向量丛和示性类11—定向配边群

我们本节的主要目标是

1. 定义定向配边群Ω_m并计算$\Omega_m\otimes\mathbb{Q}$；
2. 基于有理系数定向配边群，我们证明Hirzebruch号差定理；
3. 更进一步的应用，如七维怪球。

1.定向配边群与Thom空间

定义1：我们称M_0^m与M_1^m是**定向配边的**，如果存在带边流形W^{m+1}，使得

$$\partial W=\overline{M_0}\sqcup M_1,$$

这里$\overline{M}$表示选取与M相反定向。

事实2：这是一个等价关系，传递性容易验证，只需要将两个W沿着一个边界相粘即可，对称性考虑$\overline{W}$即可。

基于上述事实，我们可以定义：

定义3（定向配边群）：我们记

$$\Omega_m:=\{m\text{维定向闭流形}\}/\text{定向配边},$$

并且容易验证$(\Omega_m,\sqcup)$是一个abel群。若考虑

$$\Omega:=\bigoplus_{m=0}^{\infty}\Omega_m,$$

则我们可以定义自然的乘法：$[M]\times[N]:=[M\times N]$，这使得$\Omega$变成了一个环。

> **注**：上述乘法的良定义性是直接的，我们用$M\overset{W}{\sim}M'$表示流形M,M'通过W实现定向配边，则现在若对$N\overset{X}{\sim}N'$，则有
>
> $$M\times N\overset{W\times N}{\sim}M'\times N\overset{M'\times X}{\sim}M'\times N',$$
>
> 进而可知乘法是良定义的。

例子4：我们有

- $\Omega_0\cong\mathbb{Z}$，因为显然任何两对相同个数的点均可定向配边（一一对应连线），但若点数不同，则无法配边。
- $\Omega_1\cong\{0\}$，因为一维闭流形只有S^1，而$\sqcup_m S^1$可以实现成S^2扣去m个圆盘的流形边界，也即均可以和$\varnothing$配边，从而可知由定向配边是等价关系即知。
- $\Omega_2\cong\{0\}$，因为二维可定向闭流形均形如S_g，自然考虑其填充满的三维流形（柄体），则可知也均可以和$\varnothing$配边。
- $\cdots$

在正式陈述关于定向配边群的一般结果前，我们先指出Pontrjagin数可以给出$4k$维流形定向配边关系一个刻画。

定理5：我们考虑Ω_{4k}，对任意$I=(i_1,\cdots,i_l)$满足$1\leq i_1\leq\cdots\leq i_l$且$i_1+\cdots+i_l=k$，我们定义

$$p_I(M):=\langle p_{i_1}(TM)\cdots p_{i_l}(TM),[M]\rangle$$

为M的一个**Pontrjagin数**，则$p_I:\Omega_{4k}\to\mathbb{Z}$是一个良定义的群同态。

Proof：我们只需要证明，若M^{4k}是W^{4k+1}的边界，则任何Pontrjagin数均为0，这的证明思路和之前SW数版本完全类似，核心就是在(W,M)的相对同调群的长正合列中恰当使用Poincare-Lefschetz对偶，这里不再赘述，细节可参考第2节。□

推论6：利用$p_I(\overline{M})=-p_I(M)$，不难得到$M$和$N$定向配边，则$p_I(M)=p_I(N)$。

应用7：若M上存在反定向自同胚，则$p_I(M)=0$，特别的可知$\mathbb{C}P^{2n}$上不存在反定向自同胚。

Proof：设$f:M\to\overline{M}$是一个保定向自同胚，从而可知M是Ω_m中的一个2挠，从而$2p_I(M)=0$，进而有$p_I(M)=0$。熟知$p_n(\mathbb{C}P^{2n})=\begin{pmatrix}2n+1\\n\end{pmatrix}a^{2n}$（由第9节的计算），从而可知不为$0$，进而不存在。

> **注**：不存在反定向自同胚当然是一个经典的事实，常见的看法无外乎用上同调环结构或者相交形式。

现在我们可以正式陈述本节的主定理了：

定理8（Thom定理）：我们有

- 当$m\not\equiv 0\pmod 4$时，有$\boxed{\Omega_m\otimes\mathbb{Q}=0}$;
- 当$m\equiv 0\pmod 4$时，有$\boxed{\Omega_{4k}\otimes\mathbb{Q}\overset{(p_I)_{|I|=k}}{\longrightarrow}\mathbb{Q}^{p(k)}}$为同构，其中$p(k)$表示$I$的个数，这里$|I|=k$，定义承接上文记号，也即正整数$k$的分划个数，且有基$\{\mathbb{C}P^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{i_l}:|I|=k\}$。

其证明大体上分为两步：

STEP 1：定义向量丛的Thom空间，并将上述有理系数定向配边群转化为Thom空间同伦群的计算；

STEP 2：借助同伦论和同调论，直接计算Thom空间的同伦群。

因此我们现在就先介绍Thom空间：

定义9（向量丛的Thom空间）：设$E\to X$为实定向向量丛，则我们定义E的Thom空间为其"一点紧化"，也即

$$\mathrm{Th}(E):=E^+=E\cup\{\infty\}=D(E)/S(E)=E/E-B^\circ(E),$$

这里$D(E)$表示E的单位圆盘丛，$S(E)$表示E的单位球面丛。

> **注**：直观想象就是将无穷延申的纤维全部捏成一点，从而这就很容易直观理解上述商空间。举个更浅显的例子$\mathrm{Th}(S^1\times\mathbb{R})$就是$S^1$上的双角锥。

性质10：设E秩为n，则有

$$H^{i+n}(\mathrm{Th}(E))\cong H^i(X).$$

Proof：注意到由CW偶可知

$$H^{i+n}(\mathrm{Th}(E))\cong H^{i+n}(D(E),S(E)),$$

由切除定理可知这即同构于$H^{i+n}(E,E_0)$，从而结合Thom同构定理即知命题成立。

上述性质告诉我们大可放心，Thom空间的上同调尽在我们掌握之中，无需恐惧忧虑。

> 我们可以利用Thom空间的观察去得到一些商空间的同伦型，具体可参考MSE。

现在我们考虑固定$m \in \mathbb{N}$，对任意定向闭流形M^m，由Whitney嵌入定理可知，存在充分大k（比如$k > m+1$）使得均存在$M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$，设$NM$为$M$在此嵌入下的法丛，显然可定向，因此我们考虑定向Grassmann流形$\widetilde{G}(k, \mathbb{R}^{m+k})$，以及其上的重言丛$\tilde{\eta}_{k,m+k}$，则由万有性质可知存在如下拉回图表

$$\begin{tikzcd} NM \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \tilde{\eta}_{k,m+k} \arrow[d] \\ M \arrow[r] & \tilde{G}(k, \mathbb{R}^{m+k}) \end{tikzcd}$$

于是现在视$S^{m+k} = (\mathbb{R}^{m+k})^+ = \mathbb{R}^{m+k} \sqcup \{\infty\}$，则我们可以定义映射

$$G : S^{m+k} \to \mathrm{Th}(\tilde{\eta}_{k,m+k}),$$

其中$G|_{NM} : NM \xrightarrow{g} \tilde{\eta}_{k,m+k}$，$G|_{S^{m+k}-NM} : S^{m+k} - NM \to \{\infty\}$，这里把$NM$视作$M$的管状邻域，直观理解$G$其实就是把$M$的管状邻域外部全部捏成无穷远点。

很明显对$\tilde{\eta}_{k,m+k}$的零截面$\mathcal{O}$，我们有$G^{-1}(\mathcal{O}) = M$，换言之我们借助映射G的构造，得到了一个m维流形到Thom空间球面映射的对应，也即$[G] \in \pi_{m+k}(\mathrm{Th}(\tilde{\eta}_{k,m+k}))$。

借助上面这个神奇构造，我们现在断言一个定理：

定理11： 我们有群同构$\Omega_m \to \pi_{m+k}(\mathrm{Th}(\tilde{\eta}_{k,m+k}))$，其中映射分别由$[M] \mapsto [G]$以及$[G] \mapsto [G^{-1}(\mathcal{O})]$给出。

Proof： 我们只需小心论证这里面一些代表元选取的良定义性即可，

- M^m嵌入$\mathbb{R}^{m+k}$的选取：事实上当k选取的充分大时，由微分拓扑中的结果，可知这些嵌入都是同痕的；
- 不依赖于定向配边等价类的选取：这是最要紧的一点，关键在于设$M_0 \overset{W}{\sim} M_1$，则考虑嵌入$W \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+k} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^{m+k+1}$，不难借助$W$构造出$G_0$和$G_1$的一个 同伦，直观想来是比较自然的；
- 反向中不依赖于映射同伦类的选取：注意到若$G_0 \overset{H}{\simeq} G_1$，这里$H : S^{m+k} \times [0,1] \to \mathrm{Th}(\tilde{\eta}_{k,m+k})$，从而容易看到流形$H^{-1}(\mathcal{O})$即为所求，因为由微分流形结果可知$\partial H^{-1}(\mathcal{O}) = \overline{G_0^{-1}(\mathcal{O})} \sqcup G_1^{-1}(\mathcal{O})$。

我们再简单说明一些这是保持运算的，几何直观上来看，Ω_m的加法就是做不交并，G的构造就是捏去无穷远点，则直观上可视为两个球面粘贴同一个无穷远点，这即同伦群中的加法。$\#\#$

> **注：** 我们上面的证明并不严格，细节可参考[Milnor]，最要紧的几何直观来自于如果两个流形配边，那么直观想象就是似乎"两流形之间连了一条道路"，这天生为构造的映射同伦埋下了伏笔。反过来同伦的映射根据正则子流形原像定理，也很容易可以实现成同伦H的原像的边界。一切都是如此的巧妙与浑然天成。

那么现在，我们所需要做的就是去计算Thom空间的有理系数同伦群了。在之前的讨论中我们已经看到其同调群已经借助Thom同构给出了完整的计算，那么我们很自然想将同伦群的计算转化为同调群的计算，那这必然会需要Thom空间具有很好的连通性（比如想想Hurwiecz定理的条件），而幸运的是，我们有：

性质12： 设定向向量丛$E \to X$秩为n，则有Thom空间$\mathrm{Th}(E)$是$(n-1)$连通的。

Proof： 我们只需说明$\mathrm{Th}(E)$没有n维以下的胞腔即可。设X有胞腔分解$\sqcup_{\alpha,k} e_\alpha^k$，则由$e_\alpha^k$可缩，则可知$E$限制在其上为平凡丛，进而有$D(E)|_{e_\alpha^k} \cong e_\alpha^k \times \mathbb{D}^n$，以及$S(E)|_{e_\alpha^k} \cong e_\alpha^k \times S^{n-1}$，也即这给出了$D(E)$上的一个胞腔分解，并且容易看到$D(E)/S(E)$就将低维胞腔全部商掉，只留下$n$维以上胞腔。$\square$

> **注**：举一个更加具体的例子，如$S^1\times\mathbb{D}^2/S^1\times S^1$，前者胞腔全体可记为$e_0\times e_0'$，$e_0\times e_1'$，$e_0\times e_2'$以及$e_1\times e_0'$，$e_1\times e_1'$，$e_1\times e_2'$，后者胞腔全体可记为$e_0\times e_0'$，$e_0\times e_1'$和$e_1\times e_0'$，$e_1\times e_1'$，从而商掉之后只剩下了一个零维胞腔以及$e_0\times e_2'$和$e_1\times e_2'$，均为高维胞腔，并且由此也可以读出这个空间同伦等价于$S^3\vee S^2$，因为两个胞腔都将边界粘在一点上。

我们再引用一个经典的同伦论结果：

定理13（Serre）：设X为有限CW复形且$k-1$连通，则对任何$r<2k-1$，我们有

$$\pi_r(X)\otimes\mathbb{Q}\cong H_r(X)\otimes\mathbb{Q}.$$

> **注**：这个的证明可以参考[Hatcher]以及[BottTu]，并且这个界$r<2k-1$是必要的，因为我们有如下球面有理同伦群的结果：
>
> $$\pi_r(S^n)\otimes\mathbb{Q}\cong\begin{cases}\mathbb{Q} & r=n,\\ \mathbb{Q} & r=2n-1\text{且}n\text{为偶数},\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

因此现在选取k充分大，比如$2k-1>m+k$，则有

$$\Omega_m\otimes\mathbb{Q}\cong\pi_{m+k}(\mathrm{Th}(\tilde\eta_{k,m+k}))\otimes\mathbb{Q}\cong H_{m+k}(\mathrm{Th}(\tilde\eta_{k,m+k}))\otimes\mathbb{Q}.$$

注意到$\mathbb{Q}$为域系数，则有泛系数定理以及之前关于Thom空间同调的讨论，我们有

$$\Omega_m\otimes\mathbb{Q}\cong H^m(\widetilde{G}(k,\mathbb{R}^{m+K}),\mathbb{Q}).$$

回忆在第9节中关于$BSO(n)$上同调环的计算，我们可知$\widetilde{G}(k,\mathbb{R}^{m+k})$的上同调环是由$\tilde\eta_{k,m+k}$的Pontrjagin类生成的，从而我们很快可以观察得到：

- 若$m\not\equiv 0\pmod 4$，则$H^m(\widetilde{G}(k,\mathbb{R}^{m+K}),\mathbb{Q})=0$，这是因为每个Pontrjagin类都是$4k$阶元素，对于非4倍维数的上同调群均为0，也即此时$\Omega_m\otimes\mathbb{Q}=0$；
- 若$m\equiv 0\pmod 4$，则可知上同调群由$p_I=p_{i_1}\cdots p_{i_l}$其中$i_1+\cdots+i_l=\dfrac{m}{4}$生成，那么为了完成证明，我们还需要说明$\mathbb{C}P^J=\mathbb{C}P^{2j_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{2j_l}$是一组基，为此我们只需要说明矩阵$(p_I(\mathbb{C}P^J))_{p(k)\times p(k)}$是非退化的即可，这是一个并不困难的线性代数，我们留作练习。

综上，我们完成了Thom定理的证明，也即计算完成了有理系数定向配边群。□

2.号差与Hirzebruch号差定理

定义14：对于$4k$维闭可定向流形M，我们定义其相交形式$Q_M:F^{2k}(M)\times F^{2k}(M)\to\mathbb{Z}$，这里$F^*(M)$为$H^*(M)$中的自由部分，则$Q_M$是一个对称整数矩阵，则设其在$\mathbb{R}$下的合同标准型为

$$\$\mathrm{diag}\left\{\underbrace{1,\cdots,1}_{p},\overbrace{-1,\cdots,-1}^{q}\right\},$$

则定义M的**号差（signature）**为$\sigma(M):=p-q$。

例子15：下面的例子都源自于简单的计算

- $S^2\times S^2$的相交形式为$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，从而划归为相抵标准形即为$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$（回忆这可以直接由变量替换：$2xy=(u+v)(u-v)=u^2-v^2$看出），从而$\sigma(S^2\times S^2)=0$；
- $\mathbb{C}P^{2n}$的相交形式为(1)，$\overline{\mathbb{C}P^{2n}}$的相交形式为$(-1)$，从而这也再次说明$\mathbb{C}P^{2n}$上不存在反定向的自同胚。

性质16：对于可定向闭流形M^{4m},N^{4n}，我们有

- $\sigma(M\sqcup N)=\sigma(M)+\sigma(N)$；

- $Q_{M\#N}=Q_M\oplus Q_N$，进而$\sigma(M\#N)=\sigma(M)+\sigma(N)$，这里需要$m=n$；
- $Q_{M\times N}=Q_M\otimes Q_N$，进而$\sigma(M\times N)=\sigma(M)\sigma(N)$。

Proof：我们只证明第三条性质，注意到由Kunneth公式可知

$$H^{2(m+n)}(M\times N)=\bigoplus_{k=0}^{\min\{4m,4n\}}H^k(M)\otimes H^{2(m+n)-k}(N),$$

注意到此时其有基$a_i\otimes b_{2m+2n-i}$，以及注意到运算满足

$$(a\otimes b)\smile(a'\otimes b')=(a\smile a')\otimes(b\smile b'),$$

从而不难得到上式。□

一个十分有启发性的命题是：

命题17：设M^{4k}为W^{4k+1}的边界，则$\sigma(M)=0$。

Proof：我们考虑(W,M)，则由$\mathbb{R}$系数的上下同调群长正合列，我们有如下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
H^{2k}(W,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^{2k}(W) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{2k}(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cong"] & H^{2k+1}(W,M) \arrow[d, "\cong"] \\
H_{2k+1}(W) \arrow[r] & H_{2k+1}(W,M) \arrow[r] & H_{2k}(M) \arrow[r, "i_*"] & H_{2k}(W)
\end{tikzcd}$$

其中纵向均有Poincare-Lefschetz对偶给出同构，并且注意到如下信息：

- i^*与i_*互为对偶映射；
- $\mathrm{Im}\ i^*=\ker\ \delta$；
- $\mathrm{rank}\ \delta=\mathrm{rank}\ i_*$ 。

从而我们由$\mathrm{rank}\ \delta+\dim\ker\ \delta=\dim H^{2k}(M)$，代入上面三行，即得

$$\dim H^{2k}(M)=\mathrm{rank}\ i_*+\dim\mathrm{Im}\ i^*=2\mathrm{rank}\ i^*,$$

其中最后一个等号源自于互为对偶映射的性质。

> **注：**从这也可看出b_{2k}一定为偶数，进而$\chi(M)$也为偶数。不过单纯后面这一点也能从将两份W沿着边界M粘贴结合奇数维流形欧拉示性数为0得到。

现在注意到对任意$\alpha,\beta\in H^{2k}(W)$，有

$$\langle i^*(\alpha)\smile i^*(\beta),[W]\rangle=\langle\alpha\smile\beta,i_*[M]\rangle=0,$$

从而我们可知现在我们有如下线性代数信息：在$V=H^{2k}(M)$上，有双线性型$Q=\smile:V\times V\to\mathbb{R}$非退化且对称，且存在线性子空间$U=\mathrm{Im}\ i^*$，使得$\dim V=2\dim U$，且$Q|_U\equiv0$，下面想说明$\sigma(M)=\sigma(Q)$为零。

这是一个纯粹的线性代数问题，熟知可以找到基$\{e_1,\cdots,e_l,f_1,\cdots,f_l\}$使得$U=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_l\}$，并且满足$Q(e_i,f_j)=\delta_{ij}$，进而可知在这组基下有

$$Q\overset{\text{合同}}{\sim}\begin{pmatrix}O&I\\I&B\end{pmatrix}\overset{\text{合同}}{\sim}\begin{pmatrix}O&I\\I&O\end{pmatrix}\overset{\text{合同}}{\sim}\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}\overset{\text{合同}}{\sim}\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\},$$

从而可知$\sigma(M)=\sigma(Q)=0$，即证。□

上一命题实际上也直接告诉我们：

定理18： $\sigma : \Omega_{4k} \to \mathbb{Z}$为良定义的群同态。

现在我们可以来陈述Hirzebruch号差定理了，注意到σ也可看成是线性空间$\Omega_{4k} \otimes \mathbb{Q}$到$\mathbb{Q}$上的线性函数，从而$\sigma$可以由$\Omega_{4k} \otimes \mathbb{Q}$上的基所表示，也即Pontrjagin类的多项式。

例子19： 我们来确定4维流形上的计算结果，注意到$\Omega_4 \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\mathbb{C}P^2\}$，从而由上述观察可知$\sigma(M^4) = a\langle p_1(TM), [M]\rangle = a \cdot p_1(M)$，为确定$a$，我们注意到

$$\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1, \quad p_1(\mathbb{C}P^2) = \binom{2+1}{1} = 3,$$

故可知$a = \dfrac{1}{3}$，进而对全体闭可定向四维流形，我们有

$$\boxed{\sigma(M^4) = \langle \frac{1}{3} p_1(TM^4), [M^4]\rangle = \frac{1}{3} p_1(M^4).}$$

> **注：** 在de Rham同调版本下，则可写为$\sigma(M^4) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{M^4} p_1(M)$，我们简记为$\sigma = \dfrac{1}{3}p_1$。

例子20： 我们再来确定8为流形上的计算结果，注意到$\Omega_8 \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\mathbb{C}P^4, \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2\}$，进一步继续由上述观察，我们可待定系数设$\sigma = xp_1^2 + yp_2$。又由

$$\sigma(\mathbb{C}P^4) = 1, \quad p_1^2(\mathbb{C}P^4) = \binom{5}{1}^2 = 25, \quad p_2(\mathbb{C}P^4) = \binom{5}{2} = 10.$$

以及$\sigma(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2) = \sigma(\mathbb{C}P^2)\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$，注意到$p(\mathbb{C}P^2) = 1 + 3a$，从而可知$p(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2) = (1+3a)(1+3b)$，也即有$p_1^2(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2) = 18$，$p_2(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2) = 9$，综上我们有

$$25x + 10y = 1, \quad 18x + 9y = 1,$$

进而可知$x = -\dfrac{1}{45}$，以及$y = \dfrac{7}{45}$，也即对全体闭可定向八维流形，我们有

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2).}$$

如此递推下去即可得到所有$4k$维流形的号差公式，但更一般的，我们借助函数$\dfrac{z}{\tanh z}$，我们可以得到如下一个统一的Hirzebruch号差定理：

定理21：（Hirzebruch号差定理）： 设M为闭可定向$4k$维流形，则我们有

$$\sigma(M) = \langle L_k(p_1, \cdots, p_k), [M]\rangle,$$

这里有：

- $L_1 = \dfrac{1}{3}p_1$;
- $L_2 = \dfrac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$;
- $L_3 = \dfrac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)$;
- $L_4 = \dfrac{1}{14175}(381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4)$;
- $\cdots$

> **注：** 我们现在给出L_k更具体的解释 to be continued

3.Milnor七维怪球

本节的目标是构造一个同胚于S^7但不微分同胚的例子，直观构造就是借助S^4上的一个S^3球面丛。为此，我们需要先重新认识一下S^4上秩为4的实向量丛。

熟知

$$\mathrm{Vect}^4(S^4) = [S^3, \mathrm{SO}(4)] = \pi_3(\mathrm{SO}(4)),$$

而又由$\mathrm{SO}(4)$有二叶覆叠$\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$，进而可知

$$\mathrm{Vect}^4(S^4) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

下面我们就用$E_{a,b}$表示$(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$所对应的向量丛。一个很重要的命题是：

性质22：我们有$\boxed{p_1(E_{a,b}) = 2(a+b)}$，$\boxed{e(E_{a,b}) = a-b}$。

> **注**：上述性质的一个很快推论是注意到此时$a = \frac{1}{2}e(E_{a,b}) + \frac{1}{4}p_1(E_{a,b})$，$b = -\frac{1}{2}e(E_{a,b}) + \frac{1}{4}p_1(E_{a,b})$，从而可知$S^4$上的秩为4的实向量丛完全由Pontrjagin数与Euler数决定。

Proof：我们先陈述关于$E_{a,b}$的一些基本性质：

- $E_{a,b} \oplus E_{a',b'} \cong E_{a+a',b+b'} \oplus \underline{\mathbb{R}^4}$。

为了说明同构，无非就是论证两者的转移函数是同伦的，现在设$E_{a,b}$的转移函数为$g_{a,b}: S^3 \to \mathrm{SO}(4)$，另外一个的转移函数为$g_{a',b'}$，从而$E_{a,b} \oplus E_{a',b'}$的转移函数可视为

$$G_0 := \begin{pmatrix} g_{a,b} & O \\ O & g_{a',b'} \end{pmatrix}: S^3 \to \mathrm{SO}(8),$$

而对$E_{a+a',b+b'}$而言，我们断言其转移函数是$g_{a,b}g_{a',b'}: S^3 \to \mathrm{SO}(4)$，这里就是标准的矩阵乘法。简单而言就是在同伦群$[S^3, \mathrm{SO}(4)]$中，$S^3$为上H空间，$\mathrm{SO}(4)$为H空间，从而可以在这个集合上定义两种乘法运算，根据经典同伦论的结果我们知道这两种运算得到的映射是同伦的。特别的在上述情形中，$E_{a+a',b+b'}$这里对应的转移函数本来是源自于同伦群加法，因此现在可以同伦到矩阵乘法的映射了。

因此我们有$E_{a+a',b+b'}$的转移函数可视为

$$G_1 := \begin{pmatrix} g_{a,b}g_{a',b'} & O \\ O & I \end{pmatrix}: S^3 \to \mathrm{SO}(8),$$

现在我们只需要说明G_0和G_1同伦即可，注意到我们有

$$\boxed{\begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -g_{a,b} \\ O & I \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} g_{a,b}g_{a',b'} & O \\ O & I \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} I & O \\ g & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & g_{a,b}^{-1} \\ O & I \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} g_{a,b} & O \\ O & g_{a',b'} \end{pmatrix},$$

从而我们可以构造同伦映射

$$H: S^3 \times [0,1] \to \mathrm{SO}(8), \quad H_t := \begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -tg_{a,b} \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{a,b}g_{a',b'} & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ g & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & tg_{a,b}^{-1} \\ O & I \end{pmatrix},$$

从而我们即说明了两个丛的同构性。

- $E_{a,b}$与$E_{b,a}$之间存在反定向的同构。

我们现在再对转移函数给出一个更清晰的认识，设$f_a : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$为映射度为$a$的映射，同理$f_b$，则现在对$g_{a,b} : S^3 \to \mathrm{SO}(4) = \mathrm{SO}(\mathbb{H})$，我们可以用如下四元数乘法所表示：

$$g_{a,b} : x \mapsto \Big(\alpha \mapsto f_a(x)\alpha\overline{f_b(x)}\Big),$$

这里我们把$\mathrm{SU}(2)$中的元素视为单位四元数，则现在注意到对于共轭映射，我们有

$$\overline{f_a(x)\alpha\overline{f_b(x)}} = f_b(x)\overline{\alpha}\,\overline{f_a(x)},$$

注意到共轭是反定向的操作，因此可知我们有$E_{a,b}$与$E_{b,a}$是反定向同构的。

¶现在我们可以开始正式证明命题了，注意到由第一个小结论，可知p_1, e都可以看成是$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$到$\mathbb{Z}$的双线性映射，又由Pontrjagin类与定向无关，从而可知$p_1(E_{a,b}) = c(a+b)$，而反定向的丛具有相反的Euler数，故可知$e(E_{a,b}) = d(a-b)$，因此我们只需要选取一个例子计算即可。

我们考虑$E_{1,0}$，从而具体写下就是$S^3 \to \mathrm{SU}(2)$，也即在$\mathbb{C}^2$上的标准作用，从而可知$c_2(E_{1,0}) = 1$，进而可知$c = -2, d = 1$，综上我们完成了证明。$\square$

现在：我们考虑$E_{a,b}$的圆盘丛$D(E_{a,b})$则这是一个8维带边流形，且具有边界$S(E_{a,b})$，这是一个7维无边流形，我们首先说明其不会微分同胚于S^7：

反证法，若不然，则可以根据同胚，我们在$\partial D(E_{a,b})$沿着光滑同胚粘贴上一个$\mathbb{D}^8$，也即考虑流形

$$M_{a,b} = D(E_{a,b}) \cup_{S^7} \mathbb{D}^8.$$

也即我们得到了一个8维无边流形$M_{a,b}$，注意到粘贴了一个高维胞腔，不影响低维同调群，故有

$$H^4(M_{a,b}) = H^4(D(E_{a,b})) = H^4(S^4) \cong \mathbb{Z},$$

其中第二个等号源自于同伦等价。因此$M_{a,b}$的相交形式只有1个元素，也即$\sigma(M_{a,b}) = \pm 1$或0。

注意到$M_{a,b}$的切丛限制在$\mathbb{D}^8$上是平凡的，因此可知

$$p_1(M_{a,b}) = p_1(TD(E_{a,b})) = p_1(TE_{a,b}),$$

而对$E_{a,b} \xrightarrow{\pi} S^4$，则$TE_{a,b} = \pi^*E_{a,b} \oplus \pi^*TS^4$，又$TS^4$是稳定平凡的，从而可知

$$p_1(M_{a,b}) = p_1(E_{a,b}) = 2(a+b)$$

从而由Hirzebruch号差定理，可知

$$45\sigma(M_{a,b}) = 7p_2 - p_1^2,$$

从而可知$7 | \pm 45 + 4(a+b)^2$或$7 | 4(a+b)^2$，选取$a = b = 1$，可知不可能。

综上，我们说明了$S(E_{1,1})$是不微分同胚于S^7的。

下面我们只需要证明其同胚于S^7即可，事实上我们对全体a, b都可以证明，Milnor的想法是直接构造只有两个临界点的Morse函数，则有Reeb定理即知命题成立，我们这里略去细节。