向量丛和示性类2—Stiefel-Whitney示性类 A

SW示性类的公理

我们先从抽象的公理体系出发定义Stiefel-Whitney示性类，并据此导出一些基本的性质，至于存在性，我们留在后续再慢慢讨论（就如同我们学习数学分析时早就已经先接受实数的存在性一样）

公理1：设X为拓扑空间，对任意X上的实向量丛E，我们定义E的第i个SW类为$w_i(E)\in H^i(X,\mathbb{Z}_2)$，并且当$i>\mathrm{rank}E$时，我们约定$w_i(E)=0$，并且$w_0(E)=1$，并且记

$$w(E)=w_0(E)+\cdots+w_n(E)\in H^*(B,\mathbb{Z}_2),\quad n=\mathrm{rank}E.$$

这里$H^*(X,\mathbb{Z}_2)$表示分次交换环。

公理2：(自然性)，对拉回丛也即如下交换图，

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

我们有$w_i(f^*E)=f^*(w_i(E))$，前面f^*表示拉回丛，后者表示对上同调中元素的拉回。

公理3：(Whitney乘积公式)我们对$E,F\to X$，我们有

$$w_k(E\oplus F)=\sum_{i=0}^{k}w_i(E)\smile w_{k-i}(F),$$

比如$w_1(E\oplus F)=w_1(E)+w_1(F)$（注意到$w_0(E)=w_0(F)=1$），写成更漂亮的形式，也即利用分次环的记号，我们可以简写为

$$w(E\oplus F)=w(E)\smile w(F).$$

公理4：(非平凡性)我们对$\mathbb{R}P^1$上的典范线丛η_1，我们约定$w_1(\eta_1)(\neq 0)\in H^1(\mathbb{R}P^1,\mathbb{Z}_2)$。

目前，我们只需要承认在向量丛的世界里，这样的SW示性类真的存在即可，我们下面推导一些有趣的结果。

SW示性类公理的有趣推论

性质"1"：如果E与F同构，则$w(E)=w(F)$。

> 这是不完全正确的，因为仅从公理2的角度出发无法推出同构的向量丛具有相同的示性类，这事实上是一个很细微的错误，因此为了严谨起见，我们应当在公理定义时考虑那些同构的向量丛上定义。

性质2：对任意底空间X，我们有$w(\underline{\mathbb{R}^k}) = 1$，也即$w_i(\underline{\mathbb{R}^k}) = 0$如果$i > 0$，在$i = 0$时为1。

> 我们考虑常值映射$c : X \to \mathrm{pt}$，以及pt上的向量丛$\mathbb{R}^k$，则有显然$\underline{\mathbb{R}^k} = c^*\mathbb{R}^k$，因此我们由公理2可知$w_i(\underline{\mathbb{R}^k}) = w_i(c^*\mathbb{R}^k) = c^*w_i(\mathbb{R}^k)$，而由$H^*(\mathrm{pt}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}$，因此可知命题得证。

性质3：由Whitney乘积公式，我们可知

$$w(E \oplus \underline{\mathbb{R}^k}) = w(E)w(\underline{\mathbb{R}^k}) = w(E).$$

性质4：若秩为n的向量丛E存在一个非零截面，则由$w_n(E) = 0$；如果进一步存在k个处处线性无关的截面，则有$w_n(E) = \cdots = w_{n-k+1}(E) = 0$。

> 注意到存在k个处处线性无关的截面等价于有子丛F使得$E = F \oplus \underline{\mathbb{R}^k}$，且这里$F$为秩为$n-k$的向量丛，因此由性质3，可知当$l > n-k$时，$w_l(E) = w_l(F) = 0$。
>
> 换言之$w(E)$中最高非零项的次数越低，E离平凡丛越近（的可能性越大）。

性质5：我们事实上有w可看作是从$(\widetilde{\mathrm{KO}}(X), \oplus)$到$(H^*(X, \mathbb{Z}_2), \smile)$的一个保持运算的映射。

> 只需注意到利用性质3，$w(E)$不依赖于稳定等价类的选取，也即两个向量丛相差平凡丛不改变两者的SW类。

例子6：注意到$TS^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$，也即切丛稳定同构于平凡丛，因此我们有$w(TS^n) = 1$。

例子7：我们下面关注的核心是与$\mathbb{R}P^n$有关的，我们先考虑一下其典范线丛η_n的SW类的计算：

注意到对$k < n$，我们有自然的嵌入$i_k^n : \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$，这会将$\eta_n$拉回为$\eta_k$，也即$w(\eta_k) = (i_k^n)^*w(\eta_n)$，注意到每个$(i_k^n)^*$都会诱导$H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \to H^i(\mathbb{R}P^k, \mathbb{Z}_2)$的同构（当$i \leq k$时），从而可知$w(\eta_n) = w(\eta_1) = 1 + a$，这里$a \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$不为0是由公理4所保证的。

例子8：注意到我们可以自然视$\eta_n \subseteq \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} = \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$为子丛，因此可以考虑其正交补空间$\eta_n^\perp$，则由$\eta_n \oplus \eta_n^\perp = \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$，我们有$w(\eta_n)w(\eta_n^\perp) = 1$，因此我们可以待定系数，设

$$w(\eta_n^\perp) = k_0 + k_1 a + \cdots + k_{n-1}a^{n-1}, \quad k_i \in \{0, 1\}, a \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2).$$

则可知$(1+a)(k_0 + \cdots + k_{n-1}a^{n-1}) = 1$，因此不难得到$w(\eta_n^\perp) = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$。

> 我们事实上也可以同过求形式逆得到，但用待定系数法更加严谨，这也其实我们在对一般$E \oplus F \cong \underline{\mathbb{R}^k}$时，我们若知道$w(E)$，则可以待定系数利用$w(E)w(F) = 1$去求出$w(F)$。

很显然切丛的示性类反映了很多不平凡的拓扑性质，因此我们下面的主要精力放在计算$T\mathbb{R}P^n$的SW类上。

命题9：设$p : S^n \to \mathbb{R}P^n$为商映射，则我们有$p^*(T\mathbb{R}P^n) \cong TS^n$。

Proof：注意到作为集合$\pi^*(T\mathbb{R}P^n) = \{(x, v) : p(x) = \pi(v)\}$，而$v \in T_{p(x)}\mathbb{R}P^n$事实上由$p$为局部微分同胚可知$p_{*,x}$为$T_{p(x)}\mathbb{R}P^n$和$T_{p(x)}S^n$之间的线性同构，因此我们可以构造

$$f : p^*(T\mathbb{R}P^n) \to TS^n, \quad (x, v_{p(x)}) \mapsto (x, (p_{*,x})^{-1}v_{p(x)}),$$

很明显f是一个双射，连续性由p局部微分同胚也很容易保证，逆映射的构造同理，而保持纤维是不言而喻的，综上我们可以说明这两个向量丛是同构的。□

> 我们可以从这个结论出发重新得到$w(TS^n)=1$的证明，注意到$w(TS^n)=p^*w(\mathbb{R}P^n)$，而归根结底$w(\cdot)$都是底空间上同调中的元素，故而结合熟知的结论：
> $p^*:H^*(\mathbb{R}P^n,\mathbb{Z}_2)\to H^*(S^n,\mathbb{Z}_2)$诱导的映射是平凡的即可证明。（熟知结论的简证：注意到$\mathbb{R}P^n$的$\mathbb{Z}_2$有一个统一的生成元a，因此注意到$p^*a=0$，则有任意k，可知
> $p^*(a^k)=(p^*a)^k=0$，即证）

现在我们陈述并证明以下这个关键命题，这是我们计算$\mathbb{R}P^n$切丛SW类的关键：

命题10： 我们有丛同构$T\mathbb{R}P^n\cong \mathrm{Hom}(\eta_n,\eta_n^{\perp})$。

> 先验的，$\eta_n^{\perp}$秩为n，从而两边向量丛的秩确实是吻合的。

Proof： 证明是直观的，我们先在一点处看以寻找直觉，对$\mathbb{R}^{n+1}$中的直线ℓ，且可看成是$\mathbb{R}P^n$上的一点，设$|x|=1$且$x\in\ell$，则$T_\ell\mathbb{R}P^n$其实可以自然看成是T_xS^n和$T_{-x}S^n$按照$v\sim -v$粘贴起来得到的，因此任意切向量$X_\ell\in T_\ell\mathbb{R}P^n$可被表示成一个无序对：$\{[(x,v),(-x,-v)]:|x|=1,v\cdot x=0\}$中的元素。

显然若X_ℓ对应着$[(x,v),(-x,-v)]$，则aX_ℓ对应着$[(x,av),(-x,-av)]$，换言之X_ℓ可以对应一个$f_X:\eta_{n,l}\to\eta_{n,l}^{\perp}$，$ax\mapsto av$，反过来的对应也是显然的，从而不难得到一一对应，连续性等其他必要的说明我们在此略去。□

命题11： 我们有

$$\begin{aligned}T\mathbb{R}P^n\oplus\underline{\mathbb{R}}=T\mathbb{R}P^n\oplus\mathrm{Hom}(\eta_n,\eta_n)=\mathrm{Hom}(\eta_n,\eta_n^{\perp})\oplus\mathrm{Hom}(\eta_n,\eta_n)=\mathrm{Hom}(\eta_n,\underline{\mathbb{R}^{n+1}})\\=\bigoplus_{n+1}\mathrm{Hom}(\eta_n,\underline{\mathbb{R}})=\underbrace{\eta_n^*\oplus\cdots\oplus\eta_n^*}_{n+1}=\underbrace{\eta_n\oplus\cdots\oplus\eta_n}_{n+1},\end{aligned}$$

从而$w(T\mathbb{R}P^n)=(w(\eta_n))^{n+1}=(1+a)^{n+1}$。

Sketch： 在命题中，我们简要用到了如下事实：

- L为线丛，$\mathrm{Hom}(L,L)\cong\underline{\mathbb{R}}$，为证明此事，只需要说明$\mathrm{Hom}(L,L)$有一个处处非零的截面即可，也即存在$s:X\to\mathrm{Hom}(L,L)$，且$s\neq 0$。很明显取$s(x)=1\cdot$即可，也即任意$\ell\in L$，$\pi(\ell)=x$，则定义$s(x)(\ell)=\ell$，易见$s\in\Gamma(\mathrm{Hom}(L,L))$，即证；
- $\mathrm{Hom}(E,F\oplus G)=\mathrm{Hom}(E,F)\oplus\mathrm{Hom}(E,G)$，这利用线性空间上的结果即可；
- 对于向量丛E，有$E\cong E^*$，这事实上源自于选取E上的一个黎曼度量$g:E\times E\to\mathbb{R}$，考虑$g^\sharp:E\to\mathrm{Hom}(E,\mathbb{R})=E^*$，其中$g^\sharp(e)(f):=g(e,f)$，由$g$正定非退化，可以得出$g^\sharp$为同构。

> 利用上述事实可以得到的一个简单推论是：对任意线丛L，我们有
>
> $$L^{\otimes 2}=L\otimes L\cong L^*\otimes L\cong\mathrm{Hom}(L,L)\cong\underline{L}。$$

总结： 我们有

$$w(T\mathbb{R}P^n)=(1+a)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}a+\cdots+\binom{n+1}{n}a^n,$$

因此我们有$w(T\mathbb{R}P^1)=1$，且有如下例子：

例子12： 我们有$w(T\mathbb{R}P^4)=1+a+a^4$，由此可知$\mathbb{R}P^4$上不存在处处非零的向量场，也自然有$\mathbb{R}P^4$是不可平行化的。

SW示性类的具体应用

¶整体截面存在的障碍

回忆若$E \cong \underline{\mathbb{R}^k}$，则有$w(E)=1$，因此只要$w(E)\neq 1$，我们就知道$E$一定不是平凡丛，这给我们了一个强有力判断流形是否可平行化的判据。

若向量丛E秩为k，且存在$s\in\Gamma(E)$处处非零，则有$E=F\oplus\underline{\mathbb{R}}$，这则有$w_k(E)=0$。

我们有$w(T\mathbb{R}P^4)=1+a+a^4$，由此可知$\mathbb{R}P^4$上不存在处处非零的向量场，也自然有$\mathbb{R}P^4$是不可平行化的。

回忆在之前的计算中，我们有

$$w(T\mathbb{R}P^n)=(1+a)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}a+\cdots+\binom{n+1}{n}a^n,$$

进一步小心分析每个组合数的奇偶性，我们可以得出以下推论：

推论13： $w(T\mathbb{R}P^n)=1$当且仅当$n+1$为2的幂次，因此若$\mathbb{R}P^n$可平行化，则n可能的取值只能是$1,3,7,\cdots$等形如2^m-1的数。

Proof： 这是一个纯粹的数论问题，一方面若$n+1=2^m$，则由Kummer定理，任意$1\leq k\leq 2^m$，我们均有$\binom{2^m}{k}$为偶数，因此$w(T\mathbb{R}P^n)=1$。

另一方面假设$n+1=2^ml$，这里l为大于1的奇数，则注意到在$\mod 2$意义下$(a+b)^2=a^2+b^2$，从而

$$(1+a)^{2^ml}=[(1+a)^{2^m}]^l=(1+a^{2^m})^l=1+l\cdot a^{2^m}+\cdots\neq 1,$$

综上我们完成了证明。□

与上述推论密切相关的是关于可除代数的问题：

定理14：(Steifel) 若$\mathbb{R}^n$上存在可除代数结构，也即有无零因子的双线性运算

$$p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,$$

则有对应维数的$\mathbb{R}P^{n-1}$是可平行化的。

> 注意：可除代数结构并不要求这个乘法是结合的或者是有恒等元。

Proof： 可除代数结构的最大特征就是这个运算是无零因子的，因此任意$v\neq 0$，$p(v,\cdot)$给出了$\mathbb{R}^n$上的一个线性同构，。。。。

推论15： 若$\mathbb{R}^n$上存在可除代数结构，则$n=2^m$。

> 事实上我们熟知，当$n=2,4,8$的时候，反别对应着复数$\mathbb{C}$，四元数$\mathbb{H}$以及Caley八元数$\mathbb{O}$，其上有自然的可除代数结构。反过来，我们利用K理论可以证明这也确实是全体可能的可除代数，具体证明可参见Hatcher。

¶浸入问题

我们呢现在考虑以下浸入问题：任给光滑流形M^m和N^n，什么时候存在光滑浸入$f:M\looparrowright N$，也即在每个切空间上，f的切映射均为单射，一个考虑此问题的最自然的方式仍是从切丛出发，特别的我们考虑TM和f^*TN，注意到我们可以给出一个显式的单射的丛映射：

$$F:TM\to f^*TN,\quad (p,X_p)\mapsto(p,f_{*,p}X_p).$$

显然这是逐纤维线性单射，不难验证连续性，因此有TM可以视作是f^*TN的子丛，进而我们存在法丛NM使得

$$TM \oplus NM \cong f^*TN,$$

故$w(TM)\cdot w(NM)=w(f^*TN)=f^*w(TN)$。

特别的，当我们关心流形浸入欧氏空间的情形时，此时$T\mathbb{R}^n$为平凡丛，因此我们有若M^m能够浸入$\mathbb{R}^n$中，则

$$w(TM)\cdot w(NM)=1.$$

注意到我们的目标是看n能有多小，也即估计n的下界，又

$$n=\mathrm{rank}TM+\mathrm{rank}NM=m+\mathrm{rank}NM\geq m+\deg w(NM),$$

这里$\deg w(NM)$表示$w(NM)$在上同调环里的分次维数，也即最高阶非零项的阶数。

而幸运的是尽管我们对NM本身一无所知，但是其SW类可以用$w(TM)$的逆求出，因此这样我们就可以给出浸入维数的估计，下面我们以$\mathbb{R}P^n$为例做一些计算：

例子16： 由$w(\mathbb{R}P^4)=1+a+a^4$，则

$$w(\mathbb{R}P^4)^{-1}=\frac{1}{1+a+a^4}=1+(a+a^4)+(a+a^4)^2+\cdots=1+a+a^2+a^3,$$

因此可知$\mathbb{R}P^4$如果能浸入欧氏空间，则其维数至少得是$4+3=7$维，换言之$\mathbb{R}P^4$无法浸入到6维以下的欧氏空间中。事实上，回忆Whitney嵌入定理，其已经证明了任何M^m，都可以嵌入到$\mathbb{R}^{2m}$中，浸入到$\mathbb{R}^{2m-1}$中，因此在这个例子中，我们得知：$\mathbb{R}P^4$可以浸入到的最低维欧氏空间就是$\mathbb{R}^7$。

事实上，上述结论可以推广到所有2的幂次：

定理17： 对于$\mathbb{R}P^{2^m}$而言，其能浸入的最低维欧氏空间是$\mathbb{R}^{2^{m+1}-1}$。

Proof： 关键就是计算$w(T\mathbb{R}P^{2^m})=(1+a)^{2^m+1}$。注意到仍然由Kummer定理，结合$2^m+1$的二进制展开为$(10\cdots01)_2$，可知任意$2\leq k\leq 2^m-1$，我们有$\binom{2^m+1}{k}$为偶数，因此$w(T\mathbb{R}P^{2^m})=1+a+a^{2^m}$，进而

$$w(T\mathbb{R}P^{2^m})^{-1}=\frac{1}{1+a+a^{2^m}}=1+(a+a^{2^m})+(a+a^{2^m})^2+\cdots=1+a+a^2+\cdots+a^{2^m},$$

因此可知$\mathbb{R}P^{2^m}$能浸入欧氏空间的最小维数为$2^m+2^m-1=2^{m+1}-1$，由Whitney嵌入定理，即证。$\square$

事实上，关于浸入问题，Samle和Hirsch已经给出了完整解答，我们分别记

$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}(M,N)&:=\{f:M\looparrowright N\},\text{赋予}C^\infty\text{拓扑},\\ \mathrm{b.Imm}(M,N)&:=\{(f,\delta)|f:M\to N\text{连续},\delta:TM\to f^*TN\text{为单的丛映射}\},\end{aligned}$$

均赋予C^∞拓扑，则我们有

定理18（Hirsch-Leray） 我们有映射：

$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}(M,N)&\to \mathrm{b.Imm}(M,N)\\ f&\mapsto (f,f_*)\end{aligned}$$

是一个弱同伦等价，也即这个映射诱导了各阶同伦群的同构。

> 在上述强大定理的意义下，我们判断是否存在浸入，等价于看$\mathrm{Imm}(M,N)$是否非空，进一步等价于看$\mathrm{b.Imm}(M,N)$是否非空，而后者只需要保证TM可以实现成f^*TN的子丛即可，而研究这个事情就简单很多，因为这几乎等同于一些线性代数的练习。

¶SW数与流形的配边

设M是n维光滑闭流形，我们关心：是否存在$n+1$维带边流形W，使得$\partial W=M$，为此，我们先假设这样的W存在，去从SW类的角度出发去寻找可能存在的障碍，对$(W,\partial W=M)$，我们有同调群的长正合列：

$$H_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2)\to H_{n+1}(W;\mathbb{Z}_2)\to H_{n+1}(W,M;\mathbb{Z}_2)\to H_n(M;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{i_*}H_n(W;\mathbb{Z}_2),$$

由Poincare-Lefschetz对偶，我们有$H_{n+1}(W;\mathbb{Z}_2)=H^0(W,M;\mathbb{Z}_2)=0$，
$H_{n+1}(W,M;\mathbb{Z}_2)=H^0(W;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$，$H_n(M;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$，且设基本类为$[M]$，注意到
$H_{n+1}(W;\mathbb{Z}_2)=0$说明了$\partial:H_{n+1}(W,M;\mathbb{Z}_2)\to H_n(M;\mathbb{Z}_2)$为同构，因此$i_*$为零，也即
$i_*[M]=0$。

有了上述基本准备，我们现在可以正式考虑问题了，首先由袖口引理（Collar lemma），我们知道
$M\times[0,1)$光滑嵌入到W包含M的一个开邻域中，由此可知NM即M在W的法丛平凡，因此我们在
M上有：

$$TW|_M\cong TM\oplus NM\cong TM\oplus\underline{\mathbb{R}}.$$

因此有$w(TM)=w(TM\oplus\underline{\mathbb{R}})=w(i^*TW)=i^*w(TW)$，进而任取$a_1,\cdots,a_k$满足
$a_1+\cdots+a_k=n$，且允许这k个数重复，我们定义M的Stiefel-Whitney示性数为

$$\langle w_{a_1}(TM)\cdots w_{a_k}(TM),[M]\rangle。$$

注意到：若M可以实现成W的边界，则对M的任何一个SW数，我们有

$$\begin{aligned}&\langle w_{a_1}(TM)\cdots w_{a_k}(TM),[M]\rangle\\=&\langle i^*(w_{a_1}(TW)\cdots w_{a_k}(TW)),[M]\rangle\\=&\langle w_{a_1}(TW)\cdots w_{a_k}(TW),i_*[M]\rangle\\=&\langle w_{a_1}(TW)\cdots w_{a_k}(TW),0\rangle=0,\end{aligned}$$

其中用到了$i_*[M]=0$，因此可知对M的每一个SW数都是0。

总结一下，我们得到了：

定理18（Pontrjagin）：若M^n是某个W^{n+1}的边界，则有M的所有SW数均为0，换言之，SW数刻画了流形成为边界的障碍。

Notation：我们对流形M，我们用$W_1^{a_1}\cdots W_n^{a_n}(M)$表示$w_1^{a_1}(TM)\cdots w_n^{a_n}(TM)[M]$，也即对应的SW数

例子19：我们考虑$\mathbb{R}P^{2n}$，在之前我们已经计算过了，其切丛的SW类为$w(T\mathbb{R}P^{2n})=(1+a)^{2n+1}$，从而有$\langle w_{2n}(T\mathbb{R}P^{2n}),[\mathbb{R}P^{2n}]\rangle=1\neq0$，因为$\binom{2n+1}{2n}=2n+1$为奇数。从而我们得知任何偶数维射影空间都不能实现成某个高一维流形的边界。

事实上我们也可以从欧拉示性数的角度给出另外一个证明：若$\mathbb{R}P^{2n}$可以实现成某个流形M的边界，则我们将两份M沿着边界粘贴得到一个奇数维闭流形W，则$\chi(W)=0$，又由MV序列不难得到

$$0=\chi(W)=2\chi(M)-\chi(\mathbb{R}P^{2n})=2\chi(M)-1,$$

矛盾！从而无法实现成流形的边界。

例子20：我们下面说明对任何$\mathbb{R}P^{2n-1}$，其SW数均为0，事实上注意到其SW类为$(1+a)^{2n}=(1+a^2)^n$，因此其所有奇数阶的SW类均为0，进而又任何一组$a_1+\cdots+a_k=2n-1$，一定有一者为奇数，从而可知其SW数全为零，则由Thom如下的强大定理，我们可以知道每个$\mathbb{R}P^{2n-1}$均可以实现成高一维流形的边界：

定理21（Thom）：若M的SW数均为0，则其可以实现成某个流形的边界。

这个证明当然是意料之中的困难，但我们有如下一个特例：

例子22：可以证明：$\mathbb{R}P^3$可以实现成某个四维流形的边界，注意到由Hopf纤维化，我们有S^3是S^2上的S^1丛，则$\mathbb{R}P^3$也可以看成是S^2上的S^1丛（这是因为用(z,w)表示S^3中的点，则其上的纤维可表示为$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}w)$，因此在对径点粘贴实际上是对每个纤维上的$S^1$对径点粘贴，从而这即说明了问题），因此我们可以将每个S^1中填充圆盘，从而得到$M=S^2\mathbin{\widetilde{\times}}D^2$，容易看见其边界即是$\mathbb{R}P^3$。

利用完全类似的证明，我们可以证明：

定理23：若M,N可以实现成某个W的边界，也即$\partial W=M\sqcup N$，则有M和N的所有SW数均相同。此时我们称M和N同属于同一个无定向配边等价类。

推论24：设Ω_n表示n维闭流形的无定向配边等价类构成的集合，则这个集合是有限集。

> 关键就是满足$a_1+2a_2+\cdots+na_n=n$的自然数组$(a_1,\cdots,a_n)$只有有限组。

必要练习

(Problem 4.A of Milnor)

Proof：注意到设$\pi_i:M_1\times M_2\to M_i$，则可知$\xi\times\eta=\pi_1^*\xi\oplus\pi_2^*\eta$，从而有

$$w_k(\xi\times\eta)=w_k(\pi_1^*\xi\oplus\pi_2^*\eta)=\sum_{i=0}^k w_i(\pi_1^*\xi)\smile w_{k-i}(\pi_2^*\eta),$$

又注意到

$$w_i(\pi_1^*\xi)\smile w_{k-i}(\pi_2^*\eta)=\pi_1^*w_i(\xi)\smile\pi_2^*w_{k-i}(\eta)=w_i(\xi)\times w_{k-i}(\eta),$$

综上即证。$\square$

(Problem 4.B of Milnor)

Proof：注意到$w(T\mathbb{R}P^n)=(1+a)^{n+1}=(1+a)^{2^rm}=(1+a^{2^r})^m=1+\cdots+a^{2^r(m-1)}$，从而若存在$2^r$个处处线性无关的切向量，则有$T\mathbb{R}P^n=E\oplus\underline{\mathbb{R}^{2^r}}$，进而$w_{n-2^r+1}(T\mathbb{R}P^n)=0$，但由上面的计算可知矛盾。$\square$

(Problem 4.C of Milnor)

Proof：若$\mathbb{R}P^n$允许一个秩为1的切子丛L，则$T\mathbb{R}P^n=L\oplus L^\perp$，从而$w(T\mathbb{R}P^n)=(1+w_1(L))\cdot w(L^\perp)$，若$n=2m$为偶数，则$w_n(T\mathbb{R}P^n)=a^n$，从而$w_1(L)\neq 0$，因此其为$a$，设

$$w(L^\perp)=1+v_1a+\cdots+v_{2m-2}a^{2m-1},$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&w(T\mathbb{R}P^n)=(1+a)(1+v_1a+\cdots+v_{2m-1}a^{2m-1})\\
&=1+(1+v_1)a\quad+(v_1+v_2)a^2\quad+\cdots+(v_{2m-2}+v_{2m-1})a^{2m-1}+v_{2m-1}a^{2m}\\
&=1+\binom{2m+1}{1}a+\binom{2m+1}{2}a^2\ +\cdots+\binom{2m+1}{2m-1}a^{2m-1}\qquad+\binom{2m+1}{2m}a^{2m},
\end{aligned}$$

因此可知从左往右，在模2意义下，我们有

$$v_{2m-1} = (v_1 + v_2) + \cdots + (v_{2m-2} + v_{2m-1}) = \binom{2m+1}{2} + \cdots + \binom{2m+1}{2m-1} = 2^{2m+1} - 4 = 0,$$

这与$v_{2m-1} = 1$矛盾！从而可知n为奇数。

另一方面由n为奇数时，S^n上存在一个处处非零的切向量场。从而由$\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$为局部同胚可知$\pi_* X$为$\mathbb{R}P^n$上一个处处非零的切向量场，从而可知$T\mathbb{R}P^n$可以分离出一个平凡线丛。

若$T\mathbb{R}P^4$存在一个秩为2的子丛E，则可知$T\mathbb{R}P^4 = E \oplus E^\perp$，从而设$w(E) = 1 + x_1 a + x_2 a^2$，$w(E^\perp) = 1 + y_1 a + y_2 a^2$，从而可知

$$1 + a + a^4 = (1 + x_1 a + x_2 a^2)(1 + y_1 a + y_2 a^2),$$

从而可知$x_2 = y_2 = 1$，进而$1 = x_1 + y_1 = 0$，矛盾！从而不存在一个秩为2的子丛。

若$T\mathbb{R}P^6$存在一个秩为2的子丛G，则可知$T\mathbb{R}P^6 = G \oplus G^\perp$，则设$w(G) = 1 + z_1 a + z_2 a^2$，$w(G^\perp) = 1 + u_1 a + u_2 a^2 + u_3 a^3 + u_4 a^4$，从而有

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = (1 + z_1 a + a^2)(1 + u_1 a + u_2 a^2 + u_3 a^3 + a^4),$$

稍微推理一下也不难得出矛盾。

综上我们完成了证明。□

(Problem 4.D of Milnor)

Proof: 设M在$\mathbb{R}^{n+1}$中的法丛为NM，从而由$TM \oplus NM \cong \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$，因此可知$w(TM) \cdot w(NM) = 1$，进而又$NM$为线丛，从而$w(NM) = 1 + x$，$x \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$，若$x = 0$，则$w(TM) = 1$，命题显然成立，因为$w_i(TM) = 0$；若$x \neq 0$，则可知

$$w(TM) = \frac{1}{1+x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1},$$

即为所证。

若$\mathbb{R}P^n$可嵌入到$\mathbb{R}^{n+1}$中，从而可知$w(T\mathbb{R}P^n) = 1$或者$w(T\mathbb{R}P^n) = 1 + a + \cdots + a^n$，由之前的计算可知前者当且仅当$n+1$为2的幂次，而对于后者，我们有任意$k$，$\binom{n+1}{k}$均为奇数，由Kummer定理可知，$n+1$的2进制表示一定形如$(11\cdots1)_2$，从而$n + 1 = 2^r - 1$，综上可知$n = 2^r - 1$或者$n = 2^r - 2$。□

(Problem 4.E of Milnor)

Proof: 我们考察$\mathcal{N}_n := ([M], +)$，其中$[M] + [N] := [M \sqcup N]$，结合律与交换律是显然的，我们取零元为$[\varnothing]$，显然其满足零元的性质，因此我们定义了$\mathcal{N}_n$上的Abel群结构，注意到$2[M] = [M \sqcup M] = [\partial(M \times I)]$，从而有$2[M] = [\varnothing]$，因此有自然的$\mathbb{Z}_2$模结构。

我们下面讨论一下$\mathcal{N}_4$，首先对于$\mathbb{R}P^4$，有$w(T\mathbb{R}P^4) = (1+a)^5 = 1 + a + a^4$，从而有$W_1^4(\mathbb{R}P^4) = 1$，$W_4(\mathbb{R}P^4) = 1$，且这是其全部的非零SW数；我们再考虑$\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$，注意到$T(\mathbb{R}P^2 \times T\mathbb{R}P^2) = T\mathbb{R}P^2 \times T\mathbb{R}P^2$，从而由problem 4-A的结论，有

$$\begin{aligned} w(T\mathbb{R}P^2 \times T\mathbb{R}P^2) &= w(T\mathbb{R}P^2) \times w(T\mathbb{R}P^2) = (1+a)^3 \times (1+b)^3 \\ &= (1 + a + a^2) \times (1 + b + b^2) \\ &= 1 + (a + b) + (a^2 + b^2 + a \times b) + (a^2 \times b + a \times b^2) + a^2 \times b^2, \end{aligned}$$

又$a^2[\mathbb{R}P^2] = b^2[\mathbb{R}P^2] = 1$，从而我们有$W_4 = 1$，$W_1 W_3 = 2a^2b^2[M] = 0$，$W_2^2 = 3a^2b^2[M] = 1$，又$(a+b)^4[M] = 0$，从而$W_1^4 = 0$，以及$W_1^2 W_2 = 0$，从而我们整理一下有下表：

流形/SW数	W_1^4	$W_1^2W_2$	W_1W_3	W_4	W_2^2
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\mathbb{R}P^4$	1	0	0	1	0
$\mathbb{R}P^2\times\mathbb{R}P^2$	0	0	0	1	1
$\mathbb{R}P^4\sqcup\mathbb{R}P^2\times\mathbb{R}P^2$	1	0	0	0	1

从而由SW数为配边等价类的一个刻画，也即不同SW数对应的配边等价类不同，可从上表得知$\mathcal{N}_4$至少有4个元素，其中第四行的计算是由二三行直接求和得到的。$\square$

(Bonus Problem 1)

> Suppose E is a vector bundle of rank r over S^m with $r>m$. Let s be a nowhere zero section of $E|_D$ where D is southern hemisphere of S^m. Show that s can be extended continuously to a nowhere zero section of E over S^m. Then show that we can always find a nowhere zero global section of E.

Proof: 设N表示S^m北半球，则$E|_N$为平凡丛，且$s|_{S^{m-1}}$有定义，

(Bonus Problem 2)

> Classify all oriented real vector bundles of rank 2 over S^k $(k>0)$.

Proof: 由[VB]命题1.14可知，$\mathrm{Vect}_+^n(S^k)$与$[S^{k-1},\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})]$一一对应，从而特别的，我们有

$$\mathrm{Vect}_+^2(S^k)=[S^{k-1},\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})]=[S^{k-1},\mathrm{SO}(2)]=\pi_{k-1}(S^1),$$

因此我们有当$k=1$或大于等于3时，其上有唯一的平凡丛，当$k=2$时，$\mathrm{Vect}_+^2(S^2)=\mathbb{Z}$。$\square$

注： 当$k=2$时，更精细的对应关系可参考[algebraic topology - Relationship between the 2-plane bundles over S^2 and $\mathbb{Z}$ - Mathematics Stack Exchange]。

(Bonus Problem 3)

> Classify all complex vector bundles over S^2. Then compute $K(S^2)$.

Proof: 由[VB]命题1.11可知，$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^n(S^k)$和$[S^{k-1},\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})]$一一对应，从而有任意$n$，

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^n(S^2)=[S^1,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})]=[S^1,U(n)]=\pi_1(U(n)),$$

由fibration$U(n)/U(n-1)=S^{2n-1}$，从而当$n=1$时，$U(1)=S^1$，从而$\pi_1(U(1))=\mathbb{Z}$，进而不难得到$\pi_1(U(n))=\mathbb{Z}$，具体可参考MSE上的回答。又由问题1可知当S^2上向量丛秩大于2时，其可以分裂成秩为2的向量丛和一个平凡丛的直和，因此可知$K(S^2)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$。$\square$