向量丛和示性类3—Stiefel-Whitney示性类 B

向量丛和示性类3—Stiefel-Whitney示性类 B

- w_1的构造
- 射影化丛和高阶SW类的构造
- 公理的验证
- 附录：正文省略的证明

我们在本节中主要给出SW示性类的具体构造，主要思路沿袭着Bott Tu的方法，大体流程如下：

1. 直接结合向量丛的定向性给出w_1的具体构造；
   - 验证w_1符合公理的几点假设；
2. 从E出发，构造射影化丛$\mathbb{P}(E)$，以及其特殊的子丛L_E也即万有线丛，说明$H^*(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2)$可以由$w_1(L_E)$所生成（注意此时$w_1$已经良好定义），进而借助$w_1(L_E)^k$可写成$1,\cdots,w_1(L_E)^{k-1}$的线性组合构造出$w_i$；
3. 论证上述定义的$w_i(E)$满足原先假设的几条公理；
   - 利用分裂原则证明Whitney乘积公式。

w_1的构造

对向量丛$E\to X$，我们本小节的目标是构造$w_1(E)\in H^1(X;\mathbb{Z}_2)$，很显然$E$的选取可以千变万化，我们不能寄希望于直接构造，更好的策略是循序渐进，从研究$H^1(X;\mathbb{Z}_2)$出发，看看其本身会不会和向量丛之间产生什么联系。

首先由泛系数定理：

$$H^1(X;\mathbb{Z}_2)=\mathrm{Hom}(H_1(X),\mathbb{Z}_2)\oplus\mathrm{Ext}(H_0(X),\mathbb{Z}_2)=\mathrm{Hom}(H_1(X),\mathbb{Z}_2),$$

结合$H_1(X)=\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$，与泛性质，我们有

$$\mathrm{Hom}(H_1(X),\mathbb{Z}_2)=\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(X),\mathbb{Z}_2)=\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{Z}_2),$$

任取$f:\pi_1(X)\to\mathbb{Z}_2$，我们有若$f$不满，则$\ker f=\pi_1(X)$，反之则由同态基本定理可知$\pi_1(X)/\ker f=\mathbb{Z}_2$因此$f$一一对应于$\ker f$一一对应于$\pi_1(X)$某个指数为2的子群，进而一一对应着$X$所有连通的2叶覆叠。而考虑$f=0$的情形，事实上对应着$X\sqcup X$这种平凡的二叶覆叠，从而我们综合以上讨论有

$$H^1(X;\mathbb{Z}_2)\overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow}\{\widetilde{X}:2\text{ cover of }X\}.$$

我们现在进一步**断言**：每一个二叶覆叠都一一对应着一个X上线丛的同构类，也即

$$\{\widetilde{X}:2\text{ cover of }X\}\overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow}\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(X).$$

> 断言的论证：我们实际上可以给出显式的对应，一方面任取实线丛L，赋予黎曼度量，我们考虑
>
> $$X_L:=\{u\in L:|u|=1\},$$
>
> 则容易看到这是一个纤维为两个点的纤维丛，因为$\pi^{-1}(x)=\{u_x,-u_x\}$，因此可知这是一个二叶覆叠。
>
> 另一方面任取二叶覆叠空间Y，我们构造

> $$L_Y := Y \times \mathbb{R}/\sim, \quad (y,t)\sim(-y,-t),$$
>
> 这里$-y$表示$\mathbb{Z}_2$在覆叠空间Y上的自然作用，也即送到轨道上的另一点。
>
> 容易看到这给出了一一对应。

Summary：综合上文，我们得到了如下的一一对应：

$$\boxed{W:\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(X)\overset{\text{1-1}}{\Longleftrightarrow} H^1(X;\mathbb{Z}_2)}$$

> **注**：以上一一对应，事实上给出了X上的线丛的分类，也即W是线丛上的完全不变量，进而可知单连通的拓扑空间实际上只有平凡线丛。

从而我们现在可以对所有线丛L，定义$w_1(L):=W(L)$。推而广之，为了定义在秩为k的向量丛上，我们只需要将其转化为线丛即可，也即考虑$\wedge^k E$，故我们有如下的**正式定义**：

定义1（w_1）：对任意X上秩为k的向量丛E，我们定义其第一个Stiefel-Whitney示性类为

$$w_1(E):=W(\wedge^k E).$$

但遗憾的是上述等价过程过于冗长，直接从W出发我们很难导出一些有价值的性质，为此我们先不加证明的陈述如下一个便于计算的w_1等价定义，其等价性的证明我们留在附录中。

命题2：对任何$u:S^1\to X$，我们有$[u]$在$H^1(X;\mathbb{Z}_2)$中的同调类满足：

$$\langle w_1(E),[u]\rangle=\begin{cases}0 & \text{if } u^*E \text{ orientable},\\ 1 & \text{if } u^*E \text{ unorientable}.\end{cases}$$

> 这个命题的证明基本上是点拓层面的推导，直观想来若丛可定向那么势必会有其对应着的二叶覆叠是平凡的（回想每一个流形都有可定向二叶覆叠，若其本身可定向，那么这个二叶覆叠就是不交并），而倒推回去，平凡的二叶覆叠就对应着$f\equiv 0$的映射，也即H^1中的0了。

我们现在从以上两个等价定义出发，导出一些必要的性质，特别的，一些理应满足的公理：

性质3：我们对w_1有

（1）自然性：对任何$f:Y\to X$，有$w_1(f^*E)=f^*w_1(E)$；

（2）若$L_1,L_2\in\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(X)$，则$w_1(L_1\otimes L_2)=w_1(L_1)+w_1(L_2)$；

（3）Whitney乘积公式：$w_1(E\oplus F)=w_1(E)+w_1(F)$；

（4）单位性：对于$\mathbb{R}P^1$上的典范线丛η_1，有$w_1(\eta_1)=a(\neq 0)\in H^1(\mathbb{R}P^1;\mathbb{Z}_2)$。

Proof：（1）利用命题2，则这个性质的证明是直接的，任取$u:S^1\to Y$，则有

$$\langle w_1(f^*E),[u]\rangle=\begin{cases}0 & \text{if } u^*f^*E \text{ orientable},\\ 1 & \text{if } u^*f*E \text{ unorientable}.\end{cases}$$

与此同时，我们有

$$\langle f^*w_1(E),[u]\rangle=\langle w_1(E),[f\circ\alpha]\rangle=\begin{cases}0 & \text{if } (f\circ u)^*E \text{ orientable},\\ 1 & \text{if } (f\circ u)^*E \text{ unorientable}.\end{cases}$$

那么两者相等归根结底就源自于$(f\circ u)^*=u^*f^*$；

（2）任取$\alpha:S^1\to Y$，则由之前的论证，$\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1)=\mathbb{Z}_2$，我们可知不可定向与不可定向线丛的张量积为可定向的平凡线丛（对应于$1+1=0$），从而这基本上就是显然的了；

（3）我们现在用原始定义和上一性质，则有

$$
\begin{aligned}
&w_1(E\oplus F)=W(\wedge^{k+l}(E\oplus F))\\
&=W(\wedge^k E\otimes\wedge^l F)=w_1(\wedge^k E\otimes\wedge^l F)\\
&=w_1(\wedge^k E)+w_1(\wedge^l F)=W(\wedge^k E)+W(\wedge^l F)\\
&=w_1(E)+w_1(F),
\end{aligned}
$$

其中我们用到了一个线性代数中的事实：对k维线性空间E和l维线性空间F，我们有

$$\wedge^{k+l}(E\oplus F)=\wedge^k E\otimes\wedge^l F,$$

这用基写出来基本上就是显然的，我们略去；

（4）我们再次利用命题2，利用$\mathbb{R}P^1$和S^1同胚，我们可以将η_1看成是S^1上的线丛，而这就是Mobius带，是不可定向的，因此我们知道$w_1(\eta_1)\neq 0$，即证。

综上我们完成了证明。□

小结： 我们在这一小节中给出了第一个Steifel-Whitney实行类的构造，其核心想法是先对线丛定义，再将一般丛作外积划归为线丛，因此这也带给我们一个无法从公理中导出的性质：

$$w_1(E)=w_1(\wedge^k E),\quad \mathrm{rank}E=k.$$

应用： 从w_1的构造中我们可以看出，如果向量丛E是可定向的，则$w_1(E)=1$，因为E的可定向性与$\wedge^k E$是一致的，从而又由TM作为向量丛可定向等价于M可定向，因此我们知道$w_1(TM)=1$当且仅当M可定向。从而回忆$w_1(T\mathbb{R}P^n)=\binom{n}{1}a=na$，因此我们利用SW类再次说明了偶数维实射影空间不可定向，奇数维可定向。

射影化丛和高阶SW类的构造

> 为了获得高阶SW类的构造，我们先（重复的）从$\mathbb{R}P^n$上的典范线丛η_n出发，整理一些观察与信心。我们目前已经良好定义了的，是$w_1(\eta_1)=a\neq 0$，利用自然的嵌入$i_1^n:\mathbb{R}P^1\to\mathbb{R}P^n$，我们不难得到$\eta_1=i_1^{n*}\eta_n$，又这个嵌入映射诱导了$H^1(\cdot;\mathbb{Z}_2)$水平上的同构，我们可知$w_1(\eta_n)=(i_1^{n*})^{-1}w_1(\eta_1)=a\in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$，且$a\neq 0$。
>
> 而回顾$H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[a]/(a^{n+1})$，从而我们实际上可以认为
>
> $$H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[w_1(\eta_n)]/(w_1(\eta_n)^{n+1}),$$
>
> 从而对于（即将定义的）$\mathbb{R}P^n$上向量丛的高阶SW类来说，其总可以被$w_1(\eta_n)$所表示，因此这启发我们对于任意的向量丛E，考虑一个类似于射影空间的东西，用其上同调类来给出E上高阶SW类的构造。

定义4（向量丛的射影化）： 设$E\to X$为秩为k的向量丛，我们定义其射影化为X上的纤维丛$\mathbb{P}(E)$，其中每个纤维为

$$\mathbb{P}(E)_x:=\{\text{lines through the orign in }E_x\}=\mathbb{P}(E_x),$$

这里对线性空间V，$\mathbb{P}(V)$就表示其所有一维子空间组成的集合，特别的，$\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}P^{n-1}$。因此我们可以看出$\mathbb{P}(E)$事实上是一个纤维为$\mathbb{R}P^{k-1}$的纤维丛。我们记$\alpha:\mathbb{P}(E)\to X$，$E_x\ni\ell_x\mapsto x$。

> 尽管$\mathbb{P}(E)$本身也是一个丛，但我们再后续过程中，只是把它当作一个导出的流形，作为类比，我们可以总取X为单点空间，则$\mathbb{P}(E)$就真的只是实射影空间了。

类比$\mathbb{R}P^n$上典范线丛η_n的构造，我们也可以构造出$\mathbb{P}(E)$上的一个万有线丛：

定义5（万有线丛）： 记号承接上文，我们有

$$\alpha^*E=\{(\ell_x,e_x)\in\mathbb{P}(E)\times E:\alpha(\ell_x)=\pi(e_x)=x\},$$

我们定义$\mathbb{P}(E)$上的万有线丛L_E为：

$$L_E := \{(\ell_x, e_x) \in \mathbb{P}(E) \times E : \alpha(\ell_x) = \pi(e_x) = x, \boxed{e_x \in \ell_x}\},$$

容易看见L_E为α^*E的子丛，且$L_E|_{\mathbb{P}(E)_x} =: \eta_x$，这里$\eta_x$可以看成是实射影空间$\mathbb{P}(E)_x = \mathbb{P}(E_x)$上的典范线丛。

事实：由这一小节的导言，我们知道$1, w_1(\eta_x), \cdots, w_1(\eta_x)^{k-1}$实际上是$H^*(\mathbb{P}(E_x);\mathbb{Z}_2)$的一组基，也即$H^*(\mathbb{P}(E)_x;\mathbb{Z}_2)$的一组基。

上述事实告诉了我们，$\mathbb{P}(E)$这个纤维丛在每一根纤维上的基，那么回忆如下的Leray-Hirsch定理：

> **Leray-Hirsch定理：**若$F \to E \xrightarrow{\pi} M$为纤维丛，$M$存在有限好覆盖，以及$e_1, \cdots, e_r \in H^*(E;\mathbb{Z}_2)$，使得对任何$x \in M$，纤维$E_x \cong F$到$E$的自然嵌入映射$i_x$满足$i_x^*e_1, \cdots, i_x^*e_r$为$H^*(F;\mathbb{Z}_2)$的一组基，则我们有
>
> $$H^*(E;\mathbb{Z}_2) \cong H^*(M;\mathbb{Z}_2) \otimes H^*(F;\mathbb{Z}_2) \cong H^*(M;\mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2\{e_1, \cdots, e_r\},$$
>
> 且同构可写成：$\pi^*\mathsf{m} \smile e_i \leftarrow \mathsf{m} \otimes e_i$.
>
> **Proof：**标准的MV归纳法，可参考Bott Tu。

因此注意到η_x正是L_E在$\mathbb{P}(E)_x$上的限制，从而$w_1(\eta_x)$也是$w_1(L_E)$在每个纤维上的限制，因此可知我们有$\mathbb{P}(E)$上的整体上同调元素$1, w_1(L_E), \cdots, w_1(L_E)^{k-1}$（回忆示性类是取值于底空间的上同调环的），使得其限制在每根纤维$\mathbb{P}(E)_x$上为$1, w_1(\eta_x), \cdots, w_1(\eta_x)^{k-1}$，为这个纤维上同调的一组基，因此我们套用Leray-Hirsch定理，可得：

定理6（射影化向量丛的上同调）：记号承接上文，注意到w_1已经被良好定义，我们有

$$H^*(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2) \cong H^*(X;\mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2\{1, w_1(L_E), \cdots, w_1(L_E)^{k-1}\}.$$

且$\mathsf{x} \otimes w_1(L_E)^i \mapsto \alpha^*\mathsf{x} \smile w_1(L_E)^i$，这里$\alpha^* : H^*(X;\mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2)$给出了单射嵌入。

> 其中需要时刻记住L_E是$\mathbb{P}(E)$上的线丛，$\mathbb{P}(E)$是X上的纤维丛，不能混淆。

现在，我们可以给出E上高阶SW类的定义了，注意到这些都是$H^*(X;\mathbb{Z}_2)$中的元素，因此自然的，我们有：

定义7（高阶SW类）：由$w_1(L_E)^k \in H^*(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2)$，则结合上一定理，存在$\mathsf{x}_i \in H^i(X;\mathbb{Z}_2)$使得

$$w_1(L_E)^k = \alpha^*\mathsf{x}_1 \cdot w_1(L_E)^{k-1} + \cdots + \alpha^*\mathsf{x}_{k-1} \cdot w_1(L_E) + \alpha^*\mathsf{x}_k,$$

从而我们定义E的第i个Stiefel-Whitney示性类为$w_i(E) := \mathsf{x}_i$，也即我们约定了：

$$w_1(L_E)^k = \alpha^*w_1(E) \cdot w_1(L_E)^{k-1} + \cdots + \alpha^*w_{k-1}(E) \cdot w_1(L_E) + \alpha^*w_k(E).$$

> 关于以上定义，我们有以下几点需要澄清：
>
> 1. 由α^*为单射，从而x_i的选取是唯一的；
> 2. 上式中我们只定义了$w_1(E), \cdots, w_k(E)$，对于更高阶的，我们自然定义为0；
> 3. 上述定义重复给出了$w_1(E)$，因此我们需要先说明这和原来的定义是吻合的，而回忆w_1的定义实际上是在线丛定义的，因此只需要对线丛说明即可，具体细节参见附录。

小结：在本节中我们给出了SW类的一个完整构造，这需要用到向量丛的射影化，总体而言并不直观，但我们需要的往往也并不是底层的构造，而是我们将在下节中验证的公理。

公理的验证

性质8（自然性）：对任何$f : Y \to X$，我们有$w_i(f^*E) = f^*w_i(E)$。

Proof：我们首先说明$\mathbb{P}(f^*E)=f^*\mathbb{P}(E)$，这一点逐纤维看即可，任取$y\in Y$，我们有$\mathbb{P}(f^*E)_y=\mathbb{P}(E_{f(y)})$，$f^*\mathbb{P}(E)_y=\mathbb{P}(E)_{f(y)}$，从而每个纤维自然相等，不难说明两者相同。

设F为使得如下图表交换的映射：

$$
\begin{tikzcd}
f^*\mathbb{P}(E) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathbb{P}(E) \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

下面我们想要说明：$F^*L_E=L_{f^*E}$，回忆定义，我们逐纤维的去看，

$$L_{f^*E}=\{(\ell_y,e_y)\in\mathbb{P}(f^*E)\times f^*E:\alpha(\ell_y)=\pi(e_y)=y,e_y\in\ell_y\}$$

....不容易说清楚

我们下面将精力放在Whitney乘积公式的证明上，为此，我们先陈述并证明一个重要的分裂原则：

定理9（分裂原则）：设$\pi:E\to X$为秩为k的实向量丛，则存在拓扑空间$S(E)$以及映射$\sigma:S(E)\to X$使得：

1. E在$F(E)$上的拉回丛σ^*E可以分解成线丛的直和，也即存在$F(E)$上的线丛$L_1,\cdots,L_k$，有$\sigma^{-1}(E)=L_1\oplus\cdots\oplus L_k$；
2. $\sigma^*:H^*(X;\mathbb{Z}_2)\to H^*(F(E);\mathbb{Z}_2)$为单射。

Proof：我们利用向量丛的射影化，注意到如下的归纳过程：

df7fdf9cb6332c8fb8647371f2e96ea

又每一个α_i^*均为单射，从而复合得到的也是单射，即证。$\square$

> 这样的空间 $F(E)$我们往往称之为E的分裂流形，这个分裂流形的存在会帮助我们将很多有关向量丛的同调问题划归为线丛直和的情形。

断言：若有$w(\sigma^*E\oplus\sigma^*F)=w(\sigma^*E)\cdot w(\sigma^*F)$，则有$w(E\oplus F)=w(E)\cdot w(F)$。

> 利用σ^*为单射以及SW类的自然性即可看出。

因此更进一步，我们只需要对$E=L_1\oplus\cdots\oplus L_k$的情形证明$w(E)=w(L_1)\cdots w(L_k)$即可。回忆$w_i(E)$满足

$$w_1(L_E)^k=\alpha^*w_1(E)\cdot w_1(L_E)^{k-1}+\cdots+\alpha^*w_{k-1}(E)\cdot w_1(L_E)+\alpha^*w_k(E),$$

从而若能证明

$$(w_1(L_E)+w_1(\alpha^*L_1))\cdots(w_1(L_E)+w_1(\alpha^*L_k))=0,\quad(\star\star)$$

展开对比系数（注意$\mathbb{Z}_2$系数），结合α^*为单射即可证明$w(E)=w(L_1)\cdots w(L_k)$。

Proof of $(\star\star)$：注意到：L_E是$\alpha^*E=\alpha^*L_1\oplus\cdots\oplus\alpha^*L_k$的子丛，设$s_i$为$L_E$向$\alpha^*L_i$上的投影映射，从而$s_i$实际上是一个$\mathrm{Hom}(L_E,\alpha^*L_i)=L_E^*\otimes\alpha^*L_i$的一个截面，由$(L_E)_y$是$(\alpha^*E)_y$的一个一维子空间，从而$s_i|_y$上不可能同时为0，这蕴含着$\mathbb{P}(E)$上的开集族：

$$U_i:=\{y\in\mathbb{P}(E):s_i(y)\neq 0\}$$

构成了$\mathbb{P}(E)$上的一组开覆盖，并且显然由U_i的定义可知，$L_E^*\otimes\alpha^*L_i|_{U_i}$上为平凡线丛，因为$s_i$在$U_i$上给出了这个丛一个处处非零的截面，因此可知$i_{U_i}^*w_i(L_E^*\otimes\alpha^*L_i)=0$，进而在如下的相对上同调群的长正合列中，可知存在$\beta_i\in H^1(\mathbb{P}(E),U_i;\mathbb{Z}_2)$，使得

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}(E),U_i;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^1(U_i;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \cdots \\
 & \beta_1 \arrow[r, mapsto] & w_1(L_E^*\otimes\alpha^*L_i) \arrow[r, mapsto] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

进而我们考虑相对上同调群cup积，也有如下交换图：

$$
\begin{tikzcd}
(\beta_1,\cdots,\beta_k) \arrow[r, mapsto] & 0 & \\
H^1(\mathbb{P}(E),U_1;\mathbb{Z}_2)\times\cdots\times H^1(\mathbb{P}(E),U_k;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d] & H^1(\mathbb{P}(E),U_1\cup\cdots\cup U_k) \arrow[d] & =H^1(\mathbb{P}(E),\mathbb{P}(E))=0 \\
H^1(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2)\times\cdots\times H^1(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\smile"] & H^k(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}_2) &
\end{tikzcd}
$$

因此我们由交换图立即可得

$$w_1(L_E\otimes\alpha^*L_1)\cdots w_1(L_E\otimes\alpha^*L_k)=0,$$

回忆之前证明的线丛版本的Whitney乘积公式，我们立刻完成了证明。□

附录：正文省略的证明

命题2：对任何$\alpha:S^1\to X$，我们有$[\alpha]$在$H^1(X;\mathbb{Z}_2)$中的同调类满足：

$$\langle w_1(E),[\alpha]\rangle=\begin{cases}0 & \text{if }\ \alpha^*E\ \text{ orientable,}\\ 1 & \text{if }\ \alpha^*E\ \text{ unorientable.}\end{cases}$$

定义7中w_1的定义和之前的定义吻合：