向量丛和示性类7—Euler类

向量丛和示性类7—Euler类

- 1.Thom同构与Euler类
- 2.上同调运算与SW类等价定义
- 3.Gysin序列与Chern类的等价定义
- 4.Thom类、Euler类与Poincare对偶
- 5.Euler类作为障碍
- 习题

1.Thom同构与Euler类

我们现在来定义第三种示性类——Euler类，其是针对可定向的实向量丛而言的。

在阐述Euler类的定义之前，我们需要如下的**Thom同构定理**，首先回忆如下基本的重要事实：

$$H^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})=\begin{cases}\mathbb{Z} & k=n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

从而由Kunneth公式，对任何拓扑空间B，我们有

$$\begin{aligned}&H^*(B\times\mathbb{R}^n,B\times(\mathbb{R}^n-\{0\}))\\ \cong\ &H^*(B\times(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\}))\\ \cong\ &H^*(B)\otimes H^*(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})\\ \cong\ &H^*(B),\end{aligned}$$

其中最后一个是作为群同构，不保持分次，具体写出就是$b\otimes u\mapsto b$，这里u为$H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})$的生成元。

以上实际上是一般Thom同构定理的特殊情形，下面我们来陈述真正的Thom同构定理：

定理1（Thom同构定理）：设$E\xrightarrow{\pi}B$为秩为n的定向实向量丛，且$E_0=E-$零截面，从而我们有

① 存在唯一的$u\in H^n(E,E_0)$使得对限制映射：$i_x^*:H^n(E,E_0)\to H^n(E_x,E_{0,x})\cong\mathbb{Z}$，我们有$i_x^*(u)$为后者中的自然生成元（标准定向对应的），其中后者同构于$\mathbb{Z}$是利用了其等于$H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})$；

② 我们有同构$H^i(B)\xrightarrow{\cong}H^{i+n}(E,E_0)$，$\alpha\mapsto\pi^*\alpha\smile u$，且称$u$为向量丛$E$的**Thom类**。

Proof：证明的关键是利用MV方法与归纳法，我们先证明B具有finite type的情形，最后在注记中给出一些一般情形证明的补充论述。

我们先来看①的证明，设$\{U_i\}$是B的一组good cover，且是E的一组局部平凡化，从而很明显①对全体的

$$H^n(E|_{U_i},E_0|_{U_i})$$

均成立，因为这由Kunneth公式保证，或者更精准的，由上一段的论述中得到。现在我们假设这对U_1,U_2以及$U_1\cap U_2$均成立，从而我们考虑$(E|_{U_1\cup U_2},E|_{U_1},E|_{U_2})$的MV序列：

$$\begin{aligned}0=H^{n-1}(E|_{U_1\cap U_2},E_0|_{U_1\cap U_2})&\to H^n(E|_{U_1\cup U_2},E_0|_{U_1\cup U_2})\\ &\to H^n(E|_{U_1},E_0|_{U_1})\oplus H^n(E|_{U_1},E_0|_{U_2})\\ &\to H^n(E|_{U_1\cap U_2},E_0|_{U_1\cap U_2})\to H^{n+1}(\cdots)\to\cdots,\end{aligned}$$

现在我们想要说明存在唯一的$u_{U_1\cup U_2}$，注意到由归纳假设，存在唯一的$u_1\in H^n(E|_{U_1},E_0|_{U_1})$以及唯一的$u_2\in H^n(E|_{U_2},E_0|_{U_2})$，而在MV序列中，$(u_1,u_2)$的像为$u_1-u_2$，而注意到$u_1$和$u_2$由归纳假设可知，限制在$U_1\cap U_2$上均为$H^n(E|_{U_1\cap U_2},E_0|_{U_1\cap U_2})$的Thom类，从而可知$u_1-u_2$在$H^n(E|_{U_1\cap U_2},E_0|_{U_1\cap U_2})$中为$0$，因此我们由正合性存在唯一的$u_{U_1\cup U_2}\in H^n(E|_{U_1\cup U_2},E_0|_{U_1\cup U_2})$粘贴起了$u_1$和$u_2$，因此我们论证了在$U_1\cup U_2$上的存在唯一性，进而由归纳原理，可知①成立，即证。

我们再来看②的证明，这也是MV方法的直接应用，对平凡丛由Kunneth公式可知成立，从而我们有经典的如下MV序列自然性图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{i-1}(U_1)\oplus H^{i-1}(U_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi^*\cdot\smile u_{U_1},\pi^*\cdot\smile u_{U_2})"'] & H^{i-1}(U_1\cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*\cdot\smile u_{U_1\cap U_2}"'] & H^i(U_1\cup U_2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*\cdot\smile u_{U_1\cup U_2}"'] & H^i(U_1)\oplus H^i(U_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi^*\cdot\smile u_{U_1},\pi^*\cdot\smile u_{U_2})"'] & H^i(U_1\cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*\cdot\smile u_{U_1\cap U_2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{i-1+n}(E|_{U_1})\oplus H^{i-1+n}(E|_{U_2}) \arrow[r] & H^{i-1+n}(E|_{U_1\cap U_2}) \arrow[r] & H^{i-1+n}(E|_{U_1\cup U_2}) \arrow[r] & H^{i+n}(E|_{U_1})\oplus H^{i+n}(E|_{U_2}) \arrow[r] & H^{i+n}(E|_{U_1\cap U_2}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

这里u_V表示Thom类$u\in H^n(E,E_0)$在$H^n(E|_V,E_0|_V)$上的限制，由唯一性，也即是其上的Thom类，从而可以利用MV方法继续归纳下去，从而我们可以证明$\pi^*\cdot\smile u$为同构，综上我们完成了定理证明。□

> **注：** 我们上面的证明只对finite type成立，而对一般的情形，我们回忆同调代数中关于极限的结果，有对$Y_i\subseteq X$均紧，且$\varinjlim Y_i=X$，
>
> - 设R为环，则
>
> $$H_k(X;R)=\varinjlim H_k(Y_i;R);$$
>
> - 设F为域则我们有
>
> $$H_k(X;F)=\varinjlim H_k(Y_i;F);$$
>
> 以及同时取对偶，此时由UCT可知不存在挠部分，因此
>
> $$H^k(X;F)=\varinjlim H^k(Y_i;F);$$
>
> - 对于一般的$\mathbb{Z}$系数，我们有短正合列
>
> $$0\to\varprojlim{}^1 H^{k-1}(Y_i;\mathbb{Z})\to H^k(X;\mathbb{Z})\to\varprojlim H^k(Y_i;\mathbb{Z})\to 0.$$
>
> 幸运的是，在我们关心的情形中，H^{k-1}总是为0，这是因为$H^{k-1}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k_0)=0$，因此我们确实可以不含糊的证明一般情形的Thom同构定理。

现在我们借助Thom类定义Euler类，这个定义常用且重要：

定义2（Euler类）： 设$E\to X$为定向实$k-$向量丛，则我们有如下图表：

$$H^0(X)\overset{\cong}{\to}H^k(E,E_0)\overset{j^*}{\to}H^k(E)\overset{\cong}{\to}H^k(X),$$

其中第一个同构源自于Thom同构，第二个映射为自然的嵌入映射，也即在$C_k(E_0)$上为零的$C_k(E)$上函数可以自然看成是$C_k(E)$上函数，第三个同构源自于同伦等价给出的，从而现在考虑

$$1\mapsto u\mapsto u'\mapsto e(E),$$

从而对于在这三个映射复合下的像称为**Euler类**。

性质3（Euler类的自然性） 设E为定向向量丛，$f:Y\to X$，则有$e(f^*E)=f^*(e(E))$。

Proof: 利用Euler类定义中的映射都是自然的，其中Thom同构的自然性源自于显式的表达，也即对$F:f^*E\to E$，有f^*E的Thom类为F^*u，从而自然性源自于$\pi\circ F=f\circ\pi$，即证。□

性质4（Euler类反映了整体截面存在的障碍）若E存在一个处处非零截面$s: X \to E$，则有$e(E)=0$。

Proof：注意到因为s处处非零，从而$s: X \to E_0$，进而我们有：

$$B \xrightarrow{s} E_0 \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B,$$

复合映射为恒同映射，则在上同调上：

$$H^k(B) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E) \xrightarrow{i^*} H^k(E_0) \xrightarrow{s^*} H^k(B),$$

也为恒同映射，注意到对$e(E) \in H^k(B)$，我们有$\pi^* e(E) \in H^k(E)$即为$j^* u$，因为π^*即为Euler类定义第三个同构的逆映射，又在相对同调群的长正合列中

$$H^k(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^k(E) \xrightarrow{i^*} H^k(E_0),$$

从而可知$i^* \pi^* e(E) = i^* j^* u = 0$，因此自然

$$e(E) = s^* i^* \pi^* e(E) = s^* i^* j^* u = 0,$$

即证Euler类为0。□

性质5（乘积公式）我们有$e(G \times H) = e(G) \times e(H)$，以及特别的$e(E \oplus F) = e(E) \smile e(F)$。

Proof：由Kunneth公式，以及$(G \times H)_0 = G_0 \times H \cup H \times G_0 = (G, G_0) \times (H, H_0)$，从而我们有Thom类满足关系$u_{G \times H} = u_G \times u_H$，这是由唯一性所保证的。从而由自然性就很容易得到$e(G \times H) = e(G) \times e(H)$，现在再利用$E \oplus F$可看作$E \times F$在对角映射的拉回，以及cup积的定义也是源自叉乘在对角映射的拉回，因此可以很快得到直和的版本。□

> **注：**有了性质5，性质4其实是一个很快的推论，因为利用平凡丛的Euler类为0，从而设$E = \underline{\mathbb{R}} \oplus F$，则$e(E) = e(\underline{\mathbb{R}}) \smile e(F) = 0$，即证。

性质6（反定向）设E^-为E的反定向向量丛，则$e(E^-) = -e(E)$。

Proof：如果反定向，则表现在上同调水平，也即每个纤维上的生成元相差负号，从而由Thom类限制在每个纤维上均为生成元，从而也会对应相差一个负号，因此自然得到Euler类相差一个负号。□

性质7：设E为奇数维向量丛，则有$2e(E)=0$。

Proof：注意到对丛同构$E \to E$，$v \to -v$，此时由于逐纤维映射为$-I_n$，则$\det(-I_n) = -1$，可知这是反定向的同构，因此给出了$E \to E^-$的保定向同构，因此有$e(E) = e(E^-)$，结合性质6即证。□

Proof'：我们给出另一种证明，注意到$e(E) \in H^k(B)$，则由Thom同构，其可视为$H^{2k}(E, E_0)$中的元素

$$\pi^* e(E) \smile u,$$

注意到$\pi^* e(E) = j^* u \in H^k(E)$，从而可知其也即$(j^* u) \smile u = u \smile u$，因此设Thom同构为$T: H^i(B) \to H^{i+k}(E, E_0)$，则有

$$\boxed{e(E) = T^{-1}(u \smile u),}$$

从而注意到$u \smile u = (-1)^{k^2} u \smile u$，因此在$k$为奇数时，$e(E)$为2阶元。□

性质8（Euler类是最高阶Chern类）设E为秩为k的复向量丛，也即秩为$2k$的实可定向的向量丛，则有$e(E) = c_k(E)$。

Proof： 由分列原则，我们只需对线丛直和证明即可，又有万有丛的自然性可知只需对$\mathbb{C}P^\infty$上的典范线丛η证明即可，而又利用典范的嵌入$\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$，我们只需证明$\mathbb{C}P^1$上典范线丛$\eta$上成立即可。此时对$H^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}[h]$，回忆有定义$c_1(\eta) = -h$。

性质9（Euler类 $\pmod 2$为最高阶SW类） 设E为秩为k的定向实向量丛，则有$e(E) \pmod 2 = w_k(E)$。

Proof： 我们不加证明的先陈述如下Steenrod平方运算的存在性，并给出SW类在Thom同构以及Steenrod平方运算下的等价定义：

> 我们下面均考虑 $\bmod 2$系数，对任意空间偶(X, Y)，以及非负整数n, i，存在加法同态
>
> $$\mathrm{Sq}^i : H^n(X, Y) \to H^{n+i}(X, Y)$$
>
> 满足如下公理条件：
>
> **（S1）** 对任意空间偶映射$f : (X, Y) \to (X', Y')$，我们有自然性
>
> $$\boxed{\mathrm{Sq}^i \circ f^* = f^* \circ \mathrm{Sq}^i, \quad \forall i.}$$
>
> **（S2）** 设$a \in H^n(X, Y)$，则有$\mathrm{Sq}^0(a) = a$，$\mathrm{Sq}^n(a) = a \smile a$，且当$m > n$时，$\mathrm{Sq}^m(a) = 0.$
>
> **（S3）** 我们有Cartan公式：
>
> $$\boxed{\mathrm{Sq}^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} \mathrm{Sq}^i(a) \smile \mathrm{Sq}^j(b).}$$
>
> 从而现在对Thom同构（注意到E总是$\mathbb{Z}_2$可定向的），我们定义E的SW类为
>
> $$w_i(E) := T^{-1} \circ \mathrm{Sq}^i \circ T(1), \quad 1 \in H^0(B).$$
>
> 至于Steenrod平方运算的存在性以及SW类定义的等价性，我们这里略去。

从而现在我们注意到$w_k(E) = T^{-1} \circ \mathrm{Sq}^k(u) = T^{-1}(u \smile u) = e(E) \pmod 2$，即证。□

2.上同调运算与SW类等价定义

在这一小节中，我们先讨论并定义一般的上同调运算，并公理化定义Steenrod平方运算，在此基础上重新给出SW类的定义（这也是Milnor书中本来的定义），并验证这与之前我们用分裂原则所定义的是相同的（这只需验证新定义出的SW类也满足四条公理即可）。

定义10（上同调运算）： 对任意环R, R'以及整数k, l，我们考虑Top范畴到Set范畴的反变函子

$$H^k(\quad; R), \quad H^l(\quad; R'),$$

我们称这两个函子间的自然变换$f^{k,l}$为一个上同调运算。

换言之对任意$X, Y \in$ Top，存在态射$f_X^{k,l} : H^k(X; R) \to H^l(X; R')$和$f_Y^{k,l} : H^k(Y; R) \to H^l(Y; R')$，使得对任何$g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, Y)$以及$g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(H^k(Y; R), H^k(X; R))$，$g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(H^l(Y; R), H^l(X; R))$，使得$g^* \circ f_Y^{k,l} = f_X^{k,l} \circ g^*$。

> **注：** 直观的去想，一个上同调运算无非就是一个满足自然性的映射，把从一个上同调打到另外一个上同调，需要强调的是，这里并不要求$f_X^{k,l}$是群同态，仅仅只要求是一个集合层面上的映射。

我们快速来看几个例子：

例子11： 对于经典的 $\mod 2$映射，$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其会诱导自然的群同态 $H^k(X;\mathbb{Z}) \to H^k(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，不难验证自然性，从而这就给出了一个上同调运算。

例子12： 我们来举一些，不满足群同态但十分自然且经常使用的上同调运算之例子，如我们有

$$H^k(X;R) \to H^{2k}(X;R), \quad \alpha \mapsto \alpha \smile \alpha,$$

以及平凡推广

$$H^k(X;R) \to H^{mk}(X;R), \quad \alpha \mapsto \alpha^m,$$

很显然由cup积的自然性可知这些都是上同调运算，但显然不保持加法。

¶现在，在我们正式定义Steenrod平方运算之前，再多说一点关于上同调运算的事。直观想来，似乎上同调运算无穷无尽，可以随便定义，但事实并非如此。

熟知$H^k(X;G) = \langle X, K(G,k)\rangle$，从而任何一个连续映射$f : K(G,k) \to K(G',l)$都能诱导出一个自然的$f_* : \langle X, K(G,k)\rangle \to \langle X, K(G',l)\rangle$，进而诱导出一个集合映射 $f_X^{k,l} : H^k(X;G) \to H^l(X;G')$，换言之每一个EM空间之间的连续映射都可以诱导出一个上同调运算。

反之，我们回忆范畴论中的Yoneda引理，对任何函子间的自然变换$F : \mathrm{Hom}(\quad, a) \to \mathrm{Hom}(\quad, b)$，总能找到一个$f : a \to b$诱导出$F$，因此我们将此引理套用在上一段论述中，我们可以自然得到反方向的命题，也即任给一个上同调运算，我们可以将其实现为某个EM空间之间连续映射所诱导的。这里更微妙的，我们用了$H^k(\quad;G)$是一个可表函子，也即可实现成**Top**上的$\mathrm{Hom}(\quad, Y)$，也即$\langle \quad, Y\rangle$。

再结合显然同伦映射决定的是相同的上同调运算，因此我们实际上有

$$\begin{aligned}\{H^k(;G)\text{到}H^l(;G')\text{的上同调运算}\} &\cong \langle K(G,k), K(G',l)\rangle \\ &\cong H^l(K(G,k);G').\end{aligned}$$

因此我们给出了一个上同调运算的完全刻画。

更有趣的是由Hurwiecz定理，当$0 < l < k$时，$H^l(K(G,k);G') = 0$，因此可知：所用向低维数映射的上同调运算都是平凡的，换言之有趣的上同调运算只会出现在增加维数的情形，比如我们接下来定义的Steenrod平方运算。¶

定义12（Steenrod平方运算）： 我们下面均考虑 $\mod 2$系数，对任意空间偶(X,Y)，以及非负整数n, i，存在加法同态

$$\mathrm{Sq}^i : H^n(X,Y) \to H^{n+i}(X,Y)$$

满足如下公理条件：

(S1) 对任意空间偶映射$f : (X,Y) \to (X',Y')$，我们有自然性

$$\boxed{\mathrm{Sq}^i \circ f^* = f^* \circ \mathrm{Sq}^i, \quad \forall i.}$$

(S2) 设$a \in H^n(X,Y)$，则有$\mathrm{Sq}^0(a) = a$，$\mathrm{Sq}^n(a) = a \smile a$，且当$m > n$时，$\mathrm{Sq}^m(a) = 0.$

(S3) 我们有Cartan公式：

$$\boxed{\mathrm{Sq}^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} \mathrm{Sq}^i(a) \smile \mathrm{Sq}^j(b).}$$

实际上若对$a \in H^k(X,Y)$，则我们有定义：

$$\mathrm{Sq}(a) = a + \mathrm{Sq}^1(a) + \cdots + \mathrm{Sq}^k(a).$$

从而现在对Thom同构（注意到E总是$\mathbb{Z}_2$可定向的），我们定义E的SW类为

$$w_i(E) := T^{-1}\circ \mathrm{Sq}^i \circ T(1), \quad 1\in H^0(B),$$

也即有对Thom类$u=T(1)$，SW类满足$\mathrm{Sq}^i(u)=T(w_i(E))=\pi^* w_i(E)\smile u$，这里$\mathrm{Sq}^i: H^*(E,E_0)\to H^{*+i}(E,E_0)$。

至于这么定义的SW类为什么满足公理，这些都是一些几乎平凡的追图，我们留给读者去自阅Milnor的8.1节。

再进一步讨论之前，我们给出一个Steenrod平方运算一个不算平凡的运用：

应用13： $\Sigma\mathbb{C}P^2$与$S^3\vee S^5$不同伦等价。

Proof： 注意到熟知$\widetilde{H}^q(\Sigma X)\cong \widetilde{H}^{q-1}(X)$，并且设同构可由$\sigma:\widetilde{H}^{q-1}(X)\to \widetilde{H}^q(\Sigma X)$给出，设$H^2(\mathbb{C}P^2)$的生成元为$a$，则可知$H^3(\Sigma\mathbb{C}P^2)$生成元为$\sigma(a)$，$H^5(\Sigma\mathbb{C}P^2)$生成元为$\sigma(a^2)$，注意到唯一可能非平凡的乘法结构为$\sigma(a)\smile\sigma(a)$，但这落在$H^6$中，从而为$0$，也即$\Sigma\mathbb{C}P^2$上的上同调环的乘法结构和$S^3\vee S^5$一样均是平凡的。

因此不难看出，仅仅利用基本群，同调群以及上同调环，无法区分两者，而且同伦群也不是那么容易算出，因此现在我们借助Steenrod平方运算，注意到Sq的自然性，我们有$\mathrm{Sq}^2\circ\sigma(a)=\sigma\circ\mathrm{Sq}^2(a)=\sigma(a^2)$，从而可知在$H^*(\Sigma\mathbb{C}P^2)$上，Steenrod平方运算不太平凡。但现在考虑$i: S^5\to S^3\vee S^5$，设$H^3$生成元为$x$，从而

$$i^*\mathrm{Sq}^2(x)=\mathrm{Sq}^2(i^*x)=0,$$

因为i^*x落在$H^3(S^5)=0$中，而i^*在H^5层面诱导了同构，因此$\mathrm{Sq}^2(x)=0$，这说明两个拓扑空间之间的Steenrod平方运算不相同。□

3.Gysin序列与Chern类的等价定义

我们现在从Thom同构导出另外一个十分有趣且重要的结果：Gysin序列。

我们首先考虑(E,E_0)的上同调群长正合列，则有

$$\cdots\to H^i(E,E_0)\to H^i(E)\to H^i(E_0)\to\cdots,$$

设其秩为k，则由Thom同构定理，可知$H^i(E,E_0)\cong H^{i-k}(X)$，由同伦等价，有$H^i(E)\cong H^i(X)$，且可由$s_0: X\to E$作为零截面嵌入给出同构$s_0^*: H^i(E)\to H^i(X)$，从而我们现在有

$$H^{i-k}(X)\to H^i(E,E_0)\to H^i(E)\to H^i(X), \quad (\text{映射复合，不是正合列})$$

回忆Euler类的定义可知，上述映射正是$\alpha\mapsto\alpha\smile e(E)$，从而我们代入上述长正合列，便得到了如下Gysin序列：

定理14（Gysin序列）： 设E为秩为k的定向实向量丛，则我们有如下的长正合列：

$$\cdots\to H^{i-k}(X)\overset{\cdot\smile e(E)}{\to} H^i(X)\overset{\pi_0^*}{\to} H^i(E_0)\to\cdots,$$

其中$\pi_0: E_0\to X$为自然的投影映射。

> **注：** 显然的，我们定义球面丛$S(E)=\{v\in E: |v|=1\}$，则$S(E)$同伦等价于E_0，因此我们也有球面丛版本的Gysin序列：
>
> $$\cdots\to H^{i-k}(X)\overset{\cdot\smile e(E)}{\to} H^i(X)\overset{\pi_0^*}{\to} H^i(S(E))\to\cdots.$$

现在，我们试着重新给出Chern类的定义：

对秩为k的复向量丛E，我们定义

$$c_k'(E)=e(E),$$

下面想去定义$c_{k-1}'(E)$，并在此基础上归纳的定义下去，注意到我们可以考虑如下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\pi_0^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
E_0 \arrow[r, "\pi_0"'] & X
\end{tikzcd}$$

注意到，$\pi_0^*E=\{(p,v,u):p\in X,v\in E_{x,0},u\in E_x\}$，从而可以选取$s:E_0\to\pi_0^*E$，$(p,u)\mapsto(p,u,u)$，显然这是一个处处非零的截面，因此有$F$使得

$$E=\underline{\mathbb{C}}\oplus F,$$

因此我们可以定义：$c_{k-1}'(\pi_0^*E):=c_{k-1}'(F)=e(F)$，注意到由Gysin序列：

$$\cdots\to H^{i-2k}(X)\to H^i(X)\to H^i(E_0)\to H^{i-2k+1}(X)\to\cdots,$$

从而当$i\leq 2k-2$时，$\pi_0^*:H^i(X)\to H^i(E_0)$为同构，因此我们可以定义：

$$c_{k-1}'(E):=(\pi_0^*)^{-1}e(F).$$

因此现在我们可以进一步向下去定义低阶的chern类了，至于其为什么和我们原本的定义相容，这也是一些验证公理的繁琐追图，瓤子里的锤子榔头工具齐全，留给读者自行验证。

4.Thom类、Euler类与Poincare对偶

奇异同调本身是组合定义，缺少许多几何动机，因此在这一小节中，我们将从子流形的角度出发去理解示性类，并反过来证明某些维数同调类可以被子流形表示。

设X,Y为光滑流形，Z为Y的正则子流形，且$f:X\to Y$与Z横截相交，则我们有$f^{-1}Z$为X的正则子流形，且

$$\operatorname{codim}_X f^{-1}Z=\operatorname{codim}_Y Z,$$

设$W=f^{-1}Z$，则我们有$f(W)\subseteq Z$，从而任意$p\in W$，$f_{*,p}T_pW\subseteq T_{f(p)}Z$，现在考虑法丛分解

$$T_pX=T_pW+N_pW,\quad T_qY=T_qZ+N_qZ,\quad q=f(p).$$

注意到$f_*T_pX+T_qZ=T_qY$，从而$f_*T_pW+f_*N_pW+T_qZ=T_qZ+N_qZ$，进而也即

$$f_*N_pW+T_qZ=T_qZ+N_qZ,$$

因此可知$f_*:N_pW\to N_qZ$为同构，也即我们有

$$\boxed{NW=(f|_W)^*NZ.}$$

现在设$\dim Z=k$，$\dim Y=k+l$，回忆如下经典图表：

$$H^0(Z)\to H^l(NZ,NZ-Z)\to H^l(Y,Y-Z)\to H^l(Y),$$

其中第一个映射是Thom同构，第二步是切除同构，第三步是自然的j^*，从而考虑

$$1\mapsto u\mapsto u'\mapsto u'',$$

> **事实：**我们有u''即为Z所对应的基本类在$H^*(Y)$中的Poincare对偶，也即：
>
> $$\boxed{u'' = \mathrm{PD}.[Z],}$$
>
> 其证明可以参考[Bott Tu]，这是一个非常经典且重要的事实，翻译成口诀便是：
>
> *子流形的Poincare对偶就是法丛的Thom类*

在承认上述事实的情况下，我们有

命题：记号承接上文，则$f^*(\mathrm{PD}.[Z]) = \mathrm{PD}.[f^{-1}Z]$。

Proof：利用$\mathrm{PD}.[Z]$就是NZ的Thom类u_{NZ}，结合$f^*NZ = NW$，以及Thom类的自然性

$$u_{NW} = u_{f^*NZ} = f^*u_{NZ},$$

因此

$$f^*(\mathrm{PD}.[Z]) = f^*(u''_{NZ}) = u''_{f^*NZ} = u''_{Nf^{-1}Z} = \mathrm{PD}.[f^{-1}Z],$$

即为欲证。□

命题：设E为定向实向量丛，$s \in \Gamma(E)$，且s与E的零截面O横截相交，则

$$\boxed{\mathrm{PD}.[s^{-1}(O)] = e(E).}$$

Proof：核心技术还是转化为O法丛的Thom类上，注意到在此情形下O作为E中子流形的法丛即为E本身，从而可知$\mathrm{PD}.[O] = u''_E$，即为E的Thom类，从而

$$\mathrm{PD}.[s^{-1}(O)] = s^*u''_E.$$

现在再回忆一下Euler类的定义：其正是$H^0(X) \to H^l(E, E_0) \to H^l(E) \to H^l(X)$，而这里$u''_E$的定义：其正是$H^0(O) \to H^l(E, E-O) \to H^l(E)$，因此前两个映射均是完全吻合的，对于最后一个映射，在Euler类中是由自然的同伦收缩给出的，而这恰好就是s^*，从而可知

$$s^*u''_E = e(E).$$

综上论述，我们即知命题成立。□

推论（Hopf指标定理）设$E \to X$为实定向向量丛，且$\mathrm{rank}E = \dim X$，设$s : X \to E$为与零截面O横截的截面，从而我们有$s^{-1}(O)$为一些离散的点，作为定向流形则会天然带上标记，对此标记求和，即得

$$\# s^{-1}(O) = \langle e(E), [X] \rangle.$$

特别的，取$E = TX$，则可得切向量场版本的Hopf指标定理。

> **注：**本小节最核心的技术就是将子流形和法丛的Thom类结合起来，从而从子流形的角度重新认识了Thom类和Euler类。需要仔细体会品味其中奥妙。

现在，我们基于上述讨论，给出两个饶有趣味的命题，这将告诉我们一些同调类也可以被实现成子流形，这将大大深化我们对于同调类背后几何意义的体会。

命题：（余维数1的同调类可以实现子流形表示）

任意$a \in H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$，存在$n-1$维子流形$N \hookrightarrow X$使得$[N] = a$。

Proof：注意到$\mathrm{PD}.a \in H^1(X;\mathbb{Z}) \cong [X, S^1]$，从而选取其对应的$[f] \in [X, S^1]$，则任选其中的光滑代表类（由微分拓扑可知任意连续映射可以同伦到光滑映射），不妨就记为f，则由Sard定理，选取正则值$p \in S^1$，从而我们考虑X中余1维子流形$N = f^{-1}(p)$，注意到

$$\mathrm{PD.}\,[N] = \mathrm{PD.}\,[f^{-1}(p)] = f^*(\mathrm{PD.}\,[p]) = \mathrm{PD.}\,a,$$

最后一个等号源自于同构$H^1(X;\mathbb{Z}) \cong [X, S^1]$的内涵，从而可知$[N] = a$。$\square$

命题：（余维数2的同调类可以实现子流形表示）

任意$b \in H_{n-2}(X;\mathbb{Z})$，存在$n-2$维子流形$W \hookrightarrow X$使得$[W] = b$。

Proof：与上一命题想法类似，我们注意到$H^2(X;\mathbb{Z}) = [X, K(\mathbb{Z},2)] = \mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X)$，且同构由第一chern类给出，从而对于$\mathrm{PD.}\,b \in H^2(X;\mathbb{Z})$，存在复线丛$L$，使得$c_1(L) = \mathrm{PD.}\,b$，则将复线丛看作实的定向平面丛，则可知$c_1(L) = e(L)$，进而任取一个与零截面$O$横截相交的$s: X \to L$，则考虑$W = s^{-1}(O)$，有

$$\mathrm{PD.}[W] = \mathrm{PD.}\,[s^{-1}(O)] = e(L) = \mathrm{PD.}\,b,$$

其中用到了之前关于Euler类的性质，因此可知$b = [W]$。$\square$

> **注：**这两个命题相当精彩的告诉我们其实完全可以将同调类看成各种形形色色的子流形，这为我们探寻几何意义打开了一扇大门。

上述命题对更一般的余维数不见得成立，因为更高维的$K(\mathbb{Z}, n)$还没有简单干净的表示，但是在低维拓扑中，上述两个命题便已经够用了。

命题：四维闭可定向光滑流形的各个同调类均可以实现子流形表示。

Proof：对于余维数$1,2$的稍难情形已经在上述命题中解决，对于余维数3的，也即$H_1(X;\mathbb{Z})$中元素，不妨设为c，则有Hurwiecz同态$h: \pi_1(X) \to H_1(X)$为满射，则考虑$[\gamma] \in \pi_1(X)$，且$h([\gamma]) = c$，而$\gamma: S^1 \to X$为连续映射，从而同样的道理存在与其自由同伦的一维子流形，因此即可知证毕。$\square$

总结：在这一节中，我们从子流形与Poincare对偶的角度重新认识了示性类和同调类，给出了这两个代数对象无比优雅的几何描绘，需时刻铭记在心。

5.Euler类作为障碍

我们之前反复提到了如下事实：

命题：设$F \to P \to X$为纤维丛，且$\pi_1(F) = \cdots = \pi_{k-1}(F) = 0$，则$P|_{X^k}$存在一个整体非零截面。

Recall：这个就是逐胞腔归纳证明可以延拓即可，关键的障碍就是是否存在如下的延拓：

$$\begin{tikzcd}
\partial D^k \arrow[r] \arrow[d] & \Phi^* E \arrow[d] \\
D^k \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "?"] & D^k
\end{tikzcd}$$

也即从$\partial D^k \to F$延拓到$D^k \to F$，一个满足的充分条件就是$\pi_{k-1}(F) = 0$。$\#\#$

现在我们自然要问，如果对于$\pi_k(F) \neq 0$，那么是否有什么判据来告诉我们是否能将映射提升到X^{k+1}上？经典的障碍理论告诉我们，这可以用如下的一个同调类所表示：

障碍理论：对于fibration $F \to P \xrightarrow{p} X$，有$F$是$k-1$连通的，则存在**主要障碍类**

$$\mathfrak{o}_k(P) \in H^{k+1}(X; \Pi_k \mathcal{F}),$$

使得$\mathfrak{o}_k(P)=0$当且仅当存在整体截面$X^{k+1}\to P$。其中$\Pi_k\mathcal{F}$是一个层，其中$\Pi_k\mathcal{F}(U)=\pi_k(p^{-1}(U))$，在绝大多数情形，如当$X$是CW复形，$P$单连通时，这个层就是常值层$\pi_k(F)$。

> 我们现在来解释一下这个看似奇怪的$H^{k+1}(X;\pi_k(F))$从何而来，要紧的是我们考虑所有$k+1$维胞腔$e^{k+1}\in C_{k+1}(X)$，其对应着一个$\pi_k(F)$的一个元素，若为0则可提升，从而这即表示一个$C^{k+1}(X;\pi_k(F))$中的元素。当然这里说的相当含糊，一个更干净现代的说法可参考[Hatcher]，一个略显臃肿但思路直白的介绍可参考[Fomenko]。

我们下面的实际应用中，只会用到主要障碍类的自然性：

$$\mathfrak{o}_k(f^*P)=f^*\mathfrak{o}_k(P).$$

现在设$E\to X$为秩为k的定向实向量丛，则从维数关系，我们很自然可以得出，存在X^{k-1}到E的处处非零截面（因为$\dim E=\dim X+k>\dim X+(k-1)$，从而可以扰动与零截面横截，进而不交），现在主要问题是能否将此截面延拓到X^k上，也即$s:X^{k-1}\to E_0$的延拓问题。

注意到$\mathbb{R}^k-\{0\}\to E_0\to X$，从而此处的主要障碍类即为

$$\mathfrak{o}_{k-1}(E_0)\in H^k(X;\pi_{k-1}(\mathbb{R}^k-\{0\}))=H^k(X;\mathbb{Z}).$$

因此是否能延拓到X^k上，便取决于$\mathfrak{o}_{k-1}(E_0)$是否为0了。

命题：存在非零整数d使得$\mathfrak{o}_{k-1}(E_0)=d\cdot e(E)$。

Proof：设$p:E_0\to X$，则我们考虑拉回图表，以及E_0上的丛p^*E_0，则注意到E_0到p^*E_0有一个自然的处处非零截面，即$s(p,v):=(p,v,v)$，这里$v\in E_p-\{0\}$，从而可知$\mathfrak{o}_{k-1}(p^*E_0)=0$。

现在考虑Gysin序列：

$$\cdots\to H^0(X)\overset{\smile e(E)}{\to}H^k(X)\overset{p^*}{\to}H^k(E_0)\to\cdots,$$

从而现在对$\mathfrak{o}_{k-1}(E_0)\in H^k(X)$，我们有$p^*\mathfrak{o}_{k-1}(E_0)=\mathfrak{o}_{k-1}(p^*E_0)=0$，从而由短正合列的性质，可知存在$d\in H^0(X)$，使得$\mathfrak{o}_{k-1}(E_0)=d\cdot e(E)$。这里$d$不为零只需要找到一个欧拉类不为零的例子即可，如$S^{2n}$等。□

现在我们便有如下命题：

定理：设$E\to X$为实可定向向量丛，且$\dim X\leq\mathrm{rank}E$，则$e(E)=0$当且仅当E存在一个处处非零截面。特别的，当E为切丛时，这即熟知的Hopf定理。

习题

Problem 9A of Milnor：

Proof：首先由$w_1(\gamma^n\oplus\gamma^n)=w_1(\gamma^n)+w_1(\gamma^n)=0$，因为系数环为$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，因此可知$\gamma^n\oplus\gamma^n$是可定向的向量丛。注意到$w_{2n}(\gamma^n\oplus\gamma^n)=w_n(\gamma^n)\smile w_n(\gamma^n)$，回忆

$$H^*(Gr(n,\mathbb{R}^\infty);\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w_0(\gamma^n),\cdots,w_n(\gamma^n)],$$

从而可知$w_{2n}(\gamma^n\oplus\gamma^n)\neq 0$，从而可知若$e(\gamma^n\oplus\gamma^n)=0$，则$w_{2n}(\gamma^n\oplus\gamma^n)=e(\gamma^n\oplus\gamma^n)\pmod 2$，也为0，因此矛盾，进而$e(\gamma^n\oplus\gamma^n)\neq 0$。

当n为奇数时，$e(\gamma^n\oplus\gamma^n)=e(\gamma^n)\smile e(\gamma^n)$，回忆$e(E)\in H^{\mathrm{rank}\,E}(X;\mathbb{Z})$，从而可知

$$e(\gamma^n)\smile e(\gamma^n)=-e(\gamma^n)\smile e(\gamma^n),$$

进而可知$2e(\gamma^n\oplus\gamma^n)=0$。□

Problem 9B of Milnor：

Proof： 设η^n为$Gr(n,\mathbb{C}^\infty)$上的典范丛，则将其视为实可定向的$2n-$向量丛ξ，注意到$\mathbb{C}^\infty$中的复n维子空间可以和

Problem 9C of Milnor：

Proof：

Bonus Problem 1：

我们用 $S^3 \subset \mathbb{H}$ 来表示单位四元数, 用 $I \subset \mathbb{H}$ 表示纯虚四元数(即形如 $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}, a,b,c \in \mathbb{R}$) . 给定任意 $\alpha, \beta \in S^3$, 我们定义映射

$$\begin{gathered}\phi_{\alpha,\beta} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \eta \mapsto \alpha\eta\beta^{-1}.\end{gathered}$$

1. 证明 $\phi_{\alpha,\alpha}$ 将 I 映射到 I , 因而我们得到映射

$$\begin{gathered}S^3 \to SO(I) = SO(3) \\ \alpha \mapsto \phi_{\alpha,\alpha}|_I.\end{gathered}$$

证明这个映射是一个群同态且是一个二层覆盖映射.

2. 证明映射

$$\begin{gathered}S^3 \times S^3 \to SO(\mathbb{H}) = SO(4) \\ (\alpha,\beta) \mapsto \phi_{\alpha,\beta}\end{gathered}$$

是一个群同态且是一个二层覆盖映射.

注释： 由以上问题我们可以知道 $SO(3)$ 和 $SO(4)$ 的基本群都是 $\mathbb{Z}/2$. 实际上 $SO(k)(k \geq 2)$ 的基本群都是 $\mathbb{Z}/2$ 且存在唯一的单连通李群成为 $SO(k)$ 的二重覆盖, 这个李群一般被记为 $\mathrm{Spin}(k)$.

Proof：