向量丛和示性类5—Grassmann流形和分类空间

1.基本定义

设V为内积空间，我们定义

$$Gr(k,V):=\{V\text{中全体}k\text{维子空间构成的全体}\},$$

特别的容易看见$Gr(1,V)=\mathbb{P}(V)$，以及我们有Grassmann流形$Gr(k,\mathbb{R}^n)$，不难看到

$$Gr(k,\mathbb{R}^n)=\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k)\times\mathrm{O}(n-k).$$

从而$\dim Gr(k,\mathbb{R}^n)=k(n-k)$，同理我们也有$Gr(k,\mathbb{C}^n)=\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)$，且其复维数也为$k(n-k)$。

利用自然的包含关系：$\cdots\subseteq Gr(k,\mathbb{R}^n)\subseteq Gr(k,\mathbb{R}^{n+1})\subseteq\cdots$，我们可以定义

$$Gr(k,\mathbb{R}^\infty):=\varinjlim Gr(k,\mathbb{R}^n),$$

我们考虑$Gr(k,\mathbb{R}^\infty)$上的典范向量丛$\eta_k:=\{(\alpha,v)\in Gr(k,\mathbb{R}^\infty)\times\mathbb{R}^\infty:v\in\alpha\}$，从而我们有如下的定理：

定理1：任何一个X上秩为k的向量丛都可以看成是η_k的拉回，事实上，更进一步有：

$$\boxed{[X,Gr(k,\mathbb{R}^\infty)]\overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow}\mathrm{Vect}^k_{\mathbb{R}}(X),}$$

并且$f\mapsto f^*\eta_k$。这里要求X仿紧Hausdorff。

> · 这里$Gr(k,\mathbb{R}^\infty)$被称为分类空间，往往记为$BO(k)$，η_k被称为万有丛。
>
> · 仿紧的标准定义是任何一组开覆盖都有一个局部有限的开加细，其等价定义是任何一组开覆盖都存在一个从属于这个开覆盖的单位分解，后推前是标准且容易的，前推后需要参考一些论文
>
> · 流形、CW复形都是仿紧的。

Sketch：满射的证明思路是利用X仿紧Hausdorff从而对一组局部平凡化构造单位分解，使得将$E\to X$这个丛嵌入到某个充分高维数的平凡丛$\underline{\mathbb{R}^N}$中，从而可以借助这个嵌入构造出一个X到$Gr(k,\mathbb{R}^N)$的映射，验证满足即可。

单射的证明思路是为了从$f^*\eta_k\cong g^*\eta_k$说明$f\simeq g$，则我们需要用到$\mathbb{R}^\infty$的性质，借助左右平移映射去构造丛之间的保纤维线性同伦，则可以下放到f,g之间的同伦，具体细节可以参考$[X,\mathbb{C}P^\infty]=\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X)$的证明。$\#$

同样的道理，我们也有

$$\boxed{[X,Gr(k,\mathbb{C}^\infty)]\overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow}\mathrm{Vect}^k_{\mathbb{C}}(X),}$$

以及$Gr(k,\mathbb{C}^\infty):=BU(k)$，特别的，对于定向丛我们也可以类似定义

$$\widetilde{Gr}(k,V) := \{V\text{中全体}k\text{维定向子空间构成的全体}\},$$

则有$\widetilde{Gr}(k,\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(k)\times\mathrm{SO}(n-k)$，且$\widetilde{Gr}(k,\mathbb{R}^\infty) = BSO(k)$。

在定义完Grassmann流形之后，我们终于可以给出一个统一的示性类定义了：

定义2： 以$Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$为例，以及系数环R，任取上同调分次环$H^*(Gr(k,\mathbb{C}^\infty);R)$中的元素$\mathscr{C}$，以及任意仿紧T2空间$X$，及其上秩为$k$的复向量丛$\xi$，则在同伦意义下存在唯一的$f_\xi : X\to Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$，使得$\xi = f_\xi^*\eta_k$，进而我们定义$\xi$的$\mathscr{C}$示性类$\mathscr{C}(\xi)$为$f_\xi^*\mathscr{C}$。

由这个定义，我们可知计算出Grassmann流形的上同调环的结构至关重要。

2.Grassmann流形的上同调环

我们这里不加证明的引用$Gr(k,\mathbb{R}^\infty)$和$Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$的胞腔结构（事实上细节可参看笔记：一些流形的例子）

我们有$Gr(k,\mathbb{R}^\infty)$的r维胞腔以及$Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$的$2r$维胞腔一一对应于

$$\{(i_1,\cdots,i_s) : 1\le i_l\le k, s\in\mathbb{N}, i_1+\cdots+i_s = r, i_1\le\cdots\le i_s\}.$$

现在我们来计算一下$Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$的$\mathbb{Z}$系数上同调环，关键想法是利用其作为分类空间的性质，考虑$\mathbb{C}P^\infty$以及其上的万有线丛η_1，则对$X = \mathbb{C}P^\infty\times\cdots\times\mathbb{C}P^\infty$，我们有$f : X\to Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$，使得

$$\pi_1^*\eta_1\oplus\cdots\oplus\pi_k^*\eta_1 = f^*\eta_k,$$

注意到$H^*(X) = \mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_k]$，以及$c(\pi_i^*\eta_1) = 1+x_i$，从而对$F = f^*\eta_k$，有$c_l(F) = \sigma_l(x_1,\cdots,x_k)$，又由初等对称多项式的性质，任何一个对称多项式都可以被$\sigma_0,\cdots,\sigma_k$给唯一表示，从而0可被唯一表示，因此有它们代数无关，进而可知$c_0(F),\cdots,c_k(F)$代数无关，因此由$c_l(F) = f^*c_l(\eta_k)$可知$c_l(\eta_k)$也代数无关，因此我们有自然的包含关系：

$$\mathbb{Z}[c_0(\eta_k),c_1(\eta_k),\cdots,c_k(\eta_k)]\subseteq H^*(Gr(k,\mathbb{C}^\infty)),$$

而我们仔细对照左右两侧维数，$H^{2r}(Gr(k,\mathbb{C}^\infty))$的基一一对应着一个数组$(i_1,\cdots,i_s)$，则我们可知这也一一对应着$c_{i_1}(\eta_k)\cdots c_{i_s}(\eta_k)$（注意均为偶数维从而交换顺序不影响符号，因此是唯一对应的），而后者恰好是左侧代数环里$2r$维的生成元，因此可知从维数角度两者对应相等，因此我们实际上有：

$$\boxed{H^*(Gr(k,\mathbb{C}^\infty)) = \mathbb{Z}[c_0(\eta_k),c_1(\eta_k),\cdots,c_k(\eta_k)].}$$

同样的道理，我们也可以说明对$Gr(k,\mathbb{R}^\infty)$以及其上的万有k丛γ_k，我们有其$\mathbb{Z}_2$系数上同调环满足：

$$\boxed{H^*(Gr(k,\mathbb{R}^\infty),\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}/2[w_0(\gamma_k),w_1(\gamma_k),\cdots,w_k(\gamma_k)].}$$

Problem 5C

Proof： 我们先证明$Gr(n,\mathbb{R}^m)$微分同胚于m阶对称幂等迹为n的矩阵全体。