1) = S^1$，但是，我们有如下结果：

命题： 对任意H空间X，为了定义$< f >\cdot [\gamma]$，一个更自然的构造是借助乘法结构，容易看见$\mu(f, \gamma)$是一个自然的从$X \cup Cx_0$到$X \times I$的延拓，从而我们有$< f >\cdot [\gamma] =< \mu(f, \gamma(1)) >$，而由$H$空间之定义，$\gamma(1) = \gamma(0)$为幺元，从而$\mu(f, \gamma(1))$保基点同伦于$f$，因此可知$< f >\cdot [\gamma] =< f >$，从而可知作用平凡，进而

$$\langle X, Y\rangle = [X, Y],$$

这也解释了为什么我们在处理向量丛的时候，我们总是可以直接从映射自由同伦类等同到同伦群。