向量丛和示性类8—综合应用

1.流形嵌入与法丛

我们回忆在SW示性类的应用中，我们给出了流形浸入的障碍，大体思路是倘若M^m能浸入N^n，则有TM可视为f^*TN的子丛，进而存在直和分解$TM \oplus NM = f^*TN$，特别的，假如M能浸入$\mathbb{R}^n$，则有f^*TN为平凡丛，因此可知$w(TM) \smile w(NM) = 1$，因此通过计算$\bar{w}(TM)$也即$w(TM)$的形式逆，我们就可以估计出NM的可能维数，进而得出浸入维数的估计。

现在我们借助Thom同构，就可以给出流形嵌入的一个更精准的障碍（毕竟浸入障碍自然可以视为嵌入障碍），设我们有$\iota : M \hookrightarrow X$为嵌入，考虑$E = v(M)$为$M$在$X$中的法丛，设秩为$k$，且$k = \dim X - \dim M$，则由管状邻域定理，$E$微分同胚于$M$在$X$中的一个开邻域，也即管状邻域$N(M)$，且将$M$中的每个点从$N(M)$中一一送到法丛的零截面中的点。

现在我们有

$$H^k(E, E_0) \cong H^k(N(M), N(M) - M) \cong H^k(X, X - M),$$

其中第一步是用了微分同胚，第二步利用了切除定理（倒着使用，因为$N(M) \subseteq X$），因此我们现在考虑如下的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H^k(E, E_0) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H^k(E) \arrow[r, "s_0^*"] & H^k(M) \arrow[d, phantom, "="] \\
H^k(X, X - M) \arrow[r] & H^k(X) \arrow[r, "\iota^*"'] \arrow[u, "i^*"] & H^k(M)
\end{tikzcd}$$

其中$i : E \to X$是先将E和管状邻域等同起来再嵌入X中复合得到的。显然上述图表可换，因此我们对Thom类$u \in H^k(E, E_0)$，我们有其送至图表右下角变成E关于M的Euler类$e(E)$，若法丛不可定向，则上述考虑$\mathbb{Z}_2$系数可知送至右下角为$w_k(E)$。现若假设$H^k(X) = 0$，则从图表下方追踪可得到右下角时为0。

也即，以$X = \mathbb{R}^n$为例，若M^m可嵌入$\mathbb{R}^n$，则一定有$w_{n-m}(E) = 0$，或$e(E) = 0$。换言之，法丛的最高阶SW示性类是否为0是流形是否可以嵌入的阻碍，但一般来讲法丛的计算依赖于外围空间，因此我们仍注意到

$$w(TM) \smile w(v(M)) = 1,$$

可知计算$\bar{w}(TM)$即可。

换言之，假设我们计算出了$\bar{w}_k(TM) \neq 0$，则M无法嵌入到$\mathbb{R}^{\dim M + k}$中。

例子：我们下面证明$\mathbb{R}P^{2^n}$可以嵌入欧氏空间的最低维数是$2\cdot 2^n$，一方面由强Whitney嵌入我们知道这是可以办到的，另一方面，注意到

$$w(T\mathbb{R}P^{2^n})=(1+a)^{2^n+1}=(1+a)^{2^n}(1+a)=(1+a^{2^n})(1+a)=1+a+a^{2^n},$$

从而可知我们有其形式逆为：

$$\bar{w}(T\mathbb{R}P^{2^n})=\frac{1}{1+a+a^{2^n}}=1+(a+a^{2^n})+(a+a^{2^n})^2+\cdots=1+a+\cdots+a^{2^{n-1}},$$

从而可知设$\mathbb{R}P^{2^n}$可以嵌入到$\mathbb{R}^N$中，则有法丛最高阶非平凡SW类为w_{N-2^n}为0，因此由上述计算可知，

$$N-2^n>2^n-1,$$

也即$N\geq 2\cdot 2^n$，从而可知$\mathbb{R}P^{2^n}$若能嵌入欧氏空间，则嵌入的最低维数也为$2\cdot 2^n$。因此我们同时也举出了这样一个例子，也即$\mathbb{R}P^{2^n}$可以浸入到$\mathbb{R}^{2^{n+1}-1}$中，但无法嵌入。

现在我们再给出一个上述方法（即Thom同构技术）可以证明的一个有趣结论：

命题：设N为M中的一个闭超曲面，若$b_1(M;\mathbb{Z}_2)=0$，则N将M分为两个连通分支M_1,M_2，且$\partial M_1=\partial M_2=N$。

Proof：一提到连通分支，自然考虑去计算$H_0(M-N)$，从而很自然会去考虑$(M,M-N)$的相对同调群长正合列：

$$\cdots\to H_1(M)\to H_1(M,M-N)\to H_0(M-N)\to H_0(M)\to H_0(M,M-N)\to 0,$$

要点在于处理$(M,M-N)$时，可以考虑N在M中的法丛，并将其和N的管状邻域E等同起来，因此由切除定理，我们有

$$H_i(M,M-N)\cong H_i(E,E-M)=H_i(E,E_0),$$

又由Thom同构定理，结合法丛秩为1，可知$H_i(E,E_0)\cong H_{i-1}(N)$（**注：**这里有两方面需要微妙处理的地方，第一，法丛不一定可定向，因此我们需要将上述同调群均视为$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$系数的；第二，熟知的Thom同构定理是证明的上同调版本，但幸运的是因为$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$为域，从而$\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Z}_2)=0$，因此可以直接用泛系数定理得到同调和上同调之间的同构），从而我们有$H_1(M,M-N)\cong H_0(N)$，$H_0(M,M-N)\cong H_{-1}(N)=0$，因此上面的相对同调群的长正合列有

$$\cdots 0\to H_0(N)\to H_0(M-N)\to H_0(M)\to 0\to 0,$$

其中用到了$b_1(M;\mathbb{Z}_2)=0$，因此可知由可裂性，$H_0(M-N)=H_0(M)\oplus H_0(N)$，因此可知有两个连通分支，因此我们完成了证明。$\square$

2.欧拉类与欧拉示性数

本节我们的目标是对闭流形M，证明$\langle e(TM),[M]\rangle=\chi(M)$，特别的，以下如果不做特别说明，我们对定向流形$M$用有理系数$\mathbb{Q}$，对不可定向流形我们用$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$系数，且欧拉类用最高阶SW类表示，为了节省记号，我们统一用域F来代表。

回忆由Poincare对偶，我们有如下的非退化配对：

$$H^l(M)\times H^{m-l}(M)\to F,\quad (\alpha,\beta)\mapsto(\alpha\smile\beta)[M].$$

从而我们现在考虑$H^*(M)$的基$\{a_i\}$，以及互反基$\{a_i^{\#}\}$，也即满足

$$(a_i\smile a_j^{\#})[M]=\delta_{ij}.$$

我们首先明确，为了证明目标，我们要将视角放在$M\times M$以及其对角子流形Δ上，为此我们先花费一些口舌去建立和统一一下这上面的信息与记号。

这里我们含糊的把对角子流形和对角映射$\Delta: M\to M\times M$含糊起来，其中$x\mapsto (x,x)$，因此很自然的我们如下典范的分解（在子流形Δ上）：

$$i^*(T(M\times M)) = T\Delta\oplus N\Delta = TM\oplus NM,$$

这里更精准的，我们有$T\Delta=\{(v,v): v\in TM\}$，$N\Delta=\{(v,-v): v\in TM\}$。进而我们利用经典的技术，法丛搭配切除定理与Thom同构即可得到

$$H^m(N\Delta, N\Delta-\Delta)\cong H^m(M\times M, M-\Delta)\to H^m(M\times M)\overset{\Delta^*}{\to} H^m(\Delta),$$

其中我们将$N\Delta$对应的Thom类记为u，则在上述映射下，我们记为：

$$u\mapsto u'\mapsto u''\mapsto e(N\Delta)=e(T\Delta)=e(TM).$$

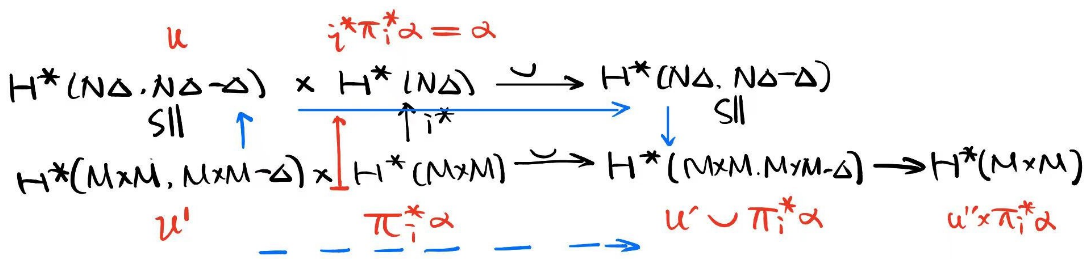
那么现在我们就正式陈述如下的第一个公式：

定理：我们对$u''\in H^m(M\times M)$，$a_i, a_j^\#\in H^*(M)$，有

$$\boxed{u''=\sum_i(-1)^{\deg a_i}a_i\times a_i^\#.}$$

Proof：我们先证明如下一个断言：对任意$\alpha\in H^*(M)$，有

$$u''\smile \pi_1^*\alpha = u''\smile\pi_2^*\alpha\in H^{m+*}(M\times M).$$

> 断言的证明：注意到如下交换图
>
> 
>
>
> 从而很容易看到利用上方的交换图打过去是相同的，因此本身就是相同的。

现在我们由Kunneth公式，可知$a_i\times a_j^\#$为$H^*(M\times M)$的基，从而有待定系数

$$u''=\sum_{ij}c_{ij}a_i\times a_j^\# = \sum_{ij}c_{ij}\pi_1^*a_i\smile\pi_2^*a_j^\#.$$

下面为了确定c_{ij}，注意到

$$\begin{aligned}
&\langle (a_k\times a_l^\#)\smile(a_i^\#\times a_j), [M\times M]\rangle\\
&=\langle(-1)^{\deg a_l^\#\deg a_i^\#}(a_k\smile a_i^\#)\times(a_l^\#\smile a_j), [M]\times[M]\rangle\\
&=(-1)^{\deg a_l^\#\deg a_i^\#+\deg a_l^\#\deg a_j}\langle a_k\smile a_i^\#, [M]\rangle\cdot\langle a_j\smile a_l^\#, [M]\rangle\\
&=(-1)^{\deg a_l^\#\deg a_i^\#+\deg a_l^\#\deg a_j}\cdot\delta_{ki}\cdot\delta_{jl}.
\end{aligned}$$

因此为了确定c_{ij}系数，只需要考虑$\langle u''\smile(a_i^\#\times a_j), [M\times M]\rangle$，并且我们有：

$$\langle u''\smile(a_i^\#\times a_j), [M\times M]\rangle = c_{ij}\cdot(-1)^{\deg a_j^\#\deg a_i^\#+\deg a_j^\#\deg a_j}.$$

现在注意到：

$$\begin{aligned}
&u'' \smile (a_i^{\#} \times a_j) \\
&= u'' \smile \pi_1^* a_i^{\#} \smile \pi_2^* a_j \\
&= u'' \smile \pi_1^* a_i^{\#} \smile \pi_1^* a_j \quad \text{(利用断言)} \\
&= u'' \smile \pi_1^* (a_i^{\#} \smile a_j) \\
&= (-1)^{\deg a_i^{\#} \deg a_j} \cdot u'' \smile \pi_1^* (a_j \smile a_i^{\#}) \\
&= (-1)^{\deg a_i^{\#} \deg a_j} \cdot u'' \smile \pi_1^* (\delta_{ij} \cdot \mathrm{PD}.[\mathrm{pt}]),
\end{aligned}$$

这里PD表示Poincare对偶。从而可知$i \neq j$时，$c_{ij} = 0$。

下面计算c_{ii}，注意到为了吃掉$[M \times M] = [M] \times [M]$，我们需要看$u''$的$\pi_2^*(\mathrm{PD}.[\mathrm{pt}]) = 1 \times \mathrm{PD}.[\mathrm{pt}]$的对应分量，这才是唯一能做出贡献的项，通过复杂的追图可以知道这个分量前对应的系数就是1，进而我们有

$$\begin{aligned}
&\langle u'' \smile (a_i^{\#} \times a_i), [M \times M] \rangle \\
&= \langle (-1)^{\deg a_i^{\#} \deg a_i} \cdot \pi_2^*(\mathrm{PD}.[\mathrm{pt}]) \smile \pi_1^*(\mathrm{PD}.[\mathrm{pt}]), [M \times M] \rangle \\
&= (-1)^{m^2 + \deg a_i^{\#} \deg a_i},
\end{aligned}$$

因此我们有

$$c_{ii} \cdot (-1)^{\deg a_i^{\#} \deg a_i^{\#} + \deg a_i^{\#} \deg a_j} = (-1)^{m^2 + \deg a_i^{\#} \deg a_i},$$

结合$\deg a_i^{\#} = m - \deg a_i$，因此剥蒜可得

$$c_{ii} = (-1)^{\deg a_i \deg a_i} = (-1)^{\deg a_i},$$

综上我们证明了

$$\boxed{u'' = \sum_i (-1)^{\deg a_i} a_i \times a_i^{\#}.}$$

这样一个很干练的表达式。□

现在，基于上面这个表达式，我们很快就能得到：

定理：$\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M)$。

Proof：注意到$e(TM) = \Delta^* u''$，因此

$$\begin{aligned}
&\langle e(TM), [M] \rangle \\
&= \langle \Delta^* u'', [M] \rangle \\
&= \sum_i (-1)^{\deg a_i} a_i \smile a_i^{\#} [M] \\
&= \sum_i (-1)^{\deg a_i} \cdot 1 \\
&= \sum_i (-1)^i \mathrm{rank} H^i(M) \\
&= \chi(M),
\end{aligned}$$

综上我们完成了证明。□

3.Wu类与Wu公式

我们首先回忆Steenrod平方运算以及SW类的定义：

$$\mathrm{Sq} u = \pi_1^* w(TM) \smile u,$$

这里u为Δ在$M\times M$中法丛对应的Thom类，因此由自然性，我们立即可得

$$\mathrm{Sq}u'=\pi_1^*w(TM)\smile u',\quad \mathrm{Sq}u''=\pi_1^*w(TM)\smile u''.$$

注意到一个基本事实：$\mathrm{Sq}:H^*(M;\mathbb{Z}_2)\to H^*(M;\mathbb{Z}_2)$为同构。

Proof：显然单射，因为$\mathrm{Sq}^0=\mathrm{id}$，下证满射，对任意$\beta=\beta_0+\beta_1+\cdots$，我们待定$\alpha=\alpha_0+\alpha_1+\cdots$使得$\mathrm{Sq}(\alpha)-\beta$，注意到因此我们有$\beta_0=\alpha_0$，$\beta_1=\mathrm{Sq}^1\alpha_0+\alpha_1$，$\beta_2=\mathrm{Sq}^2\alpha_0+\mathrm{Sq}^1\alpha_1+\alpha_2\cdots$，因此我们有

$$\alpha_i=\beta_i-\mathrm{Sq}^i\alpha_0-\cdots-\mathrm{Sq}^1\alpha_{i-1},$$

从而可知为同构。□

因此现在考虑$F:H^*(M;\mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_2$，$\alpha\mapsto\langle\mathrm{Sq}\,\alpha,[M]\rangle$，进而由Poincare对偶可知存在唯一的$v\in H^*(M;\mathbb{Z}_2)$，满足$\langle\mathrm{Sq}\,\alpha,[M]\rangle=\langle\alpha\smile v,[M]\rangle$。

定义（Wu类）： 满足上述条件的唯一的v被称为wu类。

定理（Wu公式）： 我们有$\mathrm{Sq}(v)=w(TM)$。

> 在证明定理之前，我们先阐述一下这个定理意味着什么：回忆在Wu类的定义中，只用到了Steenrod平方这种纯粹拓扑的信息，并没有蕴含任何几何信息，但是右侧是切丛的SW类，切丛反映了流形M的光滑结构，由此可知，SW示性类比较弱，并不能区分流形上的光滑结构。

Proof：注意到任意$\alpha\in H^*(M)$，我们有

$$\alpha=\sum_i\langle\alpha\smile a_i^{\#},[M]\rangle a_i.$$

从而我们有对wu类v，

$$\begin{aligned}v&=\sum_i\langle v\smile a_i^{\#},[M]\rangle a_i\\&=\sum_i\langle a_i^{\#}\smile v,[M]\rangle a_i\quad(\mathbb{Z}_2\text{系数})\\&=\sum_i\langle\mathrm{Sq}(a_i^{\#}),[M]\rangle a_i.\end{aligned}$$

因此我们有：

$$\mathrm{Sq}\,v=\sum_i\langle\mathrm{Sq}(a_i^{\#}),[M]\rangle\mathrm{Sq}(a_i),$$

我们现在再引入记号$/[M]:H^*(M\times M)\to H^*(M)$，其中$\alpha\otimes\beta\mapsto\alpha\cdot\beta([M])$，因此我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}\,v&=\sum_i\langle\mathrm{Sq}(a_i^{\#}),[M]\rangle\mathrm{Sq}(a_i)\\&=\sum_i(\mathrm{Sq}(a_i)\times\mathrm{Sq}(a_i^{\#}))/[M]\\&=\mathrm{Sq}\left(\sum_i(a_i\times a_i^{\#})\right)\Big/[M]\quad(\text{自然性})\\&=\mathrm{Sq}(u'')/[M]\quad(\text{由之前证明的公式})\\&=\pi_1^*w(TM)\smile u''/[M]\\&=w(TM)\cdot u''([M])\\&=w(TM),\end{aligned}$$

其中用到了$u''([M])=1$，是因为在之前我们已经得到u''关于这一分量的系数为1。综上即证。□

利用Wu公式，我们可以很快给出一类上同调环比较简单的流形的切丛的SW类：

推论：设紧流形M的 $\mod 2$上同调环只由某个$a \in H^k(M)$生成，也即$H^*(M) = \mathbb{Z}[a]/(a^{m+1})$，则$\dim M = km$，且此时$M$切丛的SW类即为

$$(1+a)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1}a + \cdots + \binom{m+1}{m}a^m.$$

Proof：注意到由Wu公式，我们有$w(TM) = \mathrm{Sq}(v)$，因此我们只需要确定Wu类v即可，回忆Wu类的定义即是对任意α，我们有$\langle \mathrm{Sq}\ \alpha, [M] \rangle = \langle \alpha \smile v, [M] \rangle$，从而现在对任意$\alpha = a^i$，我们由

$$\mathrm{Sq}\ a^i = (\mathrm{Sq}\ a)^i = (a + a^2)^i,$$

从而可知$\langle \mathrm{Sq}\ a^i . [M] \rangle = \binom{i}{m-i}$，进而可知

$$v = \sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m-i} a^{m-i},$$

从而可知

$$\begin{aligned}
&w(TM) \\
&= \mathrm{Sq}(v) \\
&= \mathrm{Sq}\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m-i} a^{m-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m-i} \mathrm{Sq}(a^{m-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m-i} (a+a^2)^{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m-i} a^{m-i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} a^j \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} \binom{m-i}{i} \binom{i}{j} a^{i+j} \\
&= (1+a)^{m+1},
\end{aligned}$$

综上即证。

> **注**：满足条件的流形显然有同调球，以及$\mathbb{R}P^n$，$\mathbb{C}P^n$以及$\mathbb{H}P^n$，特别的后面两者的切丛SW类的计算本来并不直接，但是用这个结论便显而易见了。

4.三维可定向闭流形可平行化

定义：我们称流形M是Spin的，如果$w_2(TM) = 0$。

命题：三维可定向闭流形都是Spin的。

Proof：我们分别设M切丛的SW类为$w = 1 + w_1 + w_2 + w_3$，以及Wu类为$v = 1 + v_1 + v_2 + v_3$，由Wu公式可知，$\mathrm{Sq} v = w$，进而我们有：

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1, \\
w_2 &= v_2 + \mathrm{Sq}^1 v_1, \\
w_3 &= v_3 + \mathrm{Sq}^1 v_2 + \mathrm{Sq}^2 v_1.
\end{aligned}$$

则由M可定向，因此熟知$w_1 = 0$，进而$v_1 = 0$，$w_2 = v_2$。

回忆Wu类的原始定义：即对任意$\alpha \in H^*(M;\mathbb{Z}_2)$，有

$$\langle \mathrm{Sq}\,\alpha, [M]\rangle = \langle v \smile \alpha, [M]\rangle,$$

更精确的，现在设$\alpha \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$，则可知

$$\langle v_2 \smile \alpha, [M]\rangle = \langle \mathrm{Sq}^2\alpha, [M]\rangle = 0,$$

因为$\deg\alpha = 1$，steenrod平方运算对超过阶数的映射到0，因此由Poincare对偶的非退化性，可知$v_2 = 0$，即证$w_2 = 0$，因此由定义可知M是Spin的。$\square$

命题：若四维可定向闭流形Spin，则其相交形式的对角线上全为偶数。

Proof：只需证明对任意$\alpha \in H^2(M;\mathbb{Z}_2)$，有$\alpha \smile \alpha[M] = 0$即可。熟知$\mathrm{Sq}^2\alpha = \alpha \smile \alpha$，因此可知

$$\alpha \smile \alpha[M] = \langle \mathrm{Sq}^2\alpha, [M]\rangle = \langle v_2 \smile \alpha, [M]\rangle,$$

而$v_2 = w_2 + \mathrm{Sq}^1 v_1$，且$M^4$可定向，从而$v_1 = w_1 = 0$，进而由$M^4$是Spin的，即知$v_2 = w_2 = 0$，综上我们便完成了证明。$\square$

下面我们来解释一下Spin这一名称的由来，并证明三维可定向闭流形均可平行化。

定义：我们称秩为n的向量丛E具有Spin结构，如果存在Spin(n)主丛$P_{\mathrm{Spin}(n)}$，使得存在到E的配丛$\mathrm{Fr}(E)$这个$\mathrm{SO}(n)$主丛的映射Π，满足Π为二叶覆叠，且是Spin(n)等变的丛映射。

命题：M是Spin流形当且仅当TM具有Spin结构。

Proof：我们有层的短正合列：

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n) \to 1,$$

这诱导了如下层上同调的短正合列：

$$H^1(X;\mathrm{Spin}(n)) \to H^1(X;\mathrm{SO}(n)) \to H^2(X;\mathbb{Z}_2),$$

其中利用Cech上同调与主丛的关系，我们知道

$$\begin{aligned} H^1(X;\mathrm{Spin}(n)) &= \{\mathrm{Spin}(n)\text{主丛等价类}\}, \\ H^1(X;\mathrm{SO}(n)) &= \{\mathrm{SO}(n)\text{主丛等价类}\}. \end{aligned}$$

且$H^1(X;\mathrm{SO}(n))$到$H^2(X;\mathbb{Z}_2)$的连接同态为w_2，也即第二SW类，因此可知$w_2 = 0$当且仅当可以找到一个Spin(n)主丛满足要求。$\square$

> 关于这部分更精准的描述，可见[为什么可定向流形上存在Spin结构当且仅当第二Whitney类等于0?]

现在我们考虑三维可定向闭流形M^3，则M^3是Spin流形，进而TM具有Spin结构，换言之其标架丛可以提升为一个Spin(3)主丛，注意到$\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$，因此$\mathrm{Spin}(3) \cong S^3$，为了证明$TM$平凡，只需要证明对应的提升Spin$(3)$主丛平凡即可。为证主丛平凡，只需要找到一个整体截面即可。

而构造整体截面，我们只需要逐胞腔归纳即可，我们之前就已经证明了如下结果：

命题：设$F \to P \to X$为纤维丛，且$\pi_1(F) = \cdots = \pi_{k-1}(F) = 0$，$\dim X \le k$，则$P$存在一个整体非零截面。

Recall：这个就是逐胞腔归纳证明可以延拓即可，关键的障碍就是是否存在如下的延拓：

$$\begin{CD}
\partial D^k @>>> \Phi^* E \\
@VVV @VVV \\
D^k @>{\mathrm{id}}>> D^k
\end{CD}$$

也即从$\partial D^k \to F$延拓到$D^k \to F$，一个满足的充分条件就是$\pi_{k-1}(F) = 0$。$\#\#$

因此现在结合S^3是$2-$连通的，即证主丛平凡，从而TM平凡。

5.分类空间

设G为拓扑群，我们考虑函子：$P_G : \mathsf{CWtop} \to \mathsf{Set}$，使得$P_G(X)$为$X$上$G$主丛的同构类，我们本节的目标就是去说明函子$P_G$是可表的，也即如下定理：

定理： 存在G主丛$EG \to BG$使得$[X, BG] = P_G(X)$，其中映射由$[f] \mapsto f^* EG$给出。

本质上，我们要解决如下一个问题：给定G主丛$P_1 \to X_1$以及$P_0 \to X_0$，何时能保证存在一个$f : X_1 \to X_0$使得P_1可以实现成$f^* P_0$。注意到$X_i = P_i / G$，因此存在这样一个拉回当且仅当我们能找到P_1到P_0的G等变映射。

下面这个命题将进一步告诉我们可以将寻找G等变映射的问题，划归成寻找截面：

命题： 设P为G主丛，V为一个G空间，也即存在右作用，则我们有

$$\Gamma(P \times_G V) \cong \{P \to V\text{的}G\text{等变映射}\}.$$

Proof： 回忆$P \times_G V = P \times V / \sim$，其中$(p.\, g, v.\, g) \sim (p, v)$，一方面任取$G$等变映射$f$，则可以考虑定义截面$s : X \to P \times_G V$，$x \mapsto (p, f(p))$，这里任取$p \in P_x$，显然这不依赖于$p$的选取，因为

$$(p.\, g, f(p.\, g)) = (p.\, g, f(p).\, g) = (p, f(p)),$$

因此可知任给一个G等变映射，可以构造出一个整体截面，反之亦然。$\square$

小节： 因此现在，为了寻找拉回，只需寻找$P_1 \to P_0$的G等变映射，这只需要寻找$P_1 \times_G P_0$的整体非零截面，而这正好是以P_0为纤维的纤维丛，因此回忆上一节引用的命题，如果P_0弱可缩，也即P_0各阶同伦群均为0，则我们确实可以构造出一个整体截面。

目标： 构造一个弱可缩的G主丛，也即EG。

> 有了EG之后，剩下定理的证明便和之前分类空间的证明类似，证明满射和单射，我们这里就不多废口舌了。

Milnor的构造： 我们考虑

$$G \hookrightarrow G * G \hookrightarrow G * G * G \hookrightarrow \cdots,$$

以及其极限$EG := \varinjlim G * \cdots * G$，且其上有自然的$G$右作用，

$$[t; x_1, x_2, x_3, \cdots].\, g := [t; x_1 g, x_2 g, x_3 g, \cdots],$$

进而可以定义$BG := EG/G$。

> **注：** 这里考虑无穷join积的一个动机或许源自于，一直做join积会提高连通性，比如$S^m * S^n = S^{m+n+1}$，显然后者是$m+n$连通的，连通性更好，自然连通性最好的便实现了弱可缩。

现在只需说明EG弱可缩即可，注意到S^n紧，从而可知$f : S^n \to EG$可实现为复合映射：

$$S^n \xrightarrow{f} G * \cdots * G \xrightarrow{i} EG,$$

而显然i零伦，从而可知EG各阶同伦群均为0。综上我们完成了定理证明。

例子： 我们之前已经看到$B\mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{R}P^\infty$，以及$BS^1 \cong \mathbb{C}P^\infty$，因此我们自然考虑是否$\mathbb{H}P^\infty$也对应着某些有趣的分类空间，注意到$\mathbb{R}P^\infty = S^\infty/\mathbb{Z}_2$，$\mathbb{C}P^\infty = S^\infty/S^1$，其中$\mathbb{Z}_2$和$S^1$分别自然对应着单位实数和单位复数，因此我们考虑单位四元数，也即$SU(2) \cong S^3$，因此$\mathbb{H}P^\infty \cong S^\infty/SU(2)$，这即表明$\mathbb{H}P^\infty$是$SU(2)$的分类空间，因此我们有$SU(2)$主丛的同构类一一对应于$[X, \mathbb{H}P^\infty]$。

又注意到$\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$，$\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$，我们自然会猜测是否有$\mathbb{H}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 4)$，从而使得我们可以进一步有$[X, \mathbb{H}P^\infty] = H^4(X; \mathbb{Z})$，但遗憾的是前者并不成立，因为在同伦群的长正合列中，S^3的同伦群并不平凡，但幸运的是当$\dim X \leq 4$时，我们确实有后一式子成立，只需注意到$K(\mathbb{Z}, 4)$可以看成是$\mathbb{H}P^\infty$再贴上6维以上胞腔去杀掉高阶同伦群得到，从而可知$\mathbb{H}P^\infty$和$K(\mathbb{Z}, 4)$在5维以下有相同的胞腔结构，因此任何$X \times I$到两者的映射都是可以互相对应的，因此可知$[X, \mathbb{H}P^\infty] = [X, K(\mathbb{Z}, 4)]$，进而可知对于四维流形，其上的四元数线丛其$H^4$便是完全不变量，事实上，更精细的证明可以说明这个映射对于复平面丛实际上可以由c_2给出。

6.必要练习

Problem 8A of Milnor

Proof： 注意到对典范线丛$\gamma \to \mathbb{R}P^\infty$，我们有$w(\gamma) = 1 + a$，从而$\mathrm{Sq}(w(\gamma)) = \mathrm{Sq}(1 + a) = 1 + a + a^2$，也即有$\mathrm{Sq}(w(\gamma)) = 1 + w_1 + w_1^2$，从而由自然性可知对任意线丛$L$，有$\mathrm{Sq}(w(L)) = 1 + w_1 + w_1^2$，从而

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sq} \circ w(L_1 \oplus L_2) \\
&= \mathrm{Sq}(w(L_1)) \smile \mathrm{Sq}(w(L_2)) \\
&= (1 + l_1 + l_1^2) \smile (1 + l_2 + l_2^2) \\
&= 1 + (l_1 + l_2) + (l_1 l_2 + l_1^2 + l_2^2) + (l_1 l_2^2 + l_2 l_1^2) + l_1^2 l_2^2 \\
&= 1 + w_1 + (w_1^2 + w_2) + w_1 w_2 + w_2^2,
\end{aligned}$$

进而可知对所有平面丛P，我们有

$$\mathrm{Sq}^k \circ w_m(P) = w_k w_m + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k}.$$

现在假设上式对秩小于等于n的向量丛ξ均成立，则现在考虑$\xi \oplus L$，则

$$w_m(\xi \oplus L) = w_m(\xi) + w_{m-1}(\xi) w_1(L),$$

进而可知

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sq}^k \circ w_m(\xi \oplus L) \\
&= \mathrm{Sq}^k(w_m(\xi) + w_{m-1}(\xi) w_1(L)) \\
&= \mathrm{Sq}^k(w_m(\xi)) + \mathrm{Sq}^k \circ w_{m-1}(\xi) \smile w_1(L) + \mathrm{Sq}^{k-1} w_{m-1} \smile w_1(L)^2 \\
&= w_k w_m + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k} \\
&\quad + \left(w_k w_{m-1} + \binom{k-m+1}{1} w_{k-1} w_m + \cdots + \binom{k-m+1}{k} w_0 w_{m-1+k} \right) w_1(L) \\
&\quad + \left(w_{k-1} w_{m-1} + \binom{k-m}{1} w_{k-2} w_m + \cdots + \binom{k-m}{k-1} w_0 w_{m-2+k} \right) w_1(L)^2,
\end{aligned}$$

我们下用l表示$w_1(L)$，则可知

$$
\begin{aligned}
& w_k w_m + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k} \\
= & \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} w_{k-i} w_{m+i} \\
= & \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} (w_{k-i} + w_{k-i-1} l)(w_{m+i} + w_{m+i-1} l) \\
= & \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} w_{k-i} w_{m+i} \\
& + l \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} (w_{k-i-1} w_{m+i} + w_{k=i} w_{m+i-1}) \\
& + l^2 \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} w_{k-i-1} w_{m-i-1},
\end{aligned}
$$

注意到对比上下两式，l的零次项和二次项的系数是吻合的，下证明一次项的系数也是吻合的，注意到

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} (w_{k-i-1} w_{m+i} + w_{k=i} w_{m+i-1}) \\
= & w_k w_{m-1} + \left(\binom{k-m}{1} + 1 \right) w_{k-1} w_m + \left(\binom{k-m}{2} + \binom{k-m}{1} \right) w_{k-2} w_{m+1} + \cdots,
\end{aligned}
$$

而注意到

$$
\begin{aligned}
& \binom{k-m}{i} + \binom{k-m}{i+1} \\
= & \frac{(k-m)\cdots(k-m-i+1)}{i!} + \frac{(k-m)\cdots(k-m-i)}{(i+1)!} \\
= & \frac{(k-m)\cdots(k-m-i+1)(i+1+k-m-i)}{(i+1)!} \\
= & \frac{(k-m+1)(k-m)\cdots(k-m-i+1)}{(i+1)!} \\
= & \binom{k-m+1}{i+1},
\end{aligned}
$$

因此我们可知这对l一次项的系数也对，进而我们对$\xi \oplus L$也证明了

$$
\mathrm{Sq}^k \circ w_m = w_k w_m + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k},
$$

进而由分裂原则我们可知这对任何向量丛都对，即证。□

Problem 8B of Milnor

Proof: 设n为最小使得$w_n \neq 0$的正整数，从而由上一题可知任意$k < n$，我们有

$$
0 = \mathrm{Sq}^k(w_{n-k}) = \binom{2k-n}{k} w_n,
$$

因此可知任意$k < n$，我们有$\binom{2k-n}{k}$为偶数，设$n = 2^r s$，其中s为奇数，若$s > 1$，则取$k = 2^r < n$，我们有$\binom{2^r(2-s)}{2^r}$为偶数，而事实上，我们可以证明$\binom{2^r u}{2^r}$均为奇数（Kummer定理），其中u为奇数，这即矛盾，因此我们可知n一定为2的幂次，即证。□

Problem 11C of Milnor

Proof： ……

Problem 11D of Milnor

Proof： 我们在正文中已经证明了三维流形的SW类均为0了。$\square$

Bonus Problem 1： 证明$\mathbb{C}P^2$不能浸入$\mathbb{R}^5$，也不能嵌入$\mathbb{R}^6$。

Proof： 在正文中，我们利用Wu公式以及证明过了，$w(T\mathbb{C}P^2) = (1+a)^3 = 1 + a + a^2$，其中$a \in H^2$，则我们有

$$\frac{1}{1+a+a^2} = 1 + (a+a^2) + (a+a^2)^2 + \cdots = 1 + a,$$

从而可知浸入的最低维数是$2+4=6$，也即不能浸入$\mathbb{R}^5$，也不能嵌入$\mathbb{R}^6$。$\square$

Bonus Problem 2： 证明$w(TS_g) = 1$，并设$H^1(\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 = X_l) \cong H^1(\mathbb{R}P^2)^l$，则$w_1(TX_l) = a_1 + \cdots + a_l$，且$w_2(TX_l)$非零当且仅当$l$为奇数。

Proof： 由S_g可定向，从而TS_g可定向进而$w_1(TS_g) = 0$，又注意到S_g可嵌入到$\mathbb{R}^3$中，且由可定向性知道法丛为平凡丛，因此可知$TS_g \oplus \underline{\mathbb{R}} = \underline{\mathbb{R}^3}$，进而可知$w(TS_g) = 1$。

注意到$H^*(X_l; \mathbb{Z}_2)$的上同调环结构为$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2[a_1, \cdots, a_l] \oplus \mathbb{Z}_2[a_i \smile a_i]$，其中$a_i^2 = a_j^2$。从而为了计算切丛的SW类，我们仍使用Wu公式：$w(TS_l) = \mathrm{Sq}(v)$，下面确定Wu类，任取$a_i$，则有

$$\langle v \smile a_i, [X_l] \rangle = \langle \mathrm{Sq}(a_i), [X_l] \rangle = 1,$$

因此可知$v_1 = a_1 + \cdots + a_l$，进而可知$w_1 = \mathrm{Sq}^0(v_1) = a_1 + \cdots + a_l$。从而

$$w_2 = \mathrm{Sq}^1(v_1) = a_1^2 + \cdots + a_l^2 = l[X_l]^*,$$

也即w_2非零当且仅当l为奇数。$\square$