向量丛和示性类6—主丛

定义1：设G为一个拓扑群，P为拓扑空间并且存在右作用$P \curvearrowleft G$。设$X = P/G$为轨道空间，如果任意$x \in X$，存在x的邻域U以及同胚$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$，且使得同胚是$G$等变的，也即

$$\varphi(g.(y,h)) = (y, hg), \quad \forall y \in U, g, h \in G,$$

则称P为X上的$G-$主丛。

> **注**：回忆群作用的定义即可知$G < \mathrm{Homeo}(P)$。

例子2：考虑$E \in \mathrm{Vect}^k_{\mathbb{R}}(X)$，以及$E \to X$，我们考虑$E$的标架丛

$$\mathrm{Fr}(E) := \{(u^1_x, \cdots, u^k_x) \subseteq E_x : u^1_x, \cdots, u^k_x\text{为}E_x\text{的一组基}\},$$

换言之$\mathrm{Fr}(E)$为X上的纤维丛，且每一根纤维$\mathrm{Fr}(E)_x = \mathrm{Fr}(E_x)$为$E_x$的全体基组成的（无序对）。

容易看到一方面任意固定一组基$(u^1_x, \cdots, u^k_x)$，则任何一组基都一一对应着一个可逆矩阵A使得

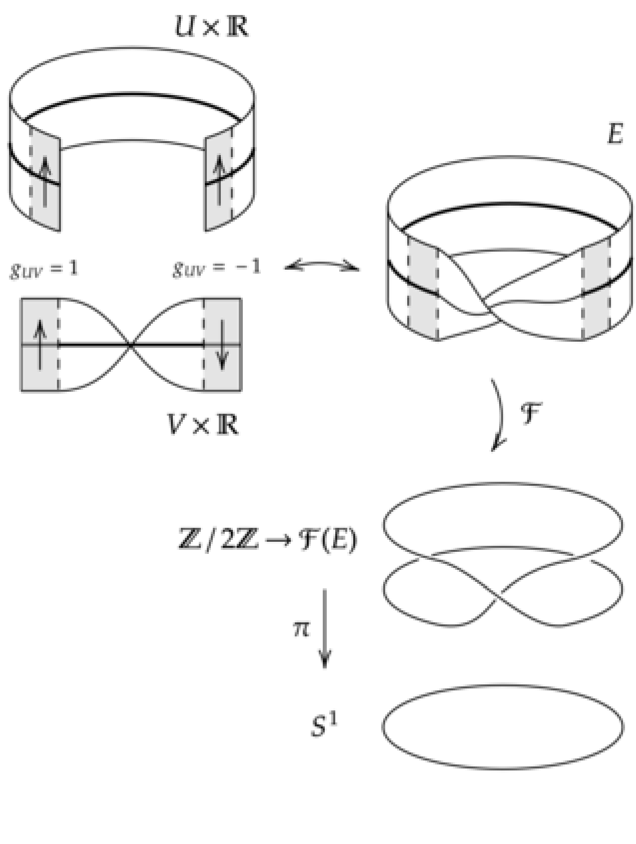
$$(v^1_x, \cdots, v^k_x) = (u^1_x, \cdots, u^k_x)A, \quad A \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}),$$

因此每个纤维可与$\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$等同起来，又显然$\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$在$\mathrm{Fr}(E)$上有自然的右作用，也即

$$A.(u^1_x, \cdots, u^k_x) := (u^1_x, \cdots, u^k_x)A,$$

故可知标架丛$\mathrm{Fr}(E)$为$\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})-$主丛。

一个具体的例子是，考虑S^1上的不可定向线丛L，其拓扑同胚于Mobius带，我们现在考察其标架丛$\mathrm{Fr}(L)$，注意到由$\mathrm{GL}(1,\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$群同构，从而由定义可知$\mathrm{Fr}(L)$为$\mathbb{Z}_2-$主丛，这拓扑上为$S^1$的二叶覆叠，因此其有两种可能，一种即为两个圆周的不交并，另外一个为连通的二叶覆叠。事实上，为了说明是后者，我们只需要说明这个$\mathbb{Z}_2$作用是非平凡的即可，注意到在L上，有两个局部平凡化φ_U, φ_V，且转移映射$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} = -\mathrm{Id}$，从而倘若作用平凡，则可知$\varphi_U(v.g) = v$，$\varphi_V(v.g) = v$，则可知$v = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(v) = \varphi_V(v.g) = v$，但是$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} = -\mathrm{Id}$，从而可知矛盾。综上，其标架丛为非平凡的$\mathbb{Z}_2$主丛。



一个自然的问题是，标架丛和向量丛之间有没有什么关系呢？一个自然不突兀的构造是如下的配丛（associated bundle）：

定义3：固定$G-$主丛P以及向量空间V，设G在V上有一个线性左作用，也即存在一个表示$G\xrightarrow{\rho}\mathrm{GL}(V)$，则我们考虑$G$在$P\times V$上的**左**作用：$g.(p,v):=(p.g^{-1},g.v)$，因此定义$P$的配丛

$$P\times_G V:=P\times V/G=P\times V/_{(p.g,v)\sim(p,g.v)}=P\times V/_{(p,v)\sim(p.g^{-1},g.v)},$$

则配丛是一个纤维同构于V的向量丛。

Check：我们考虑$P\to X$为π，则可知局部平凡化给出了同胚$\pi^{-1}(U)\cong U\times G$，进而

$$\pi^{-1}(U)\times_G G=(U\times G)\times_G V=U\times(G\times_G V),$$

又注意到$G\times_G V=G\times V/_{(g,v)=(e.g,v)\sim(e,g.v)}=V$，因此可知这给出了配丛的局部平凡化。并且更本质的，我们有配丛的转移函数$\psi_{VU}=\rho\circ\varphi_{VU}:\varphi_U(U\cap V)\to G\to\mathrm{GL}(V)$。

一般的观点：很明显，对任何一个秩为k的向量丛E，其可看成是$\mathrm{Fr}(E)$的配丛

$$\mathrm{Fr}(E)\times_{\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})}\mathbb{R}^k,$$

这里选取的作用为标准矩阵乘法，也即标准表示（验证此事只需要从转移函数的层面去看即可），从而更一般的，E^*是对偶表示对应的配丛，$E\otimes E$为张量表示对应的配丛。

因此一般来讲，当我们需要针对给定结构群去分类对应的向量丛时，我们分为以下两步操作：

1. （拓扑操作）给出结构群对应的主丛分类；
2. （代数操作）找出所有结构群上的表示。

定理4：设X为仿紧T2的拓扑空间，P为$X\times[0,1]$上的纤维丛，则有$P\cong P|_{X\times\{1\}}\times[0,1]$。

> 关于仿紧，标准的定义是任取一组开覆盖，都存在局部有限的开加细，也即任意$\{U_i\}$，存在一组开覆盖$\{V_\gamma\}$，以及指标映射$\tau:\Gamma\to I$，使得$V_\gamma\subseteq U_{\tau(\gamma)}$，且任意$x\in X$，存在开邻域$O$，使得集合
>
> $$\{\gamma\in\Gamma:O\cap V_\gamma\neq\varnothing\}$$
>
> 为有限集。单位分解的证明告诉我们，仿紧意味着任何一组开覆盖，都存在一族从属于这个开覆盖的单位分解。事实上，单位分解和仿紧在T2空间中是等价的，因此只要一提到仿紧Hausdorff即可知道单位分解的存在性。熟知紧Hausdorff空间，CW复形，拓扑流形等均为仿紧T2空间。细节可参考[Hat-VB&K]

推论5：设$f,g:X\to Y$为同伦映射，若P为Y上的纤维丛，则f^*P同构于g^*P。

定理4的Proof：我们先证明以下的一个断言：

Claim：存在X的开覆盖$\{U_i\}$使得$P|_{U_i\times[0,1]}$为平凡丛。

为了说明以上断言，我们先注意到若$P|_{X\times[a,b]}$和$P|_{X\times[b,c]}$均平凡，则$P|_{X\times[b,c]}$平凡，事实上，设前者同胚为h_1，后者同胚为h_2，事实上尽管$h_1|_{P|_{X\times\{b\}}}$和$h_2|_{P|_{X\times\{b\}}}$不相同，但是我们可以选取h_3为h_2复合上$h_1\circ h_2^{-1}\times\mathrm{id}$，从而使得$h_3$和$h_1$在$X\times\{b\}$处吻合。进而对任意点$x$，存在$[0,1]$的划分$0=t_0<\cdots<t_l=1$使得$P|_{U_i\times[t_i,t_{i+1}]}$为平凡丛，从而取$U=U_0\cap\cdots\cap U_{l-1}$即可。

现在选取从属于$\{U_i\}$的单位分解$\rho_i:X\to[0,1]$，且$\operatorname{supp}\rho_i\subseteq U_i$，并且不妨假设任意$x\in X$，$\max_i\rho_i(x)=1$（这一点可以考虑$\rho_i'(x)=\dfrac{\rho_i(x)}{\max_j\rho_j(x)}$实现），进而我们定义：

$$f_i:P|_{U_i\times I}\to P|_{U_i\times I}\cong U_i\times I\times F,\quad (x,t,v)\mapsto(x,\max\{t,\rho_i(x)\},v),$$

由单位分解的定义可知只有有限个$i \in I$使得对x而言，f_i不为恒同映射，因此我们可以定义，

$$F: P \to P, \quad F = \bigcirc_{i \in I} f_i,$$

其中○表示复合。因此可知F给出了一个P到$P|_{X \times \{1\}} \times [0,1]$的同构映射，即证。□

推论6：注意到在上述证明中构造的同构并没有涉及到纤维上的分量，因此都是自然保持纤维之间结构的，从而可以立刻得到：同伦映射拉回的向量丛/$G-$主丛同构。

定理7：$G-$主丛P平凡当且仅当$\Gamma(P) \neq \varnothing$，也即存在一个截面$s: X \to P$。

证明：一方面若P平凡则$P = X \times G$，因此显然存在$s(x) = (x, e)$这样一个截面。

另一方面，若存在$s: X \to P$，注意到任取$u \in P$，则可知$s(\pi(u))$和u落在同一纤维上，因此存在$g \in G$使得$u = s(\pi(u)).\, g$，进而我们可以定义从P到$X \times G$的映射如下：

$$u \mapsto (\pi(u), g),$$

容易看到其有自然的逆映射：$(x, g) \mapsto s(x).\, g$，且这是保纤维的$G-$等变映射，因此是主丛同构，即证。□

Cech上同调与$G-$主丛的分类

我们现在开始讨论关于$G-$主丛的分类问题，从最一般的观点来看，一个丛的全部信息完全由转移函数所决定，我们现在再重申一遍这个观察：设$P \to X$为$G-$主丛，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$为$X$的一组开覆盖，同时也为$P$的一组局部平凡化，也即有$s_\alpha: P|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times G$，以及$s_\beta: P|_{U_\beta} \cong U_\beta \times G$，设$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，从而我们有

$$H_{\beta\alpha} = s_\beta \circ s_\alpha^{-1}: U_{\alpha\beta} \times G \to U_{\alpha\beta} \times G, \quad (x, e) \mapsto (x, h_{\beta\alpha}(x)),$$

这里$h_{\beta\alpha}: U_{\beta\alpha} \to G$即为转移函数。

> 注意这里对于一般的g，自然有$(x, g) \mapsto (x, h_{\beta\alpha}(x) g)$。

很明显我们有$\{h_{\beta\alpha}\}$满足如下的cocycle条件（1），

$$\begin{aligned} h_{\alpha\alpha} &= \mathrm{id}, \\ h_{\alpha\eta} \circ h_{\eta\beta} \circ h_{\beta\alpha} &= \mathrm{id}, \end{aligned}$$

不难证明，任取X的一组开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$，以及满足条件（1）的转移函数$\{h_{\beta\alpha}\}$，我们可以构造出一个$G-$主丛，也即：

$$\bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times G \Big/ (x, g) \sim (x, g'),$$

其中$x \in U_{\alpha\beta}$，$g' = h_{\beta\alpha}(x).\, g$。

因此我们再一次说明了满足条件（1）的转移函数唯一决定了$G-$主丛。

现在我们要问，如果两个$G-$主丛同构，那么其反映在转移函数上会有什么特征呢？现在假设$\{s'_\alpha\}$为从属于$\{U_\alpha\}$的另一组局部平凡化，则有

$$H'_{\beta\alpha} = s'_\beta \circ s_\alpha^{-1} = (s'_\beta \circ s_\beta^{-1}) \circ H_{\beta\alpha} \circ (s'_\alpha \circ s_\alpha^{-1})^{-1},$$

因此反映在转移函数上，我们有$m_\alpha: U_\alpha \to G$，使得

$$h'_{\beta\alpha} = m_\beta h_{\beta\alpha} m_\alpha^{-1},$$

也即$\{h'_{\beta\alpha}\}$和$\{h_{\beta\alpha}\}$之间满足一个coboundary的条件（2）。

因此我们知道：

$$\boxed{\begin{array}{c}\{P\text{为}X\text{上的}G\text{主丛}:P|_{U_\alpha}\text{平凡}\}\\ \Updownarrow \\ \dfrac{\{(h_{\beta\alpha}:U_{\alpha\beta}\to G):\text{满足cocycle条件}\}}{(h_{\beta\alpha})\sim(h'_{\beta\alpha}),\text{如果存在}(m_\alpha:U_\alpha\to G)\text{使得coboundary条件成立}}\end{array}}$$

特别的，当G为Abel群时，cocycle条件和coboundary条件就是我们所熟悉的Cech上同调当中的：

$$\begin{aligned}\text{cocycle}:h_{\beta\eta}-h_{\alpha\eta}+h_{\alpha\beta}=0,\\ \text{coboundry}:h'_{\beta\alpha}=h_{\beta\alpha}+m_\beta-m_\alpha.\end{aligned}$$

我们首先回顾预层的概念，给定拓扑空间X，以及其上的范畴$\mathcal{O}(X)$，全体开集组成对象，态射为$U\supseteq V$，则预层$\mathscr{F}$是从$\mathcal{O}(X)$到**Abgrp**范畴的共变函子，从而利用Cech同调我们知道

$$\{P\text{为}X\text{上的}G\text{主丛}:P|_{U_\alpha}\text{平凡}\}=\check{H}^1(\mathcal{U},\mathscr{G}).$$

还可以从Cech同调角度定义第一chern类。