向量丛和示性类9—Pontrjagin类

1. 基本定义

定义：设E为实向量丛，则我们先定义E的复化：$E_{\mathbb{C}}:=E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$，复数的去看，我们有$E_{\mathbb{C}}=E\oplus\sqrt{-1}E$，实的去看，我们有典范同构$E_{\mathbb{C}}\cong E\oplus E$（忘掉$\sqrt{-1}$），则其上有自然的复结构$J:E_{\mathbb{C}}\to E_{\mathbb{C}}$，

$$(u,v)\mapsto(-v,u),$$

事实上，我们心里想的是$\sqrt{-1}(u+\sqrt{-1}v)=-v+\sqrt{-1}u$，因此这么定义。

现在我们定义E的**第i个Pontrjagin类**为

$$\boxed{p_i(E):=(-1)^i c_{2i}(E_{\mathbb{C}})\in H^{4i}(X;\mathbb{Z}).}$$

¶ 首先我们来解释一下为什么只考虑偶数维Chern类，下面的讨论将告诉我们，对于复向量丛$E_{\mathbb{C}}$，其奇数阶chern类都是2挠，因此信息量实际上是有限的：

设F为一个复向量丛，则对$F^*\cong\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})$，则对$(F,J)$，我们有$(\bar{F},-J)$，显然$F^*$作为复向量丛同构于$\bar{F}$，从而我们有：

命题：$c_k(\bar{F})=(-1)^k c_k(F)$。

Proof：我们由分裂原则，设$F=L_1\oplus\cdots\oplus L_k$，则$\bar{F}=\bar{L_1}\oplus\cdots\oplus\bar{L_k}$，又$\bar{L}\cong L^*\cong L^{-1}$，因此我们有

$$c_1(\bar{L})=-c_1(L),$$

进而可知

$$c(\bar{F})=(1-c_1(L_1))\cdots(1-c_1(L_k)),$$

进而对比系数即可知道$c_k(\bar{F})=(-1)^k c_k(F)$。$\square$

我们对复向量丛$E_{\mathbb{C}}$和$\bar{E}_{\mathbb{C}}$，我们有自然的复同构：

命题：$E_{\mathbb{C}}\cong\bar{E}_{\mathbb{C}}$。

Proof：为了找到复同构，我们实际上只需要找到保持两者复结构的实同构即可，而作为实向量丛，我们熟知两者均典范同构于$E\oplus E$，且前者复结构为$J(u,v)=(-v,u)$，后者的复结构为$J'(u,v)=(v,-u)$（取共轭），因此我们考虑$F:E_{\mathbb{C}}\to\bar{E}_{\mathbb{C}}$，$(u,v)\mapsto(u,-v)$，则易见$J'\circ F=F\circ J$，从而可知两者复同构。$\square$

推论：由上述可知$c_k(E_{\mathbb{C}})=c_k(\bar{E}_{\mathbb{C}})=(-1)^k c_k(E_{\mathbb{C}})$，因此可知对$E_{\mathbb{C}}$，当$k$为奇数时，$2c_k(E_{\mathbb{C}})=0$故均为一些2挠，在自由的情况下就全部消失了，因此大部分情形下只有$c_{2k}(E_{\mathbb{C}})$也即Pontrjagin类存在一些更复杂的信息。这也是我们定义Pontrjagin类的初衷。

¶ 其次我们再来解释一下$(-1)^i$的原因，首先对于复向量丛F，类似于上一命题的证明，将F视为实向量丛，我们可以证明其复化$F_{\mathbb{C}}$复同构于$F\oplus\bar{F}$，这里不在赘述，细节可参考[Milnor]引理15.4。

基于上述事实，我们由分裂原则，可知

$$c(F_{\mathbb{C}})=c(F)c(\bar{F})=(1+x_1)\cdots(1+x_k)(1-x_1)\cdots(1-x_k)=\prod_{i=1}^{k}(1-x_i^2),$$

从而可知$c_{2k+1}(F_{\mathbb{C}})=0$，且$c_{2k}(F)_{\mathbb{C}}=(-1)^k\sum x_{i_1}^2\cdots x_{i_k}^2$，因此可知

$$p_k(F)=(-1)^kc_{2k}(F_{\mathbb{C}})=\sum x_{i_1}^2\cdots x_{i_k}^2,$$

恰好抵消掉了符号。

记号约定：对于复向量丛F，我们若记其为$F_{\mathbb{R}}$，则表示将其视作实向量丛，比如对于实向量丛E，我们有$(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}\cong E\oplus E$。

2. 例子与应用

例子：我们先来计算一下$T\mathbb{C}P^n$作为实向量丛的Pontrjagin类，首先在上一节中，利用Wu公式我们已经证明了其chern类为$(1+a)^{n+1}$。从而由定义可知：

$$c(T\mathbb{C}P^n_{\mathbb{C}})=c(T\mathbb{C}P^n)c(T\bar{\mathbb{C}}P^n)=(1+a)^{n+1}(1-a)^{n+1},$$

从而也即$p(T\mathbb{C}P^n)=(1+a^2)^{n+1}$，进而可知

$$p_k(T\mathbb{C}P^n)=\binom{n+1}{k}a^{2k},\quad 1\leq k\leq\frac{n}{2}.$$

例子：我们再来计算一下$\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^m$的切丛的Pontrjagin类，注意到

$$c(T\mathbb{C}P^n\oplus T\mathbb{C}P^m)=(1+a)^{n+1}(1+b)^{m+1},$$

从而可知$p(\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^m)=(1-a^2)^{n+1}(1-b^2)^{m+1}$。

命题：设E为可定向$2k$为实向量丛，则有$p_k(E)=e(E)^2$。

Proof：注意到$p_k(E)=(-1)^kc_{2k}(E_{\mathbb{C}})=(-1)^ke((E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})$，注意到虽然$E_{\mathbb{C}}$作为实向量丛典范同构于$E\oplus E$，但这并不一定是保定向的，通过一些简单的分析可知（如[Milnor]引理15.7），我们可知

$$e((E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})=(-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}}e(E\oplus E)=(-1)^ke(E)^2,$$

从而可知$p_k(E)=e(E)^2$，即证。□

应用：S^{4k}上不允许近复结构。

Proof：注意到Pontrjagin类是反映实向量丛的不变量，因此结合作为实向量丛，TS^{4k}均为稳定同构于平凡丛，也即$TS^{4k}\oplus\underline{\mathbb{R}}\cong\underline{\mathbb{R}^{4k+1}}$，因此$TS^{4k}$的Pontrjagin类均平凡。

注意到$e(TS^{4k})[S^{4k}]=\chi(S^{4k})=2$，因此可知$e(TS^{4k})\neq 0$。现在若$S^{4k}$上允许近复结构，则其切丛可视为$2k$维的复向量丛，因此有$c_{2k}(TS^{4k})=e(TS^{4k})\neq 0$，又注意到此时

$$p_k(TS^4)=(-1)^kc_{2k}(TS^4_{\mathbb{C}})=(-1)^kc_{2k}(TS^4)c_{2k}(T\bar{S}^4)\neq 0,$$

从而这与第一段的论述矛盾，从而可知不存在近复结构。

3.$BSO(n)$的上同调环结构

4.Topic—配丛的示性类计算

在主丛那一节中，我们介绍了向量丛对应的标架丛，以及一个G主丛对应的配丛，其中每给定一个G在V上的表示，都能决定出一个配丛

$$P\times_G V := P\times V/(p.g,v)\sim(p,g.v).$$

熟知，对于不同构的表示我们会得到不同的向量丛，比如给定$U(k)$主丛P，若取$U(k)\curvearrowright\mathbb{C}^k$上的自然表示，则可以得到复向量丛$P\times_{U(k)}\mathbb{C}^k =: E$，若取自然表示的张量$U(k)\curvearrowright(\mathbb{C}^k)^{\otimes n}$，则可得到$E^{\otimes n}$。

那么我们自然要问，现在给定主丛P，对于任意的向量空间V以及其上的$U(k)$表示，其上的配丛的各种示性类能否由P的示性类表示出来呢?

本小节中就给出上述问题的一个具体算法，其核心想法仍然是利用**分裂原则。**

我们先从分类空间的角度重新理解一下分裂原则，熟知任何一个紧Lie群都包含一个极大环面（参考：[王作勤讲义]）,特别的，$U(k)$中的极大环面即T^k，也即对角矩阵:

$$T^k\cong\left\{\begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_k\end{pmatrix} : z_1,\cdots,z_k\in U(1)\cong S^1\right\}\subseteq U(k).$$

从而我们考虑分类空间$ET^k\to BT^k$以及$EU(k)\to BU(k)$，特别的，$BT^k=\mathbb{C}P^\infty\times\cdots\times\mathbb{C}P^\infty$，$BU(k)=G(k,\mathbb{C}^\infty)$。现在对$\mathbb{C}P^\infty$上的重言线丛$\eta$，以及$G(k,\mathbb{C}^\infty)$上的重言丛$\gamma_k$，存在映射$f$，使得有如下两个拉回图表同时成立:

$$\begin{tikzcd}
ET^k\times_{T^k}U(k) \arrow[r] \arrow[d] & EU(k) \arrow[d] \\
BT(k) \arrow[r, "f"] & BU(k) \\
\eta_1\oplus\cdots\oplus\eta_k \arrow[r] \arrow[u] & \gamma_k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

这里η_i只是代表下标，且f^*为上同调层面的单射，$c_i(\gamma_k)\mapsto\sigma_i(x_1,\cdots,x_k)$，这里$x_i$为$\eta_i$的第一chern类。

从而现在对表示$U(k)\curvearrowright W$，我们想要得到配丛$EU(k)\times_{U(k)}W$的示性类等式，我们由上述拉回图表可知考虑

$$(ET^k\times_{T^k}U(k))\times_{U(k)}W = ET^k\times_{T^k}(U(k)\times_{U(k)}\times W) = ET^k\times_{T^k}W,$$

从而我们只需要证明T^k在W上表示得到的等式即可，再通过拉回的单射即可证明一般示性类等式的成立，而T^k在W上的表示即$U(k)$在W上表示的限制。

由表示论中的经典结果可知，这可以分解成一维的不可约表示

$$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_l,\quad l=\dim W,$$

从而我们只需要研究清楚$T^k = S^1 \times \cdots \times S^1$在$W_1, \cdots, W_l \cong \mathbb{C}$上的作用即可，考虑$S_j^1$在$W_i$上的作用，熟知这样的作用只会是$S_j^1 \times W_i \to W_i$，$z.w \mapsto z^{m_{j,i}}w$，这里$m_{j,i} \in \mathbb{Z}$，从而可知，配丛

$$ET^k \times_{T^k} W_i \cong \eta_1^{m_{1,i}} \otimes \cdots \otimes \eta_k^{m_{k,i}},$$

进而配丛整体为：

$$ET^k \times_{T^k} W \cong \bigoplus_{i=1}^{k} (\eta_1^{m_{1,i}} \otimes \cdots \otimes \eta_k^{m_{k,i}}).$$

这个丛就十分的简单明了，一切示性类信息呼之欲出。

> $ET^k \times_{T^k} W_i \cong \eta_1^{m_{1,i}} \otimes \cdots \otimes \eta_k^{m_{k,i}}$这个事实也可以直接从转移函数中读出。

例子： 设P为$U(2)$主丛，其自然对应的复向量丛为$E = P \times_{U(2)} \mathbb{C}^2$，现在考虑线性空间$W = \mathfrak{su}(2)$，其中

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathbb{C}(2) : A + A^H = 0, \mathrm{tr} A = 0\},$$

则每个这样的A都形如$\begin{pmatrix} \sqrt{-1}a & z \\ -\bar{z} & -\sqrt{-1}a \end{pmatrix} =: (z, a)$，其中$a \in \mathbb{R}$，$z \in \mathbb{C}$，因此$\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$。

现在考虑$U(2)$在$\mathfrak{su}(2)$的共轭表示，$g \mapsto gAg^{-1}$，这里即标准的矩阵乘法，设此表示下的配丛为$P \times_{U(2)} \mathfrak{su}(2)$，下面我们用$E$的示性类去表示这个配丛的示性类。

由上述推理，我们可知考虑分裂原则，设$E = L_1 \oplus L_2$，我们只需要寻找到这种情况下的示性类等式。因此我们现在需要做的，就是去看看对角矩阵是如何作用在$\mathfrak{su}(2)$上的。

设环面为$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$，则直接的矩阵计算告诉我们（用坐标写出）：

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}. (z, a) = (z_1 z_2^{-1} z, a),$$

因此可知对于$L_1 \oplus L_2$，我们可以将上述配丛表示为

$$(L_1 \otimes L_2^{-1}) \oplus \underline{\mathbb{R}}.$$

下面我们基于这个结果去计算共轭表示下的配丛F的Pontrjagin类：

注意到在分裂原则下，$F_{\mathbb{C}} = (L_1 \otimes L_2^{-1}) \otimes \mathbb{C} \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong (L_1 \otimes L_2^{-1}) \oplus (\overline{L_1 \otimes L_2^{-1}}) \oplus \underline{\mathbb{C}}$，从而可知

$$p_i(F) = (-1)^i c_{2i}((L_1 \otimes L_2^{-1}) \oplus (\overline{L_1 \otimes L_2^{-1}})),$$

因此有

$$p_1(F) = -c_2 = c_1^2(L_1 \otimes L_2^{-1}) = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2,$$

其中$x_i = c_1(L_i)$，我们用到了$c_1(\bar{L}) = -c_1(L)$，进而可知

$$p_1(F_{\mathbb{C}}) = c_1^2(E) - 4c_2(E).$$

其余阶数的Pontrjagin类均平凡。

> **注：** 关键想法就是利用分裂原则，把原来可能很抽象任意的表示约化到极大环面上，从而计算极大环面上的表示以及对应的配丛上的示性类等式即可。

习题

Bonus Problem 1：设X为闭可定向四维流形，则对任意$\alpha \in H^2(X)$，证明：

$$\langle w_2(TX) \smile \alpha, [X] \rangle = \langle \alpha \smile \alpha, [X] \rangle \pmod 2.$$

Proof：（方法一）我们首先回顾Wu类与Wu公式，Wu类v是满足$\langle \mathrm{Sq}\alpha, [X] \rangle = \langle \alpha \smile v. [X] \rangle$的唯一同调类，以及Wu公式是指$\mathrm{Sq}(v) = w(TX)$，从而有$w_2(TX) = v_2 + \mathrm{Sq}^1 v_1$，对于$\alpha \in H^2$，也有

$$\langle \alpha \smile \alpha, [X] \rangle = \langle \mathrm{Sq}\alpha, [X] \rangle = \langle \alpha \smile v_2, [X] \rangle,$$

注意到$\mathrm{Sq}^1 v_1 = v_1 \smile v_1 = 0$，从而即知命题成立。

（方法二）对四维流形，任意$\alpha \in H^2$，均存在二维子流形S使得$[S] = \mathrm{PD}. \alpha$，从而

$$\langle \beta \smile \alpha, [X] \rangle = \langle \beta, [X] \cap \alpha \rangle = \langle \beta, [S] \rangle,$$

考虑直和分解$TX|_S = TS \oplus NS$，从而$w_2(TX) = w_2(TS) + w_2(NS) + w_1(TS)w_1(NS)$，又由$S$可定向，因为其存在基本类，从而可知$w_1(TS) = 0$，因此有

$$\langle w_2(TX) \smile \alpha, [X] \rangle = \langle w_2(TX), [S] \rangle = \langle w_2(TS), [S] \rangle + \langle w_2(NS), [S] \rangle,$$

注意到$\langle w_2(TS), [S] \rangle = \langle e(TS), [S] \rangle \pmod 2 = \chi(S) \pmod 2 = 0$，而经典技巧告诉我们

$$\langle e(NS), [S] \rangle = [S] \cdot [S] = \langle \alpha, [S] \rangle,$$

从而可知 $\mod 2$意义下，我们有

$$\langle w_2(TX), [S] \rangle = \langle \alpha, [S] \rangle \pmod 2,$$

即为所证。□

Bonus Problem 2：设P为$U(n)$主丛，E为自然表示下的秩为n的配丛，考虑$U(n)$在$\mathfrak{su}(n)$下的共轭表示，以及得到的配丛$F := P \times_{U(n)} \mathfrak{su}(n)$，用$E$的chern类去表示$F$的第一Pontrjagin类。

Solution：设$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$，我们考虑$U(n)$的极大环面$T^n$，现将$\mathfrak{su}(n) \cong \mathbb{R}^{n^2-1}$的坐标写为

$$(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_{ij}), \quad 其中 1 \le i < j \le n, a_k \in \mathbb{R}, z_{ij} \in \mathbb{C}.$$

从而设T^n中的点为$\sum z_k E_{kk}$，则$\mathfrak{su}(n)$中上述坐标对应的矩阵为

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{-1} a_k E_{kk} \right) - \sqrt{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) E_{nn} + \sum_{1 \le i < j \le n} (z_{ij} E_{ij} - \overline{z_{ij}} E_{ji}),$$

现在我们考虑群作用，则由于$E_{kk} = E_{kk} E_{kk} E_{kk}$，从而前$n-1$个坐标不变，注意到$E_{ij} = E_{ii} E_{ij} E_{jj}$，从而坐标变换为$z_{ij} \mapsto z_i z_j^{-1} z_{ij}$，因此可知我们有此时

$$F = \underline{\mathbb{R}^{n-1}} \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le n} (L_i \otimes L_j^{-1}),$$

从而我们有

$$F_{\mathbb{C}} \cong \underline{\mathbb{C}^{n-1}} \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le n} (L_i \otimes L_j^{-1}) \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le n} \overline{(L_i \otimes L_j^{-1})},$$

从而可知

$$p_1(F) = -c_2(F_{\mathbb{C}}) = \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 = (n-1) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - 2n \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j,$$

从而可知

$$\boxed{p_1(F)=(n-1)c_1^2(E)-2n\cdot c_2(E)}.$$

综上我们完成了计算。□

Bonus Problem 3： 我们考虑一个$\mathrm{Spin}(4)=SU_+(2)\times SU_-(2)$主丛$P$，设$SU_\pm(2)$对应的主丛分别为$P_\pm$，以及其自然表示得到的配丛$E_\pm$，现在考虑$\mathrm{Spin}(4)$在$\mathbb{H}$上的表示：

$$SU(2)\times SU(2)\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}:(\alpha,\beta).\,\mathbf{x}:=\alpha\mathbf{x}\beta^{-1},$$

这里视$SU(2)$为单位四元数，上述乘法为四元数乘法，设在这个表示下的配丛为F，则$c_2(E_\pm)$表示F的第一Pontrjagin类。

Proof： 设$E_\pm=L_1^\pm\oplus L_2^\pm$，注意到$SU(2)$中的极大环面为$S^1$，表示成矩阵形式即对角矩阵$(z,\bar{z})$，写成坐标形式即$x+y\cdot\mathbf{k}$，这里$z=x+\sqrt{-1}y$，且$x^2+y^2=1$从而我们有

$$\begin{aligned}
&(x+y\cdot\mathbf{k},z+w\cdot\mathbf{k}).\,(a+b\cdot\mathbf{i}+c\cdot\mathbf{j}+d\cdot\mathbf{k})\\
=&\{(xa-yd)+(xb-yc)\cdot\mathbf{i}+(xc+yb)\cdot\mathbf{j}+(xd+ya)\cdot\mathbf{k}\}(z-w\cdot\mathbf{k})\\
=&\{(xa-yd)z+(xd+ya)w\}\\
+&\{(xb-yc)z-(xc+yb)w\}\cdot\mathbf{i}\\
+&\{(xc+yb)z+(xb-yc)w\}\cdot\mathbf{j}\\
+&\{(xd+ya)z-(xa-yd)w\}\cdot\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

设$x=\cos s$，$z=\cos t$，则有在此作用下的坐标为

$$\begin{aligned}
&(a\cos(s-t)-d\sin(s-t),b\cos(s+t)-c\sin(s+t),\\
&b\sin(s+t)+c\cos(s+t),a\sin(s-t)+d\cos(s-t)),
\end{aligned}$$

从而将坐标整理成$\mathbb{C}^2=(a+\sqrt{-1}d,b+\sqrt{-1}c)$，从而可知作用为

$$(\mathrm{e}^{is},\mathrm{e}^{it}).\,(z,w)=(\mathrm{e}^{i(s-t)}z,e^{i(s+t)}w),$$

从而可知配丛此时可写成$(L_1^+\otimes(L_1^-)^{-1})\oplus(L_2^+\oplus L_2^-)$，从而可知

$$p_1(F)=(x_1^+-x_1^-)^2+(x_2^++x_2^-)^2,$$

又因为是向量丛可约化到$SU(2)$，从而$c_1=0$，进而$x_1^++x_2^+=x_1^-+x_2^-=0$，从而

$$p_1(F)=x_1^+x_1^-+x_2^+x_2^-=c_2(E_+)+c_2(E_-).$$

> 上述计算有谬误，思考哪里出问题了呢？