向量丛和示性类4—Chern Class

1.基本构造

在本节中，我们仿照SW示性类的构造，给出Chern类的构造。

我们仍然从公理化去定义，再仿照SW示性类的方法去给出一个具体的构造。

定义1：设$E \to X$为秩为k（复维数）的复向量丛，也即结构群为$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，称$c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$为$E$的第$i$阶chern类，如果其满足如下四条公理：

（A1）若$j > \mathrm{rank}E = k$，则有$c_j(E) = 0$，且$c_0(E) = 1$，并记

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_k(E).$$

（A2）我们也有自然性条件，即有$c(f^*E) = f^*c(E)$.

（A3）我们也有Whitney乘积公式，即$c(E \oplus F) = c(E) \smile c(F)$.

（A4）设$\eta_1^{\mathbb{C}} = \{(\ell, u) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 : u \in \ell\}$为$\mathbb{C}P^1$上的线丛，则有

$$c_1(\eta_1^{\mathbb{C}})[\mathbb{C}P^1] = -1.$$

> 如果视为de Rham版本，则我们实际上有$c_1(\eta_1^{\mathbb{C}}) \in H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}P^1)$，且
>
> $$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(\eta_1^{\mathbb{C}}) = -1.$$

我们先出于回顾与建立信心的目的，说明构造出第一chern类即可迅速给出其余高阶的定义：

我们考虑E的复射影化空间，为了简单起见我们仍用$\mathbb{P}(E)$表示，也即其实际上为X上的$\mathbb{C}P^{k-1}$纤维丛，设π为E到X的投影映射，则我们仍然考虑$L_E \subseteq \pi^*E$，具体来讲$\mathbb{P}(E)_x = \mathbb{P}(E_x)$，$(L_E)_x \cong \eta_1^{\mathbb{C}}$，注意到$\mathbb{C}P^k$的上同调环也和$\mathbb{R}P^k$的$\mathbb{Z}_2$系数上同调环类似，因而可以一样由Leray-Hirsch定理知道

$$H^*(\mathbb{P}(E)) \cong H^*(X) \otimes \mathbb{Z}\{1, c_1(L_E), \cdots, c_1(L_E)^{k-1}\},$$

其中我们还用到了自然性以说明$i_x(c_1(L_E)) = c_1(\eta_1^{\mathbb{C}})$为$H^*(\mathbb{P}(E_x))$的生成元。

从而若记$\boxed{x = -c_1(L_E) \in H^2(\mathbb{P}(E))}$，则我们仍有

$$H^*(\mathbb{P}(E)) \cong H^*(X) \otimes \mathbb{Z}\{1, x, \cdots, x^{k-1}\},$$

进而有$a_i \in H^{2i}(X)$成立

$$x^k + \alpha^* a_1 \smile x^{k-1} + \cdots + \alpha^* a_k = 0,$$

这里$\alpha : \mathbb{P}(E) \to X$也为投影映射，则我们一样可以定义$c_i(E) = a_i$，从而完成构造。

现在，让我们集中精力去构造第一chern类。回忆我们构造第一SW类第一步是考虑了

$$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(X) \overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow} H^1(X;\mathbb{Z}_2),$$

而利用一点代数拓扑的知识，我们很快会从$\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$中发现$H^1(X;\mathbb{Z}_2) = [X, K(\mathbb{Z}_2, 1)] = [X, \mathbb{R}P^\infty]$，进而我们可以猜测并证明如下推广结论：

命题2：设X为紧Hausdorff空间，则我们有

$$\text{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X) \overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow} H^2(X;\mathbb{Z}) = [X, \mathbb{C}P^\infty],$$

其中$\mathbb{C}P^\infty = \varinjlim \mathbb{C}P^k$，其中余极限取自$\mathbb{C}P^1 \subseteq \mathbb{C}P^2 \subseteq \mathbb{C}P^3 \subseteq \cdots$，更具体的写下来：

$$\mathbb{C}P^\infty = \frac{\mathbb{C}^\infty}{\sim} = \frac{\{(z_1, \cdots, z_k, \cdots) : z_i \in \mathbb{C}, \text{只有有限项非}0\}}{(z_1, \cdots, z_k, \cdots) \sim (\lambda z_1, \cdots, \lambda z_k, \cdots), \text{任意}\lambda \in \mathbb{C}^*},$$

且任意$f \in [X, \mathbb{C}P^\infty]$，可以定义其对应的为$f^*\eta^{\mathbb{C}}$，这里$\eta^{\mathbb{C}}$为$\mathbb{C}P^\infty$上的典范线丛，即$[z_1 : \cdots : z_k : \cdots]$中的点组成该点处纤维的复线丛。

> 更本质的，注意到每一个复线丛都可以看成是一个$U(1)$主丛，从而这个命题也是在证明分类空间$BU(1)$正是$\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$。

Proof: 我们直接证明单射与满射。

（满射）任取X上的复线丛L，我们试图构造其为$\eta^{\mathbb{C}}$的拉回，注意到$\eta^{\mathbb{C}}$为$\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}^\infty$的子丛，从而我们需要先构造出可能的$L$到其中的嵌入，利用单位分解可以证明存在$N \in \mathbb{N}$使得$L$为$\underline{\mathbb{C}^N} = X \times \mathbb{C}^N$的子丛，设嵌入为$\iota$，以及投影映射$\pi_2 : X \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$，进而有再利用$i : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^\infty$，我们得到了一个逐纤维单射的$f : L \to \mathbb{C}^\infty$，其中$f = i \circ \pi_2 \circ \iota$，从而对任意$x \in X$，我们可以定义$\hat{f}(x) \in \mathbb{C}P^\infty$，从而自然有有$L$可视为$\hat{f}^*\eta^{\mathbb{C}}$。

其中$\hat{f}$一个更精准的描述是：$\hat{f}(x) := f(L_x)$可自然对应着$\mathbb{C}^\infty$中的一个一维线性子空间（利用f逐纤维线性单射），从而可以进一步下放到$\mathbb{C}P^\infty$上。

（单射）设$f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}P^\infty$，且$f_1^*\eta^{\mathbb{C}} \cong f_2^*\eta^{\mathbb{C}} =: L$，则我们往证$f_1 \simeq f_2$。注意到利用$\eta^{\mathbb{C}}$到$\mathbb{C}^\infty$的自然单射，我们可以得到$L$到$\mathbb{C}^\infty$的逐纤维的线性单射$F_1, F_2$，为此只要我们证明$F_1$和$F_2$可以通过一组同伦，并且每个时刻都是逐纤维线性单射，则可以将这个同伦下放到f_1和f_2之间，因此只需要这组同伦H的每个时刻不存在$e \in L$使得$H_t(e) = (0, \cdots, 0, \cdots)$，而$F_1$和$F_2$本身不会存在全部映到0的情况，因此取

$$d_1 : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty, \quad (z_1, \cdots, z_k, \cdots) \mapsto (z_1, 0, z_2, 0, \cdots),$$

以及

$$d_2 : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty, \quad (z_1, \cdots, z_k, \cdots) \mapsto (0, z_1, 0, z_2, \cdots),$$

利用线性同伦$(1-t)\text{Id} + t \cdot d_i$可知$d_1 \simeq \text{Id} \simeq d_2$，因此

$$F_1 \simeq d_1 \circ F_1, \quad F_2 \simeq d_2 \circ F_2,$$

再利用线性同伦$(1-t) \cdot d_1 \circ F_1 + t \cdot d_2 \circ F_2$可知$F_1 \simeq F_2$，综上即证。□

> 保证是逐纤维线性单射才能保证其限制在L的每一根纤维上的像都是一个一维子空间，从而方能根据其确定出这个一维子空间在$\mathbb{C}P^\infty$中对应的点，进而才能把映射下降到X到$\mathbb{C}P^\infty$，换言之只有这样才能看成是丛映射

现在，我们可以借助这个标准的对应，去给出第一chern类的定义了：

定义3: 熟知$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[h]$为一元整系数多项式环，$h \in H^2$，并且$i^*h([\mathbb{C}P^1]) = 1$，从而利用

$$\text{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X) \overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow} [X, \mathbb{C}P^\infty],$$

并设L对应的映射为f_L，则定义$c_1(L) = f_L^*(-h)$。

命题4: 对线丛以及第一chern类，我们有自然性成立。

Proof: 由于Chern类的定义即为拉回定义，从而这是不言而喻的。

命题5: 对复线丛L_1, L_2，我们有$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$。

Proof: 设L_1, L_2分别可看成是$f_1^*\eta^{\mathbb{C}}$和$f_2^*\eta^{\mathbb{C}}$，很显然，设p_1, p_2分别是$\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$关于第一或第二个分量的投影，则我们有$L_1 \otimes L_2$可看成是$(f_1, f_2) : X \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$关于线丛$p_1^*\eta^{\mathbb{C}} \otimes p_2^*\eta^{\mathbb{C}}$的拉回。

由$\mathbb{C}P^\infty$上典范线丛的万有性质可知存在$F : \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$，且$p_1^*\eta^{\mathbb{C}} \otimes p_2^*\eta^{\mathbb{C}}$为$F$关于$\eta^{\mathbb{C}}$的拉回，从而我们有$L_1 \otimes L_2$可看作$\eta^{\mathbb{C}}$关于$F \circ (f_1, f_2)$的拉回，注意到由Kunneth公式，可知$F^*h = h \otimes 1 + 1 \otimes h$（这可以待定系数得到，因为由$H^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = H^0(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^2(\mathbb{C}P^\infty) \oplus H^2(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^0(\mathbb{C}P^\infty)$，可待定系数设$F^*h = y \otimes 1 + 1 \otimes z$，再由$g_1 : \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$，$u \mapsto (u, p)$，其中$p$为某个固定点，从而不难得到$g_1^*(y \otimes 1 + 1 \otimes z) = h$，即$y = h$，同理可有$z = h$，进而说明这个事情），从而可知$c_1(L_1 \otimes L_2) = (f_1, f_2)^* \circ F^*(-h) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$。□

我们在此有必要声明一点：我们之前的SW类以及Chern类的构造都仅仅只说明了存在性，其唯一性我们现在将从公理中导出，为了方便起见，我们以chern类为例：

由（A4），可知$c_1(\eta_{\mathbb{C}})$是被唯一确定，又由万有丛的性质，结合自然性公理（A2），我们有任意一个线丛E其chern类由唯一的拉回所唯一决定。

再对任何一个向量丛，注意到由分裂原则，我们可知再一次由（A2），其chern类可由拉回之后的直和线丛的chern类所决定，而由（A3）的乘积公式，我们可以计算出线丛直和的chern类，进而确定出向量丛的chern类。

综上，我们知道了chern类是被唯一确定的。

2.Chern特征与计算

我们首先借助张量积的chern类计算去展现一般使用分裂原则去计算相关公式的套路：

命题6：设$E \to X$是秩为k的复向量丛，则有$c_1(E\otimes E) = 2k\cdot c_1(E)$。

Proof：Step 1，先假设$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$，则我们有

$$\begin{aligned}
&c_1(E\otimes E)\\
=&c_1\left(\bigoplus_{i,j}^k L_i\otimes L_j\right)\\
=&\sum_{i,j}^k c_1(L_i\otimes L_j)\\
=&\sum_{i,j}^k (c_1(L_i)+c_1(L_j))\\
=&2k\sum_{i=1}^k c_1(L_i) = 2k\cdot c_1(E),
\end{aligned}$$

这里我们用到了Whitney乘积公式，$c_1(E\oplus F) = c_0c_1 + c_1c_0 = c_1(E)+c_1(F)$，以及线丛张量积的chern类公式，也即命题5。

Step 2，现再考虑一般的向量丛E，由分裂原则，存在$f: Y \to X$使得其上的拉回向量丛$f^*E = L_1\oplus\cdots\oplus L_k$，并且$f^*$诱导了上同调层面的单射，因此对$f^*E$有$c_1(f^*E\otimes f^*E) = 2k\cdot c_1(f^*E)$，则由自然性以及$f^*$是单射可知$c_1(E\otimes E) = 2k\cdot c_1(E)$。

综上我们完成了证明。□

事实上，更一般的流程是，我们先对线丛直和的情形去探索公式，再利用分裂原则去证明，比如我们想要探索一般的$c(E\otimes F)$的表达式，我们先考虑$E = \bigoplus_{i=1}^k L_i$，$F = \bigoplus_{j=1}^r P_j$，则我们有

$$\begin{aligned}
&c(E\otimes F)\\
=&c\left(\bigoplus_{1\le i\le k, 1\le j\le r} L_i\otimes P_j\right)\\
=&\prod_{1\le i\le k, 1\le j\le r} c(L_i\otimes P_j)\\
=&\prod_{1\le i\le k, 1\le j\le r} (1+c_1(L_i)+c_1(P_j)),
\end{aligned}$$

若设$c_1(L_i) = x_i$，则有$c(E) = (1+x_1)\cdots(1+x_k)$，也即$c_1(E) = \sum_{i=1}^k x_i$，$c_2(E) = \sum_{i<j} x_ix_j$等，因此将上式展开，再利用$c_\cdot(E)$的表达式代入去做一些文章，就可以得到理想的公式。

但上述方法虽然具有一般性，但是计算略显繁琐，繁琐的计算一般会影响我们对几何现象的洞察，因此我们自然考虑去定义一个打包好的代数结构—也即chern特征：

定义7（Chern Character）：我们对任何一个线丛L，定义其Chern特征为

$$\mathrm{ch}(L) := \mathrm{e}^{c_1(L)} := 1 + c_1(L) + \frac{c_1(L)^2}{2!} + \frac{c_1(L)^3}{3!} + \cdots \in H^*(X;\mathbb{Q}).$$

> **注：**这里乘法表示cup积，且由于$c_1 \in H^2$，因此不会出现$c_1 \smile c_1 \equiv 0$的情况；并且这里实际上也是有限和，因为当$2k$超过$H^*(X)$的维数时，$c_1(L)^k=0$；这里选取$\mathbb{Q}$系数自然是因为求和的系数导致。

并且我们定义线丛直和的Chern特征为：

$$\mathrm{ch}(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) := \mathrm{e}^{c_1(L_1)} + \cdots \mathrm{e}^{c_1(L_k)},$$

为了方便起见，记$c_1(L_i)=x_i$，则实际上有

$$\mathrm{ch}(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_i^j}{j!} = k + s_1 + \frac{s_2}{2!} + \frac{s_3}{3!} + \cdots,$$

这里$s_i = s_i(x_1, \cdots, x_k) = x_1^i + \cdots + x_k^i$。

我们现在想把Chern特征的表达式推广定义到一般丛E上，因此我们需要将s_i用$c(E)$表示，注意到

$$c_l(E) = \sigma_l(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} x_{i_1} \cdots x_{i_l},$$

以及由Newton发现的定理，可知存在$s_i = f_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_k) = f_i(c_1, \cdots, c_k)$，特别的，我们有

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad \cdots$$

从而我们有

$$\mathrm{ch}_l(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) = \frac{s_l}{l!} = \frac{f_l(c_1, \cdots, c_k)}{l!},$$

从而我们可以定义

$$\boxed{\mathrm{ch}_l(E) := \frac{f_l(c_1(E), \cdots, c_k(E))}{l!}},$$

进而有

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(E) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{ch}_l(E) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_l(c_1(E), \cdots, c_k(E))}{l!} \\ &= \mathrm{rank} E + c_1(E) + \frac{c_1(E)^2 - 2c_2(E)}{2} + \cdots, \end{aligned}$$

其中f_l承如上述定义，至此我们完全定义了向量丛的Chern特征。$\#\#$

命题8：对于Chern特征，我们有如下相当优雅的计算公式：

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F), \quad \mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \smile \mathrm{ch}(F).$$

Proof：由分裂原则，我们不妨假设$E = \bigoplus_{i=1}^{k} L_i$，$F = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$，事实上由归纳法，我们只需证明对线丛$L, P$有$\mathrm{ch}(L \oplus P) = \mathrm{ch}(L) + \mathrm{ch}(P)$，而由chern特征的定义可知这是显然的。

进一步我们有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(E \otimes F) &= \operatorname{ch}\left(\bigoplus_{i=1}^{k} L_i \otimes \bigoplus_{j=1}^{r} P_j\right) \\
&= \operatorname{ch}\left(\bigoplus_{1\le i\le k,1\le j\le r} L_i \otimes P_j\right) \\
&= \sum_{1\le i\le k,1\le j\le r} \operatorname{ch}(L_i \otimes P_j) \\
&= \sum_{1\le i\le k,1\le j\le r} \mathrm{e}^{c_1(L_i\otimes P_j)} \\
&= \sum_{1\le i\le k,1\le j\le r} \mathrm{e}^{c_1(L_i)+c_1(P_j)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{c_1(L_i)}\right) \smile \left(\sum_{j=1}^{r} \mathrm{e}^{c_1(P_j)}\right) \\
&= \operatorname{ch}(E) \smile \operatorname{ch}(F),
\end{aligned}
$$

从而我们对一般的丛由分裂原则可知即证。□

¶**注意：**由于命题8的存在，我们经常从chern特征出发开始计算，而一旦知道chern特征$\operatorname{ch}(E) \in H^*(X;\mathbb{Q})$，我们可以立刻从$c_1(E)=\operatorname{ch}_1(E)$计算出第一chern类，紧接着由$\operatorname{ch}_2(E)=\dfrac{c_1(E)^2-2c_2(E)}{2}$可知

$$
c_2(E)=\frac{c_1^2(E)-2\cdot \operatorname{ch}_2(E)}{2},
$$

便可以确定出第二chern类，以此类推便能得到更高阶chern类。

关于chern类更多的计算，可以参考如下网站：[algebraic geometry - Quick question: Chern classes of Sym, Wedge, Hom, and Tensor - Mathematics Stack Exchange]

3.Chern类与SW类之间的关系

设$E\to X$为复向量丛，则对于

$$
c_i(E)\in H^{2i}(X;\mathbb{Z}),\quad w_j(E)\in H^j(E;\mathbb{Z}_2),
$$

利用$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2$的mod 2映射，$1\mapsto \bar{1}$，我们有这诱导了上链复形层面的mod 2映射

$$
\operatorname{Hom}(C_*(X),\mathbb{Z})\to \operatorname{Hom}(C_*(X),\mathbb{Z}_2),
$$

进而可知这导出了上同调水平的mod 2映射

$$
\bmod\ 2: H^k(X;\mathbb{Z})\to H^k(X;\mathbb{Z}_2),
$$

则在上述映射的含义下，我们有

$$
w_{2i}(E)=c_i(E)\mod 2,\quad w_{2i+1}(E)=0.
$$

> **有趣的注：**回忆一个向量丛可定向当且仅当第一SW类为0，上述事实表明复向量丛永远都是可定向的，这与我们之前所熟知的结果是吻合的，happy!

Proof：注意到利用万有性，设E为秩为k的复向量丛，则存在$f:X\to \operatorname{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty)$，使得$E=f^*\eta_k$，这里$\eta_k$为$\operatorname{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty)$上的典范丛。

从而可知$w_{2i+1}(E)=f^*w_{2i+1}(\eta_k)$，而熟知$\operatorname{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty)$没有奇数维胞腔，从而任意系数的奇数阶上下同调均为0，因此可知$w_{2i+1}(\eta_k)=0$，因此可知$w_{2i+1}(E)=0$。

现在我们考虑偶数的情形，与之前一样，我们首先考虑分裂原则，不妨假设$E=L_1\oplus\cdots\oplus L_k$，注意这里表示复线丛，也即实平面丛，注意到

$$
c_k(E)=c_k(L_1\oplus\cdots\oplus L_k)=c_1(L_1)\cdots c_1(L_k),
$$

以及结合复线丛L满足$w_1(L)=0$，可知

$$
w_{2k}(E)=w_{2k}(L_1\oplus\cdots\oplus L_k)=w_2(L_1)\cdots w_2(L_k),
$$

从而可知只需对线丛证明$w_2(L)=c_1(L)\mod 2$即可。我们仍借助万有丛的拉回去说明，理论上我们应该考虑$\mathbb{C}P^\infty$上的复线丛η_1，以及η_1的拉回，但是更方便的，我们可以考虑$\mathbb{C}P^1$上的典范线丛η，每个复线丛都可以看成是η的拉回，这是因为η_1可以看成是η的拉回。

考虑$\mathrm{Bl}:\eta=\{(\ell,v)\in\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}^2:v\in\ell\}\to\mathbb{C}^2$，也即$(\ell,v)\mapsto v$，这是一个逐纤维线性单射，这里我们采用的记号$\mathrm{Bl}$是因为这实际上是$\mathbb{C}^2$在0处的爆破映射（Blow up）。

Claim：$\mathrm{Bl}|_{\eta-0\text{截面}}\to\mathbb{C}^2-\{0\}$为微分同胚，并且实际上$\mathrm{Bl}^{-1}(0)=\mathbb{C}P^1\times\{0\}$。

> 这个断言其实很容易想象，以实射影平面与其典范线丛为模板，其典范线丛大概就形如一根直线绕着z轴不停的旋转上升，且旋转速度和上升速度相同，最后去掉零截面部分再向零截面投影拍平，即得到微分同胚。

注意到$\mathbb{C}P^1=S^2$，从而考虑圆周丛$S(\eta)=\{v\in\eta:|v|=1\}$，不难看到因为$S(\eta)$和$\eta$的零截面相交非空，因此其可典范的放在$\mathbb{C}^2-\{0\}$中，进而$S(\eta)$微分同胚于$\mathbb{C}^2-\{0\}$中的单位球，也即$S^3$，因此我们有$S(\eta)$微分同胚于$S^3$，进而实际上$S(\eta)\to\mathbb{C}P^1$这个圆周丛实际上就是Hopf纤维化。

现在视η为$\mathbb{C}P^1$上的实平面丛，则由分裂原则，考虑$\eta\to\mathbb{C}P^1$的实射影化$\mathbb{P}_\mathbb{R}(\mathbb{C}P^1)\xrightarrow{\pi}\mathbb{C}P^1$，以及自然的线丛分解$\pi^*\eta=\alpha\oplus\alpha^\perp$。

> 回忆$\mathbb{P}_\mathbb{R}(E)$就是X上的射影空间纤维丛，则逐纤维的看，X上的每一点都长着一个射影空间，而α限制在每个$\mathbb{R}P^1$上实际上就是$\mathbb{R}P^1$上的典范线丛γ。

要紧的观察：回想$\mathbb{P}_\mathbb{R}(\mathbb{C}P^1)$的构造，无非就是将$\eta$的每个纤维射影化（注意$\eta$的每个纤维是平面），这等价于对$S(\eta)$的每个圆周做射影化，而这恰好就是对$S(\eta)$的每个纤维$S^1$粘合对径点，换言之，即是在$S^3$的Hopf纤维化上的每个纤维上粘合对径点，不难从显式的表达中看出，这即S^3粘贴对径点，从而我们有$\mathbb{P}_R(\mathbb{C}P^1)$**微分同胚于**$\mathbb{R}P^3$，从而有$w_1(\alpha)\neq 0$（？？？？？）。

现在由η为复线丛，可知$w_1(\pi^*\eta)=0$，进而有$w_1(\alpha)=w_1(\alpha^\perp)$，因此$w_2(\pi^*\eta)=w_1(\alpha)w_1(\alpha^\perp)=w_1(\alpha)^2$，从而有$w_2(\eta)\neq 0$，进而为$H^2(\mathbb{C}P^1;\mathbb{Z}_2)$的基，回忆$c_1(\eta)[\mathbb{C}P^1]=-1$，从而我们有

$$w_2(\eta)=c_1(\eta)\mod 2,$$

综上我们完成了证明。□

习题

Problem 1：设E,L分别为秩为k的复向量丛和复线丛，用E,L的chern类表示$c_2(E\otimes L)$。

Solution：（方法一）我们利用chern特征，注意到$\mathrm{ch}(E\otimes L)=\mathrm{ch}(E)\mathrm{ch}(L)$，从而可知

$$\begin{aligned}&k+c_1(E\otimes L)+\frac{c_1(E\otimes L)^2-2c_2(E\otimes L)}{2}+\cdots\\=&\left(k+c_1(E)+\frac{c_1(E)^2-2c_2(E)}{2}+\cdots\right)\cdot\left(1+c_1(L)+\frac{c_1(L)^2}{2}+\cdots\right),\end{aligned}$$

因此可知

$$\begin{aligned}c_1(E\otimes L)=c_1(E)+k\cdot c_1(L)\\ \frac{c_1(E\otimes L)^2-2c_2(E\otimes L)}{2}=c_1(E)c_1(L)+\frac{k\cdot c_1(L)^2}{2}+\frac{c_1(E)^2-2c_2(E)}{2},\end{aligned}$$

> 我在红色地方犯蠢了，张量积的第一chern类并不是单纯的加，和whitney乘积公式区分！

从而整理可得，在$\mathbb{Q}$上，我们有

$$c_2(E\otimes L)=c_2(E)+(k-1)c_1(L)c_1(E)+\frac{k(k-1)}{2}c_1(L)^2.$$

利用万有空间上同调的无挠性，可知这在$\mathbb{Z}$上也成立。（更精准的讲，先把上述问题放在底空间为$Gr(k,\mathbb{C}^\infty)$上处理，因为其无挠，因此可下放到$\mathbb{Z}$上，进而通过自然性与拉回即可说明）

（方法二）我们利用分裂原则，不妨假设$E=L_1\oplus\cdots\oplus L_k$，则有

$$
\begin{aligned}
c_2(E\otimes L) &= c_2\left(\bigoplus_{i=1}^k L_i\otimes L\right)\\
&= c_1(L_1\otimes L)c_1\left(\bigoplus_{i=2}^k L_i\otimes L\right)+c_2\left(\bigoplus_{i=2}^k L_i\otimes L\right)\\
&= (c_1(L_1)+c_1(L))\left(\sum_{i=2}^k c_1(L_i)+(k-1)c_1(L)\right)+c_2\left(\bigoplus_{i=2}^k L_i\otimes L\right),
\end{aligned}
$$

因此我们类似有

$$
\begin{aligned}
&c_2\left(\bigoplus_{i=2}^k L_i\otimes L\right)-c_2\left(\bigoplus_{i=3}^k L_i\otimes L\right)\\
&= (c_1(L_2)+c_1(L))\left(\sum_{i=3}^k c_1(L_i)+(k-2)c_1(L)\right),
\end{aligned}
$$

综上归纳下去即有：

$$
\begin{aligned}
&c_2\left(\bigoplus_{i=1}^k L_i\otimes L\right)-c_2\left(L_k\otimes L\right)\\
&= (c_1(L_1)+c_1(L))\left(\sum_{i=2}^k c_1(L_i)+(k-1)c_1(L)\right)\\
&\quad +(c_1(L_2)+c_1(L))\left(\sum_{i=3}^k c_1(L_i)+(k-2)c_1(L)\right)\\
&\quad +\cdots\\
&\quad +(c_1(L_{k-1})+c_1(L))(c_1(L_k)+c_1(L)),
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&c_2\left(\bigoplus_{i=1}^k L_i\otimes L\right)\\
&= \sum_{i<j}c_1(L_i)c_1(L_j)+\frac{k(k-1)}{2}c_1(L)^2+c_1(L)\cdot(k-1)\sum_{i=1}^k c_1(L_i)\\
&= c_2(E)+(k-1)c_1(L)c_1(E)+\frac{k(k-1)}{2}c_1(L)^2.
\end{aligned}
$$

> 事实上，这里我犯蠢了，没必要去逐项展开，最简单的方法是利用
>
> $$c\left(\bigoplus_{i=1}^k L_i\otimes L\right)=\prod_{i=1}^k(1+c_1(L_i)+c_1(L)),$$
>
> 展开求二次项即可得出，没必要归纳展开。

综上我们有

$$\boxed{c_2(E\otimes L)=c_2(E)+(k-1)c_1(L)c_1(E)+\frac{k(k-1)}{2}c_1(L)^2.}$$

我们完成了计算。□

Problem 2：在证明线丛张量积的chern类为两者对应chern类之和时，我们用到了$\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty$到$\mathbb{C}P^\infty$的映射$f$使得$f^*\eta=\pi_1^*\eta\otimes\pi_2^*\eta$，试给出一个显式的$f$描述。

Solution：我们先证明$\mathbb{C}^\infty\otimes\mathbb{C}^\infty\cong\mathbb{C}^\infty$作为线性空间同构，其中用对角线排序$(i,j)$，$i,j\in\mathbb{N}$，设其对应的序号为$a_{ij}$，如$a_{11}=2$，$a_{12}=2$，$a_{21}=3$，$a_{13}=4$，$\cdots$，从而我们定义：

$$T:(z_1,\cdots,z_n,0,\cdots)\otimes(w_1,\cdots,w_m,0,\cdots)\mapsto(z_1w_1,z_1w_2,\cdots,z_nw_m,0,\cdots),$$

其中z_iw_j位于a_{ij}位置上。容易看到这是一个良定义（均只有有限项非零）的线性映射，且为双射，以及自然满足诱导了$f:\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty\to\mathbb{C}P^\infty$的映射，

$$f([z],[w]) := [T(z\otimes w)],$$

容易看见这为一个两定义的连续映射，下证明f即为所求，我们只需要逐纤维去构造同构即可，事实上，注意到

$$(f^*\eta)_{([z],[w])} = \eta_{f([z],[w])} = \eta_{[T(z\otimes w)]} = \{v = \lambda\cdot T(z\otimes w) : \lambda\in\mathbb{C}\},$$

而与此同时：

$$(\pi_1^*\eta\otimes\pi_2^*\eta)_{([z],[w])} = \eta_{[z]}\otimes\eta_{[w]} = \{x\otimes y : x = \mu z, y = \gamma w, \mu,\gamma\in\mathbb{C}\} = \{\lambda\cdot z\otimes w : \lambda\in\mathbb{C}\},$$

因此利用T是$\mathbb{C}^\infty\otimes\mathbb{C}^\infty\to\mathbb{C}^\infty$的线性同构以及定义的典范性，我们可逐纤维定义，再逐平凡化邻域定义，最后粘贴得到全局的丛映射，因此可知这为丛同构，即证。□

Problem 3: Let $U\subseteq(\mathbb{R}^\infty)^n$ be the set of linearly-independent n-tuples in the vector space $\mathbb{R}$. Show that U is contractible by describing an explicit contraction.

Proof: 我们定义右平移映射：$\sigma:(\mathbb{R}^\infty)^n\to(\mathbb{R}^\infty)^n$，也即：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{pmatrix},$$

进而考虑$H_t = t\cdot\sigma^n + (1-t)\cdot\mathrm{Id}$，从而可知$\sigma^n\simeq\mathrm{id}$，进而$\sigma$为同伦等价。现考虑常值映射

$$c\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix},$$

注意到我们定义

$$G_t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & (1-t)a_{11} & (1-t)a_{12} & (1-t)a_{13} & \cdots \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 & (1-t)a_{21} & (1-t)a_{22} & (1-t)a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & (1-t)a_{n1} & (1-t)a_{n2} & (1-t)a_{n3} & \cdots \end{pmatrix},$$

注意到显然每个t，G_t对应的元素仍在U中，因此我们可定义c和Id之间的同伦映射：

$$F: U\times I\to U,\quad F_t(u) := \begin{cases} H_{2t}(u), & t\le\frac{1}{2} \\ G_{2t-1}\circ H_1(u), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases},$$

易见$F_0(u) = H_0(u) = u$，$F_1(u) = G_1(u) = c$，因此我们真的给出了Id和c之间的同伦，显然此时Id为c的同伦逆，因此我们有U和c同伦等价，也即可缩。□

> **注：** 事实上，这也启发我们证明S^∞可缩，仍然考虑右平移映射，然后再考虑$(1,0,\cdots)$与之连线再单位化，从而便能证明S^∞可缩。

Problem 5: 证明一个秩为k的复向量丛E的结构群可以约化到$SU(k)$当且仅当$c_1(E)=0$。

Proof: 我们先证明一个基本的引理：$c_1(E) = c_1(\wedge^k E)$，事实上利用分裂原则，不妨假设$E = L_1\oplus\cdots\oplus L_k$，则利用$\wedge^{k+l}(E\oplus F) = \wedge^k E\otimes\wedge^l F$，我们可以立刻得到。

我们再证明E的结构群可以约化到$SU(k)$当且仅当$\wedge^k E$的结构群可以约化到$SU(1)$，事实上前者蕴含着局部上转移函数均满足$\varphi_{\alpha\beta}\in SU(k)$，从而可知在这个局部平凡化下，$\wedge^k E$的转移函数为$\det(\varphi_{\alpha\beta}) = 1$，从而可知后者成立。现在若对前者成立，则我们有$E$的结构群可以约化到$SL(k,\mathbb{C})$，利用正交化即可约化到$SU(k)$，从而我们证明了充要性。

又注意到线丛结构群约化到$SU(1)$当且仅当为平凡丛，因此我们可知命题成立。□