向量丛和示性类10—在代数几何中的应用

在本节中，我们主要从示性类出发，去考虑一些代数几何中的例子，并给出古典代数几何中的Bezout定理、

三次曲面上有27条直线等命题的证明。在此之前，我们先在第1小节中给出一些关于相交形式的前置知识。

1.相交形式

我们先纯粹代数的给出一个定义，设X为可定向闭流形，考虑Poincare对偶，则我们对如下配对：

$$\cdot : H_{n-i}(X) \times H_{n-j}(X) \to H_{n-i-j}(X), \quad a \cdot b := \mathrm{PD.}\,(\mathrm{PD.}\,a \smile \mathrm{PD.}\,b),$$

我们称为$H_*(X)$上的**相交形式**，我们稍后会给出更几何的定义，很明显借助cup积的定义，我们有

- $a \cdot [M] = \mathrm{PD.}\,(\mathrm{PD.}\,a \smile 1) = a;$
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
- $a \cdot b = (-1)^{(n-|a|)(n-|b|)} b \cdot a$。

现在我们考虑一个特殊情形，若$i + j = n$，则可得到配对：

$$H_i(X) \times H_j(X) \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Z},$$

注意到假如a为其中的挠元，且$ma = 0$，从而$m(a \cdot b) = (ma) \cdot b = 0$，则$a \cdot b = 0$，从而可知上述配对可以自然下降到同调群的自由部分，也即得到了$\mathbb{Z}^{b_i(X)}$上的非退化双线性型：

$$F_i(X) \times F_j(X) \to \mathbb{Z}.$$

现在让我们来给出一个更加几何的解释，设M, N为X中的光滑子流形，且M与N横截相交，以及$\dim M + \dim N = \dim X$，设$i : M \hookrightarrow X$，则我们现在来看看

$$[M] \cdot [N]$$

具有什么样的几何解释呢？首先由横截相交以及维数关系，可知$M \cap N$为可定向紧零维流形，则可知是一些标记定向了的点，注意到：

$$\begin{aligned}
&[M] \cdot [N] \\
&= \langle \mathrm{PD.}\,[M] \smile \mathrm{PD.}\,[N], [X] \rangle \\
&= \langle \mathrm{PD.}\,[N], X \cap \mathrm{PD.}\,[M] \rangle \\
&= \langle \mathrm{PD.}\,[N], i_*[M] \rangle \\
&= \langle i^*\mathrm{PD.}[N], [M] \rangle \\
&= \langle \mathrm{PD.}\,[i^{-1}N], [M] \rangle \\
&= \langle \mathrm{PD.}\,[M \cap N], [M] \rangle \\
&= \#(M \cap N),
\end{aligned}$$

其中第三个等号是利用Poincare对偶的结果，$\mathrm{PD.}\,a = [X] \cap a$，从而也即$X \cap \mathrm{PD.}\,\alpha = \alpha$。

注意到这里$\#A$表示A中带符号的点的加和，我们未来用$|A|$表示不带符号的加和，因此我们知道这里对于嵌入子流形，同调类的相交数即可被理解成两个子流形的**代数相交数**。

简单应用：我们可以借助上述几何观点去认识上同调环，比如对$S^2\times S^2$的上同调环，显然对于$a=[S^2\times \mathrm{pt}]$，$b=[\mathrm{pt}\times S^2]$，我们关注上同调环$a^*\smile b^*$等，就是去看$a\cdot b$等，特别的，这里$a\cdot b$就可以关注两个子流形的代数相交数，恰好就是一点$\mathrm{pt}\times\mathrm{pt}$，从而可知$a\cdot b=1$，进而可知$a^*\smile b^*=\mathrm{PD}.1=[S^2\times S^2]^*$，为$H^4$的生成元。有趣的是对$a^*\smile a^*$，我们关注$a\cdot a$，一个首先的想法或许是说这两个子流形是同一个，那会有无穷多个交点，但注意在我们上述的推理中，是假定M与N横截相交，从而我们可以选取另一个代表为$S^2\times\mathrm{pt}'$，因此两者不交，也即$a\cdot a=0$，从而$a^*\smile a^*=0$。

应用'：设$E\to X$为定向实向量丛，$s:X\to E$为与零截面O横截相交的截面，从而我们在第7节中Hopf指标定理中已经证明过

$$\#s^{-1}(O)=\langle e(E),[X]\rangle.$$

但这是带符号的加和，我们在具体的应用中更关心真正的交点个数。幸运的是，在全纯的版本下，注意到任何两个复子空间都带有天然标准的定向，从而任何几个复子空间拼在一起并不会和原空间产生定向上的区别，故而若现在X为n维复流形，E为X上的秩为n的全纯向量丛，则对全纯截面$s:X\to E$，我们有

$$|s^{-1}(O)|=\langle e(E),[X]\rangle=\langle c_n(E),[X]\rangle.$$

2.$\mathbb{C}P^n$中的超曲面、Bezout定理与代数曲线的亏格

我们下面计算的主要对象是：

定义：设$f\in\mathbb{C}[z_0,\cdots,z_n]$为$n+1$元$d$次齐次多项式，则我们称

$$V(f)=\{[z_0:\cdots:z_n]\in\mathbb{C}P^n:f(z_0,\cdots,z_n)=0\}$$

为$\mathbb{C}P^n$中的**超曲面**。很明显，$V(f)$是$\mathbb{C}P^n$的余1维复子流形。

我们首先要计算的对象是$V(f)$的Poincare对偶。

为此，我们首先回顾一些与$\mathbb{C}P^n$有关的基本事实与记号，其上同调环为$\mathbb{Z}[a]/(a^{n+1})$，以及重言线丛

$$\eta=\{([z],v)\in\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}^{n+1}:v=\lambda z,\lambda\in\mathbb{C}\},$$

从而$c_1(\eta)=-a$，$c_1(\eta^*)=a$，$c(T\mathbb{C}P^n)=c(\oplus^{n+1}\eta^*)=(1+a)^{n+1}$，$c_1(\wedge^nT\mathbb{C}P^n)=(n+1)a$，$c(\wedge^nT^*\mathbb{C}P^n)=-(n+1)a$。我们也用$\mathcal{O}(-1)$表示$\eta$，对应的用$\mathcal{O}(k)$表示$\eta^{\otimes(-k)}$。

命题：设f是d次齐次多项式，则$\mathrm{PD}.[V(f)]=da\in H^2(\mathbb{C}P^2)$。

> 关于计算子流形的Poincare对偶，一个率先应该想起的是那句口诀：*子流形的Poincare对偶就是法丛的Thom类*，但这里法丛并不明显，因此我们应该回忆起这个口诀的一个重要推论：$\boxed{\mathrm{PD}.[s^{-1}(O)]=e(E)}$。

Proof：我们试着去构造一个丛E，以及截面使得其零截面的原像恰好就是$V(f)$。一个不太明显的构造是这样的：仍以$\mathbb{C}P^n$为底流形，注意到da实际上是$(\eta^*)^{\otimes d}$的最高阶chern类也是欧拉类，从而自然考虑：

$$\pi:(\eta^*)^{\otimes d}\to\mathbb{C}P^n,$$

其实另一方面，更自然的考量是由于f并不线性，因此我们需要借助对称积的操作将其变为线性函数，换言之，对于对称积：

$$\mathrm{Sym}^d\mathbb{C}^{n+1} = \otimes^d\mathbb{C}^{n+1}/\sim,$$

其中$v_1\otimes\cdots\otimes v_i\otimes\cdots v_j\otimes\cdots\otimes v_d\sim v_1\otimes\cdots\otimes v_j\otimes\cdots v_i\otimes\cdots\otimes v_d$，则$f$可以自然视作这上面的线性函数，进而我们可以构造截面

$$s_f:\mathbb{C}P^n\to(\eta^{\otimes d})^*,\quad [z]\mapsto f|_{[z]^{\otimes d}},$$

这里用$[z]$表示其所代表的1维子空间，且这是良定义的是因为$f|_{[z]^{\otimes d}}\in\mathrm{Hom}([z]^{\otimes d},\mathbb{C})=([z]^{\otimes d})^*$。

> **注：** 读者可能对或许会觉得有些含糊不清，以一个例子为准，若$f(z_0,z_1)=z_0^d+z_1^d$，则其在$[z_0:z_1]$这个1维子空间上绝不能确定一个线性函数，明显的原因是$f(\lambda z_0,\lambda z_1)=\lambda^d f(z_0,z_1)$，因此我们需要考虑将$f$视为函数：
>
> $$f(\lambda_1[z_0:z_1],\cdots,\lambda_d[z_0:z_1])=\lambda_1\cdots\lambda_d f([z_0:z_1],\cdots,[z_0:z_1])。$$
>
> 特别的，在我们这里一维的简单情形，对称积和张量积并没有区别，因为只有统一的基$v\otimes\cdots\otimes v$。

从而易见$s_f\in\Gamma(\mathcal{O}(d))$，且$s_f^{-1}(O)=V(f)$，后者基本上就是废话重说，因此我们有

$$\mathrm{PD}.[V(f)]=\mathrm{PD}.[s_f^{-1}(O)]=e(\mathcal{O}(d))=da,$$

即为欲证。□

现在有了如上计算，我们可以立刻得到如下Bezout定理：

定理：（代数曲线的Bezout定理）

设f,g为3元齐次多项式，且$\deg f=d_1$，$\deg g=d_2$，则对$V(f),V(g)\subset\mathbb{C}P^2$，若两者横截相交，则

$$|V(f)\cap V(g)|=d_1d_2.$$

Proof： 由第1小节关于相交形式的论述，特别的对于此时复子流形的情形，我们立刻有：

$$|V(f)\cap V(g)|=\langle\mathrm{PD}.[V(f)]\smile\mathrm{PD}.[V(g)],[\mathbb{C}P^2]\rangle=d_1d_2\langle a^2,[\mathbb{C}P^2]\rangle=d_1d_2,$$

其中用到了$a^2=[\mathbb{C}P^2]^*$的上同调环结构。□

> **注：** 这里代数曲线即指的是$\mathbb{C}P^2$中的超曲面。

紧接着利用上述命题，我们也可以导出经典的亏格公式：

定理：（代数曲线的亏格）

设f为3元齐次多项式，则对$V(f)\subset\mathbb{C}P^2$是一维闭复子流形，从而为黎曼曲面，则其亏格g满足

$$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Proof： 显然为了联系亏格我们自然想到欧拉示性数与欧拉类，也即：

$$2-2g=\chi(V(f))=\langle e(TV(f)),[V(f)]\rangle.$$

但$TV(f)$肉眼可见的不易捕捉，因此我们考虑其在$T\mathbb{C}P^2$的法丛，也即考虑：

$$T\mathbb{C}P^2|_{V(f)}=TV(f)\oplus NV(f),$$

从而有$c_1(T\mathbb{C}P^2|_{V(f)})=c_1(TV(f))+c_1(NV(f))$，幸运的是我们已经有$c_1(TV(f))=e(TV(f))$了，因此我们只需要分别去计算另外两个chern类吃掉$V(f)$的结果即可。

首先$c_1(T\mathbb{C}P^2)=3a$，而注意到$\mathrm{PD}.[V(f)]=da$，从而

$$\langle c_1(T\mathbb{C}P^2),[V(f)]\rangle = 3d\langle a,\mathrm{PD}.\,a\rangle = 3d,$$

其中利用了$\mathbb{C}P^2$上的环结构。

再来计算另外一个，注意到由管状邻域定理我们可以将$s:V(f)\to NV(f)$，中$\#s^{-1}(O)$理解成$V(f)$扰动之后与$V(f)$的相交数，也即$[V(f)]\cdot[V(f)]$，从而结合Hopf指标定理：

$$\begin{aligned}&\langle c_1(NV(f)),[V(f)]\rangle\\=&\langle e(NV(f)),[V(f)]\rangle\\=&\#s^{-1}(O)\quad(\text{Hopf指标定理})\\=&[V(f)]\cdot[V(f)]\\=&\langle \mathrm{PD}.\,[V(f)]\smile \mathrm{PD}[V(f)],[\mathbb{C}P^2]\rangle\\=&\langle d^2a\smile a,[\mathbb{C}P^2]\rangle = d^2,\end{aligned}$$

从而综合上述计算，我们有：

$$3d = 2-2g+d^2,$$

也即

$$\boxed{g=\frac{(d-1)(d-2)}{2},}$$

即为欲证。□

> **注：**本节中我们再次看到了Poincare对偶以及相交形式相互转化，在几何与拓扑计算中灵活互用的高妙，我们要时刻牢记这些基本计算技巧。

上述定理实际上也表明，对于亏格形如$\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$的闭曲面都可以全纯嵌入到$\mathbb{C}P^2$中，因此一个自然的问题是，如果对于**光滑**嵌入的闭曲面Σ_g，若其同调类表示为da，g的最小可能亏格是多少？

Thom猜想：上述问题的答案可能是$g\geq\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$，也即全纯嵌入是使得亏格最小的可能。

这个问题在1994年被Krohemier等人完美证明，一般的问题是对于其他四维流形能实现其H_2的中的某个固定同调类的曲面最小亏格是多少？这些问题还暂无定论。

> **注：**Krohemier是本课主讲谢羿在Harvard大学的博士导师，其还与人合作证明了Milnor猜想。

3.三次曲面上有27条直线

我们称$\mathbb{C}P^3$中的所有线性嵌入的$\mathbb{C}P^1$称为一条**直线**，现在任取$f\in\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2,z_3]$，且$\deg f=3$，我们关心：

> 三次曲面$V(f)$上会有多少条直线呢？

我们逐步将上述计数问题转化到纤维丛与示性类的范畴，首先的观察是：对于任意线性嵌入$\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^4$，其一一对应于线性嵌入$\mathbb{C}^2-\{0\}\to\mathbb{C}^4-\{0\}$，进而一一对应于线性嵌入$\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^3$，从而可知：

$$Gr(2,\mathbb{C}^4)\longleftrightarrow\{\mathbb{C}P^1\overset{\text{线性}}{\hookrightarrow}\mathbb{C}P^3\}.$$

也即$Gr(2,\mathbb{C}^4)$可以看作是$\mathbb{C}P^3$上所有直线构成的集合。

现在我们可以陈述本小节欲证的主定理：

定理（三次曲面上有27条直线）

对于上述次数为3的多项式f，恰好存在27条直线落在三次曲面$V(f)$中。

Proof:

¶ Step 1—转化为示性类问题。

考虑$Gr(2,\mathbb{C}^4)$上的典范平凡丛$P\to Gr(2,\mathbb{C}^4)$，也即

$$P=\{(V,u)\subseteq Gr(2,\mathbb{C}^4)\times\mathbb{C}^4 : u\in V\}\subseteq \underline{\mathbb{C}^4}.$$

考虑丛$(\mathrm{Sym}^3P)^*$，以及截面

$$s_f: Gr(2,\mathbb{C}^4)\to(\mathrm{Sym}^3P)^*,\quad V\mapsto f|_{\mathrm{Sym}^3V}.$$

从而显然

$$s_f^{-1}(0)\cong\{\mathbb{C}P^1\in Gr(2,\mathbb{C}^4):\mathbb{C}P^1\subseteq V(f)\}.$$

因此为了计数后者，等价于计算$|s_f^{-1}(0)|$，而根据本节一开始的论述，这即去计算

$$|s_f^{-1}(0)|=\langle c_4((\mathrm{Sym}^3P)^*),[Gr(2,\mathbb{C}^4)]\rangle.$$

¶ Step 2—计算示性类等式

我们首先导出一些关于P的chern类恒等式，不难证明：

- $c_1^3(P)=2c_1(P)c_2(P)$;
- $c_1^2(P)c_2(P)=c_2^2(P)$;
- $[Gr(2,\mathbb{C}^4)]=c_2^2(P^*)$，这可以从嵌入$Gr(2,\mathbb{C}^4)\hookrightarrow Gr(2,\mathbb{C}^\infty)$得到。

现在我们用分裂原则去计算$c_4(\mathrm{Sym}^3P^*)$，设$P^*=L_1\oplus L_2$，第一chern类分别为x_1,x_2，进而由

$$\mathrm{Sym}^3P^*=L_1^3\oplus L_2^3\oplus L_1^2L_2\oplus L_1L_2^2,$$

可知

$$c(\mathrm{Sym}^3P^*)=(1+3x_1)(1+3x_2)(1+2x_1+x_2)(1+2x_2+x_1),$$

进而可知

$$\begin{aligned}&c_4(\mathrm{Sym}^3P^*)\\ =&\,9x_1x_2(5x_1x_2+2x_1^2+2x_2^2)\\ =&\,9c_2(P^*)(c_2(P^*)+2c_1^2(P^*))\\ =&\,9c_2^2(P^*)+18c_1^2(P^*)c_2(P^*)\\ =&\,27c_2^2(P^*),\end{aligned}$$

进而可知

$$|s_f^{-1}(0)|=\langle c_4((\mathrm{Sym}^3P)^*),[Gr(2,\mathbb{C}^4)]\rangle=27.$$

综上我们完成了证明。☐

> **注：**一个更加代数几何的证明语言可参考27 条直线