

南开大学

本科生毕业论文（设计）

中文题目： 带有正数量曲率度量的辛四维流形的分类

外文题目： Classification of the symplectic four-manifolds with
a metric of positive scalar curvature

学 号： 2113696

姓 名： 朱凯

年 级： 2021 级

学 院： 数学科学学院

系 别： 数学系

专 业： 数学与应用数学（伯苓班）

完成日期： 2025 年 5 月

指导教师： 朱朝锋 教授

关于南开大学本科生毕业论文（设计）的声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在指导教师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或没有公开发表的作品内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

本人声明：该学位论文是本人指导学生完成的研究成果，已经审阅过论文的全部内容，并能够保证题目、关键词、摘要部分中英文内容的一致性和准确性。

学位论文指导教师签名：

年 月 日

摘 要

本文主要介绍带有正数量曲率度量的辛四维流形的分类, 更具体的, 我们会证明其只能是复射影空间 $\mathbb{C}P^2$ 或者爆破辛直纹面.

证明主要分为两部分: 第一部分我们会介绍辛流形中的伪全纯曲线的技术, 并利用伪全纯曲线模空间证明 D.McDuff 的有理或直纹定理, 也即若辛四维流形包含自相交数非负的辛嵌入球面, 则其一定是复射影空间 $\mathbb{C}P^2$ 或者爆破直纹面. 在这一部分中, 我们会首先介绍伪全纯曲线模空间的定义, 紧化以及横截性等基本结果, 然后介绍辛爆破和 Lefschetz 纤维/铅笔等辛流形的构造, 最后给出 McDuff 定理的证明.

第二部分我们会介绍四维流形上的 Seiberg-Witten 不变量, 并利用其将辛条件和正数量曲率度量条件联系起来, 证明带有正数量曲率度量的辛四维流形一定会包含一个自相交数非负的辛嵌入球面, 从而结合第一部分中证明的 McDuff 的有理或直纹定理, 我们可以完成本文主定理的证明. 在这一部分中, 我们会首先介绍 Seiberg-Witten 不变量的基本定义, 以及一些基本性质, 如带有正数量曲率度量以及辛结构的四维流形的 Seiberg-Witten 不变量, 然后利用 Seiberg-Witten 不变量的穿墙公式以及 C.Taubes 建立的 Seiberg-Witten 不变量与 Gromov-Witten 不变量之间的关系找到自相交数非负的辛嵌入球面.

本文旨在用最少的前置知识介绍规范理论与伪全纯曲线这两项技术在低维辛拓扑中的应用, 并且展示本文主定理一个清晰简明的证明.

关键词: 辛四维流; 伪全纯曲线; Seiberg-Witten 不变量

Abstract

This paper mainly introduces the classification of the symplectic four manifolds with a metric of positive scalar curvature, more precisely, they will only be complex projective space $\mathbb{C}P^2$ and blow-up ruled surface.

The proof contains two parts: in the first part we will introduce the technique of pseudo-holomorphic curves, and use the moduli space of pseudo-holomorphic curves to prove D. McDuff's rational or ruled theorem, i.e., if a symplectic four manifold contains a symplectically embedded sphere with non-negative self intersections, then it must be $\mathbb{C}P^2$ or blow-up ruled surface. In this part, we will firstly talk about the definition of the moduli space of pseudo-holomorphic curves, the compactification and transversality of the moduli spaces, then we will introduce the symplectic blow-up and Lefschetz fibration/pencil, and finally give the proof of McDuff's theorem.

In the second part, we will introduce the Seiberg-Witten invariants on four dimensional manifolds and use them to establish a connection between the symplectic condition and the condition of positive scalar curvature metrics. We will prove that a symplectic four-manifold with a positive scalar curvature metric must contain a symplectically embedded sphere with non-negative self-intersection number. Combining this with McDuff's rational or ruled theorem proved in the first part, we can complete the proof of the main theorem of this paper. In this part, we will first introduce the basic definition of Seiberg-Witten invariants and some fundamental properties, such as the Seiberg-Witten invariants of four-manifolds with positive scalar curvature metrics and symplectic structures. Then, by using the wall-crossing formula for Seiberg-Witten invariants and the relationship between Seiberg-Witten invariants and Gromov-Witten invariants established by C. Taubes, we will identify a symplectically embedded sphere with non-negative self-intersection number.

This paper aims to introduce, with minimal prerequisites, the applications of gauge

theory and pseudo-holomorphic curve techniques in low-dimensional symplectic topology, while presenting a clear and concise proof of the main theorem.

Key Words: Symplectic four manifold; Pseudo holomorphic curve; Seiberg-Witten invariant

目 录

摘要	I
Abstract	II
目录	IV
第一章 导论	1
第一节 辛流形与近复流形	1
第二节 辛嵌入球面与 McDuff 分类定理	4
第三节 Seiberg-Witten 不变量与辛四维流形	9
第二章 伪全纯曲线	11
第一节 近复结构	11
第二节 伪全纯曲线	14
第三节 伪全纯曲线的模空间	17
2.3.1 模空间初探	17
2.3.2 单参数模空间	23
2.3.3 带标记点限制的模空间	25
第四节 Gromov 紧化与节点曲线	28
第五节 四维辛流形的伪全纯曲线模空间	31
2.5.1 自动横截性	31
2.5.2 正相交与联结不等式	31
第六节 嵌入球面模空间的紧性与紧化定理	33
2.6.1 嵌入球面在约束问题模空间中的局部结构	33
2.6.2 紧性与紧化定理	34
2.6.3 指标计算	38
2.6.4 $m = 0$ 情形的紧性 (化) 定理	42
2.6.5 一般情形的紧性 (化) 定理	44
第七节 本章小结	46
第三章 辛流形的构造	48
第一节 爆破与例外球面	48

3.1.1 (近) 复流形上的爆破	48
3.1.2 辛流形上的爆破	51
3.1.3 辛球面与近复球面	54
第二节 Lefschetz 纤维与 Lefschetz 铅笔	56
3.2.1 光滑范畴	57
3.2.2 辛范畴	60
第四章 McDuff 有理或直纹定理	62
第一节 定理 D 的证明	62
第二节 定理 B 的证明	66
第五章 Seiberg-Witten 不变量	68
第一节 Clifford 模与 Dirac 算子	68
5.1.1 Clifford 代数	68
5.1.2 切丛的 Clifford 模	70
5.1.3 Dirac 算子的基本性质	72
第二节 四维流形上的 Spin^c 结构	75
第三节 Seiberg-Witten 模空间	80
5.3.1 自/反对偶形式与平方映射	80
5.3.2 Seiberg-Witten 方程	82
5.3.3 可约与不可约解	84
第四节 SW 不变量与基本性质	88
5.4.1 基本定义	88
5.4.2 正数量曲率度量的障碍	91
第五节 辛四维流形的 SW 不变量	92
5.5.1 辛四维流形上的 Spin^c 结构	93
5.5.2 插叙: 近复几何回顾	94
5.5.3 辛四维流形上的 SW 方程	97
第六节 本章小结	105
第六章 SW 不变量与伪全纯曲线	106
第一节 穿墙公式	108
第二节 定理 A 的证明 (极小情形)	112
6.2.1 情形 1: $2\chi(X) + 3\sigma(X) > 0$	114
6.2.2 情形 2: $2\chi(X) + 3\sigma(X) = 0$	115

6.2.3 情形 3: $2\chi(X) + 3\sigma(X) < 0$	116
第三节 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 的辛四维流形.....	118
第四节 浸入球面与嵌入球面	122
第五节 定理 A 的证明 (一般情形)	125
第六节 本章小结	129
第七章 猜想与展望	130
第一节 黎曼几何与辛几何	130
第二节 辛流形的分类与 Kodaira 维数.....	131
参考文献	135
致 谢	CXXXVIII

第一章 导论

本文旨在给出如下定理的证明，

定理 A 设 (X, ω) 为一个闭连通辛四维流形，则 (X, ω) 上允许正数量曲率度量当且仅当 (X, ω) 辛同构于 $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{\text{FS}})$ 或者是爆破辛直纹面。

定理A揭示了带有正数量曲率度量的辛四维流形的完整分类，我们在本章中主要会概要介绍上述定理所涉及的概念，以及证明该定理的大致思路，完整证明我们将在后续章节中逐渐给出。

第一节 辛流形与近复流形

定义 1.1 设 M^{2n} 为 $2n$ 维光滑流形，若其上存在非退化的 2-形式 ω ，则称 (M, ω) 为辛流形， ω 为 M 的辛形式。若对子流形 $S \subset M$ 有 $\omega|_{TS}$ 上为 S 上的辛形式，则称 S 是 M 的辛子流形，嵌入 $i: S \hookrightarrow M$ 称为辛嵌入。

注 1.2 容易看到对于辛形式 ω ，有 $[\omega] \in H_{\text{dR}}^2(X)$ ，且 $[\omega] \neq 0$ ，进而 $b_2(X) = \dim H_{\text{dR}}^2(X) > 0$ 。

事实上更进一步，非退化性保证了 $\int_X \omega \wedge \omega > 0$ ，因此可知存在黎曼度量 g 使得 $\omega \in \mathcal{H}^+(X, g)$ ，进而可知辛四维流形 $b_2^+(X) \geq 1$ 。(关于 $\mathcal{H}^+(X, g)$ 与 b_2^+ 的定义可参考 5.3.1 小节)

定义 1.3 辛流形 (M_0, ω_0) 与 (M_1, ω_1) 称为辛同构，如果存在微分同胚 $\varphi: M_0 \rightarrow M_1$ 使得 $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$ 。

定义 1.4 辛流形 (M_0, ω_0) 与 (M_1, ω_1) 称为辛形变等价，如果存在微分同胚 $\varphi: M_0 \rightarrow M_1$ 使得存在 M_0 上的一族单参数辛形式 $\{\tilde{\omega}_t\}_{t \in [0,1]}$ ，使得

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0, \quad \tilde{\omega}_1 = \varphi^* \omega_1.$$

例 1.5 辛流形 (M, ω) 与 $(M, c\omega)$ 总是辛形变等价的，这里 $c > 0$ 为一常数。

我们主要关心的对象是四维辛流形 X 以及其中的辛嵌入曲面 S . 对于四维流形, 我们可以定义 X 上的相交形式:

$$\begin{aligned} H^2(X) \times H^2(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B := \langle A \smile B, [X] \rangle. \end{aligned}$$

事实上, 由熟知的代数拓扑结果, 存在两个横截相交的嵌入曲面 S_A, S_B 使得其基本类恰好分别为 $\text{PD}.A, \text{PD}.B$, 从而可以将 $A \cdot B$ 定义为 S_A 与 S_B 的代数相交数. 对于嵌入曲面 S , 我们称 $[S] \cdot [S]$ 为 S 的自相交数.

定义 1.6 设 $\pi: X \rightarrow \Sigma$ 为光滑纤维丛, 且底空间 Σ 与纤维均为闭可定向的连通曲面. 我们称辛四维流形 (X, ω) 为辛纤维丛, 如果 ω 限制在每个纤维上都是辛形式. 特别的, 如果纤维亏格为 0, 也即同胚于球面 S^2 , 我们称 (X, ω) 为一个辛直纹面.

注 1.7 若 (X, ω) 为一个辛纤维丛, 那么 X 的每根纤维都是 (X, ω) 的一个辛子流形, 并且自交数为 0.

例 1.8 设 σ_1, σ_2 为 S^2 上的任意两个辛形式, 则显然有

$$(S^2 \times S^2, \sigma_1 \oplus \sigma_2)$$

为一个辛直纹面.

定义 1.9 若 (X, ω) 为辛流形, 则 $\tilde{X} := X \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上也存在辛结构 $\tilde{\omega}$, 称 $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ 为 (X, ω) 的辛爆破 (*blow-up*), 称 (X, ω) 为 $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ 的辛坍缩 (*blow-down*). 对辛流形中的辛嵌入球面 E , 若有 $[E] \cdot [E] = -1$, 则称 E 为例外球面.

注 1.10 我们将会在第三章展开讨论辛爆破与辛坍缩.

定义 1.11 我们称辛四维流形为

- 爆破辛直纹面, 如果其是辛直纹面或为辛直纹面的若干次辛爆破.
- 辛有理曲面, 如果其是 $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$ 通过一系列辛爆破, 辛坍缩以及辛形变等价得到的.

- 极小的，如果其不是任何辛四维流形的辛爆破，等价地，不包含任何例外球面.

例 1.12 我们已经看到 $S^2 \times S^2$ 是一个辛直纹面，但同时利用基本的拓扑技术 (如 Kirby 演算^[1]), 可以证明 $(S^2 \times S^2) \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 和 $\mathbb{C}P^2 \# 2\overline{\mathbb{C}P^2}$ 是微分同胚的，从而有 $S^2 \times S^2$ 可视为 $\mathbb{C}P^2$ 先进行两次辛爆破再进行一次辛坍缩得到，因此 $S^2 \times S^2$ 也是一个辛有理曲面.

同时也不难证明 $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 微分同胚于 $S^2 \tilde{\times} S^2$ ，其后者示 S^2 上的非平凡 S^2 丛，因此 $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 既是辛直纹面，也是辛有理曲面.

Gromov 发现利用近复结构研究辛流形，可以让原本充满柔软性的辛几何世界拥有可以依靠的强大不变量，因此下面我们来介绍一下近复流形的有关概念：

定义 1.13 设 M 为 $2n$ 维光滑流形， $J \in \Gamma(\text{End}(TM))$ 称为 M 的一个近复结构，如果 $J^2 = -\text{id}$ ， (M, J) 称为近复流形. M 上全体近复结构构成的集合记为 $\mathcal{J}(M)$.

设 S 为 M 的光滑子流形，若 $J|_{TS}$ 为 S 上的近复结构，则称 S 为 M 的近复子流形.

定义 1.14 设 (M, ω) 为辛流形， J 为 M 上的近复结构，则称

- J 是 ω -控制 (*tame*) 的，如果如果对于任意 $X \in \Gamma(TM)$ ，若 $X_p \in T_p M$ 非零，则有

$$\omega(X_p, JX_p) > 0.$$

(M, ω) 上全体 ω -控制的近复结构构成的集合记为 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$.

- J 是 ω -相容 (*compatible*) 的，如果由

$$g_J(X, Y) := \omega(X, JY), \quad X, Y \in \Gamma(TM),$$

定义的 g_J 是 M 上的黎曼度量.

(M, ω) 上全体 ω -相容的近复结构构成的集合记为 $\mathcal{J}(M, \omega)$.

一个基本的结果是：

定理 1.15 (Gromov) 对辛流形 (M, ω) ，拓扑空间 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 与 $\mathcal{J}(M, \omega)$ 均非空且可缩.

因此给定辛流形 (M, ω) ，由定理1.15可知任取 ω -控制的近复结构， (TM, J) 为复向量丛，因此可以定义 $c_1(TM, J) \in H^2(M; \mathbb{Z})$. 进一步由 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 可缩从而道路连通，可知 $c_1(TM, J)$ 不依赖于近复结构的选取，因此我们可以良好定义辛流形的**第一 Chern 类** $c_1(M, \omega) := c_1(TM, J)$.

在结束本节之前，我们先在粗略描绘一下证明定理A的思路，其很大一部分依赖于如下的分类定理：

定理 B (McDuff [2]) 设 (X, ω) 为一个闭连通的辛四维流形，且包含一个辛嵌入球面 $S \subset X$ 使得

$$[S] \cdot [S] \geq 0,$$

则 (X, ω) 辛同构于以下两者之一：

- $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{FS})$ ，其中 $c > 0$ 为某一常数，
- 爆破辛直纹面.

注 1.16 定理B通常可总结为”包含非负辛球面的辛四维流形是有理或直纹的“，因此我们之后总会称呼定理B为有理或直纹定理.

我们将在本章第二节中给出上述定理的一个类似情形，也即下文定理C的证明概述.

借助定理B，容易看到为了证明定理A，我们只需在带有正数量曲率度量去构造自相交数非负的辛嵌入球面. 这部分将会使用四维光滑流形上的 Seiberg-Witten 不变量，以及其与辛流形上 Gromov-Witten 不变量之间的联系. 我们将在本章第三节中给出这一方案更精准的概述.

至于定理A的反向，也即证明对 $(X, \omega) = (\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{FS})$ 或爆破辛直纹面，其上允许正数量曲率度量，我们将在本文第六章开篇给出.

第二节 辛嵌入球面与 McDuff 分类定理

我们在本节中概要性介绍一下如何使用辛拓扑中伪全纯曲线模空间的技术来证明定理B，整个证明的核心是借助自相交数非负的辛嵌入球面，通过其模空间的拓扑结构来反馈得到原来流形的拓扑结构.

首先我们可以通过一个简单的实例初步感受一下定理B:

例 1.17 设 $\Sigma_g \times \Sigma_h$ 带有乘积辛结构, 则若其存在辛嵌入球面 $S^2 \hookrightarrow \Sigma_g \times \Sigma_h$ 当且仅当 $gh=0$, 也即 $g=0$ 或 $h=0$, 这里 Σ_g 表示亏格 g 的可定向闭曲面.

这是因为我们选取 ω -控制的近复结构, 则有联结等式 (*adjunction formula*, 参考推论2.64)

$$\langle c_1(T\Sigma_g \times T\Sigma_h), [S^2] \rangle = \chi(S^2) + [S^2] \cdot [S^2],$$

设 $[S^2] = a[\Sigma_g] + b[\Sigma_h]$, 我们有

$$(2-2g)b + (2-2h)a = 2 + 2ab, \quad a, b \geq 0,$$

利用 S^2 与 Σ_g, Σ_h 需要正相交可以证明 $a, b \geq 0$, 从而可知成立 (而此时自动正相交, 因为实际上是复流形与复子流形). 因此可知在平凡曲面丛的情形, 若包含辛嵌入球面, 那么只能是直纹面, 也即纤维为球面.

若我们加上极小的条件, 则可以将定理B做进一步的细化:

定理 C 设 (X, ω) 是闭连通, 极小的辛四维流形, 且包含一个辛嵌入球面 $S \subset X$ 使得

$$[S] \cdot [S] \geq 0,$$

则有如下几种可能:

- 若 $[S] \cdot [S] = 0$, 则 (X, ω) 辛同构于一个辛直纹面, 且 S 可等同成这个辛直纹面的一根纤维.
- 若 $[S] \cdot [S] = 1$, 则 (X, ω) 辛同构于 $(\mathbb{C}P^2, c\omega_{FS})$, 其中 $c > 0$ 为某一常数, 且 S 可等同成 $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$.
- 若 $[S] \cdot [S] > 1$, 则 (X, ω) 辛同构于以下两者之一:
 - $(\mathbb{C}P^2, c\omega_{FS})$, 其中 $c > 0$ 为某一常数,
 - $(S^2 \times S^2, \sigma_1 \oplus \sigma_2)$, 其中 σ_1, σ_2 均为 S^2 上的辛形式.

本文证明上述定理的思路是通过引入更广泛的 **Lefschetz 纤维** 与 **Lefschetz 铅笔** 的概念, 去证明如下更一般的结果, 定理B和C都将是这个结果的快速推论:

定理 D 设 (X, ω) 为闭连通辛四维流形, 且包含辛嵌入球面 $S \subset X$ 使得

$$m := [S] \cdot [S] \geq 0,$$

则任选 S 上 m 个不同的点 p_1, \dots, p_m , 我们有 (X, ω) 允许一个辛 *Lefschetz* 铅笔的结构, 且使得 p_1, \dots, p_m 为基点, S 等同成某根光滑纤维, 并且不存在奇异纤维包含多余一个的临界点.

更进一步, 允许没有奇异纤维的辛 *Lefschetz* 铅笔当且仅当 $m \in \{0, 1\}$ 且 $(X \setminus S, \omega)$ 为极小的.

我们现在概要一下定理C的证明思路, 证明的核心技术就是引入所谓的**伪全纯曲线**:

定义 1.18 设 (Σ, j) 为黎曼曲面, j 为 Σ 上的复结构, (M, J) 为 $2n$ 维的近复流形, 则称光滑映射 $u: \Sigma \rightarrow M$ 为**伪全纯 (或 J -全纯) 曲线** 如果其满足如下的非线性 *Cauchy-Riemann* 方程:

$$u_* \circ j = J \circ u_*,$$

这里 $u_*: T\Sigma \rightarrow TM$ 为 u 的切映射.

为了将辛嵌入球面的假设划归为伪全纯曲线的问题, 如下基本结果 (参考引理2.6) 是这一切的出发点:

- 若 $S \subset (X, \omega)$ 为辛子曲面当且仅当 TX 存在一个 ω -控制的近复结构 J 使得 $J|_{TS}$ 为 TS 上的近复结构. 从而含入映射 $i: S \hookrightarrow X$ 显然是 J -全纯曲线.

¶ $[S] \cdot [S] = 0$ 时

由上述可知存在 ω -控制的近复结构 J 使得 S 是一条嵌入 J -全纯球面的像, 这意味着我们有 J -全纯球面的模空间的一个连通分支 $\mathcal{M}_S(J)$ 是非空的, 并且实际上我们可以证明:

- 对 J 一般扰动后, 我们有 $\mathcal{M}_S(J)$ 是一个非空的光滑定向 2 维流形, 且其中的点均为嵌入 J -全纯球面, 并且它们的像在 X 中两两不交, 且构成 X 的一个开子集的叶状结构.
- 若 $(X \setminus S, \omega)$ 是极小的, 那么 $\mathcal{M}_S(J)$ 是紧的.

设

$$\mathcal{U} := \{p \in X : \text{存在 } u \in \mathcal{M}_S(J) \text{ 使得 } p \in \text{Im}u\},$$

则由上述结构可知 \mathcal{U} 为 X 中的开集, 并且 $\mathcal{M}_S(J)$ 中每点对应的 J -全纯球面的像构成 \mathcal{U} 的一个叶状结构.

由 (X, ω) 极小可知 $(X \setminus S, \omega)$ 也是极小的, 从而 $\mathcal{M}_S(J)$ 是紧的, 因此对 \mathcal{U} 中任何收敛点列 $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$, 设 $p_i \in \text{Im}u_i$, 则在 $\mathcal{M}_S(J)$ 中 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ 收敛于 u , 从而不难看到 $p \in \text{Im}u$, 从而 $p \in \mathcal{U}$, 这表明 \mathcal{U} 也为 X 中的闭集.

从而由 X 的连通性可知 $\mathcal{U} = X$, 从而 $\mathcal{M}_S(J)$ 中点对应的嵌入 J -全纯球面的像构成了 X 的一个光滑叶状结构. 进而我们可以定义光滑映射

$$\pi : X \rightarrow \mathcal{M}_S(J), \quad x \mapsto u_x,$$

其中 u_x 表示 $\mathcal{M}_S(J)$ 中唯一一点使得 $x \in \text{Im}u_x$. 容易看到这即一个纤维丛, 并且每根纤维为 (X, ω) 中的嵌入 J -全纯曲线, 从而也为一个辛嵌入球面, 这意味着 (X, ω) 是一个辛直纹面.

注 1.19 若去掉极小的条件, 那么 $\mathcal{M}_S(J)$ 不一定是紧的, 但是我们会给出一个很好的紧化 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$, 相较于原来会增加一些节点曲线, 其每条都是由两条横截相交, 且自相交数为 -1 的嵌入 J -全纯球面组成. 拓扑上看每条节点曲线恰好对应着那些 *Lefschetz* 奇异纤维, 这也暗示着定理 D.

$\mathbb{I}[S] \cdot [S] = 1$ 时

若 S 自交数为 1, 那么我们仍可以类似选取 ω -控制的近复结构 J , 使得 J -全纯球面的模空间的一个连通分支 $\mathcal{M}_S(J)$ 为一个光滑流形, 但此时 $\mathcal{M}_S(J)$ 不再是 2 维而是 4 维, 为了继续构造 X 上的叶状结构, 我们考虑对模空间增加一定的约束以降低维数: 任选 $p \in S$, 则考虑模空间

$$\mathcal{M}_S(J; p)$$

由 $\mathcal{M}_S(J)$ 中过 p 点的曲线组成, 从而可以证明 $\mathcal{M}_S(J; p)$ 此时为 2 维流形, 特别的若 $(X \setminus S, \omega)$ 极小, 则 $\mathcal{M}_S(J; p)$ 也是紧的, 且其中点对应的嵌入球面再一次组

成了 $X \setminus \{p\}$ 上的叶状结构，也即有

$$\pi : X \setminus \{p\} \rightarrow \mathcal{M}_S(J; p), \quad x \mapsto u_x,$$

并且 p 为奇点，因为每根纤维都经过 p .

仔细讨论奇点 p 处的结构可以证明 $\mathcal{M}_S(J; p)$ 一定微分同胚于 $\mathbb{C}P^1$ ，进而可证明 $X \setminus \{p\}$ 微分同胚于 $\mathbb{C}P^1$ 上的线丛 $\mathcal{O}(1)$ ，从而可知 X 微分同胚于 $\mathbb{C}P^2$ ，进而利用 Moser 形变的技术可以证明 (X, ω) 辛同构于 $(\mathbb{C}P^2, c\omega_{\text{FS}})$ 对某个常数 $c > 0$.

¶ $[S] \cdot [S] > 1$ 时

设 $k := [S] \cdot [S] \geq 2$ ，并且不存在其余辛嵌入球面自交数小于 k (否则我们可以约化到已经处理过的情形).

我们依然做类似的考量，即考虑约束模空间

$$\mathcal{M}_S(J; p_1, \dots, p_k),$$

这里 $p_1, \dots, p_k \in S$ 为任选的不相同的 k 个点，则可以证明此时 $\mathcal{M}_S(J; p_1, \dots, p_k)$ 仍为一个 2 维流形，并且有纤维丛

$$\pi : X \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathcal{M}_S(J; p_1, \dots, p_k), \quad x \mapsto u_x,$$

并且仍可以分析奇点处的结构来证明 $\mathcal{M}_S(J; p_1, \dots, p_k)$ 微分同胚于 $\mathbb{C}P^1$ 进而得到 (X, ω) 上的辛 Lefschetz 铅笔的结构，并且没有奇异纤维.

但这是不可能的，因为可以证明 (参考命题3.20):

- 对闭可定向四维流形，如果其具有 Lefschetz 铅笔结构且纤维微分同胚于 S^2 ，那么若至少有两个基点则一定会包含一根奇异纤维.

因此我们知道假设错误，也即若存在自交数 ≥ 2 的辛嵌入球面，一定会存在更小自交数的辛嵌入球面，从而不断约化可知一定有 $k \in \{0, 1\}$.

故我们将此情形划归回了之前讨论过的，因此含糊的讲，我们针对包含辛嵌入球面的极小辛四维流形给出了一套分类的方案，核心就是借助模空间的拓扑结构进行讨论.

在第二章和第三章中铺垫好我们所必要的伪全纯曲线模空间的技术以及 Lefschetz 纤维等辛流形构造后，我们会在第四章中给出定理B和D的完整证明。

第三节 Seiberg-Witten 不变量与辛四维流形

我们在本节中概述一下在定理B的基础上，如何使用 Seiberg-Witten 不变量这一强大工具证明定理A的，一切实际上归结于证明如下定理，

定理 E 设 (X, ω) 为一个闭连通辛四维流形，若其允许正数量曲率度量则 (X, ω) 中存在自相交数非负的辛嵌入球面。

如何证明这样的球面存在呢？粗糙地讲，Gromov-Witten 不变量 (以后简记为 GW 不变量) 就是去数辛流形中伪全纯曲线的条数，因此为说明存在性，某种意义上我们只需要证明满足某些约束条件的 GW 不变量不为 0 即可。

但遗憾的是，一般计算 GW 不变量是一个十分困难的问题，其往往与一些计数代数几何的问题密切相关，人们也发明出一些诸如量子上同调以及其它公理化的办法去尝试计算。但幸运的是，在四维的时候，C.Taubes 证明了^[3,4]，辛四维流形的 GW 不变量与另一个相对容易计算的不变量——Seiberg-Witten 不变量 (以后简记为 SW 不变量) 基本上是相等的，因此问题划归成证明某些特定的 SW 不变量不为 0 即可。

粗糙地讲，SW 不变量是定义在光滑四维流形上的一个强大不变量 (如可以基于此快速得出许多同胚但不微分同胚的四维流形的例子)，其本质上是在数光滑四维流形上如下 Seiberg-Witten 方程的解的个数，

$$\begin{cases} \not{D}_A \Phi = 0 & \text{Dirac 方程,} \\ F_A^+ = \sigma(\Phi) & \text{曲率方程.} \end{cases}$$

一些特定的拓扑条件 (如定理E中涉及的) 会告诉我们某些 SW 不变量不为 0，因此结合 Taubes 的“SW 不变量等于 GW 不变量”的大定理，我们便可以找到合适的伪全纯曲线，假如一开始选取比较好的近复结构，就可以使得找到的也是想要的辛嵌入球面。

利用 SW 与 GW 这两个不变量的密切关系，我们可以按照如下流程得到更多有趣的辛四维流形结果，

$$\text{辛假设与拓扑条件} \Rightarrow \text{SW} \neq 0 \xRightarrow{\text{SW=GW}} \text{全纯曲线存在性} \Rightarrow \text{分类}.$$

我们将在第五章中给出光滑四维流形上的 Seiberg-Witten 不变量的实用性介绍，在第六章中给出定理E的证明.

第二章 伪全纯曲线

我们本章主要介绍证明定理B和D所必备的伪全纯曲线模空间的基本技术. 我们会先在前四节介绍最一般的理论, 再在最后两节集中精力介绍四维时独有的特殊结果, 如联结不等式和模空间自动横截性等等, 特别的, 我们将会在最后一节证明四维辛流形中对于辛嵌入球面的模空间的紧性与紧化定理, 这个结果是证明B的关键.

第一节 近复结构

定义 2.1 设 $E \rightarrow M$ 为秩为 $2k$ 的光滑实向量丛, 其称为

- **复向量丛** 如果其上存在复结构 $J \in \Gamma(\text{End}(E))$, 使得 $J^2 = -\text{id}$. 记作 (E, J) .
- **辛向量丛** 如果其上存在辛形式 ω , 也即对任意 $m \in M$, 我们有 (E_m, ω_m) 为辛向量空间, 且 ω_m 逐纤维光滑变化. 记作 (E, M, ω) .

例 2.2 (M, ω) 为辛流形, 则对 M 任何辛子流形 S , 我们有 (TM, M, ω) , $(TM|_S, S, \omega)$, $(TS, S, \omega|_{TS})$ 均为辛向量丛.

定义 2.3 设 (E, M, ω) 为辛向量丛, J 为 E 上的复结构, 则称

- J 是 ω -控制 (*tame*) 的, 如果如果对任意 $X \in \Gamma(E)$, 若 $X_m \in E_m$ 非零, 则有

$$\omega(X_m, JX_m) > 0.$$

(E, M, ω) 上全体 ω -控制的近复结构构成的集合记为 $\mathcal{J}_\tau(E, \omega)$.

- J 是 ω -相容 (*compatible*) 的, 如果由

$$g_J(X, Y) := \omega(X, JY), \quad X, Y \in \Gamma(E),$$

定义的 g_J 是 E 上的黎曼度量.

(E, M, ω) 上全体 ω -相容的近复结构构成的集合记为 $\mathcal{J}(E, \omega)$.

注 2.4 对集合 $\mathcal{J}(E)$, $\mathcal{J}_\tau(E, \omega)$, $\mathcal{J}(E, \omega)$, 我们赋予 C^∞ -拓扑, 也即序列 $\{J_k\} \subset \mathcal{J}(E)$ 收敛等价于其各阶导数在 M 上任意紧子集上一致收敛.

考虑 $E = TM$ 的特殊情形, 我们即回到了定义 1.13 和 1.14. 特别的, 我们也有如下定理 1.15 的推广

定理 2.5 (Gromov) 对辛向量丛 (E, M, ω) , 拓扑空间 $\mathcal{J}_\tau(E, \omega)$ 与 $\mathcal{J}(E, \omega)$ 均非空且可缩.

本节的主要结果是证明如下的重要引理, 其联系起辛子流形与近复子流形,

引理 2.6 设 (X, ω) 为辛四维流形, $S \subset X$ 为光滑 2 维子流形, 则 S 为辛子流形当且仅当存在 ω -控制的近复结构 J 使得 S 为 (X, J) 的近复子流形, 也即 $J|_{TS}$ 为 S 上的近复结构.

证明. 一方面若存在 ω -控制的近复结构 J 使得 $J|_{TS}$ 为 S 上的近复结构, 则 $J(TS) = TS$, 从而对任意 $p \in S$ 以及非零向量 $X_p \in T_p S$, 由 $\omega(X_p, JX_p) > 0$ 可知 $\{X_p, JX_p\}$ 构成 $T_p S$ 的一组基, 从而也可以知道 $\omega|_{TS}$ 上非退化, 进而可知 $S \subset (X, \omega)$ 为辛子流形.

另一方面, 若 S 为辛子流形, 则对任意 $p \in S$, $T_p S$ 为 $T_p X$ 的辛子空间, 从而逐点有辛正交补空间 $\nu_p X$, 结合 Darboux 定理可知整体上有分解:

$$TX|_S = TS \oplus \nu S.$$

注意到秩为 2 的实向量丛有结构群 $SO(2) \cong U(1)$, 因此其上总允许复结构, 故可设 $TS, \nu S$ 上分别有复结构 j_τ 和 j_ν , 从而可考虑 $TX|_S$ 上近复结构

$$J_S := j_\tau \oplus j_\nu \in \Gamma(\text{End}(TX|_S)),$$

且容易看到由于任意 $p \in S$, ω 在 $T_p S$ 与 $\nu_p S$ 上均非退化, 从而任意非零向量 $X_p \in T_p S$ 与 $Y_p \in \nu_p S$, 我们有

$$\omega(X_p, J_S X_p) = \omega(X_p, j_\tau X_p) \neq 0,$$

$$\omega(Y_p, J_S Y_p) = \omega(Y_p, j_\nu Y_p) \neq 0,$$

从而适当改变 j_τ 或 j_ν 为 $-j_\tau$ 或 $-j_\nu$ 即可保证 J_S 是 ω -控制的.

现在我们有 $J_S : TM|_S \rightarrow TX|_S$ 为 ω -控制的近复结构, 我们下面考虑其延拓到全体 M 上. 注意到我们有

$$\pi : \mathbf{J}_\tau(X, \omega) \rightarrow M,$$

其中对任意 $m \in X$, $\pi^{-1}(m)$ 表示全体 $T_m X$ 上 ω_m -控制的近复结构, 由 Darboux 定理可知其满足局部平凡化进而是一个纤维丛, 且其整体截面构成的空间即为 $\mathcal{J}_\tau(X, \omega)$.

任取 $J_0 \in \mathcal{J}_\tau(X, \omega)$, 也即 $J_0 : X \rightarrow \mathbf{J}_\tau(X, \omega)$, 从而有 $J_0|_S : S \rightarrow \mathbf{J}_\tau(X, \omega)$ 也为 $TX|_S$ 上的一个 ω -控制的近复结构, 也即

$$J_S, J_0|_S \in \mathcal{J}_\tau(TM|_S, \omega),$$

而由 Gromov 的定理2.5可知 $\mathcal{J}_\tau(TM|_S, \omega)$ 是可缩的进而道路连通, 因此在 $\mathcal{J}_\tau(TM|_S, \omega)$ 中连接 $J_0|_S$ 与 J_S 的一条光滑道路对应于一个保持纤维的光滑同伦映射

$$H : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{J}_\tau(X, \omega),$$

其中 $H(\cdot, 0) = J_0|_S$, $H(\cdot, 1) = J_S$.

注意到 S 为 X 的子流形, 从而 (X, S) 为 CW 偶, 因此 $i : S \hookrightarrow X$ 满足”同伦扩张性质“(HEP, 参考 [5]), 也即存在保持纤维的光滑映射

$$\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{J}_\tau(X, \omega)$$

使得如下图表2.1可交换, 其中 ι_0 表示嵌入到 $\cdot \times \{0\}$ 分量:

故取 $J := \tilde{H}(\cdot, 1) : M \rightarrow \mathbf{J}_\tau(M, \omega)$ 则为 M 上一个 ω -控制的近复结构, 且由 $\tilde{H} \circ (i \times \text{id}) = H$, 以及 $H(\cdot, 1) = J_S$ 可知 $J|_S = J_S$, 综上我们完成了证明. \square

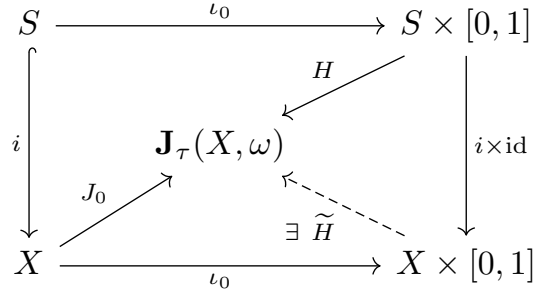


图 2.1 HEP 性质

第二节 伪全纯曲线

定义 2.7 设 (Σ, j) 为黎曼曲面, j 为 Σ 上的复结构, (M, J) 为 $2n$ 维的近复流形, 则称光滑映射 $u: \Sigma \rightarrow M$ 为伪全纯 (或 J -全纯) 曲线如果其满足如下的非线性 *Cauchy-Riemann* 方程:

$$u_* \circ j = J \circ u_*,$$

这里 $u_*: T\Sigma \rightarrow TM$ 为 u 的切映射.

注 2.8 熟知曲面上的近复结构都是可积的 (此时 *Nijenhuis* 张量恒为 0), 从而由引理 2.6 可知 $(S, TM|_S)$ 为黎曼曲面, 进而不难看到存在 ω -控制的近复结构 J 使得 $J|_{TS}$ 为 S 上的近复结构等价于有嵌入映射 $i: S \hookrightarrow M$ 为 J -全纯的.

回忆设 (Σ, j) 与 (Σ', j') 为两个闭连通黎曼曲面, 则任意全纯映射

$$\varphi: (\Sigma, j) \rightarrow (\Sigma', j')$$

总是一个分歧覆盖, 分歧数记为 $\deg(\varphi) \in \mathbb{N}$, 其中更具体的:

- 若 $\deg(\varphi) = 0$, 则 φ 为常值映射;
- 若 $\deg(\varphi) = 1$, 则 φ 为双全纯同构;
- 若 $\deg(\varphi) =: k \geq 2$ 则 φ 是一个分歧覆盖, 也即除有限个点 (称为分歧点) 外 φ 为覆叠映射, 且在分歧点附近有全纯坐标使得 $\varphi(z) = z^l$, 这里 $l \in \{2, \dots, k\}$.

容易注意到若有 $\varphi: (\Sigma, j) \rightarrow (\Sigma', j')$ 全纯, 且 $u': (\Sigma', j') \rightarrow (M, J)$ 是 J -全纯的,

那么对

$$u := u' \circ \varphi : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J),$$

我们有

$$u_* \circ j = u'_* \circ \varphi_* \circ j = u'_* \circ j' \circ \varphi_* = J \circ u'_* \circ \varphi_* = J \circ u_*,$$

从而可知复合映射 u 也是 J -全纯的, 其中用到了 φ 全纯则 $\varphi_* \circ j = j' \circ \varphi_*$.

这启发我们定义:

定义 2.9 设 $u : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ 和 $u' : (\Sigma', j') \rightarrow (M, J)$ 为两条 J -全纯曲线, 若存在全纯映射 $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 使得 $k := \deg(\varphi) \geq 2$, 且 $u = u' \circ \varphi$, 则称 u 是 u' 的 k -重覆盖 (k -multiply covered). 同时, 如果伪全纯曲线 u 不能实现成其它曲线的多重覆盖, 则称其为单 (simple) 的.

定义 2.10 光滑映射 $u : \Sigma \rightarrow M$ 称为某处单射 (somewhere injective) 的, 如果存在一点 $z \in \Sigma$ 使得 $u_{*,z} : T_z \Sigma \rightarrow T_{u(z)} M$ 为单射, 且 $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$, 我们称这样的点 z 为单射点 (injective point). 若 z 处有 $u_{*,z}$ 不为单射, 则称 z 为非浸入点 (non-immersed point).

注 2.11 若 u 为 J -全纯曲线, 且 z 非浸入, 从而 $u_{*,z}$ 不为单射, 也即存在 $a\partial_x + b\partial_y$ 使得 $u_{*,z}(a\partial_x + b\partial_y) = 0$, 注意到 $\partial_y = j(\partial_x)$, 从而可知 $(a + bJ) \circ u_{*,z}(\partial_x) = 0$, 注意到对 a, b 不全为 0 时, $a + bJ$ 总是可逆的, 因为此时方程 $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + cy = 0 \end{cases}$ 总有解 (c, d) (行列式 $a^2 + b^2 \neq 0$), 则 $c + dJ$ 为其逆, 从而 $u_{*,z}(\partial_x) = 0$, 同理有 $u_{*,z}(\partial_y) = 0$. 综上对伪全纯曲线 u , z 为其非浸入点当且仅当 $u_{*,z} = 0$, 也即 $(du)_z = 0$.

基本的事实是:

命题 2.12 设 (Σ, j) 为闭连通黎曼曲面, $u : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ 为 J -全纯曲线, 则以下条件等价:

1. u 是单的;
2. u 是某处单射的;
3. u 只有至多有限个自交点与非浸入点.

更进一步, 若 u 不单, 则要么 u 为常值映射, 要么是其它单全纯曲线的 k -重覆盖, 其中 $k \geq 2$, 且记其覆盖重数为 k .

注 2.13 拓扑的看, 对伪全纯球面 $u: \Sigma \rightarrow M$, 其覆盖的单全纯曲线 $u': \Sigma' \rightarrow M$ 也为球面: 考虑 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 为对应的非常值全纯映射, 从而 $\deg(\varphi) > 0$, 则 $\varphi_*[\Sigma] = \deg(\varphi) \cdot [\Sigma'] \neq 0 \in H_2(\Sigma')$, 但注意到 $\Sigma \cong S^2$ 单连通, 若 Σ' 不为球面, 则有万有覆盖 \mathbb{R}^2 , 从而 φ 可以提升到 $\tilde{\varphi}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$, 故可知 φ 可缩, 这表明 $\varphi_*[\Sigma] = 0$, 矛盾!

定义 2.14 设 (M, ω) 为辛流形, J 为 ω -控制的近复结构, 则对于 J -全纯曲线 $u: \Sigma \rightarrow M$, 我们定义其能量为

$$E(u) := \int_{\Sigma} u^* \omega.$$

注 2.15 由 J 是 ω -控制的, 我们有

$$\begin{aligned} u_* \omega(\partial_x, \partial_y) &= \omega(u_*(\partial_x), u_* \circ j(\partial_x)) \\ &= \omega(u_x, J(u_x)) \geq 0, \end{aligned}$$

从而 $E(u) \geq 0$ 恒成立, 并且 $E(u) = 0$ 当且仅当 $u_x = u_y = 0$, 也即 u 为常值映射.

命题 2.16 设 (M, ω) 为辛流形, J 为 ω -控制的近复结构, 则对于 J -全纯曲线 $u: \Sigma \rightarrow M$, 其为常值映射当且仅当 $[u] := u_*[\Sigma] = 0 \in H_2(M)$.

定义 2.17 设 (Σ, j) 为黎曼曲面, $\Theta := (z_1, \dots, z_m)$ 为 Σ 上 m 个互不相同的点, 称 (Σ, j, Θ) 为标记黎曼曲面, 其自同构群定义为

$$\text{Aut}(\Sigma, j, \Theta) := \{\varphi: (\Sigma, j) \rightarrow (\Sigma, j) \text{ 为双全纯同构} \mid \varphi|_{\Theta} = \text{id}\}.$$

例 2.18 我们来看一些简单的情形, 考虑 $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$, 即扩展复平面, 则

- $\text{Aut}(S^2, i) \cong \left\{ \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc=1 \right\} \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$
- $\text{Aut}(S^2, i, (\infty)) \cong \text{Aut}(\mathbb{C}, i) \cong \{\varphi(z) = az+b\}.$
- $\text{Aut}(S^2, i, (0, \infty)) = \{\varphi(z) = az\}.$

注 2.19 一个经典的结果 (*Hurwitz, 1893*) 是, 对于 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面, 则其自同构群是有限群, 并且阶数不超过 $84(g-1)$.

定义 2.20 设 $u: (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ 为 J -全纯曲线, $\Theta := (z_1, \dots, z_m)$ 为 Σ 上 m 个互不相同的点, 则定义 u 的自同构群为

$$\text{Aut}(u) := \text{Aut}(\Sigma, j, \Theta, u) := \{\varphi \in \text{Aut}(\Sigma, j, \Theta) \mid u \circ \varphi = u\}.$$

命题 2.21 设 $u: (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ 为 J -全纯曲线, 若 u 为某处单射 (或为嵌入) 的, 那么其自同构群总是平凡的.

证明. 设 ψ 为 u 的一个自同构, 那么若 $\psi \neq \text{id}$, 则存在 $p \neq q \in \Sigma$ 使得 $\psi(p) = q$, 则存在 p 的开邻域 U , 及 q 开邻域 $V = \psi(U)$ 使得两者不交, 注意到任意 $z \in U$, 有 $u(z) = u(\psi(z))$, 且 $\psi(z) \neq z$, 这表明 u 有无穷多个自交点, 这与命题 2.12, 某处单射的等价刻画 (只有至多有限个自交点和非浸入点) 矛盾! \square

注 2.22 进一步可以证明, 若覆盖重数为 k , 则对任意标记点集 Θ , 有 $\text{Aut}(\Sigma, j, \Theta, u)$ 是有限群且阶数不超过 k .

第三节 伪全纯曲线的模空间

2.3.1 模空间初探

定义 2.23 设 (M, J) 为 $2n$ 维近复流形, 固定整数 $m, g \geq 0$ 以及同调类 $A \in H_2(M)$, 则我们定义带 m 个标记点的亏格 g 同调于 A 的无参数 J -全纯曲线模空间为

$$\mathcal{M}_{g,m}(A; J) := \{(\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m))\} / \sim,$$

其中

- (Σ, j) 为亏格 g 的闭连通黎曼曲面;
- $u: (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ 为伪全纯曲线, 且同调类为 A , 也即 $[u] := u_*[\Sigma] = A \in H_2(M)$;
- $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ 为 Σ 上 m 个不同点组成的有序集;
- $(\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m)) \sim (\Sigma', j', u', (\zeta'_1, \dots, \zeta'_m))$ 当且仅当存在双全纯同构 $\varphi: (\Sigma, j) \rightarrow (\Sigma', j')$ 使得 $u = u' \circ \varphi$, 以及对任意 $i = 1, \dots, m$, $\varphi(\zeta_i) = \zeta'_i$.

注 2.24 最后一条等价关系可知，模空间中的元素均可表示成

$$[(\Sigma, j', u', (\zeta_1, \dots, \zeta_m))],$$

也即 Σ 与其上的标记点固定，变动的是 j' 与 u' ， $(j, u) \sim (j', u')$ 当且仅当存在双全纯同构 $\psi: (\Sigma, j) \rightarrow (\Sigma, j')$ 保持 m 个标记点不动，且 $u = u' \circ \psi$ 。

记号：我们习惯记

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{M}_{g,m}(J) &:= \bigcup_{A \in H_2(M)} \mathcal{M}_{g,m}(A; J). \\ \bullet \mathcal{M}_g(A; J) &:= \mathcal{M}_{g,0}(A; J), \quad \mathcal{M}_g(J) := \mathcal{M}_{g,0}(J). \end{aligned}$$

定义 2.25 我们可以按如下收敛方式定义 $\mathcal{M}_{g,m}(J)$ 上的拓扑：

$$\left[\left(\left(\Sigma_k, j_k, u_k, \left(\zeta_1^{(k)}, \dots, \zeta_m^{(k)} \right) \right) \right) \right] \rightarrow [(\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m))] \in \mathcal{M}_{g,m}(J)$$

当且仅当存在代表元

$$\left(\left(\Sigma_k, j_k, u_k, \left(\zeta_1^{(k)}, \dots, \zeta_m^{(k)} \right) \right) \right) \sim (\Sigma, j'_k, u'_k, (\zeta_1, \dots, \zeta_m)),$$

且有 $\{j'_k\}$ 在 $\Gamma(\text{End}(T\Sigma))$ 上 C^∞ 收敛于 j ，以及 $\{u'_k\}$ 在 $C^\infty(\Sigma, M)$ 中 C^∞ 收敛于 u 。

容易看到，进一步可在 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J)$ 上定义子空间拓扑。

定义 2.26 我们用

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; J) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(A; J), \quad \mathcal{M}_{g,m}^*(J) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(J),$$

表示由全体 $[(\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m))]$ 有代表元 $u: \Sigma \rightarrow M$ 为某处单射的曲线组成的子集。

注 2.27 容易看到 $(\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m)) \sim (\Sigma', j', u', (\zeta'_1, \dots, \zeta'_m))$ ，若 u 为某处单射的，那么 u' 也是某处单射的。

注 2.28 $\mathcal{M}_{g,m}^*(A; J)$ 总是 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J)$ 中的开集，这是因为考虑 $u \in \mathcal{M}_{g,m}^*(A; J)$ ，则存在单射点 z ，使得 $(du)_z \neq 0$ ，且 $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$ ，则现在对任何 u' 与 u 若 C^∞ 近，那么由连续性可知 $(du')_z \neq 0$ ，并且 $(u')^{-1}(u'(z)) = \{z\}$ 。

定义 2.29 我们有如下良定义的连续赋值映射

$$\begin{aligned} \text{ev} &= (\text{ev}_1, \dots, \text{ev}_m) : \mathcal{M}_{g,m}(J) \rightarrow M^m \\ [\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m)] &\mapsto (u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_m)). \end{aligned}$$

定义 2.30 我们定义模空间 $\mathcal{M}_{g,m}(A;J)$ 的虚拟维数为

$$\text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A;J) := (n-3)(2-2g) + 2c_1(A) + 2m,$$

其中 $c_1(A) := \langle c_1(TM, J), A \rangle$.

定义 2.31 设 $u : \Sigma \rightarrow M$ 为任意连续映射, 我们定义 u 的指标为

$$\text{ind}(u) := (n-3)\chi(\Sigma) + 2c_1([u]).$$

注 2.32 容易看到设 u 为 $\mathcal{M}_{g,m}(A;J)$ 中元素的代表类, 则有

$$\text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A;J) = \text{ind}(u) + 2m.$$

粗糙的看 $\text{ind}(u)$ 相当于 $\mathcal{M}_g(A;J)$ 的虚拟维数, 每当增加一个标记点, 对等价关系的要求就升高了 (商去的部分增加一个约束条件), 进而模空间就会相对增加复 1 维.

我们下面开始简单讨论一下模空间的局部结构, 我们希望其能是流形, 因此我们就可以借这个对象反过来得到 M 上的一些信息.

考虑 Banach 空间

$$\mathcal{B} := \{(j, u) : j \text{ 为 } \Sigma \text{ 上的复结构}, u : \Sigma \rightarrow M\},$$

其中 u 具有 $W^{k,p}$ 或 Hölder 正则性, 我们这里不讨论具体的分析细节.

考虑 \mathcal{B} 上的 Banach 向量丛 $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, 其中在点 (j, u) 上的纤维为

$$\mathcal{E}_{(j,u)} := \Gamma(\overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}((T\Sigma, j), (u^*TM, J)), \Sigma),$$

也即由全体复反线性丛映射 $(T\Sigma, j) \rightarrow (u^*TM, J)$ 组成, 也即 $F : T\Sigma \rightarrow u^*TM$ 使得 $F \circ j = -J \circ F$, 其中我们也考虑适当的 Sobolev 完备化.

例 2.33 我们有 *Cauchy-Riemann* 算子

$$\bar{\partial}_J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (j, u) \mapsto u_* + J \circ u_* \circ j,$$

这是因为 $(u_* + J \circ u_* \circ j) \circ j = u_* \circ j - J \circ u_* = -J \circ (u_* + J \circ u_* \circ j)$.

因此 *Cauchy-Riemann* 算子 $\bar{\partial}_J$ 为 $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ 的一个整体截面, 且不难看到 (j, u) 为 J 全纯曲线当且仅当 $(j, u) \in \bar{\partial}_J^{-1}(0)$, 也即落在截面的零点集中.

现在考虑 $\bar{\partial}_J$ 的线性化

$$\bar{\partial}_{J^*, (j, u)} : T_{(j, u)}\mathcal{B} \rightarrow T_{\bar{\partial}_J(j, u)}\mathcal{E},$$

回忆对于向量丛 $E \rightarrow B$ 以及截面 s , 我们有 $T_{s(p)}E = T_pB \times E_p$, 并且 $s_{*, p}$ 向第一个分量的投影为 id , 因此我们总可以将其视为到 E_p 的映射, 因此为了方便起见, 我们总是考虑

$$\bar{\partial}_{J^*, (j, u)} : T_{(j, u)}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_{(j, u)}.$$

由椭圆算子的正则性理论, 我们有 $\bar{\partial}_{J^*, (j, u)} : T_{(j, u)}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_{(j, u)}$ 是两个 Banach 空间之间的 Fredholm 算子, 并且有对应的 Fredholm 指标, 利用 Riemann-Roch 定理可以证明其指标

$$\text{ind}(\bar{\partial}_{J^*, (j, u)}) = \text{ind}(u).$$

粗糙的看, 模空间可以看成是 $\bar{\partial}_J^{-1}(0)/\sim$, 而对这种空间的流形结构, 我们有隐函数定理, 因此如果 $\bar{\partial}_{J^*, (j, u)}$ 为满射, 则由隐函数定理可知 (j, u) 的局部可以和 $\ker \bar{\partial}_{J^*, (j, u)}$ 这个有限维线性空间等同起来, 并且由满射可知其维数即为 $\bar{\partial}_{J^*, (j, u)}$ 的 Fredholm 算子指标, 也即 $\text{ind}(u)$. 这启发我们定义:

定义 2.34 我们称曲线 $u \in \mathcal{M}_{g, m}(A; J)$ 是 **Fredholm** 正则的, 如果线性化算子 $\bar{\partial}_{J^*, (j, u)} : T_{(j, u)}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_{(j, u)}$ 是满射.

注意到局部上在 u 处模空间 $\mathcal{M}_{g,m}(A;J)$ 和 $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$ 相差自同构群

$$\text{Aut}(\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m)).$$

因此结合上述讨论我们有

定理 2.35 我们记 $\mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A;J) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(A;J)$ 由 *Fredholm* 正则且自同构群平凡的曲线组成, 则 $\mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A;J)$ 是一个有限维可定向光滑流形, 且

$$\dim \mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A;J) = \text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A;J).$$

但遗憾的是上述定理并不实用, 因为判断一个伪全纯曲线是否是 *Fredholm* 正则的是一个并不容易的事情, 但注意到在一点处 $\bar{\partial}_J$ 的线性化满射等价于

$$\bar{\partial}_J(\mathcal{B}) \pitchfork \mathcal{B},$$

也即两者横截相交, 而横截相交具有广泛性, 也即容易扰动满足, 而在此情境下, 最自然可供扰动的选择就是近复结构了, 这启发我们定义:

定义 2.36 设 (M, ω) 为 $2n$ 维辛流形, $\mathcal{U} \subseteq M$ 为具有紧闭包的开集, $J_0 \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 为 ω -控制的近复结构, 则定义 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 的子集:

$$\mathcal{J}_\tau(M, \omega; \mathcal{U}, J_0) = \{J \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega) \mid J = J_0 \text{ on } M \setminus \mathcal{U}\}.$$

注 2.37 实际上更常用的, 我们会取 $\mathcal{U} = M$, 从而 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega; \mathcal{U}, J_0) = \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$.

现在固定 $g, m \geq 0$, $A \in H_2(M)$, 我们记

$$\mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega, g, m, A; \mathcal{U}, J_0)$$

表示全体 $J \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega; \mathcal{U}, J_0)$, 使得任意 $u \in \mathcal{M}_{g,m}(A;J)$, 其存在单射点在 u 下的像落在 \mathcal{U} 中, 且是 *Fredholm* 正则的.

注 2.38 回忆对于某处单射的伪全纯曲线, 其只有至多有限个自交点和非浸入点,

因此结合 \mathcal{U} 是开集可知对某处单射的伪全纯曲线 u , 只要 $\text{Im}(u) \cap \mathcal{U}$ 非空那么一定存在单射点在 u 下的像落在 \mathcal{U} 中.

例 2.39 $\mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega, g, m, A) := \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega, g, m, A; M, J_0)$ 表示全体 ω -控制的近复结构 J , 使得任意某处单射的 $u \in \mathcal{M}_{g,m}(A; J)$, 有 u 是 *Fredholm* 正则的.

尽管上述集合看起来要求十分苛刻, 但可以证明其实际上在 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega; \mathcal{U}, J_0)$ 中为第一纲集的补集 (comeager set)! 更精准的, 我们有如下扰动横截定理:

定理 2.40 (扰动横截) 设 (M, ω) 为 $2n$ 维辛流形, $\mathcal{U} \subseteq M$ 为具有紧闭包的开集, $J_0 \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 为 ω -控制的近复结构, 固定 $g, m \geq 0$, $A \in H_2(M)$, 则对任何 $J \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega; \mathcal{U}, J_0)$, 其允许 C^∞ -小的扰动得到 $J' \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega; \mathcal{U}, J_0)$, 使得 $J' \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega, g, m, A; \mathcal{U}, J_0)$, 也即对任何 $u \in \mathcal{M}_{g,m}(A; J)$, 若存在单射点在 u 下的像落在 \mathcal{U} 中, 则 u 是 *Fredholm* 正则的.

上述定理给了一个很好产生 *Fredholm* 正则曲线的方案, 也即一般性 (generically) 的选取一个近复结构, 那么其上满足一定条件的某处单射性曲线自动是 *Fredholm* 正则的!

现在特别的, 结合 *Fredholm* 正则曲线处邻域具有光滑流形结构, 以及某处单射曲线的自同构群是平凡的, 我们得到了如下一个十分实用的推论:

推论 2.41 设 (M, ω) 为闭辛流形, 则对一般性 (generic) 的 ω -控制的近复结构 J , 我们有

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; J) := \{u \in \mathcal{M}_{g,m}(A; J) : u \text{ 某处单射}\}$$

是一个可定向光滑流形, 且维数为

$$(n-3)(2-2g) + 2c_1(A) + 2m.$$

注意到上述维数为 $\text{ind}(u) + 2m$, 因此若此为负则代表为空集, 因此这可以给出一个伪全纯曲线存在的障碍:

推论 2.42 设 (M, ω) 为闭辛流形, 则对一般性的 ω -控制的近复结构 J , 若对 $g \geq 0$ 与 $A \in H_2(M)$ 满足 $(n-3)(2-2g) + 2c_1(A) < 0$, 则不存在某处单射的伪全纯曲线 $u: \Sigma \rightarrow M$, 使得 $\chi(\Sigma) = 2-2g$ 且 $[u] = A$.

2.3.2 单参数模空间

现在我们对之前的讨论做一点小小的推广，考虑一族光滑单参数辛结构 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$ ，则我们可以类似定义：

- $\mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\})$ 表示全体光滑单参数近复结构 $\{J_s\}_{s \in [0,1]}$ ，使得对任意 $s \in [0,1]$ ，有 $J_s \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega_s)$ ，也即 J_s 是 ω_s -控制的。

我们仍然可以赋予其 C^∞ -拓扑，则仍然可以证明其是非空且可缩的。

类似地我们记 $\mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\}; J, J') := \{\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\}) | J_0 \equiv J, J_1 \equiv J'\}$ ，则其也是非空且可缩的。

- 给定一族 $\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\})$ ，则定义单参数模空间为

$$\mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}) = \{(s, u) | s \in [0, 1], u \in \mathcal{M}_{g,m}(A; J_s)\},$$

并且记

$$\mathcal{M}_{g,m}(\{J_s\}) := \bigcup_{A \in H_2(M)} \mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}).$$

其上赋予拓扑： (s_k, u_k) 收敛于 (s, u) 当且仅当 $s_k \rightarrow s$ 且 $u_k \rightarrow u$ 。

- 我们类似可以考虑开子集

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\}) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}), \quad \mathcal{M}_{g,m}^*(\{J_s\}) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(\{J_s\}),$$

其由 (s, u) 组成，这里 u 是某处单射的。

和上一小节提到的 Fredholm 正则结构定理 2.35 和无参数模空间扰动横截定理 2.40 的讨论一样，我们也有如下单参数版本的定理，

定理 2.43 设 M 为闭流形，且具有一族光滑的辛结构 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$ ， $J \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_0)$ ，现在对任意 $g, m \geq 0$ 与 $A \in H_2(M)$ ，我们记

$$\mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A; \{J_s\}) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\})$$

表示全体 $\{(u, s) | u \in \mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A; J_s)\}$ ，也即 u 是 Fredholm 正则的且自同构群平凡，

则 $\mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A; \{J_s\})$ 具有光滑带边流形结构, 且其边界为

$$- (\{0\} \times \mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A; J_0)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A; J_1)).$$

并且投影映射

$$\mathcal{M}_{g,m}^{\text{reg}}(A; \{J_s\}) \rightarrow [0, 1], \quad (s, u) \mapsto s$$

为淹没.

定理 2.44 (扰动横截) 设 M 为闭流形, 且具有一族光滑的辛结构 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$, $J \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_0)$, $J' \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_1)$. 现在对任意 $g, m \geq 0$ 与 $A \in H_2(M)$, $\mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\}; J, J')$ 包含一个补集是第一纲集 (*comeager*) 的集合

$$\mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \{\omega_s\}; J, J') \subseteq \mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\}; J, J')$$

使得对任何 $\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \{\omega_s\}; J, J')$, 我们有

1. $\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\})$ 具有光滑带边流形结构, 维数为

$$\dim \mathcal{M}_{g,m}^*(A, J_0) + 1,$$

且其边界为

$$- (\{0\} \times \mathcal{M}_{g,m}^*(A; J_0)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}_{g,m}^*(A; J_1)).$$

2. 投影映射

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\}) \rightarrow [0, 1], \quad (s, u) \mapsto s$$

的临界点落在 $(0, 1)$ 中.

利用上述定理, 我们可以类似得到伪全纯曲线存在性的一个障碍:

推论 2.45 设 M 为闭流形, 且具有一族光滑的辛结构 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$, 则对一般性的一族 $\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\})$, 若 u 满足对任意 $s \in [0, 1]$, 其均是 J_s -全纯的, 则可知 $\text{ind}(u) + 1 \geq 0$.

2.3.3 带标记点限制的模空间

现在我们做更一般的考虑，也即如第一章中所提到的，考虑带约束条件的那些伪全纯曲线，因为一般而言伪全纯曲线是足够多的，但为了方便使用，我们只想考虑那么经过一些给定点的曲线，这启发我们做如下考虑：

设 M 为 $2n$ 维光滑闭流形，且固定辛结构 ω ，或者一族光滑辛结构 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$ ，回忆我们有赋值映射

$$\begin{aligned} \text{ev} = (\text{ev}_1, \dots, \text{ev}_m) : \mathcal{M}_{g,m}(J) &\rightarrow M^m \\ [\Sigma, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m)] &\mapsto (u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_m)). \end{aligned}$$

固定 M^m 中的光滑子流形 Z ，则我们

- 对 $J \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ ，定义

$$\mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z) := \text{ev}^{-1}(Z) \subseteq \mathcal{M}_{g,m}(A; J),$$

以及

$$\mathcal{M}_{g,m}(J; Z) := \bigcup_{A \in H_2(M)} \mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z),$$

换言之， $\mathcal{M}_{g,m}(J; Z)$ 中的元素可被表示成 J -全纯曲线 $u : \Sigma \rightarrow M$ 且标记点 $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \Sigma$ 满足

$$(u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_m)) \in Z \subseteq M^m.$$

类似地，我们考虑

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; J; Z)$$

是由 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z)$ 中可被某处单射的曲线代表的元素组成，则其是 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z)$ 中的开子集。

我们称 $u \in \mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z)$ 是 Fredholm 正则的，如果 u 是 ev 与 Z 的一个横截相交点。

- 对 $\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\})$, 定义

$$\mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}; Z) = \{(s, u) | s \in [0, 1], u \in \mathcal{M}_{g,m}(A; J_s; Z)\},$$

以及

$$\mathcal{M}_{g,m}(\{J_s\}; Z) := \bigcup_{A \in H_2(M)} \mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}; Z).$$

类似地, 我们考虑

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\}; Z)$$

是由 $\mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}; Z)$ 中可被某处单射的曲线代表的元素组成, 则其是 $\mathcal{M}_{g,m}(A; \{J_s\}; Z)$ 中的开子集.

注 2.46 最常用的特殊情形是给定 M 上的 m 个点 p_1, \dots, p_m , 选取单元素集

$$Z = \{(p_1, \dots, p_m)\},$$

则此时

$$\mathcal{M}_{g,m}(A; J; p_1, \dots, p_m) := \mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z) = \text{ev}^{-1}(p_1, \dots, p_m)$$

中的元素可被 J -全纯曲线 u 表示, 且对标记点 ζ_1, \dots, ζ_m , 满足

$$u(\zeta_i) = p_i, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

粗糙的看, 若 ev 与 Z 横截相交, 则 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z)$ 是光滑流形, 且其在 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J)$ 中的余维数等于 Z 在 M^m 中的余维数, 这启发我们定义:

$$\text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z) := \text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A; J) - \text{codim}_{M^m} Z.$$

例 2.47 对 $Z = \{(p_1, \dots, p_m)\}$, 则有

$$\begin{aligned} \text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A; J; p_1, \dots, p_m) &= \text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A; J) - 2nm \\ &= (n-3)(2-2g) + 2c_1(A) - 2m(n-1) \\ &= \text{ind}(u) - 2m(n-1). \end{aligned}$$

类似于之前无/单参数模空间的扰动横截定理 2.40 和 2.44, 我们有如下约束问题的扰动横截性定理:

定理 2.48 (约束问题的扰动横截) 给定整数 $g, m \geq 0$, 闭 $2n$ 维光滑流形 M , 以及 $A \in H_2(M)$, 与 M^m 的子流形 Z , 则

- 若 ω 为 M 上的辛形式, 则存在 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 的第二纲子集 $\mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega; Z)$, 使得对任意 $J \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega; Z)$, 有 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z)$ 中的某处单射曲线均是 *Fredholm* 正则的.

特别的, 一般性地选取 ω -控制的近复结构 J , 有 $\mathcal{M}_{g,m}^*(A; J; Z)$ 为定向光滑流形, 且维数为 $\text{vir} - \dim \mathcal{M}_{g,m}(A; J; Z)$.

- 若 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$ 为 M 上一族光滑辛形式, 则对 $J \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_0; Z)$ 与 $J' \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_1; Z)$, 存在 $\mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\}; J, J')$ 的第二纲子集 $\mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \{\omega_s\}; J, J')$ 使得对任意 $\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \{\omega_s\}; J, J')$, 有

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\}; Z)$$

定向光滑带边流形, 且具有边界

$$- (\{0\} \times \mathcal{M}_{g,m}^*(A; J_0; Z)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}_{g,m}^*(A; J_1; Z)),$$

并且投影映射

$$\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\}; Z) \rightarrow [0, 1], \quad (s, u) \mapsto s$$

的临界点落在 $(0, 1)$ 中.

仍然类似地, 我们可以利用上述结果得到约束问题伪全纯曲线存在性的一

个障碍:

推论 2.49 固定 $2n$ 维光滑流形 M , 以及其上 m 个点 p_1, \dots, p_m , 整数 $g, m \geq 0$ 和 $A \in H_2(M)$, 则

- 若 ω 为 M 上的辛形式, 则对一般性的 $J \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$, 若 $\mathcal{M}_{g,m}^*(A; J; Z)$ 非空, 则有

$$(n-3)(2-2g) + 2c_1(A) \geq 2m(n-1).$$

- 若 $\{\omega_s\}_{s \in [0,1]}$ 为 M 上一族光滑辛形式, 则对一般性的 $J \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_0; Z)$, $J' \in \mathcal{J}_\tau^{\text{reg}}(M, \omega_1; Z)$ 和 $\{J_s\} \in \mathcal{J}_\tau(M, \{\omega_s\}; J, J')$, 若 $\mathcal{M}_{g,m}^*(A; \{J_s\}; Z)$ 非空, 则有

$$(n-3)(2-2g) + 2c_1(A) \geq 2m(n-1) - 1.$$

第四节 Gromov 紧化与节点曲线

一般而言, 无论是从计数角度出发 (如定义 Gromov-Witten 不变量), 或者是讨论拓扑性质 (如我们在第一章第二节中提到的), 我们总会希望模空间是紧的, 但这并不总成立, 如我们这里考虑的伪全纯曲线模空间, 但值得一提的是, 我们将在第五章介绍的 Seriberg-Witten 模空间却总是紧的, 因此这也能一窥 SW 理论相较于 GW 理论的简便使用性.

本节我们主要介绍伪全纯曲线模空间的紧化, 并讨论紧化后我们会多出些什么.

粗糙的讲模空间 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J)$ 之所以不紧, 是因为一系列 J -全纯曲线会退化成为一些不光滑的对象, 也即节点曲线, 因此我们自然把它们收集起来, 得到其如下由节点曲线组成的 $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(A; J)$.

定义 2.50 设 (M, J) 为 $2n$ 维近复流形, 固定整数 $m, g \geq 0$ 以及同调类 $A \in H_2(M)$, 则我们定义带 m 个标记点的算术亏格 g 同调于 A 的无参数节点 J -全纯曲线模空间为

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(A; J) := \{(S, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \Delta)\} / \sim,$$

其中

- (S, j) 为闭 (但未必连通) 的黎曼曲面, 且设有连通分支 S_1, \dots, S_p .
- $u: (S, j) \rightarrow (M, J)$ 为 J -全纯曲线, 且有

$$[u] := \sum_{i=1}^p u_*[S_i] = A \in H_2(M).$$

- $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ 为 Σ 上 m 个不同点组成的有序集.
- $\Delta = \{\{\hat{z}_1, \check{z}_1\}, \dots, \{\hat{z}_r, \check{z}_r\}\}$ 为由 S 上的点组成的有限无序点对构成的无序集合, 且使得 $\hat{z}_1, \check{z}_1, \dots, \hat{z}_r, \check{z}_r, \zeta_1, \dots, \zeta_m$ 互不相同, 以及

$$u(\hat{z}_i) = u(\check{z}_i), \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

我们称 $\{\hat{z}_i, \check{z}_i\} \in \Delta$ 为节点.

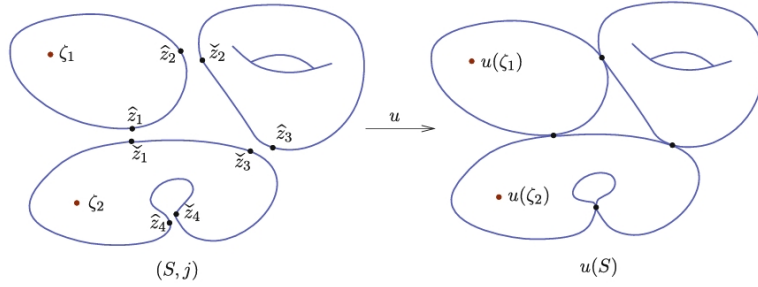


图 2.2 节点曲线示意图^[6]

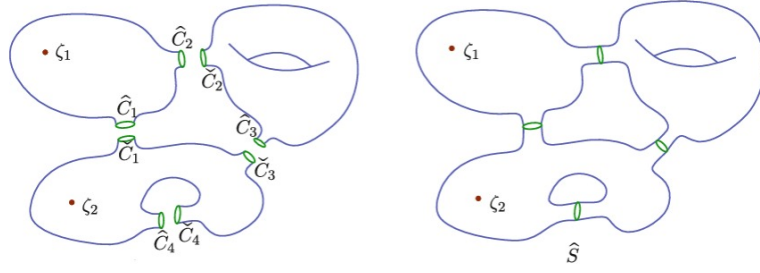
- 算术亏格为 g 是指: 考虑在 S 中去掉 \hat{z}_i, \check{z}_i 的小圆盘邻域, 得到带边曲面, 且边界为圆周 \hat{C}_i, \check{C}_i , 接着考虑将 \hat{C}_i 与 \check{C}_i 粘贴起来, 得到连通闭曲面 \hat{S} 且其亏格为 g .

容易看到, 将 \hat{S} 中上述曲线捏成一点, 则可以借助 u 得到连续映射 $\hat{u}: \hat{S} \rightarrow M$.

- $(S, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \Delta) \sim (S', j', u', (\zeta'_1, \dots, \zeta'_m), \Delta')$ 如果对 $\Delta' = \{\{\check{z}'_1, \check{z}'_1\}, \dots, \{\check{z}'_r, \check{z}'_r\}\}$, 存在双全纯同构 $\varphi: (S, j) \rightarrow (S', j')$ 使得对任意 $i = 1, \dots, m$, 有 $\varphi(\zeta_i) = \zeta'_i$, 对任意 $i = 1, \dots, r$, 有 $\varphi(\hat{z}_i) = \check{z}'_i$ 以及 $\varphi(\check{z}_i) = \hat{z}'_i$.

我们记:

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(J) := \bigcup_{A \in H_2(M)} \overline{\mathcal{M}}_{g,m}(A; J).$$

图 2.3 节点曲线的算术亏格^[6]

- 对无标记点的情形有 $\overline{\mathcal{M}}_g(A; J) := \overline{\mathcal{M}}_{g,0}(A; J)$ 以及 $\overline{\mathcal{M}}_g(J) := \overline{\mathcal{M}}_{g,0}(J)$.

尽管可以证明一系列伪全纯曲线收敛的极限确实落在 $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(A; J)$ 中, 但这个空间在自然的 C^∞ -拓扑下却并不一定是 Hausdorff 的, 也即收敛的极限并不一定唯一, 因此 Kontsevich 提出了如下稳定曲线定义来弥补这一缺陷:

定义 2.51 一条节点曲线 $(S, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \Delta)$ 称为稳定的, 如果在 S 上移除所有标记点 ζ_1, \dots, ζ_m 和节点 Δ 得到的穿孔曲面 \hat{S} , 满足任何使得 u 限制在其上为常值的 \hat{S} 的连通分支均具有负欧拉示性数.

回忆对于辛流形 (M, ω) , 以及 ω -控制的近复结构 J , 我们定义闭 J -全纯曲线 $u: \Sigma \rightarrow M$ 的能量为

$$E_\omega(u) := \int_\Sigma u^* \omega.$$

现在我们可以开始陈述 Gromov 紧性定理:

定理 2.52 (Gromov 紧性定理) 设 M 为闭流形, 且有一列 C^∞ -收敛于辛形式 ω 的辛形式 $\{\omega_k\}$, 以及一列 C^∞ -收敛于 $J \in \mathcal{J}_\tau(\omega)$ 的近复结构 $J_k \in \mathcal{J}_\tau(\omega_k)$. 现在考虑 $u_k \in \mathcal{M}_{g,m}(J_k)$ 为一列非常值的伪全纯曲线, 且满足存在常数 $C > 0$ 使得

$$E_{\omega_k}(u_k) \leq C, \quad \forall k,$$

从而存在 $\{u_k\}$ 的子列收敛于 $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(J)$ 的一条稳定节点曲线.

注 2.53 这里我们称一列 $[(\Sigma_k, j_k, u_k, (\zeta_1^{(k)}, \dots, \zeta_m^{(k)}))] \in \mathcal{M}_{g,m}(J_k)$ 收敛于

$$[(S, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \Delta)] \in \overline{\mathcal{M}}_{g,m}(A; J)$$

是指对 \hat{S} , 存在微分同胚 $\varphi_k: \hat{S} \rightarrow \Sigma_k$ 使得 $\varphi_k(\zeta_i) = \zeta_i^{(k)}$, 且 $u_k \circ \varphi_k$ 在 $C^0(\hat{S}, M)$ 和 $C_{\text{loc}}^\infty(\hat{S} \setminus C, M)$ 中收敛到 \hat{u} . 这里 $C = \cup(\hat{C}_i \cup \check{C}_i)$.

第五节 四维辛流形的伪全纯曲线模空间

伪全纯曲线理论在四维时有许多特殊的美妙性质, 我们将在这一节介绍对应的结果, 这些将会是我们证明主定理的关键原料.

在本节中, 我们总假设 (X, J) 是实 4 维的近复流形.

2.5.1 自动横截性

与一般维数不同, 我们并不需要扰动近复结构, 只需要对曲线本身指标做一定限制就可以保证横截性, 也即:

定理 2.54 ([7]) 设 (X, J) 为四维近复流形, 则对浸入 J -全纯曲线 $u: \Sigma \rightarrow X$, 若 $\text{ind}(u) > 2g - 2$, 则 u 是 *Fredholm* 正则的, 这里 g 为 Σ 的亏格.

注 2.55 回忆 $\text{ind}(u) = (2-3)(2-2g) + 2c_1([u])$, 因此上述条件也等价于 $c_1([u]) > 0$.

推论 2.56 在任何四维近复流形中, 任意浸入伪全纯球面若有指标非负, 则是 *Fredholm* 正则的.

更一般的, 上述推论对约束问题也有类似的结果:

定理 2.57 设 (X, J) 为四维近复流形, $p_1, \dots, p_m \in X$ 为任意 $m \geq 0$ 个点, 若 $u \in \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 为浸入 J -全纯球面, 且满足 $\text{ind}(u) \geq 2m$, 则 u 是 *Fredholm* 正则的.

注 2.58 回忆 $\text{vir} - \dim \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m) = \text{ind}(u) - 2m(2-1)$, 从而上述条件等价于约束模空间虚拟维数非负.

2.5.2 正相交与联结不等式

回忆对于复流形中的两个维数互补的复子流形, 因为复流形具有天然的标准定向, 我们知道其交点永远是正的, 对于四维近复流形, 我们也有类似的结果:

定理 2.59 (正相交定理, [8]) 设 (X, J) 为四维近复流形且 $u: \Sigma \rightarrow X$ 与 $v: \Sigma' \rightarrow X$ 均为闭连通 J -全纯曲线且像不重合, 则 u, v 只有有限个交点, 并且

$$[u] \cdot [v] \geq \#\{(z, w) \in \Sigma \times \Sigma' \mid u(z) = v(w)\},$$

并且取等当且仅当所有交点是横截的. 特别的,

- $[u] \cdot [v] = 0$ 当且仅当 $\text{Im}u$ 与 $\text{Im}v$ 不交.
- $[u] \cdot [v] = 1$ 当且仅当存在唯一一个横截交点.

定义 2.60 设 $u: \Sigma \rightarrow X$ 为某处单射的闭 J -全纯曲线, 则其只有有限个自交点, 若 u 浸入, 则定义

$$\delta(u) := \frac{1}{2} \#\{(z, w) \in \Sigma \times \Sigma \mid u(z) = u(w), z \neq w\} \in \mathbb{N}.$$

注 2.61 显然 u 嵌入当且仅当 $\delta(u) = 0$.

定理 2.62 (联结不等式, [8]) 设 (X, J) 为四维近复流形且 $u: \Sigma \rightarrow X$ 为某处单射的闭 J -全纯曲线 (不必连通), 则有

$$2\delta(u) \leq \chi(\Sigma) + [u] \cdot [u] - c_1([u]),$$

且取等当且仅当 u 浸入且所有自交点均横截.

注 2.63 事实上, 若考虑 $\delta'(u) := \frac{1}{2} \sum_{u(z)=u(w)} i(z, w)$, 这里 $i(z, w)$ 表示对 z, w 的小邻域 U_z, U_w , $u(U_z)$ 和 $u(U_w)$ 的代数相交数, 从而此时实际上有^[6], $2\delta'(u) = \chi(\Sigma) + [u] \cdot [u] - c_1([u])$.

推论 2.64 设 (X, J) 为四维近复流形且 $u: \Sigma \rightarrow X$ 为某处单射的闭 J -全纯曲线 (不必连通), 则

$$\chi(\Sigma) + [u] \cdot [u] - c_1([u]) = 0,$$

当且仅当 u 是嵌入.

注意到上述判别法仅仅依赖于 $[u]$ 这个同调类, 因此我们有:

推论 2.65 设 (X, J) 为四维近复流形且 $u \in \mathcal{M}_g(A; J)$ 为嵌入, 则 $\mathcal{M}_{g,m}(A; J)$ 中的任何某处单射曲线均是嵌入的.

第六节 嵌入球面模空间的紧性与紧化定理

本节我们主要研究四维辛流形的嵌入球面的模空间的紧性与紧化定理, 这也是我们未来主要在证明中研究的对象.

2.6.1 嵌入球面在约束问题模空间中的局部结构

在陈述紧性与紧化定理之前, 我们先利用前几节的结果来导出如下简单但实用的推论来热身.

定理 2.66 设 (X, J) 为四维近复流形, $u: S^2 \rightarrow X$ 为嵌入 J -全纯球面, 且 $[u] \cdot [u] =: m \geq 0$, 则对任意 $u(S^2)$ 上互不相同的 m 个点 p_1, \dots, p_m , 曲线

$$u \in \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$$

是 *Fredholm* 正则的, 特别的存在 u 的邻域 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 允许光滑的 2 维流形结构, 并且更进一步满足任意 $v \in \mathcal{U}$ 都是嵌入的, 并且对任意两条不同的 $v, w \in \mathcal{U}$, v 和 w 恰好横截相交 p_1, \dots, p_m .

证明. 由联结公式 (参考推论 2.64), 我们有

$$c_1([u]) = [u] \cdot [u] + \chi(S^2) = m + 2,$$

从而我们有

$$\text{vir} - \dim \mathcal{M}_{0,m}([u]; J; p_1, \dots, p_m) = -2 + 2c_1([u]) - 2m = 2 > 0,$$

因此由四维情形约束问题的自动横截定理 2.57, 可知确实存在 u 的邻域 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}_{0,m}([u]; J; p_1, \dots, p_m) \subseteq \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 允许光滑的 2 维流形结构.

现在由 $v \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}_{0,m}([u]; J; p_1, \dots, p_m)$, 则 $[v] = [u]$, 因此 $\delta(v) = 0$, 从而由

推论2.64可知 v 嵌入, 且对任意 $v, w \in \mathcal{U}$, 若两者不同, 则由正相交定理:

$$m = [u] \cdot [u] = [v] \cdot [w] \geq \#\{\text{交点}\} \geq \#\{p_1, \dots, p_m\} = m,$$

可知此时不等式取等, 因此 v 和 w 恰好横截相交于 p_1, \dots, p_m . \square

2.6.2 紧性与紧化定理

我们首先给出我们主要关心的嵌入球面模空间的定义,

定义 2.67 设 (X, ω) 为辛四维流形, 且 J 为其上一个 ω -控制的近复结构. 固定整数 $m \geq 0$, 以及 X 上 m 个互不相同的点 p_1, \dots, p_m .

- 我们记 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m) \subset \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 表示全体嵌入 J -全纯曲线 $u: S^2 \rightarrow X$, 且满足 $[u] \cdot [u] = m - 1$.

若无约束条件, 也即 $m = 0$, 则我们简记为 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J)$.

- 我们记 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m) \subset \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 表示全体嵌入 J -全纯曲线 $u: S^2 \rightarrow X$, 且满足 $[u] \cdot [u] = m$.

若无约束条件, 也即 $m = 0$, 则我们简记为 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J)$.

注 2.68 我们很快会看到上标 0, 2 的含义.

注 2.69 上面这两个模空间里的对象是我们后续研究的关键, 因为 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J)$ 里的元素全部是 X 中的例外球面, 而 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 中的元素将会给出 *Lefschetz* 纤维或者 *Lefschetz* 纤维中的正则纤维, 而奇异纤维则会由一些节点曲线组成, 而每条节点曲线的分支则会落在 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ 中.

实际上我们这里记号的上标就是模空间的虚拟维数:

命题 2.70 $u \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m)$, 则有

$$c_1([u]) = m + 1, \quad \text{vir} - \dim \mathcal{M}_{0,m}([u]; J; p_1, \dots, p_m) = 0.$$

若 $u \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$, 则有

$$c_1([u]) = m + 2, \quad \text{vir} - \dim \mathcal{M}_{0,m}([u]; J; p_1, \dots, p_m) = 2.$$

证明. 由联结公式 (参考推论2.64), 我们有

$$c_1([u]) = [u] \cdot [u] + \chi(S^2) = [u] \cdot [u] + 2,$$

此时对应模空间的虚拟维数为

$$-2 + 2[u] \cdot [u] + 4 - 2m,$$

代入两种情形计算即可得到. \square

命题 2.71 设 u, v 为 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m)$ 中两条不同的曲线, 则 u 与 v 不同调, 也即 $[u] \neq [v] \in H_2(X)$.

证明. 设 $[u] = [v]$, 则有 $[u] \cdot [v] = [u] \cdot [u] = m - 1$, 另一方面由 u 和 v 都经过 p_1, \dots, p_m , 由正相交定理2.59, 我们有 $[u] \cdot [v] \geq m$, 矛盾! \square

注 2.72 上述的 u, v 无法确定有多少个交点, 也无法确定交点是横截的还是相切的.

推论 2.73 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m)$ 为一个离散点集.

命题 2.74 设 u, v 为 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 中两条不同的曲线, 若 u, v 同调, 也即 $[u] = [v] \in H_2(X)$, 则 u 与 v 恰好横截相交于 p_1, \dots, p_m .

证明. 这由 $[u] \cdot [v] = m$ 与正相交定理2.59可以立刻得到. \square

回忆约束问题模空间嵌入球面的局部结构定理2.66, 以及上述性质, 我们可以立刻得到:

推论 2.75 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(A; J; p_1, \dots, p_m) \subseteq \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 为一个光滑 2 维流形, 且由 J -全纯嵌入球面组成, 并且任何两个嵌入球面的像都恰好横截相交于 p_1, \dots, p_m , 这里 $A \in H_2(X; \mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(A; J; p_1, \dots, p_m)$ 表示那些同调类为 A 的 J -全纯嵌入球面构成的模空间.

我们下面陈述本节的核心结果, 也即关于模空间 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m)$ 与 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 的紧性与紧化定理.

固定一列 C^∞ -收敛的辛形式 $\omega_k \rightarrow \omega_\infty$, 以及一列 C^∞ -收敛的近复结构

$$J_k \rightarrow J_\infty, \quad J_k \in \mathcal{J}_\tau(X, \omega_k), \quad k = 1, \dots, \infty.$$

我们记

$$J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m),$$

如果对任意 $A \in H_2(X)$ 以及任意 $\{p_1, \dots, p_m\}$ 的有序集 $(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$, 只要 $\mathcal{M}_{0,r}(A; J; p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ 包含一条某处单射曲线, 则该模空间的虚拟维数 ≥ 0 .

回忆本章第三节中的约束问题的扰动横截定理 2.48, 可知 $\mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m)$ 是 $\mathcal{J}_\tau(X; \omega)$ 的一个补集是第一纲集的集合.

定理 2.76 (紧性定理) 设 $J_\infty \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty; p_1, \dots, p_m)$, 并且 $u_k \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_k; p_1, \dots, p_m)$ 满足存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{S^2} u_k^* \omega_k \leq C, \quad \forall k.$$

从而 $\{u_k\}$ 有子列收敛于嵌入曲线 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty; p_1, \dots, p_m)$.

注 2.77 回忆这里的收敛是指存在 S^2 上的双全纯同构 φ_k 使得 $u_k \circ \varphi_k$ 在 $C^\infty(S^2, X)$ 中收敛于 u_∞ .

推论 2.78 固定 $J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m)$, 则对任何 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m)$ 的子集 S , 若其上的元素有一致能量上界, 也即存在常数 $C > 0$, 使得任意 $u \in S$ 有 $E_\omega(u) \leq C$, 则 S 为有限集.

对于 2 维的情形, 一致能量上界不一定意味着紧性, 但我们会有比较好的紧化, 而为了紧化而添加进去的节点曲线就会是未来我们构造 Lefschetz 纤维或铅笔里的奇异纤维:

定理 2.79 (紧化定理) $J_\infty \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty; p_1, \dots, p_m)$, 并且 $u_k \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J_k; p_1, \dots, p_m)$ 满足存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{S^2} u_k^* \omega_k \leq C, \quad \forall k.$$

从而 $\{u_k\}$ 有子列收敛于如下两者情形之一:

- 收敛于一条嵌入曲线 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J_\infty; p_1, \dots, p_m)$;

- 收敛于一条节点曲线，且恰有两个光滑分支

$$v_1 \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty; p_{i_1}, \dots, p_{i_r}), \quad v_2 \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty; p_{i_{r+1}}, \dots, p_{i_m}).$$

这里 $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$, $0 \leq r \leq m$, 且 v_1 与 v_2 恰在 $M \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 有一个横截交点.

更进一步, 对任意给定的能量上界 $C > 0$, 只存在至多有限条第二类的节点曲线.

注 2.80 我们在注2.53中提到了收敛于节点曲线的定义, 故这里不再赘述.

将上述节点曲线收集起来, 我们有闭包

$$\overline{\mathcal{M}}_{\text{emb}}^2(J_\infty; p_1, \dots, p_m) \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(J_\infty),$$

其中后者为我们之前定义的 Gromov 紧化, 上述紧化定理告诉我们 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J_\infty; p_1, \dots, p_m)$ 的紧化具有更好更全面的刻画. 为了证明上述定理, 我们将会使用联结不等式以及 $J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty; p_1, \dots, p_m)$ 的一般性 (generic) 假设来排除其余节点曲线极限的可能性.

在结束本小节之前, 我们先利用紧化定理与相交数的计算, 对之前的命题2.74做进一步的细化:

命题 2.81 给定 $J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m)$, 则对任意不同的 $u, v \in \overline{\mathcal{M}}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$, 若具有相同的同调类, 则 u 与 v 的恰好横截相交于 p_1, \dots, p_m .

证明. 若 u, v 均为嵌入球面, 则之前已经给出了证明. 我们下面分情况讨论:

- 若 u 嵌入, v 为节点曲线 (v^1, v^2) , 则 $[v^1] \cdot [v^1] = r - 1$, $[v^2] \cdot [v^2] = m - r - 1$, $[v^1] \cdot [v^2] = 1$, $[v] = [v^1] + [v^2]$.

则此时仍有 $m = [u] \cdot [u] = [u] \cdot [v] = [u] \cdot [v^1] + [u] \cdot [v^2] \geq r + (m - r) = m$, 其中 $[u] \cdot [v^1] \geq r$ 是因为有交点 p_{i_1}, \dots, p_{i_r} , v^2 同理, 因此由正相交定理可知成立.

- 若 u, v 均为节点曲线, 设为 (u^1, u^2) 与 (v^1, v^2) , 若 u^i 与 v^j 均不相同, 则类

似的也可以证明

$$m = [u] \cdot [v] = \sum_{i,j \in \{1,2\}} [u^i] \cdot [v^j] \geq m,$$

因此由正相交定理可知成立.

- 若 u, v 均为节点曲线, 设为 (u^1, u^2) 与 (v^1, v^2) , 不妨设 $u^1 = v^1$, 则下证明 $u = v$: 设 $u^1 = v^1$ 经过 p_1, \dots, p_m 中的 m_1 个点, 则可知 u^2 与 v^2 共同穿过剩下 m_2 个点, 这里 $m_1 + m_2 = m$. 进而可知若 $u^2 \neq v^2$, 则由正相交定理可知 $[u^2] \cdot [v^2] \geq m_2$.

此时由 $[u^1] \cdot [u^1] = m - 1$, 从而我们可以得到

$$\begin{aligned} m = [u] \cdot [v] &= [u^1] \cdot [v^1] + [u^2] \cdot [v^1] + [u^1] \cdot [v^2] + [u^2] \cdot [v^2] \\ &= [u^1] \cdot [u^1] + [u^2] \cdot [u^1] + [v^1] \cdot [v^2] + [u^2] \cdot [v^2] \\ &\geq (m_1 - 1) + 1 + 1 + m_2 = m + 1, \end{aligned}$$

矛盾! 从而 $u^2 = v^2$, 也即 $u = v$.

综上所述我们完成了证明. □

2.6.3 指标计算

为了证明紧性定理2.76和紧化定理2.79, 核心想法是在 Gromov 紧性定理2.52的基础上, 借助指标计算排除一些可能的节点曲线, 因此在给出完整的定理证明之前, 我们先做一些基本的指标计算.

设 M 是 $2n$ 维近复流形, 且存在一列 C^∞ 收敛的近复结构 $J_k \rightarrow J_\infty$, 以及一列 $u_k \in \mathcal{M}_g(A; J_k)$ 收敛于

$$u_\infty \in \overline{\mathcal{M}}_g(A; J_\infty),$$

其中由 Gromov 紧性定理2.52可知 u_∞ 为一条稳定节点曲线, 也即

$$u_\infty = [(S, j, u_\infty, \emptyset, \Delta)].$$

设 S 有连通分支

$$\{u_\infty^i := [(S_i, j, u_\infty^i, \emptyset)] \in \mathcal{M}_{g_i}(A_i; J_\infty)\}_{i=1, \dots, V},$$

其中这里 $\sum_{i=1}^V A_i = A$, 并且其中某些光滑曲线 u_∞^i 可能为常数, 则此时对应的 $A_i = 0$. 对 $i = 1, \dots, V$, 设 N_i 为分支 u_∞^i 上节点数量, 也即 $N_i = \#(S_i \cap \Delta)$.

注 2.82 回忆一条节点曲线 $(S, j, u, (\zeta_1, \dots, \zeta_m), \Delta)$ 称为稳定的, 如果在 S 上移除所有标记点 ζ_1, \dots, ζ_m 和节点 Δ 得到的穿孔曲面 \dot{S} , 满足任何使得 u 限制在其上为常值的 \dot{S} 的连通分支均具有负欧拉示性数. 故可知我们有若 $A_i = 0$, 则 $\chi(S_i) - N_i < 0$.

设 Σ 为 u_k 的定义域, 也即将 S 去掉节点小邻域粘贴得到的曲面, 也即注2.53中的 \hat{S} , 因此不难得到

$$\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^V [\chi(S_i) - N_i] = \sum_{i=1}^V \chi(S_i) - \#\Delta.$$

我们定义极限节点曲线 u_∞ 的指标与之前的吻合, 也即

$$\text{ind}(u_\infty) := \text{ind}(u_k) = (n-3)\chi(\Sigma) + 2c_1(A).$$

注意到

$$\text{ind}(u_\infty^i) = (n-3)\chi(S_i) + 2c_1(A_i),$$

因此我们有

$$\text{ind}(u_\infty) = \sum_{i=1}^V [\text{ind}(u_\infty^i) - (n-3)N_i],$$

代入四维情形, 也即 $n = 2$, 则有

$$\text{ind}(u_\infty) = \sum_{i=1}^V [\text{ind}(u_\infty^i) + N_i].$$

注意到: 若 $A_i = 0$, 也即 u_∞^i 为常值映射, 则 $\text{ind}(u_\infty^i) + N_i = -\chi(S_i) + 2c_1(A_i) + N_i = -(\chi(S_i) - N_i) > 0$, 其中用到了 u_∞ 是稳定的.

因此我们有,

命题 2.83 设 (M, J) 为四维近复流形, 且 u_∞ 为一条非常值节点 J -全纯曲线, 且有连通分支 $u_\infty^1, \dots, u_\infty^V$, 且每个分支 u_∞^i 包含 N_i 个节点, 则有

$$\text{ind}(u_\infty) \geq \sum_{\{i | u_\infty^i \neq \text{常值}\}} [\text{ind}(u_\infty^i) + N_i],$$

并且取等号当且仅当无取常值的分量.

事实上, 若 u_∞ 有节点, 则我们有

$$\text{ind}(u_\infty) \geq 2 + \sum_{\{i | u_\infty^i \neq \text{常值}\}} \text{ind}(u_\infty^i),$$

因为节点总是成对出现.

上面这个命题当 $\text{ind}(u_k) = \text{ind}(u_\infty)$ 较小的时候非常有用, 这会帮助我们排除许多复杂的节点情形, 假设每个分量 u_∞^i 处都满足横截性, 那么有 $\text{ind}(u_\infty^i) \geq 0$, 从而结合命题 2.83 可知

- 若 $\text{ind}(u_k) = 0$, 则 u_∞ 是光滑曲线, 不含节点.
- 若 $\text{ind}(u_k) = 2$, 则我们此时有对任何非常值的分量 u_∞^i , 有 $\text{ind}(u_\infty^i) = 0$.

但需要注意的是一般来讲横截性并不容易满足, 因为 u_∞^i 并不一定单, 因此我们下面仔细讨论一下对于多重覆盖的曲线, 其指标满足的关系.

设 $\tilde{u}: (\tilde{\Sigma}, \tilde{j}) \rightarrow (M, J)$ 为一条多重覆盖的 J -全纯曲线, 且覆盖单曲线 $u: (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$, 以及对应的分歧覆盖映射为 $\varphi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, 即有 $\tilde{u} = u \circ \varphi$. 记 $\deg \varphi = k \geq 1$, 则有 $[\tilde{u}] = k[u]$.

回忆 Riemann-Hurwicz 定理^[9], 我们有

$$-\chi(\tilde{\Sigma}) + k\chi(\Sigma) = B_\varphi \geq 0,$$

这里 B_φ 为 φ 在所有分歧点的分歧数之和.

因此现在对 $\text{ind}(\tilde{u}) = (n-3)\chi(\tilde{\Sigma}) + 2c_1([\tilde{u}])$, 以及 $\text{ind}(u) = (n-3)\chi(\Sigma) +$

$2c_1([u])$, 可知

$$\text{ind}(\tilde{u}) = k \cdot \text{ind}(u) - (n-3)B_\varphi.$$

特别的, 我们有

命题 2.84 设 u 为四维近复流形中的闭非常值 J -全纯曲线, 若 $\tilde{u} = u \circ \varphi$ 为 u 的一个 k -重分歧覆叠, 则有

$$\text{ind}(\tilde{u}) = k \cdot \text{ind}(u) + B_\varphi.$$

特别的, 我们有 $\text{ind}(\tilde{u}) \geq k \text{ind}(u)$, 取等当且仅当没有分歧点.

综合以上讨论, 我们可以借助 $\text{ind}(u_\infty)$ 对其进行约束, 关键假设是所有某处单射的 J -全纯曲线指标非负, 这对一般性选取的 J 都满足, 这是由扰动横截性保证的.

引理 2.85 设 (M, J) 为一个四维近复流形, 且所有某处单射的 J -全纯曲线都具有非负指标. 现在设 $u_\infty \in \overline{\mathcal{M}}_0(A; J)$ 为一条非常值稳定节点 J -全纯球面 (算术亏格为 0), 则有

- 若 $\text{ind}(u_\infty) = 0$, 则 u_∞ 为光滑 (即无节点) 的单曲线.
- 若 $\text{ind}(u_\infty) = 2$, 则其可能是
 - 一条光滑单曲线,
 - 或是一个单 J -全纯球面的 2-重分歧覆盖, 且这个单 J -全纯球面的指标为 0.
 - 或是一条恰有一对节点两个连通分支的节点曲线, 且每个分支均为单 J -全纯球面且指标均为 0.

证明. $\text{ind}(u_\infty) = 0$ 的情形已经在之前讨论过, 可知其是光滑的 J -全纯球面, 下证明其单, 考虑 $u_\infty = v \circ \varphi$, 则由 v 单可知 $\text{ind}(v) \geq 0$, 进而由 Riemann-Hurwicz 定理可知 $\text{ind}(v) = 0$ 且 $B_\varphi = 0$, 且 v 的定义域也为球面, 因此进一步可知 $B_\varphi = -\chi(S^2) + k\chi(S^2) = 2k - 2$, 因此可知 $k = 1$, 故有 u_∞ 为单曲线.

现在假设 $\text{ind}(u_\infty) = 2$, 则

- 若 u_∞ 无节点且是 k -重覆盖 $v \circ \varphi$, 这里 v 单 J -全纯球面, 因此我们仍有

$B_\varphi = -\chi(S^2) + k\chi(S^2) = 2k - 2$, 故可知

$$2 = \text{ind}(u_\infty) = k \cdot \text{ind}(v) + B_\varphi \geq 2(k-1),$$

这里用到 v 单则根据假设 $\text{ind}(v) \geq 0$. 因此这表明

- $k = 2$, 此时 v 为单 J -全纯球面的分歧覆盖, 且 $\text{ind}(v) = 0$.
- $k = 1$, 此时 u_∞ 为光滑单曲线.
- 若 u_∞ 有节点, 设 u_∞ 连通分支为 $u_\infty^1, \dots, u_\infty^V$, 由 u_∞ 算术亏格为 0 可知每个连通分支均为球面.

此时由命题 2.83 可知

$$\text{ind}(u_\infty) \geq 2 + \sum_{\{i | u_\infty^i \neq \text{常值}\}} \text{ind}(u_\infty^i),$$

结合 $\text{ind}(u_\infty) = 2$, 可知不等式取等, 因此没有常值分量, 并且恰好只有两个分支, 一对节点, 每个分支指标均为 0.

综上所述我们完成了证明!

□

2.6.4 $m = 0$ 情形的紧性 (化) 定理

本节我们用上一小节进行的指标计算来证明紧性定理 $m = 0$ 的特殊情况, 回忆这是说,

定理 2.86 设 $J_\infty \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty)$, 并且 $u_k \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_k)$ 满足存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{S^2} u_k^* \omega_k \leq C, \quad \forall k.$$

从而 $\{u_k\}$ 有子列收敛于嵌入曲线 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty)$.

证明. 由 Gromov 紧性定理 2.52, 设 $\{u_k\}$ 有子列收敛于稳定节点 J_∞ -球面 u_∞ , 且不妨假设子列 $\{u_{n_i}\}$ 满足 $[u_{n_i}] = [u_\infty]$, 则此时由联结公式可知 u_∞ 为嵌入, 且 $\text{ind}(u_\infty) = \text{ind}(u_{n_i}) = 0$, 因此由引理 2.85 可知 u_∞ 光滑也即没有节点, 进一步结合 $[u_\infty] \cdot [u_\infty] = [u_{n_i}] \cdot [u_{n_i}] = -1$, 可知 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty)$. □

注 2.87 这里 $J_\infty \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty)$ 的条件保证了所有某处单射的 J_∞ 全纯曲线都具有非负指标这一条件.

类似的对于紧化定理对于 $m = 0$ 的特殊情形,

定理 2.88 $J_\infty \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty)$, 并且 $u_k \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J_k)$ 满足存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{S^2} u_k^* \omega_k \leq C, \quad \forall k.$$

从而 $\{u_k\}$ 有子列收敛于如下两者情形之一:

1. 收敛于一条嵌入曲线 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J_\infty)$;
2. 收敛于一条节点曲线, 且恰有两个光滑分支

$$v_+ \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty), \quad v_- \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty).$$

且 v_+ 与 v_- 恰在 M 中有一个横截交点.

更进一步, 对任意给定的能量上界 $C > 0$, 只存在至多有限条第二类的节点曲线.

证明. 由引理 2.85, 以及 $\text{ind}(u_\infty) = \text{ind}(u_k) = 2$, 可知有如下几种可能性:

1. u_∞ 为一条光滑单曲线, 由联结公式可知嵌入, 进而 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J_\infty)$.
2. u_∞ 是一个单 J -全纯球面 v 的 2-重分歧覆盖, 且这个单 J -全纯球面 v 的指标为 0.

但注意到此时 $0 = [u_k] \cdot [u_k] = [u_\infty] \cdot [u_\infty] = 4[v] \cdot [v]$, 因此 $[v] \cdot [v] = 0$, 这利用了 $[u_\infty] = 2[v]$. 以及 $0 = \text{ind}(v) = -\chi(S^2) + 2c_1([v])$, 可知 $c_1([v]) = 1$.

由联结公式可知

$$0 \leq 2\delta(v) \leq \chi(S^2) + [v] \cdot [v] - c_1([v]) = 1,$$

因此 $\delta(v) = 0$, 也即 v 为嵌入, 因此上述不等式取等, 这即 $0 = 1$ 矛盾!

因此这种情形可以排除.

3. u_∞ 是一条恰有一对节点两个连通分支的节点曲线, 且每个分支均为单 J -全纯球面且指标均为 0.

下面证明其两个分支 u^1 和 u^2 恰好横截相交于一点:

- 若 u^1 和 u^2 的像重合, 则此时 $[u_\infty] = 2[u^1] = 2[u^2]$, 仿照 2 中的情形可以类似导出矛盾.
- 若 u^1 和 u^2 的像交于有限多个点, 则由均经过节点的像, 因此可知

$$[u^1] \cdot [u^2] \geq 1.$$

注意到 $\text{ind}(u^i) = -\chi(S^2) + 2c_1([u^i]) = 0$, 因此可知 $c_1([u^i]) = 1$, 进而结合联结不等式

$$\begin{aligned} 0 &= [u_\infty] \cdot [u_\infty] \\ &= [u^1] \cdot [u^1] + [u^2] \cdot [u^2] + 2[u^1] \cdot [u^2] \\ &\geq 2\delta(u^1) + c_1([u^1]) - 2 + 2\delta(u^2) + c_1([u^2]) - 2 + 2 \\ &= 2\delta(u^1) + 2\delta(u^2) \geq 0, \end{aligned}$$

因此可知 $\delta(u^i) = 0$, 也即 u^1, u^2 均为嵌入, 并且上述不等式取等, 也即 $[u^1] \cdot [u^2] = 1$, 进一步由联结公式可知 $[u^i] \cdot [u^i] = -1$, 因此 $u^i \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty)$, 并且两者恰好横截相交于一点.

更进一步若给定能量上界, 则由 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty)$ 的紧性可知至多有限条这一类的节点曲线.

综上, 我们完成了 $m = 0$ 情形下的紧化定理的证明. □

2.6.5 一般情形的紧性(化)定理

现在我们证明更一般的紧性定理2.76和紧化定理2.79, 其中回忆我们记

$$J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m),$$

如果对任意 $A \in H_2(X)$ 以及任意 $\{p_1, \dots, p_m\}$ 的有序集 $(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$, 只要 $\mathcal{M}_{0,r}(A; J; p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ 包含一条某处单射曲线, 则该模空间的虚拟维数 ≥ 0 .

给定一族 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J; p_1, \dots, p_m)$ 或 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 中的伪全纯曲线 $\{u_k\}$,

且满足一致能量上界, 则由 Gromov 紧性定理可以找到一族子列收敛于一条稳定节点曲线 $u_\infty \in \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(J_\infty)$.

我们首先利用 2.6.3 小节的指标计算去尽可能的认识 u_∞ . 我们已经考虑过不带约束条件的情形, 因此这启发我们考虑如下遗忘映射

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(J_\infty) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_0(J_\infty),$$

也即遗忘掉 m 个标记点, 设 u_∞ 在上述映射下的像为 \hat{u}_∞ , 则不难看见两者算数亏格, 同调类与指标均相同.

现在假设 \hat{u}_∞ 有连通分支 $u_\infty^1, \dots, u_\infty^V$, N_i 表示 u_∞^i 上的节点数, 不难用类似于命题 2.83 的方法证明

$$\text{ind}(u_\infty) - 2m \geq \sum_{\{i | u_\infty^i \neq \text{常值}\}} [\text{ind}(u_\infty^i) - 2m_i + N_i], \quad (2.1)$$

其中 m_i 表示 u_∞^i 在遗忘映射下的原像包含 $\{p_1, \dots, p_m\}$ 中的点个数, 并且上式取等当且仅当 \hat{u}_∞ 没有常值分量.

现在对任意非常值分量 u_∞^i , 设其为某个单 J_∞ -全纯曲线 v^i 的 $k_i \geq 1$ 重分歧覆叠, 因此可视 v^i 为带有 m_i 个标记点的曲线, 进而对一般性的 $J_\infty \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega_\infty; p_1, \dots, p_m)$, 我们有

$$\text{ind}(v^i) - 2m_i \geq 0. \quad (2.2)$$

因此我们由命题 2.84 与 Riemann-Hurwicz 公式可知

$$\begin{aligned} \text{ind}(u_\infty^i) - 2m_i &= k_i \text{ind}(v^i) + B_{\varphi_i} - 2m_i \\ &= k_i [\text{ind}(v^i) - 2m_i] + 2(m_i + 1)(k_i - 1), \end{aligned}$$

因此结合上式与(2.1)，我们有

$$\text{ind}(u_\infty) - 2m \geq \sum_{\{i|u_\infty^i \neq \text{常值}\}} (k_i [\text{ind}(v^i) - 2m_i] + 2(m_i + 1)(k_i - 1) + N_i), \quad (2.3)$$

其中右侧三项均非负，并且不等式取等当且仅当 \hat{u}_∞ 没有常值分量.

现在对 $u_k \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_k; p_1, \dots, p_m)$ ，则有 $\text{ind}(u_\infty) = 2m$ ，从而(2.3)取等，进而由 $m = 0$ 情形的紧性定理2.86可知 \hat{u}_∞ 无节点且为单 J_∞ -全纯曲线，进而可知 u_∞ 也没有节点，也即为光滑单 J_∞ -全纯曲线. 现在再结合

$$[u_\infty] \cdot [u_\infty] = [u_k] \cdot [u_k] = m - 1,$$

以及联结公式2.64，可知 $u_\infty \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_k; p_1, \dots, p_m)$ ，即证一般情形的紧性定理2.76!

类似的考虑遗忘映射，以及套用 $m = 0$ 情形紧化定理2.88的证明，可以很快得到一般情形紧化定理2.88的证明，囿于篇幅我们略去这个略显重复的讨论.

第七节 本章小结

本节我们主要参考 [6, 8] 等文献给出了一份关于辛流形中伪全纯曲线模空间的实用性介绍.

- 本章前两节主要介绍了近复结构以及伪全纯曲线的定义与基本性质.
- 第三节循序渐进，依次介绍了最简单情形的伪全纯曲线模空间，单参数近复结构的伪全纯曲线模空间以及进一步满足一些约束条件的模空间，并陈述了可以通过扰动近复结构实现模空间满足横截性条件的结果，其中满足横截性条件一般意味着模空间会具有光滑流形结构.
- 第四节介绍了节点曲线的定义，并基于此给出了伪全纯曲线模空间的 Gromov 紧化的定义.
- 第五节我们聚焦四维辛流形，陈述了众多四维特殊的性质，如自动横截性定理2.54，正相交定理2.59以及联结不等式2.62.

- 第六节作为前面五节内容的应用，同时也为后文证明铺垫，我们陈述并证明了四维辛流形中辛嵌入球面的模空间紧性与紧化定理，也即可以借助基本的指标计算，更清楚的刻画嵌入球面模空间紧化的结构.

第三章 辛流形的构造

本章我们主要介绍两种构造辛流形的手段——爆破与 Lefschetz 纤维/铅笔，这两者都会在我们后文中发挥不可或缺的作用。

第一节 爆破与例外球面

本节我们主要介绍流形上的爆破，我们先在 (近) 复流形范畴内定义，再进一步在辛流形的范畴内定义，并结合我们在第二章中介绍的伪全纯曲线的技术去讨论爆破中例外球面的相关性质。

3.1.1 (近) 复流形上的爆破

我们首先讨论在复流形范畴下的复爆破定义，从标准的模型 \mathbb{C}^n 出发，

定义 3.1 我们称在 \mathbb{C}^n 的 $\{0\}$ 处爆破是指

$$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n) := \{(\ell, z) \in \mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}^n \mid z \in \ell\},$$

也即为 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上的重言线丛 $\mathcal{O}(-1)$ 。

容易看到我们有，

命题 3.2 考虑向第二分量 \mathbb{C}^n 的投影映射 $p_2 : \mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ ，则注意到 $p_2^{-1}(0)$ 为零截面也即 $\mathbb{C}P^{n-1}$ ，因此我们有双全纯同构，也即保定向微分同胚

$$p_2 : \mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n) - p_2^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}.$$

利用这个性质，我们就可以定义更一般的爆破，

定义 3.3 设 S 为复 n 维流形， $p \in S$ ，则如下定义 S 在 p 处的复爆破 (*blow-up*) $\mathrm{Bl}_p(S)$ ，

1. 选取 p 点邻域 U 以及双全纯同构 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ ， $\varphi(p) = 0$ ，
2. 考虑双全纯同构 $\psi : \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n) - p_2^{-1}(0)$ ，

3. 现在取

$$\mathrm{Bl}_p(S) := (S - U) \cup_{\varphi|_{\partial} \circ \psi|_{\partial}} \mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n),$$

这里 $\varphi|_{\partial}$ 与 $\psi|_{\partial}$ 表示限制在边界上的粘贴映射.

不难看到在粘贴边界的邻域, 两侧的复结构通过双全纯同构粘贴了起来, 因此自然可以在 $\mathrm{Bl}_p(S)$ 上定义复结构, 因此得到的复爆破也为 n 维复流形.

不难证明 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^2) = \mathcal{O}(-1)$ 双全纯同构于 $\overline{\mathbb{C}P^2} - \mathbb{D}^4$, 因此也保定向微分同胚, 由此可见

$$\mathrm{Bl}_p(S) = (S - U) \cup (\overline{\mathbb{C}P^2} - \mathbb{D}^4),$$

注意到 $U - \{0\} = \mathbb{C}^2 - \{0\}$ 和 $\overline{\mathbb{C}P^2} - \mathbb{D}^4$ 之间为保定向同胚, 因此限制在边界上也保定向, 但 $S - U$ 的边界与 U 的边界之间的粘贴映射为反定向的微分同胚 (因为这是诱导定向导致的), 因此 $S - U$ 的边界和 $\overline{\mathbb{C}P^2} - \mathbb{D}^4$ 的边界同胚在两者复合下反定向, 因此可知

$$\mathrm{Bl}_p(S) = S \# \overline{\mathbb{C}P^2}.$$

对投影映射

$$p_2 : \mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

其可以诱导

$$\beta : \mathrm{Bl}_p(S) \rightarrow S,$$

其中在 $S - U$ 上为 id , 在 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ 上为 p_2 , 称为**复坍缩 (blow-down)**. 我们记 $\beta^{-1}(p) \subset \mathrm{Bl}_p(S)$ 为爆破 $\beta : \mathrm{Bl}_p(S) \rightarrow S$ 的例外除子, 不难看到当 S 为复曲面时, $\beta^{-1}(p) \cong \mathbb{C}P^1$ 为球面, 并且自交数为 -1 , 我们也称为**例外球面**, 假如一个复流形不包含例外球面, 则称其是**极小的**.

现在更一般的, 设 (M, J) 为近复流形, 且设近复结构在 $z \in M$ 点的邻域内可积, 则可以类似在 z 定义**近复爆破**得到近复流形 (\tilde{M}, \tilde{J}) , 且有伪全纯坍缩映射

$$\beta : (\tilde{M}, \tilde{J}) \rightarrow (M, J),$$

以及例外除子 $\beta^{-1}(z)$.

命题 3.4 设 $\beta: (\tilde{M}, \tilde{J}) \rightarrow (M, J)$ 为近复爆破, 且 $\tilde{u}: (\Sigma, j) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{J})$ 为伪全纯曲线, 设 E 为 \tilde{M} 中的例外除子, 若 \tilde{u} 浸入且与 E 横截相交, 则 $u = \beta \circ \tilde{u}: (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ 也为浸入伪全纯曲线. 更进一步, 若 $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$, 则有 u 和 \tilde{u} 的法丛满足

$$c_1(\nu(u)) = c_1(\nu(\tilde{u})) + [\tilde{u}] \cdot [E].$$

证明. 注意到 β, \tilde{u} 均为伪全纯映射, 因此复合得到的 u 也是伪全纯映射. 我们下面说明其为浸入, 设 β 将注意到对任意 $p \in \Sigma$, 若 $\tilde{u}(p) \notin E$, 则 β 在 $\tilde{u}(p)$ 小邻域内为恒同映射, 因此结合 $\tilde{u}_{*,p}$ 为浸入可知 $u_{*,p}$ 为浸入. 若 $\tilde{u}(q) \in E$, 设 $\beta(E) = m \in M$, 则 $u(q) = \beta \circ \tilde{u}(q) = m$, 从而有

$$T_q \Sigma \xrightarrow{\tilde{u}_{*,q}} T_{\tilde{u}(q)} \tilde{M} \xrightarrow{\beta_{*,\tilde{u}(q)}} T_m M,$$

结合 \tilde{u} 与 E 横截相交, 因此在 $\tilde{u}(q)$ 处, 有

$$\tilde{u}_{*,q} T_q \Sigma + T_{\tilde{u}(q)} E = T_{\tilde{u}(q)} \tilde{M},$$

进而作用 $\beta_{*,\tilde{u}(q)}$, 结合 $\beta(E) = m$, 因此 $\beta_{*,\tilde{u}(q)}(T_{\tilde{u}(q)} E) = \{0\}$, 进而有

$$u_{*,q}(T_q \Sigma) = \beta_{*,\tilde{u}(q)} \left(T_{\tilde{u}(q)} \tilde{M} \right),$$

维数为 2, 因为 $\ker \beta_{*,\tilde{u}(q)} = T_{\tilde{u}(q)} E$ 维数为 2, $T_{\tilde{u}(q)} \tilde{M}$ 维数为 4, 从而可知此时 $u_{*,q}$ 为浸入, 综上所述我们有 u 为浸入.

由注 2.63, 可知 $c_1(\nu(u)) = c_1(u) - \chi(\Sigma) + 2\delta'(u)$, 以及 $c_1(\nu(\tilde{u})) = c_1(u') - \chi(\Sigma) + 2\delta'(\tilde{u})$, 则 $c_1(\nu(u)) - c_1(\nu(\tilde{u})) = 2\delta'(u) - 2\delta'(\tilde{u})$, 结合 β 除了把 E 坍缩成一点外为恒同映射, 以及 δ' 代数相交数的定义, 可知 $2\delta'(u) - 2\delta'(\tilde{u}) = [\tilde{u}] \cdot [E]$, 综上所述我们完成了证明. \square

3.1.2 辛流形上的爆破

本节我们主要讨论如何在辛流形范畴下定义爆破，和复爆破情形一样，我们先对 $\beta: \text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ 上定义辛形式，注意到 $\pi: \text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) = \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ ，因此考虑 \mathbb{C}^n 上的标准辛结构 ω_{std} 以及 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上的辛结构 ω_{FS} ，不难看到对任意常数 $R > 0$ ，我们有

$$\omega_R := \beta^* \omega_{\text{FS}} + R^2 \pi^* \omega_{\text{FS}}$$

为 $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ 上的辛形式 (事实上为 Kähler 形式)，并且零截面是辛子流形，并且辛同构于 $(\mathbb{C}P^{n-1}, R^2 \cdot \omega_{\text{FS}})$ 。

设 $B_r^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ 为包含原点半径为 r 的开球，记 $\tilde{B}_r^{2n} := \beta^{-1}(B_r^{2n}) \subset \text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ ，由命题 3.2 可知 $\tilde{B}_r^{2n} - \mathbb{C}P^{n-1}$ 与 $B_r^{2n} - \{0\}$ 是双全纯同构的，这在复流形范畴下保证了我们构造的复爆破得到的仍是复流形，因此现在我们要在辛流形范畴下证明类似的结论以构造辛爆破：

命题 3.5 对任意常数 $R > 0$ ，我们有 $(\tilde{B}_r^{2n} - \mathbb{C}P^{n-1}, \omega_R)$ 与 $(B_{\sqrt{R^2+r^2}}^{2n} - \overline{B_R^{2n}}, \omega_{\text{std}})$ 辛同构。

证明。 利用柱坐标，我们有如下微分同胚

$$\Gamma: \mathbb{R} \times S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}, \quad (t, z) \mapsto e^{t/2} z,$$

则有 $V_{\text{std}} := \Gamma_*(\partial_t)$ 在 $\mathbb{C}^n - \{0\}$ 坐标表示为 $(z_1, \dots, z_n) = (p_1 + iq_1, \dots, p_n + iq_n)$ 的情形下可写作

$$V_{\text{std}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + q_j \frac{\partial}{\partial q_j} \right),$$

是 \mathbb{C}^n 上的一个标准 Liouville 向量场，也即 $\mathcal{L}_{V_{\text{std}}} \omega_{\text{std}} = \omega_{\text{std}}$ ，从而由 Cartan 魔术公式我们有其对应的 Liouville 形式

$$\lambda_{\text{std}} := \omega_{\text{std}}(V_{\text{std}}, \cdot) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j dq_j - q_j dp_j)$$

满足 $d\lambda_{\text{std}} = \omega_{\text{std}}$ 以及 $\mathcal{L}_{V_{\text{std}}} \lambda_{\text{std}} = \lambda_{\text{std}}$ 。从而若设 $\alpha_{\text{std}} := \lambda_{\text{std}}|_{S^{2n-1}}$ ，则我们有

$\Gamma^* \lambda_{\text{std}} = e^t \alpha_{\text{std}}$, 进而满足

$$\Gamma^* \omega_{\text{std}} = d(e^t \alpha_{\text{std}}),$$

同时也不难计算得到 $\Gamma^*(\pi^* \omega_{\text{FS}}) = d\alpha_{\text{std}}$, 因此结合起来我们有

$$\Gamma^* \omega_R = d((e^t + R^2) \alpha_{\text{std}}).$$

注意到我们有嵌入映射 $F: \mathbb{R} \times S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R} \times S^{2n-1}$, 其中 $F(t, z) := (\log(e^t + R^2), z)$, 因此 $\Gamma^* \omega_R = F^* d(e^t \alpha_{\text{std}})$, 综上所述我们可以写下一个辛同构

$$\begin{aligned} \Phi_R &:= \Gamma \circ F \circ \Gamma^{-1}: (\tilde{B}_r^{2n} - \mathbb{C}P^{n-1}, \omega_R) \rightarrow (B_{\sqrt{R^2+r^2}}^{2n} - \overline{B_R^{2n}}, \omega_{\text{std}}) \\ z &\mapsto \sqrt{|z|^2 + R^2} \cdot \frac{z}{|z|}. \end{aligned}$$

综上所述我们完成了证明! □

现在利用上述辛同构, 我们就可以如下定义辛爆破了:

定义 3.6 给定维数为 $2n \geq 4$ 的辛流形 (M, ω) , 以及 (由 Darboux 定理保证存在的) 辛嵌入 $\psi: (B_{R+\varepsilon}^{2n}, \omega_{\text{std}}) \hookrightarrow (M, \omega)$, 其中 $R, \varepsilon > 0$ 为常数, 则我们如下定义 (M, ω) 沿着 ψ 权重为 R 的辛爆破: 去掉 M 中的 $\psi(\overline{B_R^{2n}})$, 再粘回充分小的 \tilde{B}_δ^{2n} , 更具体的我们记为

$$(\tilde{M}, \tilde{\omega}) := (M - \psi(\overline{B_R^{2n}}), \omega) \cup_{\psi \circ \Phi_R} (\tilde{B}_\delta^{2n}, \omega_R),$$

其中 $\delta > 0$ 满足 $\sqrt{R^2 + \delta^2} \leq R + \varepsilon$, 我们称 $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ 中的 $(\mathbb{C}P^{n-1}, R^2 \omega_{\text{FS}}) \subset (\tilde{B}_\delta^{2n}, \omega_R)$ 为例外除子. 对四维流形中的情形我们称之为例外球面.

注 3.7 注意到对辛四维流形中的例外球面 E , 其管状邻域同胚于 $\mathcal{O}(-1)$, 因此有其自相交数 $[E] \cdot [E] = -1$.

不难看到上述构造的辛流形与参数 ε, δ 的选取均无关, 但确实与 R 的选取有关, 因为 $\tilde{\omega}$ 一部分源自于 ω_R , 但不难证明:

定理 3.8 ([8]) 对参数 $\tau \in [0, 1]$, 设 $\psi_\tau: (B_{R_\tau+\varepsilon}^{2n}, \omega_{\text{std}}) \hookrightarrow (M, \omega)$ 为一族光滑的辛嵌

入，则对 (M, ω) 沿着 ψ_τ 做权重为 R_τ 的辛爆破得到的辛流形 $(\tilde{M}_\tau, \tilde{\omega}_\tau)$ ，我们有对任意 $\tau \in [0, 1]$ ，存在微分同胚 $\varphi_\tau: \tilde{M}_0 \rightarrow \tilde{M}_\tau$ 使得 $\varphi_\tau^* \tilde{\omega}_\tau$ 为 \tilde{M}_0 上一族光滑辛形式，从而我们有 $(\tilde{M}_\tau, \tilde{\omega}_\tau)$ 之间辛形变等价。

并且更进一步，对任意连通辛流形 (M, ω) ，任何两个辛嵌入 $\psi_i: (\overline{B_{R_i}^{2n}}, \omega_{\text{std}})$ ， $i = 0, 1$ ，可以找到一族光滑的辛嵌入 $\psi_\tau: (B_{R_\tau + \varepsilon}^{2n}, \omega_{\text{std}}) \hookrightarrow (M, \omega)$ 连接，因此辛爆破 $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ 在辛形变等价意义下不依赖于构造的选取。

类似于近复爆破的情形，我们也可以反向得到辛坍缩 (blow-down) 映射 $\beta: (\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow (M, \omega)$ ，基于此我们可以定义，

定义 3.9 我们称辛四维流形 X 是极小的，如果其不包含例外球面。不难证明任何一个辛四维流形 X 至多包含有限个互不相交的一族例外球面，将其全部辛坍缩得到的辛四维流形 X_{\min} 称为 X 的一个极小模型。

不难证明爆破前后辛流形之间的第一 Chern 类之间满足如下关系：

命题 3.10 ([8]) 设 $\pi: (\tilde{X}, \tilde{\omega}) \rightarrow (X, \omega)$ 为辛四维流形之间的辛坍缩，且坍缩掉 \tilde{X} 中的例外球面为 E_1, \dots, E_k ，则我们有

$$\pi^* c_1(X, \omega) = c_1(\tilde{X}, \tilde{\omega}) + \sum_{i=1}^k \text{PD} \cdot [E_i].$$

囿于篇幅，我们并不会给出上述结果的证明，但在结束本节之前，我们可以证明一个简单的命题来熟悉辛爆破，其同时也是定理F的反面。

命题 3.11 设 X 为 $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{\text{FS}})$ 或者是爆破辛直纹面，则可以适当形变 ω 使得

$$c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0.$$

证明. 注意到 $c_1(\mathbb{C}P^2, \omega_{\text{FS}}) \cdot \omega_{\text{FS}} > 0$ 其实是显然的，因为由 Chern 类的公理定义，我们有 $c_1(\mathbb{C}P^2) = 3\text{PD} \cdot [\mathbb{C}P^1]$ ，而 $\mathbb{C}P^1$ 是 Kähler 流形 $(\mathbb{C}P^2, \omega_{\text{FS}})$ 的复子流形，也是辛子流形，因此 $\int_{\mathbb{C}P^1} \omega_{\text{FS}} > 0$ ，因此可知 $\omega = a \cdot \text{PD} \cdot [\mathbb{C}P^1]$ ，这里 $a > 0$ ，因此 $c_1(\mathbb{C}P^2, \omega_{\text{FS}}) \cdot \omega_{\text{FS}} = 3a > 0$ ，即证。

现在假设 (X, ω) 为一个爆破辛直纹面，则其可记为 $X_{\min} \#^N \overline{\mathbb{C}P^2}$ ，其中 $X_{\min} \rightarrow \Sigma$ 是 X 的一个极小模型，其为一个辛直纹面，也即是一个 Σ 上的 S^2 -丛。

因此不难看到 $H_2(X)$ 由 $[\Sigma], [F]$ 以及 $[E_1], \dots, [E_N]$ 生成, 其中 F 为纤维. 故我们可设

$$\text{PD}.c_1(X, \omega) = m[\Sigma] + n[F] + \sum_{i=1}^N k_i[E_i],$$

进而结合 $[F] \cdot [F] = [\Sigma] \cdot [E_i] = [F] \cdot [E_i] = 0$, 以及 $[E_i] \cdot [E_i] = -1$, 我们有 $c_1([\Sigma]) = m[\Sigma] \cdot [\Sigma] + n$, $c_1([F]) = m$, 以及 $c_1([E_i]) = -k_i$, 因此现在结合联结公式2.64, 我们有 $m = c_1([F]) = [F] \cdot [F] + \chi(S^2) = 2$, $n + 2[\Sigma] \cdot [\Sigma] = c_1([\Sigma]) = [\Sigma] \cdot [\Sigma] + \chi(\Sigma)$, 故 $n = \chi(\Sigma) - [\Sigma] \cdot [\Sigma]$, 并且 $-k_i = c_1([E_i]) = -1 + \chi(S^2) = 1$, 从而 $k_i = -1$, 综上所述我们有

$$\text{PD}.c_1(X, \omega) = 2[\Sigma] + (\chi(\Sigma) - [\Sigma] \cdot [\Sigma]) \cdot [F] - \sum_{i=1}^N [E_i].$$

因此我们有

$$c_1(X, \omega) \cdot \omega = 2 \int_{\Sigma} \omega + (\chi(\Sigma) - [\Sigma] \cdot [\Sigma]) \cdot \langle \omega, [F] \rangle - \sum_{i=1}^N \langle \omega, [E_i] \rangle,$$

从而我们考虑形变的辛形式 $\omega_K := \omega + K \cdot \pi^* \sigma$, 其中 σ 是 Σ 上的体积形式, $\pi: X_{\min} \rightarrow \Sigma$ 为投影映射, 因此当 $K > 0$ 充分大时, 我们有

$$c_1(X, \omega_K) \cdot \omega_K > 0,$$

综上所述我们完成了证明. □

3.1.3 辛球面与近复球面

本节我们将辛范畴中的辛嵌入球面纳入近复流形的范畴里, 尽管利用引理2.6我们确实可以将辛嵌入子流形实现为一个近复子流形, 但我们给出的近复结构并不一定满足一般性假设, 因此为了实用, 我们需要证明某种意义上更强的结果.

定理 3.12 (例外球面的形变) 对任意闭辛四维流形 (X, ω) 以及一般性的 $J \in \mathcal{J}_{\tau}(X, \omega)$, 则任意例外球面 $E \subset (X, \omega)$ 均可沿着一族辛嵌入球面同痕于唯一的一条 J -全纯球面.

证明. 我们先说明唯一性: 设 $J \in \mathcal{J}_\tau(X, \omega)$, 以及 u_1, u_2 为两条不同的 J -全纯曲线, 且均同调于 E , 也即 $[u_1] = [u_2] = [E]$, 从而由正相交定理2.59可知

$$0 \leq [u_1] \cdot [u_2] = [E] \cdot [E] = -1$$

矛盾! 因此可知唯一性.

下面我们来说明存在性, 固定一般性的 $J \in \mathcal{J}_\tau(X, \omega)$, 以及例外球面 $E \subset (X, \omega)$, 为了说明其可以沿着一族辛嵌入球面同痕到一条 J -全纯球面, 我们只需要证明其可以沿着一族嵌入近复球面同痕即可, 其中近复结构需要是 ω -控制的. 因此首先由引理2.6, 存在 ω -控制的近复结构 J_0 使得 E 为 J_0 -全纯球面 u_0 的像.

由定理2.5可知 $\mathcal{J}_\tau(X, \omega)$ 道路连通, 进而存在一族 ω -控制的近复结构 $\{J_s\}_{s \in [0,1]}$ 使得 $J_1 = J$, 由上文唯一性的证明可知对任意 $s \in [0,1]$, 模空间 $\mathcal{M}_0([E]; J_s)$ 至多只有一个点.

注意到对任意 $u \in \mathcal{M}_0([E]; J_s)$, 我们有

$$\text{ind}(u) = -2 + 2c_1([u]) = -2 + 2c_1([E]) = 0 > 2g - 2,$$

这里 $g = 0$, 因此由自动横截定理2.54, 可知 u 是 Fredholm 正则的, 从而由定理2.43, 对单参数模空间

$$\mathcal{M}_0([E]; \{J_s\}) := \{(s, u) | s \in [0, 1], u \in \mathcal{M}_0([E]; J_s)\}$$

我们有投影映射

$$\mathcal{M}_0([E]; \{J_s\}) \rightarrow [0, 1], \quad (s, u) \mapsto s$$

为淹没, 我们自然希望这是一个微分同胚, 而这只需要说明 $\mathcal{M}_0([E]; \{J_s\})$ 紧即可, 由联结公式2.64, $\mathcal{M}_0([E]; J_s)$ 若非空则一定被表示为嵌入球面, 因此由嵌入球面的紧性定理2.86, 我们有其紧, 进而有 $\mathcal{M}_0([E]; \{J_s\})$ 微分同胚于 $[0, 1]$, 因此设 u_s 为 $\mathcal{M}_0([E]; J_s)$ 中的唯一元素, 则可知 $E = \text{Im } u_0$ 可以沿着 J_s -全纯进而

辛嵌入球面 $\text{Im } u_s$ 同痕于 $\text{Im } u_1$ ，即一条 $J_1 = J$ -全纯球面。

综上，我们完成了证明！

□

类似的，我们可以证明定理3.12的一个更一般情形：

命题 3.13 设 (X, ω) 为一个辛四维流形， p_1, \dots, p_m 为 X 上 $m \geq 0$ 个互不相同的点，且 $S \subset (X, \omega)$ 为一族互不相交的辛嵌入球面，并且包含 p_1, \dots, p_m ，且使得

$$[S] \cdot [S] \geq m - 1.$$

设 \mathcal{J}' 为 $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ 中的稠密子集，且在固定 p_1, \dots, p_m 不动的辛自同构下不变，则存在 $J \in \mathcal{J}'$ 使得每个 S 为 J -全纯的。

证明. 由引理2.6可知存在 ω -控制的近复结构 J_0 使得 S 是 J_0 -全纯曲线 u_0 的像，从而

$$c_1([u_0]) = \chi(S^2) + [S] \cdot [S] \geq m + 1,$$

进而

$$\text{ind}(u_0) = -\chi(S^2) + 2c_1([u_0]) \geq 2m,$$

因此由约束问题的自动横截定理2.57，我们有 u_0 是 Fredholm 正则的，从而由隐函数定理，对 J_0 在 $\mathcal{J}_\tau(X, \omega)$ 的充分小邻域内的任意近复结构 J ，存在 $u \in \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 且 u 与 u_0 靠近，故我们进一步在 J_0 的这个充分小邻域内选取一族 $\{J_s\}_{s \in [0,1]}$ 且使得 $J := J_1 \in \mathcal{J}'$ ，这由 \mathcal{J}' 的稠密性可知是可以办到的。

故现在我们有一族 $\{u_s \in \mathcal{M}_{0,m}(J_s; p_1, \dots, p_m)\}_{s \in [0,1]}$ ，且 $\text{Im } u_s := S_s$ 为辛嵌入球面，并且存在一族固定 p_1, \dots, p_m 的辛同构 φ_s 使得 $\varphi_s(S) = S_s$ ，因此近复结构 $\varphi_1^* J \in \mathcal{J}'$ 即为所求。

综上我们完成了证明！

□

第二节 Lefschetz 纤维与 Lefschetz 铅笔

本节我们主要介绍 Lefschetz 纤维与 Lefschetz 铅笔这两种拓扑结构，其对我们认识辛流形有着重要帮助。

3.2.1 光滑范畴

我们先从光滑范畴的角度出发讨论 Lefschetz 纤维与 Lefschetz 铅笔:

定义 3.14 设 X, Σ 分别是 4 维与 2 维闭可连通定向光滑流形, 一个 X 上到 Σ 的 **Lefschetz 纤维** 是一个光滑映射

$$\pi: X \rightarrow \Sigma,$$

且只有有限个临界点 $X_{\text{crit}} \subset X$, 从而也只有有限个临界值 $\Sigma_{\text{crit}} := \pi(X_{\text{crit}}) \subset \Sigma$ 使得在每一点 $p \in X_{\text{crit}}$, 存在复坐标卡 (z_1, z_2) 以及对应的 Σ 上 $\pi(p)$ 邻域复坐标 z , 使得 π 在临界点 p 局部上形如

$$\pi(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2,$$

其中 p 的坐标为 $(0, 0)$.

注 3.15 容易看到考虑坐标变换 $z_1 + \sqrt{-1}z_2 \mapsto w_1$ 与 $z_2 + \sqrt{-1}z_2 \mapsto w_2$, π 局部上也可以表示成 $\pi(w_1, w_2) = w_1 \cdot w_2$.

回忆 $p \in X$ 是映射 $f: M \rightarrow N$ 的临界点如果 $f_{*,p}$ 不为满射, 若为满射则称 p 为正则点, 若对于 $q \in N$ 任意 $p \in f^{-1}(q)$ 均有 p 为正则点, 则有 q 称为正则值, 正则值原像定理表明 $f^{-1}(q)$ 为光滑流形.

回忆我们有,

定理 3.16 (Ehresmann 纤维化) 设 M, N 为光滑流形, 若 $f: M \rightarrow N$ 为逆紧的淹没, 则 M 是 N 上的纤维丛, 且 f 为投影映射.

特别的, 现在设 $\pi: X \rightarrow \Sigma$ 为 Lefschetz 纤维, 则考虑

$$\pi: X - X_{\text{crit}} \rightarrow \Sigma - \Sigma_{\text{crit}},$$

则由定义可知此映射为淹没, 且显然任意紧集 $K \subset \Sigma - \Sigma_{\text{crit}}$ 为 Σ 上的紧集也即闭集, 进而 $\pi^{-1}(K)$ 为 X 中的闭集从而紧, 进而在 $X - X_{\text{crit}}$ 中紧, 因此可知上述限制的 π 为逆紧淹没, 因此 $\pi: X - X_{\text{crit}} \rightarrow \Sigma - \Sigma_{\text{crit}}$ 为光滑纤维丛.

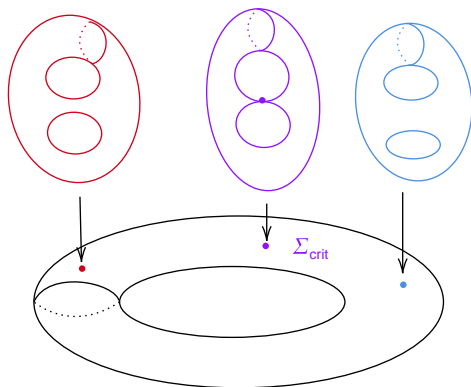


图 3.1 Lefschetz 纤维示意图

从而设 $F := X_z := \pi^{-1}(z)$, 其中 $z \in \Sigma - \Sigma_{\text{crit}}$ 为 Lefschetz 的纤维, 由正则值原像定理可知 F 为可定向闭曲面 (未必连通), 我们称 F 为 Lefschetz 纤维的**正则纤维 (regular fibre)**.

而对 $z \in \Sigma_{\text{crit}}$, $X_z \subset X$ 不为正则子流形, 称为**奇异纤维**, 由局部坐标 $\pi(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ 可知奇异纤维可能为一些不可约分支的并, 并且这些分支之间横截相交, 或自交于二重点 (double point).

现在在 Lefschetz 纤维的基础上我们可以进一步给出如下 Lefschetz 铅笔的定义:

定义 3.17 设 X 为闭连通定向光滑四维流形, X 上的一个 **Lefschetz 铅笔** 是指一个 Lefschetz 纤维

$$\pi : X - X_{\text{base}} \rightarrow \mathbb{C}P^1,$$

其中由基点构成的集合 $X_{\text{base}} \subset X$ 为有限集, 且使得在每个基点 $p \in X_{\text{base}}$ 邻域存在复坐标 (z_1, z_2) 使得 π 形如

$$\pi(z_1, z_2) = [z_1 : z_2].$$

例 3.18 考虑 $[1 : 0 : 0] \in \mathbb{C}P^2$, 设 $U_i = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid z_i \neq 0\}$, 容易看到 $U_2 \cup U_3 =$

$\mathbb{CP}^2 - \{[1:0:0]\}$, 从而我们有良定义的映射

$$\pi: \mathbb{CP}^2 - \{[1:0:0]\} \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad [z_1:z_2:z_3] \mapsto [z_2:z_3].$$

不难看出这是一个 *Lefschetz* 纤维, 且在基点 $[1:0:0]$ 附近 π 可在局部坐标 $(z_1, z_2) \mapsto [1:z_1:z_2]$ 下表示为 $\pi(z_1, z_2) = [1:z_1:z_2]$.

现在对 X 为 *Lefschetz* 铅笔, 则其上有两个不交有限点集 X_{base} 和 X_{crit} . 我们把

$$X_z := \overline{\pi^{-1}(z)} \subset X, \quad z \in \mathbb{CP}^1,$$

称为 X 上这个 *Lefschetz* 铅笔的纤维.

容易看到对于基点 p , 其邻域到 \mathbb{CP}^1 会有一个满射, 从而进一步可观察到任何一根纤维实际上都会穿过 p , 并且纤维都两两横截相交于 p .

简而言之, *Lefschetz* 铅笔的正则纤维为嵌入闭定向曲面, $\mathbb{CP}^1_{\text{cirt}}$ 上的奇异纤维为自交于二重点的浸入曲面, 且正则纤维与奇异纤维均两两横截相交于基点.

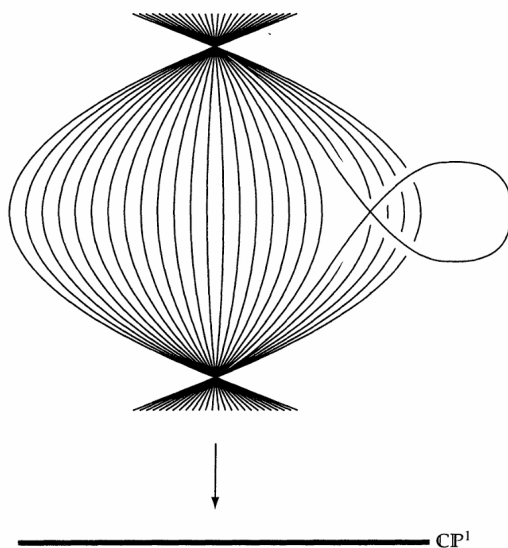


图 3.2 *Lefschetz* 铅笔示意图^[10]

我们下面陈述并证明一些与 *Lefschetz* 纤维/铅笔有关的基本拓扑事实, 其会在第四章中证明定理B中发挥重要作用.

命题 3.19 设 $\pi: X \setminus X_{\text{base}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ 为一个 *Lefschetz* 铅笔, 且纤维微分同胚于 S^2 . 若进一步 $\pi: X \setminus X_{\text{base}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ 只有一个基点, 且不包含奇异纤维, 则 X 微分同胚于 $\mathbb{C}P^2$.

证明. 设 p 有小球邻域 U , 则 $\partial \bar{U} \cong S^3$, 且 $\pi: X - U \rightarrow \mathbb{C}P^1$ 为 $\mathbb{C}P^1$ 上的圆盘丛, 因为铅笔的纤维为球面且均相交于 p , 去掉 p 小邻域则只剩圆盘.

因此有 $X - U$ 是 $\mathbb{C}P^1$ 上边界为 S^3 的圆盘丛, 限制在边界上即 *Hopf* 纤维化, 因此可知这个圆盘丛可视为 $\mathbb{C}P^1$ 在 $\mathbb{C}P^2$ 中的管状邻域, 进而填充上球即为 $\mathbb{C}P^2$, 即证. \square

命题 3.20 设 X 为闭可定向四维流形, 如果其具有 *Lefschetz* 铅笔结构且纤维微分同胚于 S^2 , 那么若至少有两个基点则一定会包含一根奇异纤维.

证明. 设有 $m \geq 2$ 个基点, 且没有奇异纤维, 则爆破 $m - 1$ 个基点, 则可以得到一个纤维微分同胚于 S^2 , 只有一个基点, 且不包含奇异纤维的 *Lefschetz* 铅笔, 由命题 3.19 可知爆破后得到的流形微分同胚于 $\mathbb{C}P^2$, 这与 $\mathbb{C}P^2$ 极小矛盾! \square

3.2.2 辛范畴

辛流形与 *Lefschetz* 铅笔这一拓扑结构有着密切关系, 我们先从如下定义出发,

定义 3.21 给定 *Lefschetz* 纤维或铅笔 $\pi: M - M_{\text{base}} \rightarrow \Sigma$, 我们称 M 上的辛形式 ω 与 π 相容, 如果对于任意 $z \in \Sigma$, 去掉临界点与基点的纤维 $M_z \setminus (M_{\text{base}} \cup M_{\text{crit}})$ 为 M 的辛子流形. 类似地, 设 (M, ω) 为辛流形, 且 $\pi: M - M_{\text{base}} \rightarrow \Sigma$ 为 *Lefschetz* 纤维或铅笔, 我们称 π 为一个辛 *Lefschetz* 纤维或铅笔如果 ω 和 π 相容.

利用 *Lefschetz* 铅笔/纤维, 如下定理保证了其一般具有辛流形结构,

定理 3.22 (Thurston-Gompf) 设 $\pi: M - M_{\text{base}} \rightarrow \Sigma$ 为 *Lefschetz* 纤维或铅笔, 且纤维的同调类在 $H_2(M)$ 中不是挠元素, 则 M 允许一个与 π 相容的辛结构, 也即存在 M 上的辛结构 ω 使得 $\pi: M - M_{\text{base}} \rightarrow \Sigma$ 是一个辛 *Lefschetz* 纤维或铅笔. 更进一步, 任何两个这样的辛结构都可以用一族与 π 相容的辛形式连接起来.

上述定理中有一个额外看起来十分不自然的条件: 纤维的同调类在 $H_2(M)$ 中不是挠元素, 我们下面举一个例子表明这样的假设是必要的,

例 3.23 考虑 $S^1 \times S^3$, 由 *Hopf* 纤维化 $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ 可知 $S^1 \times S^3$ 上允许到 S^2 的 T^2 丛结构, 但容易看到 $H_2(S^1 \times S^3) = 0$, 因此显然纤维对应的同调类在 H_2 中平凡, 但此时 $S^1 \times S^3$ 上不允许辛结构, 这是因为 $H_{\text{dR}}^2(S^1 \times S^3)$ 也为 0.

注 3.24 *Donadlson* 证明了^[11] 上述定理 3.22 的反面, 也即对任意闭辛流形, 其总可以小扰动辛形式后使得其允许辛 *Lefschetz* 铅笔. 因此我们可以在四维对辛结构的存在性给出一个完整的拓扑描述: 四维光滑流形上允许辛结构当且仅当允许 *Lefschetz* 铅笔结构.

第四章 McDuff 有理或直纹定理

本章我们将会利用第二章介绍的伪全纯曲线的技术，去依次给出定理D和B的证明，这也是 McDuff 在 [2] 中证明的“有理或直纹定理”。

我们很快会看到定理B和定理C都是定理D的快速推论，而定理D的证明与我们在第一章第二节中概述的思路基本一致。

第一节 定理D的证明

为了方便阅读，我们在这里重新回顾一下定理陈述，

定理 4.1 (定理D) 设 (X, ω) 为闭连通辛四维流形，且包含辛嵌入球面 $S \subset X$ 使得

$$m := [S] \cdot [S] \geq 0,$$

则任选 S 上 m 个不同的点 p_1, \dots, p_m ，我们有 (X, ω) 允许一个辛 Lefschetz 铅笔或纤维的结构，且使得 p_1, \dots, p_m 为基点， S 等同成某根光滑纤维，并且不存在奇异纤维包含多余一个的临界点。

更进一步，允许没有奇异纤维的辛 Lefschetz 铅笔当且仅当 $m \in \{0, 1\}$ 且 $(X \setminus S, \omega)$ 为极小的。

下面我们给出定理D的证明：

对于辛球面 S ，以及其上 m 个不同的点 p_1, \dots, p_m ，由命题3.13，我们选取

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m),$$

容易看到这是一个辛同构不变的稠密集，因此存在 $J \in \mathcal{J}' = \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m)$ 使得 S 为一条嵌入 J -全纯曲线的像，映射记为 $u_0 : S^2 \rightarrow X$ 。因此我们有 $u_0 \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 。

注 4.2 回忆我们记 $J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m)$ ，如果对任意 $A \in H_2(X)$ 以及任意

$\{p_1, \dots, p_m\}$ 的有序集 $(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$, 只要 $\mathcal{M}_{0,r}(A; J; p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ 包含一条某处单射曲线, 则该模空间的虚拟维数 ≥ 0 .

这里我们“舍近求远”, 不直接使用引理 2.6 来找近复结构是因为我们希望这里选取的 J 满足紧化定理 2.79 的一般性条件 $J \in \mathcal{J}^{\text{reg}}(\omega; p_1, \dots, p_m)$.

注 4.3 回忆我们记 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m) \subset \mathcal{M}_{0,m}(J; p_1, \dots, p_m)$ 表示全体嵌入 J -全纯曲线 $u: S^2 \rightarrow X$, 且满足 $[u] \cdot [u] = m$.

设 $\mathcal{M}_S(J)$ 表示模空间 $\mathcal{M}_{\text{emb}}^2(J; p_1, \dots, p_m)$ 中包含 u_0 的连通分支, 因此由连通性可知 $\mathcal{M}_S(J)$ 中的元素均具有相同的同调类, 因此也具有相同的能量

$$E(u) = \int_{S^2} u^* \omega = \langle [\omega], [S] \rangle.$$

因此结合在第二章中证明的紧化定理 2.79 以及命题 2.81, 我们可以得到

- $\mathcal{M}_S(J)$ 的 Gromov 紧化 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 多增加了一些节点曲线, 每条节点曲线恰有两个光滑分支

$$v_+ \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty; p_{i_1}, \dots, p_{i_r}), \quad v_- \in \mathcal{M}_{\text{emb}}^0(J_\infty; p_{i_{r+1}}, \dots, p_{i_m}).$$

这里 $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$, $0 \leq r \leq m$, 且 v_+ 与 v_- 在 $M \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 中恰有一个横截交点.

- $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 中的曲线两两恰好只在 p_1, \dots, p_m 处横截相交.

现在记

$$\Xi \subset X - \{p_1, \dots, p_m\},$$

其中点 $q \in \Xi$, 当且仅当存在 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 中的节点曲线 $\{v_+, v_-\}$, 使得 q 落在 $\text{Im}v_+ \cup \text{Im}v_-$ 中, 换言之 Ξ 可视为节点曲线们在 $X - \{p_1, \dots, p_m\}$ 中的像集. 实际上 Ξ 就是有限个穿孔曲面 (孔来自 p_i) 的并, 有限性源自于紧化定理 2.79, 特别的, Ξ 在 X 中余维数为 2.

现在我们再记

$$X_0 \subseteq X - \{p_1, \dots, p_m\} - \Xi,$$

其中点 $q \in X_0$, 当且仅当存在 $\mathcal{M}_S(J)$ 中的曲线 u , 使得 q 落在 u 的像 $\text{Im} u$ 上. 由定理 2.66, 可知 X_0 为开集.

下证 X_0 为闭集, 设 $x \in X - \{p_1, \dots, p_m\} - \Xi$ 且在 X_0 的闭包中, 则有 $\{x_k\} \subset X_0$ 为收敛到 x 的点列, 现设 $x_k \in \text{Im} u_k$, 其中 $u_k \in \mathcal{M}_S(J)$. 那么由紧化定理 2.79 可知 $\{u_k\}$ 有子列收敛于 $u \in \overline{\mathcal{M}_S(J)}$, 且 $x \in \text{Im} u$, 因此 u 不为节点曲线, 否则由定义可知 $x \in \Xi$, 进而与 $x \in X_0$ 矛盾, 因此可知 X_0 闭. 由 Ξ 余维数 2, 因此不改变连通性, 可知 $X - \{p_1, \dots, p_m\} - \Xi$ 连通, 因此

$$X_0 = X - \{p_1, \dots, p_m\} - \Xi.$$

上述论证表明, $X - \{p_1, \dots, p_m\}$ 中的任一点要么落在 J -全纯嵌入球面的像中, 要么落在一条节点曲线的像中. 结合每一条节点曲线实际上就是两条 J -全纯嵌入球面横截相交于一个节点, 并且这样的节点曲线只有有限条. 因此我们实际上给出了 X 上一个由 J -全纯球面给出的一个奇异叶状结构, 奇点包括 p_1, \dots, p_m 以及那些节点曲线的节点.

现在注意到 $\mathcal{M}_S(J)$ 为光滑可定向二维流形, 我们希望证明其紧化 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 为一个可定向闭曲面, 只需注意到对任意节点曲线 $u \in \overline{\mathcal{M}_S(J)}$, 不难对 $\text{Im} u$ 上的一个光滑点 p 选取 $M - \{p_1, \dots, p_m\}$ 中的一个 2 维小圆盘 D 和这个奇异叶状结构的其余叶子至多交于一点, 从而 D 可视为 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 在 u 邻域的一个局部坐标, 因此是光滑闭曲面. 并且我们有光滑映射

$$\pi : M - \{p_1, \dots, p_m\} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_S(J)},$$

其中把点 p 送至经过该点的唯一一条曲线或节点曲线.

同时可以证明^[6], 上述 π 在点 p_i 附近满足 Lefschetz 铅笔基点的局部模型, 且在临界点处满足 Lefschetz 纤维化的局部模型, 但囿于篇幅我们省略具体的验证. 因此综上我们得到了,

- 若 $m = 0$, 则 $\pi : M \rightarrow \overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 为到定向闭曲面的 Lefschetz 纤维.
- 若 $m > 0$, 我们先证明此时 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 微分同胚于 $\mathbb{C}P^1$, 注意到所有曲线和节

点曲线均穿过 p_1 ，并且两两横截相交，因此我们可以将每条曲线对应于其像在 p_1 点处的切空间，则是 $(T_{p_1}M, J) \cong (\mathbb{C}^2, \sqrt{-1})$ 的一条复直线 (由 J -全纯)，因此可知 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 一一对应于 \mathbb{C}^2 中的复直线，也即 $\mathbb{C}P^1$. 故结合此事实我们说明了 $\pi: M - \{p_1, \dots, p_m\} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_S(J)} = \mathbb{C}P^1$ 是一个 Lefschetz 铅笔.

注 4.4 不难看到每根纤维实际上就是 J -全纯球面，从而是辛子流形，特别的 S 本身也为纤维.

综上，我们有 (X, ω) 允许一个辛 Lefschetz 铅笔或纤维的结构，且使得 p_1, \dots, p_m 为基点， S 等同成某根光滑纤维，并且每条奇异纤维均为一条 $\overline{\mathcal{M}_S(J)}$ 中的节点曲线，故每条节点曲线只有 1 个节点，故不存在奇异纤维包含多余一个的临界点.

现在更进一步，我们证明 (X, ω) 允许没有奇异纤维的辛 Lefschetz 铅笔当且仅当 $m \in \{0, 1\}$ 且 $(X \setminus S, \omega)$ 为极小的.

一方面，若 $m \in \{0, 1\}$ 且 $(X \setminus S, \omega)$ 为极小的，当 $m = 0$ 时，则可知其奇异纤维为节点曲线，也即包含两个分支，每个分支都是自交数为 $m - 1 = -1$ 的辛嵌入球面，由命题 2.81 可知奇异纤维与 S 交点数为 $m = 0$ ，进而不交，这与 $(X \setminus S, \omega)$ 极小矛盾. 类似地，当 $m = 1$ 时，则可知其奇异纤维也为节点曲线，并且两个分支都是辛嵌入球面，且一个自交数为 0，一个为 -1 ，此时这条奇异纤维与 S 恰好交于 $m = 1$ 个点，并且这个点落在自交数为 0 的那个球面上，因此我们在 $X \setminus S$ 中再次找到了一个例外球面，与极小性矛盾. 因此此时 (X, ω) 上允许没有奇异纤维的辛 Lefschetz 铅笔.

另一方面，若 (X, ω) 允许没有奇异纤维的辛 Lefschetz 铅笔，则由命题 3.20 可知基点数 $m < 2$ ，也即 $m \in \{0, 1\}$. 假如 $(X \setminus S, \omega)$ 并非极小，那么设有例外球面 $E \subset (X \setminus S, \omega)$ ，则由定理 3.12 可知 E 同痕进而同调于一条嵌入 J -全纯球面 $u_E: S^2 \rightarrow X$. 由 $[E] \cdot [S] = 0$ 以及正相交定理可知， u_E 的像要么与 $\mathcal{M}_S(J)$ 的全体不交，要么为其中的一份子. 但后者由 $[E] \cdot [E] = -1$ ， $[S] \cdot [S] = m \geq 0$ 可知不会发生，因此一定会存在奇异纤维包含 E .

综上，我们完成了定理 D 的证明.

第二节 定理B的证明

我们在本节从定理D出发给出定理B的证明，我们首先回忆一下定理陈述：

定理 4.5 (定理B) 设 (X, ω) 为一个闭连通的辛四维流形，且包含一个辛嵌入球面 $S \subset X$ 使得

$$[S] \cdot [S] \geq 0,$$

则 (X, ω) 辛同构于以下两者之一：

- $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{\text{FS}})$ ，其中 $c > 0$ 为某一常数，
- 爆破辛直纹面。

证明. 我们先证明在上述假设下存在辛嵌入球面 $S' \subset X$ 使得

$$[S'] \cdot [S'] \in \{0, 1\}.$$

若不然，假设全体辛嵌入球面的最小自相交数为 $m \geq 2$ ，则由定理D可知我们有 Lefschetz 铅笔

$$\pi : X - \{p_1, \dots, p_m\} \rightarrow \mathbb{C}P^1,$$

且使得 S 为纤维，由命题3.20以及基点个数为 $m \geq 2$ ，我们知道一定存在奇异纤维，并且由定理D，奇异纤维实际上就是节点曲线，且这些节点曲线恰好有两个分支，在基点外恰好横截相交于一点，以及每个分支都是辛嵌入球面。进而可知每个分支 v 不仅为辛嵌入球面，还满足

$$[v] \cdot [v] = c_1(v(\text{Im}v)) = -1 + b,$$

这里 $v(\text{Im}v)$ 表示 $\text{Im}v$ 在 X 中的法丛， b 表示 $\text{Im}v$ 上的基点个数，因此这表明 X 中还存在辛嵌入球面自相交数为 $-1 + b \leq -1 + m < m$ ，与 m 的最小性矛盾！

因此我们知道存在辛嵌入球面 $S \subset X$ 使得

$$[S] \cdot [S] \in \{0, 1\}.$$

- 若 $m = 0$ ，则定理D给出了一个 Lefschetz 纤维

$$\pi : X \rightarrow \Sigma,$$

这里 $\Sigma = \overline{\mathcal{M}_S(J)}$ ，且奇异纤维为节点曲线，每个分支自交数为 $-1 + 0 = -1$ ，也即奇异纤维是由两个辛嵌入例外球面横截相交于一点得到，因此我们辛坍缩其中一个分支，重复若干次后即可去掉所有奇异纤维，最终得到 Σ 上一个光滑的 S^2 丛，也即一个辛直纹面，因此可知 M 是一个爆破直纹面。

- 若 $m = 1$ ，则定理D给出了一个 Lefschetz 铅笔

$$\pi : M - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}P^1,$$

并且每根奇异纤维为节点曲线，每条节点曲线恰好有一个分支是辛嵌入例外球面，因此我们可以对每个奇异纤维的例外球面分支进行辛坍缩得到 (M', ω') ，其为一个 $\mathbb{C}P^1$ 上有一个基点的纤维均光滑且微分同胚于 S^2 的 Lefschetz 铅笔，故有 M' 微分同胚于 $\mathbb{C}P^2$ 。

现在由定理3.22可知辛形式 ω' 可以和 ω_{FS} 用一族辛形式连接起来，从而可知存在 $c > 0$ 使得 $[\omega'] = c[\omega_{\text{FS}}]$ ，进而由 Moser 稳定定理^[8]可知， ω' 辛形变等价于 $c \cdot \omega_{\text{FS}}$ 。

因此 M 为 $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{\text{FS}})$ 的辛爆破，注意到只要爆破一次即得到辛直纹面，因此划归到上一类型中。

综上，我们完成了证明！

□

第五章 Seiberg-Witten 不变量

本章我们将会对光滑四维流形上的 Seiberg-Witten 不变量给出一个实用性的介绍, 并证明对于光滑闭四维流形 X , 且满足 $b_2^+(X) > 1$, 则

- 若其允许正数量曲率度量, 则 Seiberg-Witten 不变量恒为 0.
- 若其允许辛结构 ω , 则 $c_1(X, \omega)$ 对应的 Seiberg-Witten 不变量不为 0.

因此结合这两个结果我们可以得到若闭辛四维流形上允许正数量曲率度量, 则 $b_2^+ = 1$ (由注 1.2 可知辛四维流形均满足 $b_2^+ \geq 1$). 这也是我们下一章讨论的出发点.

第一节 Clifford 模与 Dirac 算子

我们在这节主要介绍光滑四维流形上的 Seiberg-Witten 理论必要的自旋 (spin) 几何的知识.

5.1.1 Clifford 代数

我们首先从纯粹的线性代数出发, 考虑

定义 5.1 (Clifford 代数) 设 (V, g) 为欧氏空间, g 为其上的内积且带有标准正交基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 我们称 (V, g) 的 **Clifford 代数** 为,

$$\text{Cl}(V) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I},$$

其中 $\mathcal{T}(V)$ 是张量代数 $\bigotimes_{n \geq 0} V^{\otimes n}$, 理想 \mathcal{I} 由 $\{v \otimes v + |v|^2 : v \in V\}$ 生成, 这里 $|v|^2 = g(v, v)$. 我们用 $v \cdot w$ 来表示 $v \otimes w$ 在 $\text{Cl}(V)$ 中的乘积.

容易看到, 作为一个实向量空间 $\text{Cl}(V)$ 维数为 2^n , 且有基

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

注 5.2 由 $g(v+w, v+w)$ 的展开式不难证明在 $\text{Cl}(V)$ 中有 $v \cdot w + w \cdot v = -2g(v, w)$.

例 5.3 我们有

- $\text{Cl}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$, 因为其由 $1, e_1$ 生成且 $e_1^2 = -1$;
- $\text{Cl}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$, 因为其由 $1, e_1, e_2, e_1 e_2$ 生成, 且恰好对应于 $1, i, j, k$, 也即四元数体 \mathbb{H} 的基.

定义 5.4 (Clifford 模) 固定欧氏空间 (V, g) , 设 S 为一个复 Hermitian 空间, 且带有 Hermitian 度量 \langle, \rangle , 称 (S, γ) 为 (V, g) 的一个 **Clifford 模** 若有 **Clifford 乘法** $\gamma: V \rightarrow \text{End}(S)$ 满足对任意 $v, w \in V$, 有

- $\gamma(v)\gamma(w) + \gamma(w)\gamma(v) = -2g(v, w)\text{Id}$;
- $\gamma(v) = -\gamma(v)^*$.

事实上由上述关系不难看到我们有自然的延拓 $\gamma: \text{Cl}(V) \rightarrow \text{End}(S)$, 也即 (S, γ) 实际上是 Clifford 代数 $\text{Cl}(V)$ 上的一个复表示.

例 5.5 对 $V = \mathbb{R}^2$ 我们有 $S = \mathbb{C}^2$ 是一个 Clifford 模, 其中

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5.6 对 $V = \mathbb{R}^3$, 我们有 $S = \mathbb{C}^2$ 以及 $\gamma(e_i) = B_i$ 是一个 Clifford 模, 其中 B_i 表示如下的 Pauli 矩阵

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5.7 对 $V = \mathbb{R}^4$ 我们有 $S = \mathbb{C}^4$ 是一个 Clifford 模, 其中

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_i) = \begin{pmatrix} O & B_i \\ B_i & O \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

更一般的, 我们有

定理 5.8 ([12]) 设 (V, g) 为一个 n 维欧氏空间, 则

- 若 $n = 2k$ 则在同构意义下 (V, g) 存在唯一的有限维不可约 Clifford 模 (S, γ) 且 $\dim_{\mathbb{C}} S = 2^k$;
- 若 $n = 2k + 1$, 则在同构意义下 (V, g) 恰好存在两个有限维不可约 Clifford 模 $(S, \gamma), (S, -\gamma)$ 且 $\dim_{\mathbb{C}} S = 2^k$.

这里我们的 Clifford 模之间的同构是指,

定义 5.9 我们称 V 的两个 Clifford 模 (S, γ) 与 (S', γ') 是同构的, 如果存在两个 Hermitian 空间之间的线性等距变换 $f: S \rightarrow S'$ 使得 $f \circ \gamma(v) = \gamma'(v) \circ f$ 对任意 $v \in V$ 都成立.

一个简单的结果是

命题 5.10 (Schur) 设 (S, γ) 为 V 的一个不可约 Clifford 模, 则 (S, γ) 的任一自同构均形如 $\lambda \cdot \text{Id}$, 其中 $\lambda \in S^1$, 也即 $\text{Aut}(S, \gamma) \cong S^1$.

证明. 设 $f: (S, \gamma) \rightarrow (S, \gamma)$ 为一个同构, 则 f 为一个酉变换, 从而 f 可以对角化, 设 S_i 为 f 特征值为 λ_i 的特征子空间, 则 $|\lambda_i| = 1$, 也即 $\lambda_i \in S^1$.

注意到对任意 $v \in V$, 有 $\gamma(v) \circ f = f \circ \gamma(v)$, 因此可知 S_i 可视为一个子模, 因此由不可约性我们有 $S_i = S$, 综上所述我们完成了证明. \square

5.1.2 切丛的 Clifford 模

现在我们将上一小节的概念推广至向量丛上的情形. 在接下来的讨论中, 我们总约定 (M, g) 为闭黎曼流形, g 为其上的黎曼度量.

定义 5.11 设 $E \rightarrow M$ 为一个带有 Hermitian 度量 \langle, \rangle 的复向量丛, 我们称其为 M 上的一个 Clifford 模, 如果其上存在丛映射 $\gamma: TM \rightarrow \text{End}(E)$ 使得对任意 $p \in M$, (E_p, γ) 是 $(T_p M, g)$ 的一个 Clifford 模.

更精准地, 丛映射 $\gamma: TM \rightarrow \text{End}(E)$ 具有如下性质: 对任意 $u, v \in \mathfrak{X}(M)$,

- $\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) = -2g(u, v)\text{Id}$;
- $\gamma(v) = -\gamma(v)^*$, 也即 $\langle \gamma(v)\sigma_1, \sigma_2 \rangle = -\langle \sigma_1, \gamma(v)\sigma_2 \rangle$.

我们也称 γ 为 E 上的 Clifford 乘法.

注 5.12 容易看到 $\gamma: TM \rightarrow \text{End}(E)$ 可以自然延拓成丛映射 $\gamma: \text{Cl}(TM) \rightarrow \text{End}(E)$, 这里 $\text{Cl}(TM) := \cup_{p \in M} \text{Cl}(T_p M)$ 容易看到为一个向量丛.

现在我们可以开始着手定义 SW 方程中需要的关键原料——Dirac 算子了，

定义 5.13 (Dirac 丛) 设 $E \rightarrow M$ 为一个 Clifford 模，则其更进一步被称为 M 上的 **Dirac 丛** 如果其上存在一个联络 d_A 使得对任何 E 的截面 σ_1, σ_2 及 σ ，有

- d_A 为酉联络 (unitary connection)，也即 $d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \langle d_A \sigma_1, \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, d_A \sigma_2 \rangle$;
- d_A 与 Clifford 乘法相容，也即

$$d_A(\gamma(v)\sigma) = \gamma(d_\nabla v)\sigma + \gamma(v)d_A\sigma,$$

这里 $d_\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM)$ 表示切丛 TM 上唯一的 Levi-Civita 联络。

注 5.14 回忆一个向量丛 $E \rightarrow M$ 上的联络 d_A 是指一个满足 Leibniz 法则的丛同态 $d_A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) =: \Omega^1(E)$ ，其可以自然延拓到 $d_A : \Omega^k(E) \rightarrow \Omega^{k+1}(E)$ ，这里 $\Omega^k(E) := \Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E)$ 。

我们记联络 d_A 的曲率为 $F_A := d_A \circ d_A$ ，容易证明 $F_A \in \Omega^2(\text{End}(E))$ 。

注 5.15 有时为了方便起见，我们用 $v \cdot \sigma$ 来简记 $\gamma(v)(\sigma)$ 。

定义 5.16 (Dirac 算子) 设 $E \rightarrow M$ 为一个 Dirac 丛且带有联络 d_A ，则我们称

$$\not{D}_A : \Gamma(E) \xrightarrow{d_A} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{g} \Gamma(TM \otimes E) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(E)$$

为 E 上的 **Dirac 算子**

注 5.17 这里我们用黎曼度量 g 表示同构 $T^*M \rightarrow TM$ ，其中 $g : \omega \mapsto \omega^\sharp$ ，这里对任意 $X \in \Gamma(TM)$ ，有 $g(\omega^\sharp, X) = \omega(X)$ 。

命题 5.18 (Dirac 算子的局部表达式) 局部上设 $\{e_i\}$ 为 $TM|_U$ 的一组标准正交基，则对任意 $\sigma \in \Gamma(E)|_U$ ，我们有

$$\not{D}_A \sigma = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \sigma,$$

这里 $\nabla_X^A \sigma := d_A \sigma(X)$ 。

证明. 局部上设 $\{e^i\}$ 为 $\{e_i\}$ 的对偶基, 也即 $e^i = e_i^\flat$, 则我们有

$$d_A \sigma = e^i \otimes d_A \sigma(e_i) = e^i \otimes \nabla_{e_i}^A \sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E)|_U,$$

因此

$$g \circ d_A \sigma = \sum_{i=1}^n e_i \otimes \nabla_{e_i}^A \sigma,$$

从而我们最终有

$$\not{D}_A \sigma = \gamma \circ g \circ d_A \sigma = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \sigma,$$

即为所证. □

5.1.3 Dirac 算子的基本性质

本节我们利用 Dirac 算子的局部表达式 (命题5.18) 来证明两条基本的性质, 也即 Dirac 算子的自伴性以及 Lichnerowicz 公式.

Dirac 算子的自伴性

定理 5.19 设 $E \rightarrow M$ 为 M 上的 Dirac 丛且带有 Dirac 算子 $\not{D}_A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, 则 \not{D}_A 是自伴的, 也即对任意 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$, 我们有

$$(\not{D}_A \sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, \not{D}_A \sigma_2),$$

这里 (\cdot, \cdot) 表示 $\Gamma(E)$ 上的由 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导的 Hermitian 内积, 也即 $(\sigma, \tau) := \int_M \langle \sigma, \tau \rangle d\text{vol}_M$.

证明. 我们在点 $p \in M$ 处进行局部计算, 因此我们可以选取 p 处的法坐标使得局部上 TM 存在标准正交基 $\{e_i\}$ 使得 $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$, 因为法坐标保证了 $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

从而在 p 点我们有,

$$\begin{aligned}
 \langle \not{D}_A \sigma_1, \sigma_2 \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \sigma_1, \sigma_2 \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n -\langle \nabla_{e_i}^A \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2 \rangle \quad \text{酉联络的性质} \\
 &= \sum_{i=1}^n -e_i \langle \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, \nabla_{e_i}^A (e_i \cdot \sigma_2) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n -e_i \langle \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \sigma_2 \rangle \quad \text{利用 } (\nabla_{e_i} e_j)_p = 0 \\
 &= \langle \sigma_1, \not{D}_A \sigma_2 \rangle + \sum_{i=1}^n -e_i \langle \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

现在对 $-e_i \langle \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2 \rangle$ 这一项, 回忆对任意 $X \in \Gamma(TM)$, 我们有

$$\operatorname{div} X := \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i),$$

从而在点 p 处, 我们有

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n e_i g(X, e_i),$$

因此我们可以定义一个向量 X , 使得其满足对任意 $Y \in \Gamma(TM)$ 有 $g(X, Y) := -\langle \sigma_1, Y \cdot \sigma_2 \rangle$. 从而我们在 p 处成立进而在任一点均成立

$$\langle \not{D}_A \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1, \not{D}_A \sigma_2 \rangle + \operatorname{div} X,$$

进而再由散度定理 $\int_M \operatorname{div} X \, d\operatorname{vol}_M = 0$, 我们即可完成证明. \square

Lichnerowicz 公式

Dirac 算子最早被引入的动机是想得到 Laplace 算子的平方根, 而本小节将要讨论的 Lichnerowicz 公式就会揭示出两者之间的联系.

我们首先来回顾一下 Laplace 算子的定义与基本性质,

定义 5.20 (联络 Laplace 算子) 设 $E \rightarrow M$ 有酉联络 $d_A = \nabla^A$, 则我们有 联络

Laplace 算子 $\Delta^A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, 且局部上定义为

$$\Delta^A \sigma := - \sum_{i=1}^n \left(\nabla_{e_i}^A \circ \nabla_{e_i}^A \sigma - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^A \sigma \right),$$

这里 $\{e_i\}$ 为一族局部标准正交基.

注 5.21 这里 $\nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^A$ 项是为了保证这么定义的算子不依赖于 $\{e_i\}$ 的选取, 因此可以整体良定义.

不难证明联络 Laplace 算子也是自伴的,

命题 5.22 对任意 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$, 我们有

$$\int_M \langle \Delta^A \sigma_1, \sigma_2 \rangle d\text{vol}_M = \int_M \langle \nabla^A \sigma_1, \nabla^A \sigma_2 \rangle d\text{vol}_M = \int_M \langle \sigma_1, \Delta^A \sigma_2 \rangle d\text{vol}_M,$$

因此我们有 Δ^A 自伴且正定.

证明. 我们再次局部计算, 设 $p \in M$, 我们选取局部标准正交基 $\{e_i\}$ 使得 $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$, 从而在点 p , 我们有

$$\begin{aligned} \langle \Delta^A \sigma_1, \sigma_2 \rangle &= \sum_{i=1}^n -\langle \nabla_{e_i}^A \nabla_{e_i}^A \sigma_1, \sigma_2 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n -e_i \langle \nabla_{e_i}^A \sigma_1, \sigma_2 \rangle + \langle \nabla_{e_i}^A \sigma_1, \nabla_{e_i}^A \sigma_2 \rangle \\ &= \text{div} X + \langle \nabla^A \sigma_1, \nabla^A \sigma_2 \rangle, \end{aligned}$$

其中 X 定义为 $g(X, Y) := -\langle \nabla_Y^A \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, 注意到 $\nabla^A \sigma = \nabla_{e_i}^A \sigma \otimes e^i$, 其中 $\Omega^1(E)$ 上的内积是逐点给出的.

从而我们再次使用散度定理即可完成证明. \square

现在我们可以开始陈述并证明 Lichnerowicz 公式,

定理 5.23 (Lichnerowicz 公式) 设 $E \rightarrow M$ 为带有联络 d_A 的 Dirac 丛, 以及 Dirac 算子 \not{D}_A 则我们有

$$\not{D}_A^2 = \Delta^A + \frac{1}{2} \gamma(F_A),$$

其中 $F_A \in \Omega^2(\text{End}(E))$ 表示联络 d_A 对应的曲率.

注 5.24 这里 $\gamma: \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E)) \rightarrow \Gamma(\text{End}(E))$ 是自然的延拓, 更精准的, 可局部选取 $\{e_i\}$ 及其对偶 $\{e^i\}$, 则对 $F_A = \sum_{i,j=1}^n e^i \wedge e^j \otimes F_A(e_i, e_j)$ 我们有

$$\gamma(F_A) = \sum_{i,j=1}^n \gamma(e^i \wedge e^j) \circ F_A(e_i, e_j) = 2 \sum_{i < j} \gamma(e_i) \gamma(e_j) \circ F_A(e_i, e_j).$$

注 5.25 利用基本的黎曼几何不难证明 $F_A(e_i, e_j)\sigma = \nabla_{e_i}^A \nabla_{e_j}^A \sigma - \nabla_{e_j}^A \nabla_{e_i}^A \sigma - \nabla_{[e_i, e_j]}^A \sigma$.

证明. 逐点计算, 在 $p \in M$ 处, 选取局部标准正交基 $\{e_i\}$ 使得 $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$, 从而我们有 $[e_i, e_j]_p = (\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i)_p = 0$, 进而在 p 点, 我们有

$$\begin{aligned} \not{D}_A^2 \sigma &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \right) \left(\sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j}^A \right) \sigma \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^A (e_j \cdot \nabla_{e_j}^A \sigma) \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i}^A \nabla_{e_j}^A \sigma \quad \underline{\text{利用 } (\nabla_{e_i} e_j)_p = 0} \\ &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^A \nabla_{e_i}^A \sigma + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j (\nabla_{e_i}^A \nabla_{e_j}^A - \nabla_{e_j}^A \nabla_{e_i}^A) \sigma \\ &= \Delta^A \sigma + \frac{1}{2} \gamma(F_A) \sigma \quad \underline{\text{利用 } (\nabla_{e_i} e_j)_p = [e_i, e_j]_p = 0,} \end{aligned}$$

综上所述我们完成了证明. □

第二节 四维流形上的 Spin^c 结构

在这一节我们在光滑四维流形上借助其上的 Spin^c 结构给出一个 Clifford 模与 Dirac 算子的例子, 这个 Dirac 算子正是我们将会在 Seiberg-Witten 方程中重点考虑的对象.

我们考虑如下群,

- $\text{Spin}(4) := \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$.

视 $\text{SU}(2) = \text{Sp}(1)$, 也即 \mathbb{H} 上的等距变换群, 注意到四元数 \mathbb{H} 中的元素均

可以写成二阶复矩阵，也即

$$a + bi + cj + dk = \begin{pmatrix} a + \sqrt{-1}b & -d + \sqrt{-1}c \\ d + \sqrt{-1}c & a - \sqrt{-1}b \end{pmatrix},$$

从而我们有

$$\varphi : \text{Spin}(4) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{H}), \quad (X_+, X_-) \mapsto (q \mapsto X_- q X_+^{-1}),$$

容易验证实际上 $\text{Im} \varphi = \text{SO}(4)$ ，也即为等距变换，并且 $\ker \varphi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，也即我们借助 φ 给出了 $\text{Spin}(4)$ 到 $\text{SO}(4)$ 的二叶覆叠.

- $\text{Spin}^c(4) := \{(A_+, A_-) \in \text{U}(2) \times \text{U}(2) \mid \det(A_+) = \det(A_-)\}$ ，不难看到其也可以表示为 $\{(\lambda X_+, \lambda X_-) \mid X_{\pm} \in \text{SU}(2), \lambda \in S^1\} \cong (S^1 \times \text{Spin}(4)) / \{\pm(1, I, I)\}$.
不难看到我们也有

$$\rho : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{H}), \quad (\lambda X_+, \lambda X_-) \mapsto (q \mapsto X_- q X_+^{-1}), \quad (5.1)$$

因此仍然可以证明 $\text{Im} \rho = \text{SO}(4)$ ，也即为等距变换. 因此我们有 $\rho : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{SO}(4)$.

我们也有映射 $\alpha : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{U}(1)$ ， $(A_+, A_-) \mapsto \det(A_+) = \det(A_-)$.

定义 5.26 (Spin^c 结构) 设 (X, g) 为一个光滑闭四维黎曼流形，设 $P_{\text{SO}(4)}$ 为其正交标架丛，则 (X, g) 上的一个 $\text{Spin}^c(4)$ 结构 \mathfrak{s} 是一个 X 上的 $\text{Spin}^c(4)$ 主丛 $P_{\text{Spin}^c(4)}$ ，且有丛映射 $P_{\text{Spin}^c(4)} \rightarrow P_{\text{SO}(4)}$ 使得逐纤维为 (5.1) 中的 $\rho : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{SO}(4)$ ，也即我们有同构 $c : P_{\text{Spin}^c(4)} \times_{\rho} \text{SO}(4) \rightarrow P_{\text{SO}(4)}$.

我们记 $\text{Spin}^c(4)$ 结构 \mathfrak{s} 的行列式线丛为 $L_{\mathfrak{s}} := P_{\text{Spin}^c(4)} \times_{\alpha} \mathbb{C}$ ，记 \mathfrak{s} 的第一 **Chern** 类为 $c_1(\mathfrak{s}) := c_1(L_{\mathfrak{s}})$.

对于四维流形上的 Spin^c 结构，我们有如下基本定理，

定理 5.27 ([1]) 设 (X, g) 为一个光滑闭四维黎曼流形，记

$$\text{Char}(X) := \{k \in H^2(X; \mathbb{Z}) : k \cup a \equiv a \cup a \pmod{2}, \quad \forall a \in H^2(X; \mathbb{Z})\}$$

表示 X 的全体特征元素，则

- 对任意 (X, g) 上的 $\text{Spin}^c(4)$ 结构 \mathfrak{s} ，我们有 $c_1(\mathfrak{s}) \in \text{Char}(X)$.
- 对任意特征元素 $K \in \text{Char}(X)$ ，存在 $\text{Spin}^c(4)$ 结构 \mathfrak{s} 使得 $K = c_1(\mathfrak{s})$.

因此 X 上的 Spin^c 结构与特征元素一一对应. 特别的，光滑闭四维流形上总存在 $\text{Spin}^c(4)$ 结构.

注意到我们有投影映射

$$\rho_{\pm} : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{U}(2), \quad (A_+, A_-) \rightarrow A_{\pm},$$

因此我们可以得到配丛

$$S^{\pm} := P_{\text{Spin}^c(4)} \times_{\rho_{\pm}} \mathbb{C}^2,$$

其中 S^+ 称为正旋量丛， S^- 称为负旋量丛，两者的截面分别称为正/负旋量. 我们记 $S = S^+ \oplus S^-$ 为旋量丛，不难看到我们有 $\det(S^+) \cong \det(S^-) \cong L_{\mathfrak{s}}$ ， $\det(S) \cong L_{\mathfrak{s}}^{\otimes 2}$.

现在我们来回归主题，说明可以借助 X 上的 Spin^c 结构构造出一个 Clifford 模以及 Dirac 算子，

定理 5.28 对 X 上的旋量丛 $S = S^+ \oplus S^-$ ，存在 $\gamma : TX \rightarrow \text{End}(S)$ 使得 (S, γ) 为 (X, g) 上的 Clifford 模.

证明. 这是基本的线性代数练习，考虑 $\text{Spin}^c(4) = (S^1 \times \text{Spin}(4)) / \{\pm(1, I, I)\}$ ，因此用 $[\lambda, X_+, X_-]$ 表示，则注意到

- $\rho : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{GL}(V)$ ，这里 $V \cong \mathbb{H}$ ，其中 $(\lambda X_+, \lambda X_-) \mapsto (q \mapsto X_- q X_+^{-1})$ ，且有

$$P_{\text{Spin}^c(4)} \times_{\rho} \mathbb{H} \cong TX.$$

- $\rho_{\pm} : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{GL}(W^{\pm})$ ，这里 $W^{\pm} \cong \mathbb{C}^2$ ，其中 $(\lambda X_+, \lambda X_-) \mapsto (q \mapsto X_{\pm} q \lambda)$ ，且有

$$P_{\text{Spin}^c(4)} \times_{\rho_{\pm}} \mathbb{C}^2 \cong S^{\pm}.$$

注意到 ρ_{\pm} 可以诱导出 $\text{Spin}^c(4)$ 到 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ 上的表示，且不难发现这即 ρ ，因此我们有表示空间同构 $V \otimes \mathbb{C} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ ，进而可知有丛同构

$\gamma: TX \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(S^+, S^-)$, 不难验证这即是符合要求的 Clifford 乘法. \square

注 5.29 事实上, 我们可以进一步证明^[12], (X, g) 上的一个 $\text{Spin}^c(4)$ 结构完全由 (S^\pm, γ) 决定, 这里 S^\pm 为 X 上两个 c_1 相同的秩为 2 的 Hermitian 丛, $\gamma: TX \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(S^+, S^-)$ 为同构, 且满足 $\gamma(v)^* \gamma(v) = -|v|^2 \text{Id}_{S^+}$.

因此之后我们总用 $\mathfrak{s} = (S^\pm, \gamma) = (S, \gamma)$ 来表示 (X, g) 上的一个 Spin^c 结构. 且由定理 5.8 关于不可约 Clifford 模分类定理, 我们可以知道局部上 γ 可以表示成例 5.7 的形式.

注 5.30 由定理 5.28 不难看到, 给定 Spin^c 结构 $\mathfrak{s} = (S, \gamma)$, 以及任意 $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$, 我们有新的 Spin^c 结构

$$\mathfrak{s} + \alpha := (S \otimes L_\alpha, \gamma \otimes \text{Id}),$$

其中 L_α 为 X 唯一的满足 $c_1 = \alpha$ 的复线丛. 不难看到

$$c_1(\mathfrak{s} + \alpha) = c_1(S^+ \otimes L_\alpha) = c_1(\mathfrak{s}) + 2\alpha.$$

现在固定 Spin^c 结构 $\mathfrak{s} = (S, \gamma)$, 我们考虑对 X 上的 Clifford 模 (S, γ) 上定义 Dirac 算子. 我们首先考虑 $P_{\text{Spin}^c(4)}$ 主丛上的联络, 回忆这是一个 $\text{Spin}^c(4)$ 的李代数值的 1 形式, 结合 $S^1 \times \text{Spin}(4)$ 为 $\text{Spin}^c(4)$ 的二叶覆叠, 且 $\text{Spin}(4)$ 为 $\text{SO}(4)$ 的二叶覆叠, 因此我们有李代数同构

$$\mathfrak{spin}^c(4) \cong \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{u}(1) = \mathfrak{so}(4) \oplus \sqrt{-1}\mathbb{R},$$

因此我们考虑 $P_{\text{SO}(4)}$ 上的 Levi-Civita 联络, 也即 $\mathfrak{so}(4)$ 值的 1 形式, 以及行列式线丛 $L_{\mathfrak{s}}$ 上的任意酉联络 $A \in \mathcal{A}(L_{\mathfrak{s}})$, 则可以组合得到 $P_{\text{Spin}^c(4)}$ 上的联络.

现在对上述得到的 $P_{\text{Spin}^c(4)}$ 上的联络, 可以诱导出配丛 S 上的联络 ∇_A , 不难验证这满足定义 5.16 要求的, 因此我们有 Dirac 算子

$$\not{D}_A: \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla_A} \Gamma(T^*X \otimes S) \xrightarrow{g} \Gamma(TX \otimes S) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(S).$$

考虑诱导在配丛 S^\pm 上的联络 ∇_A^\pm , 则我们也有对应的 $\not{D}_A^\pm: \Gamma(S^\pm) \rightarrow \Gamma(S^\mp)$,

且不难看到

$$\not{D}_A = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}_A^- \\ \not{D}_A^+ & 0 \end{pmatrix},$$

则由定理5.19可知 \not{D}_A 自伴，因此可知 \not{D}_A^\pm 互为伴随。

现在定理5.28，Lichnerowicz 公式的基础上可以进一步得到，

定理 5.31 ([13]) 设 (X, g) 为光滑闭四维黎曼流形， $\mathfrak{s} = (S, \gamma)$ 为其上的一个 Spin^c 结构，设 A 为 $L_{\mathfrak{s}}$ 上的一个酉联络，则设 d_A 对应的曲率为 F_A ，记 A 诱导 S 上的联络为 ∇_A ，以及对应的 *Dirac* 算子为 \not{D}_A ，设 Δ_A 为 S 上 ∇_A 诱导的联络 *Laplace* 算子，则我们有

$$\not{D}_A^2 = \Delta_A + \frac{1}{4}s_g + \frac{1}{2}\gamma(F_A),$$

其中 s_g 表示 (X, g) 的数量曲率， $F_A \in \Omega^2(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$ ，这里 γ 作用为 *Clifford* 乘法的自然延拓。

证明. 首先由定理5.28，我们有

$$\not{D}_A^2 = \Delta_A + \frac{1}{2}\gamma(R_A),$$

这里 R_A 是 S 上联络 ∇_A 对应的曲率，则进一步由 ∇_A 由 (X, g) 上 Levi-Civita 联络 d_∇ 以及 A 决定，因此设 d_∇ 对应的曲率为 R ，也即经典的黎曼曲率，则我们有 $R_A = R + F_A$ ，进而

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma(R_A) &= \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \circ (R(e_i, e_j) + F_A(e_i, e_j)) \\ &= \left(\sum_{i < j} e_i \cdot e_j \circ R(e_i, e_j) \right) + \frac{1}{2}\gamma(F_A). \end{aligned}$$

不难利用局部坐标展开计算证明 $R(e_i, e_j) = \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^n R_{ijkl} e_k \cdot e_l$, 进而我们有

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \circ R(e_i, e_j) &= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot e_l \\
 &= \frac{1}{8} \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \underbrace{(R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil})}_{\text{由 Bianchi 恒等式}=0} e_i \cdot e_j \cdot e_k \right\} \cdot e_l \\
 &\quad + \frac{1}{8} \left(\sum_{i,j=1}^n R_{ijil} e_i \cdot e_j \cdot e_i + \sum_{i,j=1}^n R_{ijjl} e_i \cdot e_j \cdot e_j \right) \cdot e_l \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,l=1}^n R_{ijil} e_j \cdot e_l = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,l=1}^n R_{ijli} e_j \cdot e_l \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{j,l=1}^n \text{Ric}_{jl} e_j \cdot e_l = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_{jj} = \frac{1}{4} s_g,
 \end{aligned}$$

其中我们用到了 $\text{Ric}_{jl} = \text{Ric}_{lj}$. □

第三节 Seiberg-Witten 模空间

我们在本节中首先会讨论自/反对偶形式, 以及将正旋量丛 S^+ 上线性同态与曲率联系起来的平方映射, 然后我们终于可以陈述 Seiberg-Witten 方程, 并介绍其解构成的模空间.

5.3.1 自/反对偶形式与平方映射

设 (X, g) 为定向闭光滑四维黎曼流形, 则我们有 **Hodge $*_g$ 算子**:

$$*_g : \Omega^2(X) \rightarrow \Omega^2(X), \quad *_g(e^i \wedge e^j) = (e^k \wedge e^l),$$

其中 $\{e^i\}_{i=1}^4$ 为一组 $\Omega^1(x)$ 的局部标准正交基, 且 (i, j, k, l) 为 $(1, 2, 3, 4)$ 的偶置换排列.

容易看到 $*_g^2 = \text{Id}$, 因此有特征值 ± 1 , 这启发我们定义,

定义 5.32 给定定向闭光滑四维黎曼流形 (X, g) , 则我们有 $\Lambda^2(T^*X) \cong \Lambda^+(T^*X) \oplus$

$\Lambda^-(T^*X)$, 两者的截面分别可定义为

- 自对偶二形式构成的向量空间记为 $\Omega^+(X, g) = \{\omega \in \Omega^2(X) \mid *_g \omega = \omega\}$.
- 反自对偶二形式构成的向量空间记为 $\Omega^-(X, g) = \{\omega \in \Omega^2(X) \mid *_g \omega = -\omega\}$.

由 $\Omega^2(X) = \Omega^+(X, g) \oplus \Omega^-(X, g)$, 我们有任意 $\omega = \omega^+ + \omega^-$, 其中

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega + *_g \omega) \in \Omega^+(X, g), \quad \omega^- = \frac{1}{2}(\omega - *_g \omega) \in \Omega^-(X, g)$$

注 5.33 由 *Hodge* 分解定理, 我们有 $H_{\text{dR}}^2(X) \cong \mathcal{H}^2(X, g)$, 后者表示 (X, g) 上的调和 2 形式, 并且 $\mathcal{H}^2(X, g) \cong \mathcal{H}^+(X, g) \oplus \mathcal{H}^-(X, g)$, 其中 $\mathcal{H}^\pm(X, g)$ 表示自/反对偶调和二形式, 我们记 $b_2^\pm := \dim \mathcal{H}^\pm(X, g)$, 容易证明这是不依赖黎曼度量选取的.

上述的自对偶形式与正旋量丛有着密切的联系:

命题 5.34 设 (X, g) 为光滑闭定向四维黎曼流形, $\mathfrak{s} = (S, \gamma)$ 为其上的一个 Spin^c 结构, 则我们有 $\text{End}_0(S^+)$ 与 $\sqrt{-1}\Lambda^+(T^*X)$ 丛同构, 其中 $\text{End}_0(S^+) = \{f \in \text{End}(S^+) \mid \text{tr}(f) = 0\}$, 也即迹为 0 的线性变换.

证明. 局部上可以划归成纯粹的线性代数问题, 注意到局部上选取标准正交基 $\{e_i\}_{i=0}^3$, 则 $\sqrt{-1}\Lambda^+(T^*X)$ 由 $E_1 := e_0 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3$, $E_2 := e_0 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4$ 与 $E_3 := e_0 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2$ 生成, 注意到由注 5.29 可知我们有

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_i) = \begin{pmatrix} O & B_i \\ B_i & O \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

直接计算即可得到

$$\gamma(E_i) = \begin{pmatrix} 2B_i & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

注意到我们有 $\text{End}_0(\mathbb{C}^2)$ 恰好可由 B_1, B_2, B_3 生成, 因此我们得到了一个直接的同构 $\gamma: \sqrt{-1}\Lambda^+(T^*X) \rightarrow \text{End}_0(S^+)$. \square

注 5.35 从上述证明我们也不难看到任意 $f \in \text{End}_0(W^+)$, 存在自对偶二形式 $\alpha \in \Omega^+(X, g)$ 使得对任意 $\Phi \in \Gamma(S^+)$, 我们有 $f(\Phi) = \sqrt{-1}\alpha \cdot \Phi$.

现在我们终于可以开始讨论定义 SW 方程需要的最后一块拼图了——平方

映射. 任给 $\Phi \in \Gamma(S^+)$, 则我们可以如下定义 $(\Phi \otimes \Phi^*)_0 \in \text{End}_0(S^+)$: 首先考虑

$$\Phi \otimes \Phi^* \in \text{End}(S^+), \quad \psi \mapsto \langle \Phi, \psi \rangle \Phi,$$

然后我们取其迹为 0 的部分,

$$(\Phi \otimes \Phi^*)_0 \in \text{End}_0(S^+), \quad \psi \mapsto \langle \Phi, \psi \rangle \Phi - \frac{|\Phi|^2}{2} \psi.$$

我们也可以利用局部坐标直接验证 $(\Phi \otimes \Phi^*)_0 \in \text{End}_0(S^+)$, 设有 $\Phi = (a, b)^\top$, 则

$$\begin{aligned} (\Phi \otimes \Phi^*)_0 &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} - \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \text{Id} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2) & a\bar{b} \\ \bar{a}b & \frac{1}{2}(-|a|^2 + |b|^2) \end{pmatrix} \in \text{End}_0(\mathbb{C}^2). \end{aligned}$$

因此我们可以定义

定义 5.36 我们称如下定义的 $\sigma : \Gamma(S^+) \rightarrow \Omega^+(X, g; \sqrt{-1}\mathbb{R}) = \Gamma(\sqrt{-1}\Lambda^+(T^*X))$ 为平方映射,

$$\sigma(\Phi) := \gamma^{-1}((\Phi \otimes \Phi^*)_0),$$

其中 γ^{-1} 为在注 5.35 中提到的 $\text{End}_0(S^+)$ 与 $\sqrt{-1}\Lambda^+(T^*X)$ 的同构.

5.3.2 Seiberg-Witten 方程

我们在本小节中介绍 Seiberg-Witten 方程, 以及 $U(1)$ 规范群和 Seiberg-Witten 模空间的定义.

我们首先回顾一下基本的假设, 设 (X, g) 为一个光滑闭定向四维黎曼流形, $\mathfrak{s} = (S, \gamma)$ 为其上的一个 Spin^c 结构. 记 $L_{\mathfrak{s}} := \det S^\pm$ 为 \mathfrak{s} 的行列式线丛, 则其上的任意联络 d_A , 其中 $A \in \mathcal{A}_{L_{\mathfrak{s}}} \cong \Omega^1(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$ 与 (X, g) 上的 Levi-Civita 联络搭配得到 (S, γ) 上的一个联络 ∇_A , 且使得 (S, γ, ∇_A) 为 (X, g) 上的 Dirac 丛, 我们进而

也有 Dirac 算子 \not{D}_A .

定义 5.37 我们称

$$\begin{cases} \not{D}_A \Phi = 0 & \text{Dirac 方程,} \\ F_A^+ = \sigma(\Phi) & \text{曲率方程.} \end{cases}$$

为 **Seiberg-Witten 方程** (以后简记为 **SW 方程**), 其中 $\Phi \in \Gamma(S^+)$ 为正旋量, $F_A^+ \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$ 为 $L_{\mathfrak{s}}$ 上联络 d_A 对应的曲率 F_A 的自对偶分量, $\sigma: \Gamma(S^+) \rightarrow \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$ 为定义 5.36 中的平方映射.

注 5.38 设 $\delta \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$, 则我们称

$$\begin{cases} \not{D}_A \Phi = 0, \\ F_A^+ = \sigma(\Phi) + \delta, \end{cases}$$

为 δ -扰动 **SW 方程**.

注意到 SW 方程的解 (A, Φ) 落在空间 $\mathcal{A}_{L_{\mathfrak{s}}} \times \Gamma(S^+)$ 中, 且一般而言利用规范变换可以从一个解得到另一个解, 因此在具体考虑 SW 方程前我们先仔细给出规范群的定义.

注意到我们考虑的丛是 (S, γ) , 因此规范群为 $\mathcal{G} := \text{Aut}(S, \gamma)$, 由 Shur 引理 (命题 5.10) 可知这即全体 $C^\infty(X, S^1)$, 也即我们有规范群为

$$\mathcal{G} \cong C^\infty(X, S^1).$$

我们如下定义 \mathcal{G} 作用在 $\mathcal{A}_{L_{\mathfrak{s}}} \times \Gamma(S^+)$ 上,

$$g \cdot (A, \Phi) := (g(A), g \cdot \Phi), \quad g \in \mathcal{G},$$

其中 $g(A)$ 对应的联络 $d_{g(A)} := g \circ d_A \circ g^{-1}$. 因此不难计算得到^[10], $g(A) = A + 2g^{-1}dg$, 也即 $g \cdot (A, \Phi) = (A + 2g^{-1}dg, g \cdot \Phi)$.

我们记 $\text{SW} : \mathcal{A}_{L_\mathfrak{s}} \times \Gamma(S^+) \rightarrow \Omega_+^2(X; \sqrt{-1}\mathbb{R}) \times \Gamma(S^-)$ 为 **SW 映射**, 其中

$$\text{SW}(A, \Phi) := (F_A^+ - \sigma(\Phi), \not{D}_A \Phi).$$

容易看到 SW 映射是 \mathcal{G} -等变的^[13, 14], 因此可知若 (A, Φ) 为 δ -扰动 SW 方程的解, 则对任意 $g \in \mathcal{G}$, $g \cdot (A, \Phi)$ 也为 δ -扰动 SW 方程的解. 因此我们在数 SW 方程解时应该模掉这些相差一个规范变换的解, 这启发我们定义,

定义 5.39 设 (X, g) 为光滑闭定向四维黎曼流形, \mathfrak{s} 为其上的一个 Spin^c 结构, $\delta \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$, 则我们记 δ -扰动的 **SW 模空间** 为

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{s}(g, \delta) := \text{SW}^{-1}(\delta, 0)/\mathcal{G}.$$

我们称 $\mathcal{B}_\mathfrak{s} := \mathcal{A}_{L_\mathfrak{s}} \times \Gamma(S^+)/\mathcal{G}$ 为**构型空间**, 进而赋予 $\mathfrak{M}_\mathfrak{s}(g, \delta) \subset \mathcal{B}_\mathfrak{s}$ 子空间拓扑. 我们记 $\mathcal{P} := \{(g, \delta) | g \text{ 为黎曼度量}, \delta \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})\}$ 为**参数空间**.

5.3.3 可约与不可约解

我们想研究 SW 模空间的结构, 很自然的问题是其是否为光滑流形, 因此我们在本小节中先从这个角度出发初步对 SW 方程的可能解进行一个分类.

一般而言对 \mathcal{G} 作用在 $\mathcal{A}_{L_\mathfrak{s}} \times \Gamma(S^+)$, 若有 $g \cdot (A, \Phi) = (A, \Phi)$, 则可以立刻得到 $\Phi = 0$, 且 $dg = 0$ 进而 g 为常值映射, 因此对于 $(A, \Phi) \in \mathcal{A}_{L_\mathfrak{s}} \times \Gamma(S^+)$, 我们有

- 若 $\Phi = 0$, 则 $\text{Stab}_{(A, 0)} \cong \text{U}(1)$.
- 若 $\Phi \neq 0$, 则 $\text{Stab}_{(A, \Phi)} \cong \{1\}$.

因此粗糙地讲 \mathcal{G} 作用在 $(A, 0)$ 附近可能会产生奇点, 而在 $(A, \Phi \neq 0)$ 附近则是光滑的, 因此这启发我们称 SW 方程的解 $(A, 0)$ 为**可约解**, 其余解称为**不可约解**. 并且据此可以将 SW 模空间划分为

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{s}(g, \delta) = \mathfrak{M}_\mathfrak{s}^{\text{irr}}(g, \delta) \sqcup \mathfrak{M}_\mathfrak{s}^{\text{red}}(g, \delta),$$

其中 $\mathfrak{M}_\mathfrak{s}^{\text{irr}}(g, \delta)$ 和 $\mathfrak{M}_\mathfrak{s}^{\text{red}}(g, \delta)$ 分别表示由不可约解和可约解构成的模空间.

正如上文所说, 规范群在不可约解的局部作用自由, 因此其可能会具有流

形结构, 事实也确实如此, 我们有如下重要结果:

定理 5.40 ([13, 14]) 设 X 为光滑闭四维流形, 且 $b_2^+(X) \geq 1$, 设 \mathfrak{s} 为其上的一个 Spin^c 结构, 则对一般性 (*generic*) 的参数 $(g, \delta) \in \mathcal{P}$ (可以固定 g 只扰动 δ), 我们有 δ -扰动的 SW 模空间的不可约解部分 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}^{\text{irr}}(g, \delta)$ 要么为空集, 要么为一个可定向光滑紧流形, 且维数为

$$\dim \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}^{\text{irr}}(g, \delta) = \frac{1}{4} (c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)),$$

其中 $\sigma(X) = b_2^+ - b_2^-$ 为 X 的符号差. 更进一步, 至多只有有限个 Spin^c 结构 \mathfrak{s} 满足模空间非空.

注 5.41 因为我们主要研究的对象是辛流形, 因此我们这里约束 $b_2^+ \geq 1$.

注 5.42 我们记 $d(X, \mathfrak{s}) := \frac{1}{4} (c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X))$, 由 *Atiyah-Singer* 指标定理^[14] 可以证明 $\frac{1}{8} (c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)) = \text{Ind} \not{D}_A \in \mathbb{Z}$, 从而我们有

$$d(X, \mathfrak{s}) = 2\text{Ind} \not{D}_A - 1 - b_1 + b_2^+.$$

既然我们对不可约解的部分已经了解的比较清楚了, 我们自然会想去研究可约解. 事实上, 借助如下的概念, 可约解的存在性可以被轻松刻画,

定义 5.43 给定 X 上的 Spin^c 结构 \mathfrak{s} , 则我们称 \mathcal{P} 的如下子集为墙,

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{s}} := \left\{ (g, \omega) \in \mathcal{P} : \text{pr}_{\mathcal{H}^+} \left(c_1(\mathfrak{s}) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) = 0 \right\},$$

其中 $\text{pr}_{\mathcal{H}^+} : \Omega^2(X) \rightarrow \mathcal{H}^+(X, g)$ 为 *Hodge* 分解中向 $\mathcal{H}^+(X, g)$ 中的正交投影. 我们称墙的补空间 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 为室.

墙这个看似古怪的定义其实源自于如下结论,

命题 5.44 δ -扰动 SW 方程有可约解当且仅当参数落在墙中, 也即 $(g, \delta) \in \mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$.

证明. 对可约解显然有 *Dirac* 方程平凡, 因此只需去解曲率方程. 现在固定一个

联络 A_0 则曲率方程等价于寻找 $a \in \Omega^1(X; i\mathbb{R})$ 使得

$$\delta = F_{A_0+a}^+ = F_{A_0}^+ + d^+a,$$

从而只需找到 a 使得

$$d^+a = \delta - F_{A_0}^+.$$

由 Hodge 分解 $\Omega^+(X) = \mathcal{H}^+(X, g) \oplus d^+(\Omega^1(X))$ 因此我们知道这等价于

$$\text{pr}_{\mathcal{H}^+}(\delta - F_{A_0}^+) = 0,$$

注意到 $\text{pr}_{\mathcal{H}^+}(F_{A_0}^-) = 0$, 且由 Chern-Weil 定理 $[F_{A_0}] = -2\pi i c_1(\mathfrak{s})$, 综上可知存在可约解当且仅当

$$\text{pr}_{\mathcal{H}^+}(\delta + 2\pi i c_1(\mathfrak{s})) = 0, \quad \text{也即 } (g, \delta) \in \mathcal{W}_{\mathfrak{s}},$$

综上所述我们完成了证明. □

现在注意到 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 是一个余维数为 $b_2^+(X)$ 的无穷维仿射空间, 因此当 $b_2^+(X) \geq 1$ 时, $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 为 \mathcal{P} 中的零测集, 故一般性选取参数 (g, δ) 即可保证 $(g, \delta) \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$, 也即此时不存在可约解, 进而 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}^{\text{irr}}(g, \delta)$, 故结合定理 5.40 我们有

推论 5.45 设 X 为光滑闭四维流形, 且 $b_2^+(X) \geq 1$, 设 \mathfrak{s} 为其上的一个 Spin^c 结构, 则对一般性 (*generic*) 的参数 $(g, \delta) \in \mathcal{P}$ (事实上此时可以一般性选取 $(g, \delta) \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$, 并且可以固定 g 只扰动 δ), 我们有 δ -扰动的 SW 模空间 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$ 要么为空集, 要么为一个可定向光滑紧流形, 且维数为

$$\dim \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta) = \frac{1}{4} (c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)).$$

其更进一步, 至多只有有限个 Spin^c 结构 \mathfrak{s} 满足模空间非空.

更精细的分析室 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 可知,

- 若 $b_2^+(X) = 1$ 则室 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_s$ 有两个室

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_s)^+ &:= \left\{ (g, \delta) : \text{pr}_{\mathcal{H}^+} \left(c_1(s) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) > 0 \right\}, \\ (\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_s)^- &:= \left\{ (g, \delta) : \text{pr}_{\mathcal{H}^+} \left(c_1(s) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) < 0 \right\}, \end{aligned}$$

其中设 $\mathcal{H}^+(X)$ 由 ω_g 生成, 且 $\int_X \omega_g \wedge \omega > 0$ (为了和生成元 $-\omega_g$ 区分开), 则我们实际上有

$$\text{pr}_{\mathcal{H}^+} \left(c_1(s) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) = \int_X \left(c_1(s) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) \wedge \omega_g.$$

更进一步不难发现, 参数 (g_1, δ_1) 与 (g_2, δ_2) 存在避开墙的道路相连当且仅当 (g_1, δ_1) 与 (g_2, δ_2) 在同一个室中.

- 若 $b_2^+(X) > 1$ 则任意落在室内 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_s$ 的 (g_1, δ_1) 和 (g_2, δ_2) , 总存在一族光滑道路 $(g_t, \delta_t) \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_s$ 连接 (g_1, δ_1) 和 (g_2, δ_2) .

注 5.46 这里我们讨论一族避开墙的参数 $\{(g_t, \delta_t)\}$ 的原因在于, 粗糙地讲将会有

$$\bigcup_t \mathfrak{M}_s(g_t, \delta_t)$$

给出一个从 $\mathfrak{M}_s(g_1, \delta_1)$ 到 $\mathfrak{M}_s(g_2, \delta_2)$ 的一个光滑配边, 反之假如这族参数穿墙而过, 也即有某个中间参数 (g_s, δ_s) 落在墙上, 因此 $\mathfrak{M}_s(g_s, \delta_s)$ 就不一定是光滑流形, 可约解处就会成为奇点, 因此得不到两者的光滑配边.

这些讨论下一节中定义 SW 不变量是至关重要的.

另一方面, 除了考虑借助划分可约解与不可约解来保证模空间的光滑性, 我们也可以通过减小规范群实现, 注意到对 $(A, 0) \in \mathcal{A}_{L_s} \times \Gamma(S^+)$, \mathcal{G} 在该点的稳定化子为到 $U(1)$ 的常值映射, 因此我们若考虑固定 X 上基点 $*$, 定义

$$\mathcal{G}_0 = \{g \in C^\infty(X, S^1) | g(*) = 1\},$$

则可知 \mathcal{G}_0 自由作用在 $\mathcal{A}_{L_s} \times \Gamma(S^+)$, 进而自由在子空间 $SW^{-1}(\delta, 0)$ 上, 因此我

们可以证明,

定理 5.47 ([14]) 若 $b_2^+(X) \geq 1$, 则对一般性的 $(g, \delta) \in \mathcal{P}$, 我们有模空间

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta) := \text{SW}^{-1}(\delta, 0)/\mathcal{G}_0$$

为紧光滑可定向流形, 且维数为 $d(X, \mathfrak{s}) + 1$.

事实上从显然的纤维化 $U(1) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_0$, 可以诱导出纤维化

$$U(1) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta) \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta),$$

也即对一般性的 (g, δ) , 我们有 $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$ 为 δ -扰动 SW 模空间上的一个 S^1 丛, 由此也可以粗略看出维数为 $d(X, \mathfrak{s}) + 1$ 的原因.

第四节 SW 不变量与基本性质

我们在本节中将会给出 Seiberg-Witten 不变量的定义, 并介绍一些基本的性质, 并且在本节末尾利用 SW 不变量给出四维流形上允许正数量曲率度量的一个障碍.

5.4.1 基本定义

回忆对于光滑闭四维黎曼流形 (X, g) , 设 \mathfrak{s} 为其上的一个 Spin^c 结构, 则对 $\delta \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$, 我们有 δ -扰动的 SW 模空间 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$, 以及减小规范群得到的模空间 $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$.

由上一节的结果可知, 当 $b_2^+(X) \geq 1$ 时, 对于一般性选取的参数 (g, δ) , 我们有 $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$ 和 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$ 分别是维数为 $d(X, \mathfrak{s}) + 1$ 和 $d(X, \mathfrak{s})$ 的紧可定向光滑流形, 并且我们有 $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$ 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)$ 上的光滑 S^1 -丛, 且记这个丛对应的第一 chern 类为 $c_1(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta))$.

现在我们可以开始定义 SW 不变量了, 出于马上会看到的技术原因, 我们分为 $b_2^+(X) > 1$ 与 $b_2^+(X) = 1$ 两种情形去定义.

$\mathbb{I} b_2^+(X) > 1$ 时

定义 5.48 设 X 为一个可定向闭光滑四维流形，且 $b_2^+(X) > 1$ ，则对任意 Spin^c 结构 \mathfrak{s} ，选取一组一般性的参数 $(g, \delta) \in \mathcal{P}$ ，我们定义 \mathfrak{s} 的 **Seiberg-Witten** 不变量为

$$\text{SW}_X(\mathfrak{s}) := \begin{cases} \left\langle c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta) \right)^{\frac{d(X, \mathfrak{s})}{2}}, [\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)] \right\rangle & \text{若 } d(\mathfrak{s}, X) \geq 0 \text{ 且为偶数} \\ 0 & \text{若 } d(\mathfrak{s}, X) < 0 \text{ 或为奇数} \end{cases}.$$

注 5.49 由注5.42可知 $d(X, \mathfrak{s}) \equiv 1 + b_1 + b_2^+ \pmod{2}$ ，因此对于 $b_1 + b_2^+$ 为偶数的四维流形其 SW 不变量总是平凡的。

上述定义的过程其实含糊了如下一个良定义的事实，也即不依赖于一般性参数的选取，

命题 5.50 $b_2^+(X) > 1$ 时，定义5.48给出的 SW 不变量

$$\text{SW}_X : \text{Spin}^c(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

是良定义的，其中 $\text{Spin}^c(X)$ 表示 X 上全体 Spin^c 结构构成的等价类。

证明. 由注5.46可知，当 $b_2^+(X) > 1$ 时，任意两个一般性参数 (g_0, δ_0) 和 (g_1, δ_1) 之间都存在一族避开墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 的光滑参数 $\{(g_t, \delta_t)\}_{t \in [0, 1]}$ 连接，进而我们有

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}) := \bigcup_{t \in [0, 1]} \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g_t, \delta_t), \quad \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}) := \bigcup_{t \in [0, 1]} \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_t, \delta_t)$$

分别给出了 $-\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g_0, \delta_0) \sqcup \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g_1, \delta_1)$ 与 $-\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_0, \delta_0) \sqcup \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_1, \delta_1)$ 的配边，并且我们将每个 $U(1) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g_t, \delta_t) \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_t, \delta_t)$ 收集起来也有纤维化

$$U(1) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}) \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}).$$

现在由 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_0, \delta_0)$ 与 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_1, \delta_1)$ 配边可知两者的基本类在 $H_*(\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}); \mathbb{Z})$ 中

是相同的, 进而我们有

$$\begin{aligned} \left\langle c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g_0, \delta_0) \right)^{\frac{d(X, \mathfrak{s})}{2}}, [\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_0, \delta_0)] \right\rangle &= \left\langle c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}) \right)^{\frac{d(X, \mathfrak{s})}{2}}, [\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_0, \delta_0)] \right\rangle \\ &= \left\langle c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(\{g_t, \delta_t\}) \right)^{\frac{d(X, \mathfrak{s})}{2}}, [\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_1, \delta_1)] \right\rangle = \left\langle c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g_1, \delta_1) \right)^{\frac{d(X, \mathfrak{s})}{2}}, [\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g_1, \delta_1)] \right\rangle, \end{aligned}$$

进而可知我们 SW_X 的定义不依赖于一般性参数的选取. \square

因此在 $b_2^+(X) > 1$ 时, 我们有良定义的 SW 不变量, 回忆定理 5.27, 我们有 $\text{Spin}^c(X)$ 和 X 上的特征元素 $\text{Char}(X)$ 通过 c_1 实现一一对应, 因此我们有时也会记 $\text{SW}_X(c_1(\mathfrak{s})) := \text{SW}_X(\mathfrak{s})$.

更进一步, 由注 5.30, 假如固定基点 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_0 , 那么我们也可以得到 SW 不变量, $\text{SW}_X(\mathfrak{s}_0 + \cdot) : H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, 其中对任意 $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$, 更具体的有 $\text{SW}_X(\mathfrak{s}_0 + \alpha) = \text{SW}_X(c_1(\mathfrak{s}_0) + 2\alpha)$.

$\mathbb{I} \ b_2^+(X) = 1$ 时

如命题 5.50 所示, 当 $b_2^+(X) > 1$ 时, 任何两个一般性的参数都可以用避开墙的道路连接起来, 这在此时并不一定能办到, 因为此时墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 将参数空间分隔成了两个室 $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}})^{\pm}$, 一般而言对于不在同一室内的参数, 两者对应的 SW 不变量是不同的, 因此此时 SW 不变量是依赖于参数的, 进而定义,

定义 5.51 设 X 为一个可定向闭光滑四维流形, 且 $b_2^+(X) = 1$, 则对任意 Spin^c 结构 \mathfrak{s} , 选取一组一般性的参数 $(g, \delta) \in \mathcal{P}$, 我们定义 $(\mathfrak{s}, (g, \delta))$ 的 **Seiberg-Witten 不变量**为

$$\text{SW}_X(\mathfrak{s}, (g, \delta)) := \begin{cases} \left\langle c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{s}}(g, \delta) \right)^{\frac{d(X, \mathfrak{s})}{2}}, [\mathfrak{M}_{\mathfrak{s}}(g, \delta)] \right\rangle & \text{若 } d(\mathfrak{s}, X) \geq 0 \text{ 且为偶数} \\ 0 & \text{若 } d(\mathfrak{s}, X) < 0 \text{ 或为奇数} \end{cases}.$$

事实上由墙外 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 只有两个室, 因此类似命题 5.50 的证明可以表明此时 SW 不变量应该恰好有两个值 $\text{SW}_X^{\pm}(\mathfrak{s})$, 对应于选取的一般性参数落在 $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{W}_{\mathfrak{s}})^{\pm}$.

并且我们有如下的穿墙公式,

定理 5.52 ([15], theorem 9.9) 设 X 为 $b_2^+ = 1$ 且 $b_1 = 0$ 的闭连通光滑四维流形, 则对任何 Spin^c 结构 \mathfrak{s} , 若 $d(X, \mathfrak{s}) \geq 0$, 则

$$\text{SW}_X^+(\mathfrak{s}) - \text{SW}_X^-(\mathfrak{s}) = \pm 1,$$

也即穿墙而过 SW 不变量改变 ± 1 .

Li-Liu^[16], Ohta-Ono^[17] 几乎在同一时间对上述穿墙公式推广至其余 b_1 的情形, 推广的穿墙公式正是证明定理E的关键, 我们会在第六章中展开讨论.

5.4.2 正数量曲率度量的障碍

现在来看一个 SW 不变量最简单的应用, 也即给出正数量曲率度量存在性的一个障碍,

定理 5.53 设 X 为闭连通光滑四维流形且 $b_2^+ > 1$, 若其上允许正数量曲率度量 g , 则我们有 X 上的 SW 不变量均为 0, 也即 $\text{SW}_X \equiv 0$.

证明. 由 X 紧可知存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\min_{p \in X} s_g(p) > \varepsilon > 0$, 这里 s_g 为 g 对应的数量曲率. 假如存在 \mathfrak{s} 使得 $\text{SW}_X(\mathfrak{s}) \neq 0$, 则由 SW 不变量的定义可知存在 $\delta \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$ 满足 $\max_{p \in X} |\delta(p)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且使得存在 (A, Φ) 为 δ -扰动 SW 方程的解, 也即

$$\not{D}_A \Phi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\Phi) + \delta.$$

注意到 $b_2^+ > 1$, 因此可以进一步让选取的 δ 保证没有可约解, 也即 $\Phi \neq 0$.

现在回忆我们有 Lichnerowicz 公式 (定理5.31),

$$\not{D}_A^2 = \Delta_A + \frac{1}{4}s_g + \frac{1}{2}\gamma(F_A),$$

因此作用在 Φ 上并与 Φ 配对, 则有

$$0 = \not{D}_A^2 \Phi = \Delta_A \Phi + \frac{1}{4}s_g \Phi + \frac{1}{2}\gamma(F_A^+) \Phi, \quad (5.2)$$

其中回忆命题5.34的证明可知 $\gamma: \Lambda^- T^*X \rightarrow S^+$ 是平凡的, 也即 $\gamma(F_A^-) \Phi = 0$.

现在将(5.2)整体与 Φ 做内积并在 X 上积分, 则利用 Δ_A 的自伴性 (命题5.22), 以及 $F_A^+ = \sigma(\Phi) + \delta$, 我们有

$$0 \geq \int_X |\nabla_A \Phi|^2 + \int_X \left(\frac{1}{4} s_g - \frac{1}{2} |\delta| \right) |\Phi|^2 + \int_X \frac{1}{2} |\Phi|^4, \quad (5.3)$$

其中用到了 $\langle \delta \cdot \Phi, \Phi \rangle \geq -|\delta| \cdot |\Phi|^2$, 以及 $\langle \sigma(\Phi) \cdot \Phi, \Phi \rangle = |\Phi|^4$, 后者不难从平方映射 σ 的定义中得到.

因此现在对任意 $p \in X$, 由

$$\frac{1}{4} s_g(p) - \frac{1}{2} |\delta(p)| \geq \frac{1}{4} \max_{q \in X} s_g(q) - \frac{1}{2} \max_{r \in X} |\delta(r)| > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} > 0,$$

结合(5.3)可知一定有 $\nabla_A \Phi = 0, \Phi = 0$, 这表明 $(A, \Phi) = (A, 0)$ 为可约解, 与我们的假设矛盾! 因此可知对任意 \mathfrak{s} 我们有 $\text{SW}_X(\mathfrak{s}) = 0$. \square

注 5.54 容易看到在上述证明过程中, 我们只用到 $b_2^+ > 1$ 的条件来保证 SW 不变量是良定义的, 因此事实上后续证明可以说明, 在 $b_2^+(X) = 1$ 的情形, 若扰动项 δ 充分小, 比如满足 $\max_{p \in X} |\delta(p)| < \frac{1}{2} \min_{p \in X} s_g(p)$, 且 (g, δ) 不落在墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}}$ 上 (因此不存在可约解), 那么我们也有

$$\text{SW}_X(\mathfrak{s}, (g, \delta)) = 0.$$

注 5.55 定理5.53即为我们在本章开篇试图证明的一个结果, 我们在下一节将会证明另一个结果, 也即四维辛流形的 SW 不变量不为 0 (更具体的, 定理5.56).

第五节 辛四维流形的 SW 不变量

本节我们的主要目的是证明如下的基本结果:

定理 5.56 (C.Taubes) 设 (X, ω) 为闭连通辛四维流形, 且 $b_2^+ > 1$, 则存在 X 上的 Spin^c 结构使得对应的 c_1 为 $c_1(X, \omega)$, 且

$$\text{SW}_X(c_1(X, \omega)) = \pm 1,$$

特别的, $b_2^+ > 1$ 的辛四维流形 SW 不变量不恒为 0.

进而正如本章开篇所说, 结合定理5.53与注1.2, 我们有如下推论:

推论 5.57 设 (X, ω) 为闭连通辛四维流形, 若其上允许正数量曲率度量, 则 $b_2^+(X) = 1$.

这是我们下一章证明定理E的出发点.

5.5.1 辛四维流形上的 Spin^c 结构

设 (X, ω) 为辛四维流形, 选取 J 为一个 ω -相容的近复结构, 也即有

$$g(v, w) := \omega(v, Jw)$$

为 X 上的黎曼度量. 进而可知可以局部选取标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^4$ 与其对偶 $\{e^i\}_{i=1}^4$, 使得

$$Je_1 = e_2, \quad Je_3 = e_4,$$

从而 $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$, 故

$$*_g \omega = \omega. \tag{5.4}$$

也即我们有辛形式 ω 为一个自对偶二形式, $\omega \in \Omega^+(X)$, 且 $|\omega| = \sqrt{2}$.

现在对 (X, ω, J, g) , 由 (TX, J) 为复向量丛, 因此结构群为 $U(2)$, 也即可由一组闭上链 (cocycle) $\{h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow U(2)\} = \{[\lambda, A]\}$, 这里 $\{U_\alpha\}$ 为一组好覆盖^[18], 且 $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$. 记 $\det TX = K_X^{-1}$, 则其由闭上链 $\{\det \circ h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow U(1)\} = \{\lambda^2\}$ 决定, 这里 K_X 表示 X 上的典范线丛, 也记为 $\det T^*X$.

注 5.58 我们这里 $\{\lambda^2\}$ 是简记以表示闭上链的具体表达式, 为了方便阅读省略了下标.

注意到 $U(2) = \{[\lambda, A] : \lambda \in S^1, A \in \text{SU}(2)\} = S^1 \times \text{SU}(2) / \pm 1$, 以及 $\text{Spin}^c(4) = \{[\lambda, A_+, A_-] : \lambda \in S^1, A_\pm \in \text{SU}(2)\} = S^1 \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) / \pm 1$. 因此我们可以自然

将闭上链 $\{h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow U(2)\}$ 利用

$$i : U(2) \rightarrow \mathrm{Spin}^c(4), \quad [\lambda, A] \mapsto \left[\lambda, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, A \right],$$

提升为闭上链 $\{i \circ h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathrm{Spin}^c(4)\} = \left\{ \left[\lambda, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, A \right] \right\}$, 因此可知对 J 我们可以找到一个 X 上的 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_J .

回忆我们通过

$$\rho_{\pm} : \mathrm{Spin}^c(4) \rightarrow U(2), \quad [\lambda, A_+, A_-] \mapsto [\lambda, A_{\pm}]$$

来构造 S^{\pm} , 因此我们有 \mathfrak{s}_J 对应的 S^{\pm} 分别具有闭上链 $\{\rho_{+} \circ i \circ h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow U(2)\} = \left\{ \left[\lambda, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 为对角阵, 且一个为 $\det TX = K_X^{-1}$ 的转移函数 $\{\lambda^2\}$, 一个为平凡丛的, 因此我们有 $S^{+} \cong K_X^{-1} \oplus \mathbb{C}$.

类似地我们有 $\{\rho_{-} \circ i \circ h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow U(2)\} = \{[\lambda, A]\} = \{h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow U(2)\}$, 进而可知 $S^{-} \cong TX$.

由此也可知 $c_1(\mathfrak{s}_J) = c_1(S^{\pm}) = c_1(\det TX) = c_1(TX, J) = c_1(X, \omega)$.

小结一下, 对于辛流形 (X, ω, J, g) , 我们利用 ω -相容的近复结构 J 构造了一个典范的 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_J , 并且可以得到

$$S^{+} \cong K_X^{-1} \oplus \mathbb{C}, \quad S^{-} \cong TX, \quad c_1(\mathfrak{s}_J) = c_1(X, \omega).$$

为了更好的理解与描述 \mathfrak{s}_J 上的 Clifford 乘法, 以及 Dirac 算子, 我们需要先简要回顾一些基本的近复几何的记号与结果.

5.5.2 插叙: 近复几何回顾

我们先引入并固定将讨论并使用的记号, 在本小节中我们总假设 (X, J) 为近复流形.

- $TX \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$, 其中
 - $T^{1,0}X = \{u - \sqrt{-1}Ju : u \in TX\}$, 满足 $J|_{T^{1,0}X} = \sqrt{-1} \cdot \text{id}$.
 - $T^{0,1}X = \{u + \sqrt{-1}Ju : u \in TX\}$, 满足 $J|_{T^{0,1}X} = -\sqrt{-1} \cdot \text{id}$.
- $\wedge^1 X \otimes \mathbb{C} = \wedge^{1,0}X \oplus \wedge^{0,1}X$, 其中
 - $\wedge^{1,0}X = (T^{1,0}X)^* = \{\alpha - \sqrt{-1}\alpha \circ J : \alpha \in \wedge^1 X\}$, 且对 $\xi \in \wedge^{1,0}X$, 有 $\xi|_{T^{0,1}X} \equiv 0$.
 - $\wedge^{0,1}X = (T^{0,1}X)^* = \{\alpha + \sqrt{-1}\alpha \circ J : \alpha \in \wedge^1 X\}$, 且对 $\xi \in \wedge^{0,1}X$, 有 $\xi|_{T^{1,0}X} \equiv 0$.

利用 $\wedge^k(E \oplus F) = \bigoplus_{p+q=k} \wedge^p E \otimes \wedge^q F$, 我们可以定义

$$\Lambda^{p,q}X := (\wedge^{1,0}X)^{\otimes p} \bigotimes (\wedge^{0,1}X)^{\otimes q},$$

则有 $\wedge^k X \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}X$.

- $\Omega_{\mathbb{C}}^k(X) := \Gamma(\wedge^k X \otimes \mathbb{C})$, 以及 $\Omega^{p,q}(X) := \Gamma(\Lambda^{p,q}X)$.

注 5.59 之后为了方便阅读, 我们有时在不含糊的情况下会省略 X , 也即用 $\Lambda^{p,q}$ 来表示 $\Lambda^{p,q}X$.

现在设 (E, h) 是辛流形流形 (X, ω, J, g) 上的复向量丛, 且带有 Hermitian 度量 h , 则我们有:

- $\Omega^k(E) := \Gamma(\wedge^k X \otimes E)$, 即全体 E - 值的 k - 形式, 同样有 $\Omega^{p,q}(E) := \Gamma(\Lambda^{p,q}X \otimes E)$, 也即全体 E - 值的 (p, q) 形式. 我们有分解 $\Omega^k(E) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(E)$.
- 对于 Hermitian 度量 h , 其可以诱导 $h : E \rightarrow E^*$ 一个 \mathbb{C} - 反线性的同构, 其中 $s \mapsto h(\cdot, s)$, 则我们可以定义

$$\bar{*}_E : \Lambda^{p,q}X \otimes E \rightarrow \Lambda^{n-p, n-q}X \otimes E^*,$$

其中对 $\varphi \in \Omega^{p,q}(X)$ 与 $s \in \Gamma(E)$,

$$\bar{*}_E(\varphi \otimes s) := \bar{*}(\varphi) \otimes h(s) := \overline{*}\varphi \otimes h(s) = *(\bar{\varphi}) \otimes h(s),$$

其中最后一个等号用到了 $*$ 是 \mathbb{C} - 线性延拓得到的.

- 在 $\Omega^{p,q}(E)$ 上我们可以定义 Hermitian 度量 (\cdot, \cdot) , 其中

$$(\alpha, \beta) := \int_X \alpha \wedge \bar{*}_E \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^{p,q}(E),$$

这里 \wedge 对 E 和 E^* 上的分量是 $E \otimes E^* \rightarrow \mathbb{C}$ 的配对.

- 现在设 d_A 为 E 上的一个酉联络, F_A 为其对应的曲率, 则我们有

$$d_A = \partial_A + \bar{\partial}_A,$$

其中 $\partial_A : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^{1,0}(E)$, $\bar{\partial}_A : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(E)$.

利用 $\bar{*}_E$ 可以定义对偶算子 d_A^* 为 $d_A^* = -\bar{*}_E \circ d_A \circ \bar{*}_E$, 以及类似的 ∂_A^* , $\bar{\partial}_A^*$, 这里 d_A^* 是 E 上联络 d_A 自然诱导在 E^* 上的联络.

注 5.60 这里的分解 $d_A = \partial_A + \bar{\partial}_A$ 并不能推广到一般, 因为我们这里考虑的是近复流形, 故实际上更高维的情况下会出现如下的 *Nijenhuis* 张量:

$$\mathcal{N}(x, y) = \frac{1}{4} ([Jx, Jy] - [x, y] - J[x, Jy] - J[Jx, y]).$$

比如我们有^[10] 对任意 $s \in \Gamma(E)$,

$$\bar{\partial}_A \bar{\partial}_A s = F_A^{0,2}(s) - (\partial_A s) \circ \mathcal{N}, \quad (5.5)$$

这里 $F_A^{0,2}$ 表示曲率 F_A 的 2 形式部分的 $(0, 2)$ 分量.

对于辛流形 (X, ω, J, g) , 以及其上的 Hermitian 向量丛 E , 我们有一个十分常用的公式:

命题 5.61 ($\bar{\partial}_A$ 对应的 Wittenbock 公式) 设 (X, ω) 为辛四维流形, J 是 X 上一个 ω - 相容的近复结构, E 是 X 上的复向量丛, 且带有联络 d_A , 则我们有

$$2\bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A(s) = d_A^* d_A(s) - \sqrt{-1}g(F_A, \omega)(s), \quad (5.6)$$

这里 $s \in \Gamma(E)$, $g(F_A, \omega)$ 是 2 形式部分之间取内积.

证明. 如 5.5.1 开篇所言, 利用局部标准正交基不难证明对任意 1 形式 α , 我们有 $J\alpha = *_g(\omega \wedge \alpha)$, 为了方便阅读, 我们将 $\bar{*}_E$ 与 $*_g$ 等算子简记为 $*$, 其并不会太影响证明实质, 则有

$$\begin{aligned}
 2\bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A(s) &= 2\bar{\partial}_A^* (\text{proj}_{0,1} \circ d_A s) = \bar{\partial}_A^* (d_A - \sqrt{-1}Jd_A)s \\
 &= \bar{\partial}_A^* (d_A s - \sqrt{-1} * (\omega \wedge d_A s)) = d_A^* (d_A s - \sqrt{-1} * (\omega \wedge d_A s)) \\
 &= d_A^* d_A s - d_A^* \sqrt{-1} * (\omega \wedge d_A s) = d_A^* d_A s - (- * d_A *) \sqrt{-1} * (\omega \wedge d_A s) \\
 &= d_A^* d_A s - \sqrt{-1} * d_A (\omega \wedge d_A s) = d_A^* d_A s - \sqrt{-1} * (d\omega \wedge d_A s + \omega \wedge d_A d_A(s)) \\
 &= d_A^* d_A s - \sqrt{-1} * (\omega \wedge F_A(s)) = d_A^* d_A s - \sqrt{-1} g(\omega, F_A)(s).
 \end{aligned}$$

其中 $\text{proj}_{0,1}$ 是 $\Omega^1(E)$ 向 $\Omega^{0,1}(E)$ 的投影, 综上所述我们完成了证明. \square

5.5.3 辛四维流形上的 SW 方程

现在我们回归主线, 我们已经在 5.5.1 小节中对辛流形 (X, ω, J, g) 构造了一个典范的 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_J , 并且利用 5.5.2 小节中的记号, 我们有

$$S^+ \cong \mathbb{C} \oplus K_X^{-1} \cong \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}, \quad S^- \cong TX \cong \Lambda^{0,1}.$$

注 5.62 下面很快会看到这里同构 $TX \cong \Lambda^{0,1}$ 的具体表达式.

下面我们来逐渐重新认识一下 \mathfrak{s}_J 所对应的 Clifford 乘法, Dirac 算子以及平方映射:

Clifford 乘法

我们可以借助定理 5.28 直接验证有 Clifford 乘法 $\gamma: TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(S^+, S^-)$, 可由 $TX \times (\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \rightarrow \Lambda^{0,1}$,

$$v \cdot (f + \alpha) = \sqrt{2} (f \cdot v^{0,1} - (l_v \alpha)^{0,1})$$

给出, 这里

- $v \mapsto v^{0,1}$ 是由同构 $TX \rightarrow \Lambda^{0,1}$ 给出的, 其可具体表示为

$$v^{0,1} = \frac{1}{2} \left(v^* + \sqrt{-1} v^* \circ J \right),$$

这里 v^* 为 1 形式, 且由 $v^*(\cdot) := g(\cdot, v)$ 给出. 不难由 $\Lambda^{0,1}$ 的定义发现这是良定义的, 并且是同构.

- $(\iota_v \alpha)^{0,1}$ 是 $\Lambda^1 \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Lambda^{0,1}$ 的投影映射, 其记为 $\beta \mapsto \beta^{0,1}$, 可以具体表示为

$$\beta^{0,1} := \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{-1} \beta \circ J \right),$$

这也是直接的定义.

- 这里 $\sqrt{2}$ 源自于 Clifford 乘法保持长度.

Dirac 算子

现在我们来重新认识 Dirac 算子了, 事实上可以证明^[10, 14], 存在 $L_{\mathfrak{s}_J} \cong K_X^{-1}$ 上的典范联络 A_0 使得

$$\not{D}_{A_0} = \sqrt{2} \left(\bar{\partial} + \bar{\partial}^* \right) : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \rightarrow \Omega^{0,1}.$$

并且更一般的, 对于任意 $\varepsilon \in H^2(X; \mathbb{Z})$, 我们有 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}_J + \varepsilon$, 且 $L_{\mathfrak{s}_J + \varepsilon} \cong K_X^{-1} \otimes L_\varepsilon^2$, 这里 L_ε 为 X 上 $c_1 = \varepsilon$ 的复线丛, 并且 $\mathfrak{s}_J + \varepsilon$ 的正负旋量丛分别为

$$S_{\mathfrak{s}_J + \varepsilon}^+ = L_\varepsilon \oplus (L_\varepsilon \otimes \Lambda^{0,2}), \quad S_{\mathfrak{s}_J + \varepsilon}^- = L_\varepsilon \otimes \Lambda^{0,1}.$$

选取 L_ε 上的任意 $U(1)$ 联络 B , 则其与 $L_{\mathfrak{s}_J} = K_X^{-1}$ 上特殊的联络 A_0 共同诱导了 $L_{\mathfrak{s}_J + \varepsilon}$ 上的联络 $A = A_0 \otimes 1 + 1 \otimes 2B =: A_0 + 2B$, 并且容易计算^[10] 其诱导的

Dirac 算子为

$$\not{D}_{A_0+2B} : \Gamma(S_{\mathfrak{s}_J+\varepsilon}^+) \rightarrow \Gamma(S_{\mathfrak{s}_J+\varepsilon}^-) \quad (5.7)$$

$$\not{D}_{A_0+2B} = \sqrt{2} (\bar{\partial}_B + \bar{\partial}_B^*). \quad (5.8)$$

这里利用了 $\Gamma(S_{\mathfrak{s}_J+\varepsilon}^+) \cong \Omega^{0,0}(L_\varepsilon) \oplus \Omega^{0,2}(L_\varepsilon)$, $\Gamma(S_{\mathfrak{s}_J+\varepsilon}^-) \cong \Omega^{0,1}(L_\varepsilon)$, 因此 $\bar{\partial}_B$ 即为我们在 5.5.2 小节的约定的记号, 在这里使用说良定义的.

平方映射

现在为了重写 SW 方程, 我们只差再重新认识一下平方映射 σ 了, 事实上利用线性代数我们可以将平方映射分解成两个更直接的表达式.

回忆相容三元组 (ω, J, g) , 我们对 $\Lambda^2 \otimes \mathbb{C}$ 有两种分解, 按照 J 分解有 $\Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{2,0}$, 按照 g 分解, 有自/反对偶 2 形式的分解 $\Lambda^2 \otimes \mathbb{C} = (\Lambda^+ \otimes \mathbb{C}) \oplus (\Lambda^- \otimes \mathbb{C})$, 不难利用局部标准正交基验证辛形式 ω 联系起了这两种分解:

命题 5.63 ([13, 14]) 我们有同构

$$\Lambda^+ \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{2,0} \oplus \mathbb{C} \cdot \omega, \quad \Lambda^- \otimes \mathbb{C} = \langle \omega \rangle^\perp \subset \Lambda^{1,1}.$$

实际上, 也可以利用闭上链条件验证

$$\Lambda^+ \cong \Lambda^{0,2} \oplus \mathbb{R} \cdot \omega \cong K_X^{-1} \oplus \mathbb{R} \cdot \omega.$$

借助命题 5.63, 我们可以对此时的平方映射一个很好的刻画, 此时对 $\sigma : \Gamma(W^+) \rightarrow \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$, 也即 $\sigma : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \rightarrow \sqrt{-1}\Omega^+ \cong \mathbb{R} \cdot (\sqrt{-1}\omega) \oplus \Omega^{2,0}$, 以及任意 $f \in \Omega^{0,0}, \beta \in \Omega^{0,2}$, 容易验证^[13] σ 可以表示成

$$\sigma(f, \beta)^\omega = \sqrt{-1}(|f|^2 - |\beta|^2) \cdot \omega, \quad \sigma(f, \beta)^{0,2} = 2\bar{f} \cdot \beta, \quad (5.9)$$

这里对 $\eta \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \cdot (\sqrt{-1}\omega) \oplus \Omega^{2,0}$, 我们记 η^ω 表示在 $\mathbb{R} \cdot (\sqrt{-1}\omega)$ 上的分量, $\eta^{0,2}$ 表示在 $\Omega^{0,2}$ 上的分量.

重写 SW 方程

现在我们已经做好了充足的准备工作，但先回顾一下我们的目标：我们想要证明辛流形 (X, ω, J, g) 上 $c_1(X, \omega) := c_1(X, J) = c_1(\mathfrak{s}_J)$ 对应的 SW 不变量为 ± 1 。但对于 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_J ，我们有

$$d(X, \mathfrak{s}_J) = \frac{1}{4} (c_1(\mathfrak{s}_J)^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)),$$

注意到此时 (TX, J) 为复向量丛，因此利用分裂原则不难计算得到

$$p_1(TX) = c_1(TX, J)^2 - 2c_2(TX, J),$$

其中 $p_1(TX)$ 表示切丛 TX 作为实向量丛的第一 Pontryagin 类，进而由 Hirzebruch 号差定理

$$\sigma(X) = \frac{1}{3} \int_X p_1(TX),$$

以及 $\int_X c_2(TX, J) = \chi(X)$ ，我们有

$$d(X, \mathfrak{s}_J) = 0,$$

特别的， $c_1(\mathfrak{s}_J)^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X)$ 。

因此此时 \mathfrak{s}_J 对应的 SW 模空间为 0 维流形，进而为了证明其对应的 SW 不变量为 ± 1 ，我们只需要证明存在某个扰动 SW 方程解有唯一的解即可！

注 5.64 这里我们用 ± 1 是因为含糊了定向有关的细节。

考虑正常数 $\rho \in \mathbb{R}_+$ ， $B \in \Omega^1(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$ ，则其可视为 X 上平凡丛 $L_0 = \mathbb{C}$ 的联络，并且不难注意到 $A = A_0 + 2B$ 给出了 $L_{\mathfrak{s}_J}$ 上的全体联络。

现在我们对 Spin^c 结构考虑如下的扰动 SW 方程，

$$\begin{cases} D_A \Phi = 0 \\ F_A^+ = \sigma(\Phi) + F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}\rho^2 \omega, \end{cases} \quad (5.10)$$

也即选取扰动项 $F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}\rho^2\omega$, 这里利用了 ω 是在诱导的黎曼度量 g 下实的自对偶 2 形式, 也即 $\sqrt{-1}\omega \in \Omega^+(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$, 因此扰动的参数是良定义的.

现在利用如下的特殊刻画,

- $A = A_0 + 2B$, 从而
 - 由(5.7), 我们由

$$\not{D}_A = \not{D}_{A_0+2B} = \sqrt{2} \left(\bar{\partial}_B + \bar{\partial}_B^* \right).$$

- $F_A = F_{A_0} + 2F_B$, 这里 F_B 是视为平凡丛 $L_0 = \mathbb{C}$ 上的曲率, 实际上就是 $dB \in \Omega^2(X; \sqrt{-1}\mathbb{R})$.

从而我们也有 $F_A^+ = F_{A_0}^+ + 2F_B^+$. 因此曲率方程可以简化为

$$2F_B^+ = \sigma(\Phi) - \sqrt{-1}\rho^2\omega.$$

- 利用 $S^+ \cong \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$, , 我们设 $\Phi = (f, \beta) \in \Gamma(S^+)$, 其中 $f \in \Omega^{0,0}$ 即光滑函数, $\beta \in \Omega^{0,2}$. 此时 Dirac 方程可以改写为

$$\bar{\partial}_B f + \bar{\partial}_B^* \beta = 0.$$

- 利用 $\Lambda^+ \cong \mathbb{R} \cdot \omega \oplus \Lambda^{0,2}$, 以及(5.9), 我们有

$$\sigma(f, \beta)^\omega = \sqrt{-1}(|f|^2 - |\beta|^2)\omega,$$

这里上标表示对应的 ω 分量, 以及类似的对应的 $(0,2)$ 分量, 也即

$$\sigma(f, \beta)^{0,2} = 2\bar{f}\beta.$$

因此曲率方程可以根据这个分解进一步改写为

$$\begin{cases} (F_B^+)^{0,2} = \bar{f}\beta \\ (F_B^+)^{\omega} = \sqrt{-1}(|f|^2 - |\beta|^2 - \rho^2)\omega, \end{cases}$$

由命题5.63, 我们有 $\Lambda^- \otimes \mathbb{C} \subset \Lambda^{1,1}$, 因此 $(F_B^-)^{0,2} = 0$, 进而可知 $F_B^{0,2} = (F_B^+)^{0,2} = \bar{f}\beta$, 以及 $(F_B^+)^{\omega} = \sqrt{-1}(|f|^2 - |\beta|^2 - \rho^2)\omega$ 等价于

$$\sqrt{-1}g(F_B, \omega) = |\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2.$$

综上, 我们将扰动 SW 方程(5.10)成功改写为

$$\begin{cases} \bar{\partial}_B f + \bar{\partial}_B^* \beta = 0 \\ F_B^{0,2} = \bar{f}\beta \\ \sqrt{-1}g(F_B, \omega) = |\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2. \end{cases} \quad (5.11)$$

从(5.11)可以立刻看到取 $B = 0$, 则 $F_B = 0$, 进而有 $f = \rho$, $\beta = 0$ 是一个解. 我们下面的目标就是去证明在规范变换下, 解 $(B, f, \beta) = (0, \rho, 0)$ 是唯一的.

注意到 $\sqrt{-1}g(F_B, \omega)$ 这一项比较眼熟, 这让我们回忆起来如下的 Weitzenbock 公式 (参考命题5.61),

$$2\bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B f = d_B^* d_B f - \sqrt{-1}g(F_B, \omega)$$

因此我们插入方程(5.11)的第3项 $\sqrt{-1}g(F_B, \omega) = |\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2$, 即可得到

$$d_B^* d_B f = 2\bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B f + (|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) \cdot f.$$

上式与 f 取内积, 并在 X 上积分可得 (节约记号省略体积元 $d\text{Vol}_g$),

$$\int_X |d_B f|^2 = 2 \int_X |\bar{\partial}_B f|^2 + \int_X (|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) |f|^2.$$

再次插入方程(5.11)的第 1 项 $\bar{\partial}_B f + \bar{\partial}_B^* \beta = 0$, 我们有

$$\int_X |\mathrm{d}_B f|^2 = -2 \int_X g(\beta, \bar{\partial}_B \bar{\partial}_B f) + \int_X (|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) |f|^2. \quad (5.12)$$

注意到(5.12)中的 $\bar{\partial}_B \bar{\partial}_B f$ 这一项又比较眼熟, 因此回忆(5.5), 我们有 $\bar{\partial}_B \bar{\partial}_B f = F_B^{0,2} \cdot f - (\partial_B f) \circ \mathcal{N}$, 这里 \mathcal{N} 是 Nijenhuis 张量, 因此结合方程(5.11)的第 2 项 $F_B^{0,2} = \bar{f}\beta$, 一并代入(5.12)中, 则有

$$\int_X |\mathrm{d}_B f|^2 = -2 \int_X g(\beta, |f|^2 \beta - (\partial_B f) \circ \mathcal{N}) + \int_X (|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) |f|^2. \quad (5.13)$$

将(5.13)进一步化简为

$$\int_X |\mathrm{d}_B f|^2 = 2 \int_X g(\beta, (\partial_B f) \circ \mathcal{N}) + \int_X (-|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) |f|^2. \quad (5.14)$$

现在回过头来, 对(5.11)第 1 项 $\sqrt{-1}g(F_B, \omega) = |\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2$ 在整个 X 上积分, 注意到

$$\int_X g(F_B, \omega) \mathrm{dvol}_g = \int_X F_B \wedge *_g \omega = \int_X \mathrm{d}B \wedge \omega = - \int_X B \wedge \mathrm{d}\omega = 0,$$

其中用到了 ω 是自对偶的, F_B 是平凡丛上的联络因此 $F_B = \mathrm{d}B$, 以及 ω 是辛形式从而 $\mathrm{d}\omega = 0$. 因此我们有

$$\int_X |f|^2 - \rho^2 = \int_X |\beta|^2. \quad (5.15)$$

注意到

$$(-|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) |f|^2 = -|\beta|^2 |f|^2 - (|f|^2 - \rho^2)^2 - \rho^2 (|f|^2 - \rho^2),$$

从而利用 ρ 为常数, 积分后可以用(5.15)将上式最后一项 $\rho^2 (|f|^2 - \rho^2)$ 替换掉,

也即有

$$\int_X (-|\beta|^2 - |f|^2 + \rho^2) |f|^2 = \int_X -|\beta|^2 |f|^2 - (|f|^2 - \rho^2)^2 - \rho^2 |\beta|^2. \quad (5.16)$$

现在将(5.16)代入(5.14)并且移项，单独裸露出含有难处理的 Nijenhuis 张量，则有

$$\int_X \left(|\mathrm{d}_B f|^2 + |\beta|^2 |f|^2 + (|f|^2 - \rho^2)^2 + \rho^2 |\beta|^2 \right) = 2 \int_X g(\beta, (\partial_B f) \circ \mathcal{N}). \quad (5.17)$$

注意到我们有

$$g(\beta, (\partial_B f) \circ \mathcal{N}) \leq C \cdot |\beta| \cdot |\partial_B f| \leq C \cdot |\beta| \cdot |\mathrm{d}_B f|$$

其中常数 $C = C(X, \mathcal{N})$ 只依赖于 X 与其上的近复结构 J ，与我们要求解的 (B, f, β) 无关，因此我们进一步有

$$g(\beta, (\partial_B f) \circ \mathcal{N}) \leq C \cdot |\beta| \cdot |\mathrm{d}_B f| \leq \frac{1}{4} |\mathrm{d}_B f|^2 + C^2 |\beta|^2, \quad (5.18)$$

结合(5.17)与(5.18)我们有不等式

$$\|\mathrm{d}_B f\|^2 + \|f \cdot \beta\|^2 + \||f|^2 - \rho^2\|^2 + \rho^2 \|\beta\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\mathrm{d}_B f\|^2 + 2C^2 \|\beta\|^2,$$

也即有

$$0 \leq \frac{1}{2} \|\mathrm{d}_B f\|^2 + \|f \cdot \beta\|^2 + \||f|^2 - \rho^2\|^2 \leq (2C^2 - \rho^2) \|\beta\|^2, \quad (5.19)$$

因此当 ρ 充分大时，如当 $\rho^2 > 2C^2$ ，则我们有

$$\mathrm{d}_B f = 0, \quad |f|^2 = \rho^2, \quad \beta = 0. \quad (5.20)$$

则有 $|f| = \rho$ ，因此在规范变换等价下，我们有 f 恒为常数 ρ ，由 B 上平凡丛上的联络，因此 $\mathrm{d}_B f = \mathrm{d}f + Bf = Bf$ ，由 $\rho \neq 0$ 进而 $f \neq 0$ ，可知 $B = 0$ 。

综合上述论证可知，在规范变换下 $(B, f, \beta) = (0, \rho, 0)$ 确实为方程(5.11)进而方程(5.10)的唯一解，因此我们证明了定理5.56，也即对于辛四维流形 (X, ω) ，若 $b_2^+(X) > 1$ ，则对于 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_J ，我们有

$$\text{SW}_X(c_1(X, \omega)) = \text{SW}_X(\mathfrak{s}_J) = \pm 1.$$

注 5.65 容易看到上述核心的论述，也即不等式估计说明解的唯一性并没有依赖 $b_2^+ > 1$ 这个条件，因此当 $b_2^+ = 1$ 时，我们有对 r 充分大，

$$\text{SW}_X\left(\mathfrak{s}_J, \left(g\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega\right)\right) = \pm 1.$$

第六节 本章小结

本章我们循序渐进，给出了一份关于光滑四维流形 Seiberg-Witten 不变量的实用性介绍.

- 第一节主要是铺垫我们引入 Seiberg-Witten 理论必要的 Spin 几何基础，主要介绍了 Clifford 模以及 Dirac 算子相关的定义与性质.
- 第二节主要是介绍四维流形上的 Spin^c 结构，一方面为第一节抽象定义的 Clifford 模与 Dirac 算子提供了具体的例子，另一方面也为我们后面介绍 SW 方程搭建舞台.
- 第三节我们正式引入四维流形上 SW 方程的定义，并介绍其解在规范变换等价意义下构成的模空间的基本性质.
- 第四节我们利用第三节定义的 SW 模空间去定义四维流形上的 SW 不变量，某种意义上对应于 SW 方程解的数量，并结合 Lichnerowicz 公式给出了定理5.53的证明，也即 SW 不变量可以提供正数量曲率度量存在的障碍.
- 第五节我们在辛四维流形上给出了一套具体的 SW 不变量计算实例，并在这个具体的例子上将本章前四节的定义显式的写下来，最后证明了定理5.56，也即 $b_2^+ > 1$ 的辛四维流形上 SW 不变量不恒为 0，并结合第四节给出的正数量曲率度量存在的障碍，完整证明了推论5.57.

第六章 SW 不变量与伪全纯曲线

本章我们将给出定理A一侧的证明，也即

定理 6.1 设 (X, ω) 为闭辛四维流形，若其允许正数量曲率度量，则 X 要么是 $\mathbb{C}P^2$ ，要么是爆破直纹面。

事实上，定理A的另一侧证明是容易的，熟知 $\mathbb{C}P^2$ 与 $\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上的 Fubini-Study 度量即为一个正数量曲率度量。现在若 X 为直纹面，则有纤维化 $S^2 \rightarrow X \rightarrow \Sigma$ ，则不难缩小 S^2 上的度量使得 S^2 上的曲率充分大，从而可以得到正数量曲率度量。更进一步对于爆破直纹面，拓扑上其为直纹面与若干 $\overline{\mathbb{C}P^2}$ 的连通和，在 [19] 中，Gromov 和 Lawson 证明了对于 3 维以上流形，两个带有正数量曲率度量的流形连通和仍然具有正数量曲率度量，因此可知爆破直纹面上也有正数量曲率度量。

因此结合上述论述与定理6.1，我们可以得到定理A的证明。

回忆我们在上一章已经证明了 (推论5.57)，若闭辛四维流形 X 允许正数量曲率度量，则 $b_2^+(X) = 1$ ，本章从此出发开始讨论，也即如果不额外说明，我们总假设 $b_2^+(X) = 1$ 。

现在由定理B可知，为证明定理6.1，我们只需证明 (X, ω) 包含一个自相交数非负的辛嵌入球面。又由引理2.6可知，只需找到一个自相交数非负的 J -全纯嵌入球面即可，这里 J 为 ω -控制的。

我们寻找这样的 J -全纯球面的出发点是 Taubes 证明的如下“SW \Rightarrow GW”定理：

定理 6.2 ([3]) 设 (X, ω) 为闭辛四维流形， g_ω 为 ω 相容的黎曼度量， J 是 ω -控制的近复结构， \mathfrak{s}_J 为其上的 Spin^c 结构，且 $L_{\mathfrak{s}_J} = K_X^{-1}$ ， A_0 为 K_X^{-1} 上的典范联络，则对 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ ，

1. 若 $b_2^+(X) > 1$ ，且 $\text{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ ，则 $\text{PD}.c$ 可以被表示为嵌入的 J -全纯曲线。

2. 若 $b_2^+(X) = 1$, 且对充分大的 r 都有

$$\mathrm{SW}_X \left(\mathfrak{s}_J + c, \left(g\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega \right) \right) \neq 0, \quad (6.1)$$

则 $\mathrm{PD}.c$ 可以被表示为 J -全纯曲线, 特别的, 若 (X, ω) 极小, 则可以被表示为嵌入的 J -全纯曲线.

由定理6.2, 假设我们找到了满足(6.1)的上同调类 c , 我们怎么进一步说明其可以被球面表示呢? 事实上, 如果我们进一步约束

$$c_1(K_X^{-1}) \cdot c > c^2, \quad (\mathrm{A})$$

那么设 $\mathrm{PD}.c = u_*[\Sigma]$, 这里 $u: \Sigma \rightarrow X$ 是 J -全纯的, Σ 未必连通, 则由联结不等式2.62可知

$$[u] \cdot [u] + \chi(\Sigma) \geq c_1([u]),$$

由 $[u] \cdot [u] = c^2$, $c_1([u]) = \langle c_1(TX), [u] \rangle = c_1(K_X^{-1}) \cdot c$, 因此我们有

$$\chi(\Sigma) > 0,$$

因此可知 Σ 一定有一个分量可被球面表示.

注 6.3 我们这里澄清一些记号:

- 回忆 $c_1(K_X^{-1}) = c_1(TX, J) = c_1(X, \omega) = c_1(\mathfrak{s}_J)$, 我们会在行文中使用其中最直接的记号.
- 如在(A)中所见, 为了行文方便, 对于上同调类元素 A, B , 我们用 $H^2(X; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_{\mathrm{dR}}^2(X)$ 来定义

$$A \cdot B := \int_X A \wedge B.$$

现在我们关心能不能把

$$\mathrm{SW}_X \left(\mathfrak{s}_J + c, \left(g\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega \right) \right) \neq 0$$

这个条件也翻译成关于上同调类的不等式，首先注意到(6.1)成立的一个必要的条件是 $\mathfrak{s}_J + c$ 对应的模空间维数 $d(X, \mathfrak{s}_J + c) \geq 0$ ，也即

$$\frac{1}{4} (c_1(\mathfrak{s}_J + c)^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)) \geq 0, \quad (6.2)$$

但由上一章的讨论可知 $c_1(\mathfrak{s}_J)^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X)$ ，结合 $c_1(\mathfrak{s}_J + c) = c_1(\mathfrak{s}_J) + 2c$ ，我们可知(6.2)等价于

$$(c_1(K_X^{-1}) + 2c)^2 \geq c_1(K_X^{-1})^2. \quad (B)$$

那么现在在(B)的基础上，我们怎么保证 SW 不变量(6.2)不为 0 呢？首先对正数量曲率度量 g_0 ，我们由注5.54可以知道，若扰动项 δ 充分小且满足一般性条件，则对任意 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}_J + c$ (回忆 $\mathfrak{s}_J + c$ 给出了全体 Spin^c 结构)，有

$$\text{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_0, \delta)) = 0. \quad (6.3)$$

而另一方面，我们知道当考虑一族参数 $\{g_t, \delta_t\}$ 若其穿过墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_J + c}$ ，则 SW 不变量会产生改变，因此或许有机会可以通过构造合适的一族参数来使得穿墙过后 SW 不变量改变非零值，最后即得到 $\text{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega)) \neq 0!$

因此我们在本章第一节中先仔细讨论一下关于穿墙前后 SW 不变量的改变.

第一节 穿墙公式

我们先回忆一下穿墙有关的结果，我们知道对一族参数 $\{g_t, \delta_t\}$ ，由 $b_2^+ = 1$ ，可设 $\omega_t \in \mathcal{H}_+^2(X; g_t)$ 为自对偶调和 2 形式生成元，且满足 $\int_X \omega \wedge \omega_t > 0$ ，则有参数 (g_s, δ_s) 落在墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_J + c}$ 上当且仅当

$$\int_X \left(c_1(\mathfrak{s}_J + c) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) \wedge \omega_t = 0.$$

设对 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}_J + c$ ，我们记一族参数穿墙前后 SW 不变量改变 $\pm w(\mathfrak{s}_J + c)$ ，我们有如下计算该改变量的结果 (称为穿墙公式).

- 若 $b_1(X) = 0$ ，则由定理5.52可知对任意 $c \in H^2(X)$ 均有 $w(\mathfrak{s}_J + c) = \pm 1$.

- 若 $b_1(X) > 0$, Li-Liu^[16], Ohta-Ono^[17] 证明了存在 $\alpha \in H^2(X)$, 使得对任意 $c \in H^2(X)$, $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ 当且仅当 $c_1(\mathfrak{s}_J + c) \cdot \alpha \neq 0$.

现在假设 (X, ω) 为一个带有正数量曲率度量 g_0 的闭辛四维流形, 那么由(6.3)以及注5.65,

$$SW_X(\mathfrak{s}_J, (g_0, \delta)) = 0, \quad SW_X\left(\mathfrak{s}_J, \left(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega\right)\right) = \pm 1,$$

可知 $w(\mathfrak{s}_J) \neq 0$, 并且实际上假设有一族参数从 (g_0, δ) 到 $(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega)$ 穿墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_J}$, 那么存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\pm 1 = SW_X\left(\mathfrak{s}_J, \left(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega\right)\right) - SW_X(\mathfrak{s}_J, (g_0, \delta)) = k \cdot w(\mathfrak{s}_J),$$

因此 $w(\mathfrak{s}_J) = \pm 1$. 故当 $b_1(X) > 0$ 时, 我们有 $c_1(\mathfrak{s}_J) \cdot \alpha \neq 0$.

现在我们希望找到 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ 使得 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$, 由穿墙公式这等价于 $(c_1(\mathfrak{s}_J) + 2c) \cdot \alpha \neq 0$. 因此注意到

$$2((c_1(\mathfrak{s}_J) + 2c) \cdot \alpha) = c_1(\mathfrak{s}_J) \cdot \alpha + (c_1(\mathfrak{s}_J) + 4c) \cdot \alpha,$$

因此我们由 $c_1(\mathfrak{s}_J) \cdot \alpha \neq 0$ 可知 $(c_1(\mathfrak{s}_J) + 2c) \cdot \alpha$ 与 $(c_1(\mathfrak{s}_J) + 4c) \cdot \alpha$ 不会同时为 0, 总结一下我们便得到了,

命题 6.4 记号如定理6.2, 则当 $b_1(X) > 0$ 且 $b_2^+(X) = 1$ 时, 对任意 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$, 我们有 $w(\mathfrak{s}_J + c)$ 与 $w(\mathfrak{s}_J + 2c)$ 至少有一个不为 0.

回过头来, 我们考虑穿墙 SW 改变量 w 的目的是希望能找到 c 满足(6.1), 现在假如我们有 c 满足 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$, 以及

$$\int_X c_1(\mathfrak{s}_J + c) \wedge \omega_0 > 0, \tag{6.4}$$

这里 $\omega_0 \in \mathcal{H}_+^2(X; g_0)$ 为自对偶调和 2 形式生成元, 那么我们现在考虑一族参数空间的曲线 $\Gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$, 使得 $\Gamma(0) = (g_0, \delta)$, 且存在 r_0 使得任意 $r > r_0$ 有 $\Gamma(r) = (g_\omega, \delta(r))$, 这里 $\delta(r) = F_{A_0}^+ - i \cdot r\omega$.

注意到 ω 为 X 上的辛形式, 故 $\int_X \omega \wedge \omega > 0$, 因此存在 r_1 充分大使得任意 $r > r_1$, 我们有

$$\int_X \left(c_1(\mathfrak{s}_J + c) + \frac{1}{2\pi i} \delta(r) \right) \wedge \omega < 0. \quad (6.5)$$

因此假如初始 δ 选取的进一步小, 使得不改变(6.4)的符号, 也即

$$\int_X \left(c_1(\mathfrak{s}_J + c) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) \wedge \omega_0 > 0. \quad (6.6)$$

那么现在由(6.5)与(6.6)两者符号相反, 因此由介值定理, 在曲线 Γ 上一定会有奇数个点使得对应的积分值为 0, 进而可知有奇数个点落在墙 $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_J+c}$ 上. 故可设穿墙 $2k+1$ 次, 且有 l 次穿墙在 Γ 上 SW 不变量改变 $w(\mathfrak{s}_J+c)$, 有 $2k+1-l$ 次穿墙在 Γ 上 SW 不变量改变 $-w(\mathfrak{s}_J+c)$, 结合 $r > \max\{r_0, r_1\}$ 后由积分值恒负可知不在穿墙, 那么对这样的 r 我们有

$$\begin{aligned} & \text{SW}_X \left(\mathfrak{s}_J + c, \left(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega \right) \right) - \text{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_0, \delta)) \\ &= (l - 2k - 1 + l) \cdot w(\mathfrak{s}_J + c) \\ &= (2(k-l) + 1) \cdot w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0, \end{aligned}$$

其中最后利用了 $2(k-l) + 1 \neq 0$ 以及 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$.

那么现在由注5.54, $\text{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_0, \delta)) = 0$, 因此我们可知对满足(6.4)的上同调类 c , 我们有对 r 充分大,

$$\text{SW}_X \left(\mathfrak{s}_J + c, \left(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega \right) \right) \neq 0,$$

即满足了定理6.2中的条件!

注意到(6.4)可改写为

$$(c_1(K_X^{-1}) + 2c) \cdot \omega_0 > 0, \quad (\text{C})$$

因此我们知道了只要找到 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ 同时满足

- (A) $c_1(K_X^{-1}) \cdot c > c^2$,
 (B) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c)^2 \geq c_1(K_X^{-1})^2$,
 (C) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c) \cdot \omega_0 > 0$,

以及 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$, 那么由定理6.2以及之前的分析即可知道 $\text{PD}.c$ 可以被表示为一个 J -全纯曲线 $u: \Sigma \rightarrow X$, 并且 Σ 有一个分支 $u_0 = u|_{\Sigma_0}: \Sigma_0 \rightarrow X$ 为 J -全纯球面. 并且若 (X, ω) 极小, 则 u_0 可以做到为嵌入的 J -全纯球面, 并且此时由 J -全纯球面的存在性, 结合伪全纯曲线存在的障碍 (推论2.42), 我们知道

$$-2 + 2c_1([u_0]) \geq 0,$$

也即 $c_1([u_0]) \geq 1$, 从而由联结公式2.64, 我们有

$$[u_0] \cdot [u_0] = c_1([u_0]) - \chi(S^2) \geq -1.$$

因此在假设极小的条件下, 也即不存在自相交数为 -1 的 J -全纯球面, 因此 $[u_0] \cdot [u_0] \geq 0$, 也即我们真的找到了一个自相交数非负的辛嵌入球面 $u_0: \Sigma_0 \rightarrow X$!

综合以上讨论, 我们实际上证明了:

命题 6.5 设 (X, ω) 为极小的闭辛四维流形, 且带有正数量曲率度量 g_0 , 则若存在 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ 使得其满足(A), (B), (C)和 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$, 那么 (X, ω) 中就会包含一个自相交数非负的辛嵌入球面, 进而 X 为 $\mathbb{C}P^2$ 或者是直纹面.

因此为了证明定理6.1以及进而定理A, 我们借助命题6.5将问题转化成了一个寻找上同调类这一纯粹代数拓扑的问题! 我们将会在本章第二节通过分类讨论找出这个上同调类 c , 进而完成定理A在极小情形下的证明.

至于一般情形, 从定理6.2我们并不一定能直接找到自相交数非负的球面 (因为很可能用上述方法找到例外球面), 也并不一定能做到嵌入, 因此我们会在本章第四节中先证明 McDuff 通过浸入球面找到嵌入球面的定理6.18, 并最终在第五节中给出一般情形定理A的证明.

在结束本节之前, 我们再证明一个将会用到的不等式:

定理 6.6 设 ω_0 为正数量曲率度量 g_0 的自对偶 2 形式, 且满足 $\int_X \omega_0 \wedge \omega > 0$, 则

$$\int_X c_1(K_X^{-1}) \wedge \omega_0 > 0.$$

证明. 我们已经知道对 Spin^c 结构 \mathfrak{s}_J , 当 r 充分大时 (g_0, δ) 和 $(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega)$ 不在同一个室内, 因此可知

$$\int_X c_1(K_X^{-1}) \wedge \omega_0, \quad \int_X \left(c_1(\mathfrak{s}_J + c) + \frac{1}{2\pi i} (F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega) \right) \wedge \omega < 0$$

两者积分符号相反, 即证. □

第二节 定理A的证明 (极小情形)

本节我们证明定理A在假设 (X, ω) 极小下的情形, 由第一节中的命题6.5可知, 只需找到 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ 使得其满足(A), (B)和(C)以及 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ 即可.

为此我们需要先铺垫一些基本的引理,

引理 6.7 (光锥引理) 设 $Q(\cdot, \cdot)$ 为 \mathbb{R}^n 上的数量积, 且存在标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 使得

$$Q(e_1, e_1) = 1, \quad Q(e_j, e_j) = -1 \quad \forall 2 \leq j \leq n,$$

也即 Q 是 $(1, n-1)$ 型的二次型. 我们记

$$\mathcal{L} := \{v \in \mathbb{R}^n - \{0\} \mid Q(v, v) \geq 0\}$$

为 Q 的光锥 (*light cone*), 其有两个连通分支, 且 $v, w \in \mathcal{L}$ 在同一连通分支中当且仅当 $Q(v, w) \geq 0$, 并且 $Q(v, w) = 0$ 当且仅当 $v, w \in \mathcal{L}$ 即 $Q(v, v) = Q(w, w) = 0$ 以及 v 和 w 线性相关.

证明. 设 $v = (v_+, v_-) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, 则 $Q(v, v) = v_+^2 - |v_-|^2$, 因此可知 $v \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $|v_+| \geq |v_-|$, 故不难看到 \mathcal{L} 有两个连通分支, 取决于 v_+ 的正负.

进一步若 $w = (w_+, w_-) \in \mathcal{P}$, 且 v, w 在同一连通分支, 即 $v_+ w_+ > 0$, 则由

Cauchy 不等式,

$$Q(v, w) = v_+ \cdot w_+ - \langle v_-, w_- \rangle \geq v_+ \cdot w_+ - |v_-| \cdot |w_-| \geq v_+ \cdot w_+ - |v_+| \cdot |w_+| = 0,$$

并且取等号当且仅当 $|v_+| = |v_-|$, $|w_+| = |w_-|$, 且 v, w 共线, 即证.

□

注 6.8 我们将会 $H^2(X; \mathbb{R})$ 上对相交形式 Q_X 以及注 6.3 中提到的二次型使用上述光锥引理, 事实上容易看到由辛形式满足 $\int_X \omega \wedge \omega > 0$, 可知辛形式总是落在光锥里的.

引理 6.9 设 X 为闭辛流形, 且带有正数量曲率度量, 则

1. 若 $2\chi(X) + 3\sigma(X) > 0$, 则 $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$.
2. 若 $2\chi(X) + 3\sigma(X) = 0$, 则 $b_1(X) = 0$ 或 $b_1(X) = 2$, 更进一步若 $b_1(X) = 2$, 则有 $b_2^-(X) = 1$.

证明. 注意到

$$2\chi(X) + 3\sigma(X) = 4 + 5b_2^+(X) - b_2^-(X) - 4b_1(X),$$

注意到此时 $b_2^+ = 1$, 则有上式为 $9 - b_2^-(X) - 4b_1(X)$, 且辛流形总有 $b_1(X) + b_2^+(X)$ 为奇数 (辛流形为近复流形, 近复流形总满足这个条件),

1. 若 $9 - b_2^-(X) - 4b_1(X) > 0$, 则 $b_1(X) = 0$ 或 2 ,
 - 若 $b_1(X) = 2$, 则 $b_2^-(X) = 0$, 则 $\sigma(X) = 1$, 由 $H_1(X) \neq 0$, 从而存在某个有限叶覆叠, 覆叠重数为 $d \geq 2$, \tilde{X} , 则 \tilde{X} 也是一个辛流形带有正数量曲率度量, 因此 $b_2^+(\tilde{X}) = 1$, 但 $\sigma(\tilde{X}) = d \geq 2$, 因此矛盾!
 - 若 $b_1(X) = 0$, 则反证 $H_1(X; \mathbb{Z})$ 包含非平凡挠群, 则其基本群含有非平凡挠元素, 依然考虑其对应的覆叠从号差亦可得到矛盾.

2. 这是直接的计算.

□

现在我们开始分类讨论构造满足(A), (B)和(C)的上同调类 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$.

6.2.1 情形 1: $2\chi(X) + 3\sigma(X) > 0$

由引理6.9可以知道此时 $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$, 并且 $b_2^- < 9$, 则我们由相交形式的算术分类^[1], 可以得到

- 若 Q_X 奇, 则其同构于 $(1) \oplus b_2^-(-1)$.
- 若 Q_X 偶, 则其同构于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 特别的 $b_2^- = 1$.

注 6.10 回忆我们称整系数二次型为偶, 如果任意 $v \in \mathbb{Z}^n$, $Q(v, v)$ 为偶数, 反之则称之为奇.

注意到此时由 $b_1 = 0$, 因此对任意 c , $w(\mathfrak{s}_J + c) = \pm 1 \neq 0$.

情形 1.1: Q_X 为奇

设 $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{l+1}$, 这里 $l = b_2^-$, 无挠是因为 $H_1 = 0$, 从而设坐标为 (x, y_1, \dots, y_l) .

设 $c_1(K_X^{-1}) = (a, b_1, \dots, b_l)$, 由 $c_1(K_X^{-1})$ 为特征元素 (回忆定理5.27), 因此 a, b_i 均为奇数, 并且由 $c_1(K_X^{-1})^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X)$, 我们有 $a^2 - \sum_{j=1}^l b_j^2 = 9 - l$, 从而可知 $|a| \geq 3$.

由 ω_0 为自对偶二形式, 从而落在在 Q_X 的光锥 \mathcal{L} 里, 进而不妨设其落在 $\{x > 0\}$ 的连通分支里, 此时由定理6.6可知 $c_1(K_X^{-1}) \cdot \omega_0 \geq 0$, 以及 $c_1(K_X^{-1})^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X) > 0$, 因此 $c_1(K_X^{-1})$ 和 ω_0 落在光锥 \mathcal{L} 的同一个连通分支 $\{x > 0\}$ 中, 因此 $a > 0$ 进而 $a \geq 3$.

现在取 $c = (1, 0, \dots, 0)$, 则我们逐个验证

- (A) $c_1(K_X^{-1}) \cdot c - c^2 = a - 1 \geq 2 > 0$, 符合.
- (B) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c)^2 - c_1(K_X^{-1})^2 = (a+2)^2 - a^2 = 4a+4 > 0$, 符合.
- (C) 由定理6.6即 $c_1(K_X^{-1}) \cdot \omega_0 > 0$, 可知 ω_0 和 $c_1(K_X^{-1})$ 进而和 c 落在 \mathcal{L} 的同一连通分支中, 从而自动也有 $(c_1(K_X^{-1}) + 2c) \cdot \omega_0 > 0$, 符合.

故由命题6.5可知 X 为 $\mathbb{C}P^2$ 或为直纹面, 此时由 $H_1(X) = 0$ 可知为 $\mathbb{C}P^2$ 或是 $S^2 \times S^2$, 进一步由相交形式奇可知只能为 $\mathbb{C}P^2$.

情形 1.2: Q_X 为偶

此时我们知道 Q_X 同构于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $c_1(K_X^{-1})^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X) = 8$, 设 $c_1(K_X^{-1}) = (a, b)$, 则有 $2ab = 8$ 即 $ab = 4$, 由 $c_1(K_X^{-1})$ 为特征元素, 也即任意 (x, y) , 我们有 $bx + ay \equiv 2xy \pmod{2}$, 因此 a, b 同奇偶, 不妨设为 $(2, 2)$.

现在取 $c = (1, 0)$, 则我们逐个验证

- (A) $c_1(K_X^{-1}) \cdot c - c^2 = 2 > 0$, 符合.
- (B) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c)^2 - c_1(K_X^{-1})^2 = 12 - 8 = 4 > 0$, 符合.
- (C) 由 $c_1(K_X^{-1}) + 2c = (3, 2)$ 与 $c_1(K_X^{-1})$ 乘积为 $10 > 0$, 因此可知其和 $c_1(K_X^{-1})$ 以及 ω_0 落在光锥 \mathcal{L} 的同一个连通分支里, 从而自动也有 $(c_1(K_X^{-1}) + 2c) \cdot \omega_0 > 0$, 符合.

故由命题 6.5 可知 X 为 $\mathbb{C}P^2$ 或为直纹面, 此时由 $H_1(X) = 0$ 可知为 $\mathbb{C}P^2$ 或是 $S^2 \times S^2$, 进一步由相交形式偶可知只能为 $S^2 \times S^2$.

6.2.2 情形 2: $2\chi(X) + 3\sigma(X) = 0$.

由引理 6.9 可以知道, 我们知道此时 $b_1 = 0$ 或 2. 下面我们说明 b_1 不可能为 0. 反证法, 假如 $b_1 = 0$, 则

- 若 Q_X 为奇, 则可知与情形 1 的讨论类似, 最后可得到 X 为 $\mathbb{C}P^2$, 矛盾.
- 若 Q_X 为偶, 结合 $b_2 = 10$, $b_2^+ = 1$, $b_2^- = 9$, 由算术分类结果我们有 Q_X 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 E_8 的直和, 特别的, $\sigma(X) = -8$. 因此由 Rochlin 定理可知若光滑流形 X Spin, 则 $16|\sigma(X)|$, 因此可知 X 不是 Spin, 结合相交形式为偶可知这表明 $H_1(X; \mathbb{Z})$ 包含一个非平凡的 2-挠元.

进而选取对应的非平凡二叶覆叠 \tilde{X} , 则我们有其也具有辛结构与正数量曲率度量, 并且由覆叠条件可知 $2\chi(\tilde{X}) + 3\sigma(\tilde{X}) = 2 \cdot (2\chi(X) + 3\sigma(X)) = 0$, 因此可知 $b_1(\tilde{X}) = 0$ 或 2.

- 若 $b_1(\tilde{X}) = 0$, 则其号差为 -8 , 这与为 $2\sigma(X) = -16$ 矛盾.
- 若 $b_1(\tilde{X}) = 2$, 则 $b_2^- = b_2^+ = 1$, 因此 $\sigma(\tilde{X}) = 0$, 这也与为 $2\sigma(X) = -16$ 矛盾.

因此我们可知 $b_1(X) \neq 0$, 下面我们就假设 $b_1 = 2$. 此时 $b_2^\pm(X) = 1$. 并且 Q_X 要么为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 要么为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 并且由定理6.6可知 $c_1(K_X^{-1})$ 不会落在 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 的挠部里 (否则对应积分会为 0).

情形 2.1: Q_X 为奇

此时 Q_X 为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $c_1(K_X^{-1})^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X) = 0$, 因此结合其为特征元素可设为 $c_1(K_X^{-1}) = (a, a)$, 且 a 为奇数, 不妨假设 $a > 0$.

现在考虑 $c = (1, -1)$, 则我们逐个验证

- (A) $c_1(K_X^{-1}) \cdot c - c^2 = 2a > 0$, 符合.
- (B) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c)^2 - c_1(K_X^{-1})^2 = (a+2)^2 - (a-2)^2 = 8a > 0$, 符合.
- (C) 由 $c_1(K_X^{-1}) + 2c = (a+2, a-2)$, 与 $c_1(K_X^{-1})$ 乘积为 $(a+2)a - a(a-2) = 4a > 0$, 因此可知其也和 $c_1(K_X^{-1})$ 与 ω_0 落在 \mathcal{L} 的同一个连通分支里, 从而自动也有 $(c_1(K_X^{-1}) + 2c) \cdot \omega_0 > 0$, 符合.

显然上面三条对 $2c = (2, -2)$ 也成立, 因此此时由命题6.4, 穿墙改变量 $w(\mathfrak{s}_J + c)$ 与 $w(\mathfrak{s}_J + 2c)$ 至少有一个非零, 进而对那个非零的, 我们可以再次使用命题6.5, 不难进一步知道 X 是 T^2 上的扭转 S^2 丛 $T^2 \tilde{\times} S^2$.

情形 2.2: Q_X 为偶

此时 Q_X 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $c_1(K_X^{-1})^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X) = 0$, 因此结合其为特征元素可设为 $c_1(K_X^{-1}) = (a, 0)$, 且 a 为偶数, 不妨假设 $a > 0$.

现在考虑 $c = (0, 1)$, 则类似的验证可表明 c 或 $2c$ 满足命题6.5的条件, 并且不难进一步知道 X 此时是 $T^2 \times S^2$.

6.2.3 情形 3: $2\chi(X) + 3\sigma(X) < 0$

此时 $c_1(K_X^{-1})^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X) < 0$, 设 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 的自由部分 \mathbb{Z}^{n+1} , 这里 $n = b_2^-(X)$, 由 $\int_X c_1(K_X^{-1}) \cdot \omega_0 > 0$, 可知 $c_1(K_X^{-1})$ 不为挠元, 故可设其为

$(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, 则有 $c_1(K_X^{-1})^2 = x^2 - y_1^2 - \dots - y_n^2 < 0$, 也即

$$-\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} < x < \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

这里利用相交形式在 \mathbb{R} 上可对角化为, 进而存在

$$\gamma = \left(1, -\frac{y_1}{\sqrt{|y|^2}}, \dots, -\frac{y_n}{\sqrt{|y|^2}} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

使得

$$c_1(K_X^{-1}) \cdot \gamma = x + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} > 0,$$

并且 $\gamma \cdot \gamma = 0$, 由 Hasse-Minkowski 关于非正定么模整系数二次型的分类定理^[20], 可以知道 $\{v \in \mathbb{R}^{n+1} : v \cdot v = 0\}$ 中的有理点在这个集合中稠密, 因此可以找到有理点 \tilde{c} 使得 $\tilde{c} \cdot \tilde{c} = 0$ 且 $c_1(K_X^{-1}) \cdot \tilde{c} > 0$, 从而可以通过乘以一个整数找到整点 $c \in \mathbb{Z}^{n+1}$ 使得 $c \cdot c = 0$, 且 $c_1(K_X^{-1}) \cdot c > 0$, 并且 c 的首项坐标和 γ 的首项坐标 1 同号 > 0 , 因此 c 和 ω_0 落在光锥 \mathcal{L} 的同一个连通分支里, 也即 $c \cdot \omega_0 > 0$, 进而不难验证

(A) $c_1(K_X^{-1}) \cdot c - c^2 = c_1(K_X^{-1}) \cdot c > 0$, 符合.

(B) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c)^2 - c_1(K_X^{-1})^2 = 4c_1(K_X^{-1}) \cdot c > 0$, 符合.

(C) $(c_1(K_X^{-1}) + 2c) \cdot \omega_0 = c_1(K_X^{-1}) \cdot \omega_0 + 2c \cdot \omega_0 > 0$, 符合.

显然上面三条对 $2c$ 也成立, 因此此时由命题6.4, 穿墙改变量 $w(\mathfrak{s}_J + c)$ 与 $w(\mathfrak{s}_J + 2c)$ 至少有一个非零, 进而对那个非零的, 我们可以再次使用命题6.5, 不难进一步知道此时 X 是亏格为 $g \geq 2$ 的可定向闭曲面 Σ_g 上的 S^2 丛.

综上, 我们给出了定理A在极小情形下的证明!

注 6.11 容易看到, 本小节我们实际上证明了: 带有正数量曲率度量的极小辛四维流形, 若 $c_1(K_X^{-1})^2 < 0$, 则一定是亏格为 $g \geq 2$ 的可定向闭曲面 Σ_g 上的 S^2 丛. 事实上去掉正数量曲率度量的条件下仍然成立, 也即如下由 Li-Liu^[16] 证明的 Gompf 猜想:

定理 6.12 设 X 为极小辛四维流形, 且 $c_1(K_X^{-1})^2 < 0$, 则 X 为亏格为 $g \geq 2$ 的可

定向闭曲面 Σ_g 上的 S^2 丛.

证明的想法也基于我们上述构造的整上同调类 c , 反证法若 X 不包含辛嵌入球面, 那么可知对任意 $k \in \mathbb{Z}$, 有 $\mathfrak{s}_J + k \cdot c$ 对应的 SW 不变量为 0, 由 SW 不为 0 的 $Spin^c$ 结构只有有限个^[13], 因此可知对充分大的 k , $\mathfrak{s}_J + k \cdot c$ 对应的 SW 不变量在两个室内均为 0, 而由两者对应的

$$\int_X (c_1(K_X^{-1}) + k \cdot c) \wedge \omega > 0, \quad \int_X \left(c_1(\mathfrak{s}_J + k \cdot c) + \frac{1}{2\pi i} (F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega) \right) \wedge \omega < 0$$

积分符号相反, 可知穿墙改变量 $w(\mathfrak{s}_J + k \cdot c)$ 均为 0, 因此由穿墙公式可知对充分大的 k 恒有

$$c_1(\mathfrak{s}_J) \cdot \alpha + kc \cdot \alpha = 0, \quad (6.7)$$

$Li-Liu$ ^[16] 证明了 α 也满足 $\alpha \cdot \alpha = 0$ 且和 ω 在光锥 \mathcal{L} 的同一个连通分支中.

注意到(6.7)对充分大的 k 均成立, 因此 $c_1(\mathfrak{s}_J) \cdot \alpha = 0$ 且 $c \cdot \alpha = 0$, 而有光锥引理6.7可知 $\alpha = p \cdot c$, 这里 p 为非零实数, 因此 $0 = c_1(\mathfrak{s}_J) \cdot c = c_1(K_X^{-1}) \cdot c > 0$ 矛盾! 因此我们有定理6.12成立.

第三节 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 的辛四维流形

在进一步证明定理A的更一般情形前, 我们先利用前两节的证明想法, 快速给出如下一个类似定理的证明:

定理 F 设 X 为闭辛四维流形, 则其上允许辛结构 ω 满足

$$c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0,$$

当且仅当 (X, ω) 辛同构于 $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{FS})$ 或者是爆破辛直纹面.

注 6.13 事实上对满足 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 的辛四维流形 X , 我们定义其 **Kodaira 维数** 为 $\kappa(X) = -\infty$, 不难看到由 Kodaira 关于复曲面的分类结果^[21], 满足 Kodaira 维数 $\kappa(S) = -\infty$ 的 Kähler 曲面 S 确实也为 $\mathbb{C}P^2$ 或爆破直纹面, 因此定理F可以视为复曲面一部分的分类定理在辛流形中的推广.

由定理A和定理F，我们实际上有：

推论 6.14 设 X 闭辛四维流形，则以下三个条件等价

- X 上允许正数量曲率度量；
- X 上存在辛形式 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ ；
- (X, ω) 辛同构于 $(\mathbb{C}P^2, c \cdot \omega_{FS})$ 或者是爆破辛直纹面。

注意到定理F的一侧我们已经在命题3.11处给出了证明，我们下面开始给出另一侧分类定理的证明。首先注意到有如下基本引理，

引理 6.15 设 (Y, ω') 是闭辛四维流形 (X, ω) 通过一系列辛坍缩 (*blow-down*) 得到的极小辛四维流形，若 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ ，则也有 $c_1(Y, \omega') \cdot \omega' > 0$ 。

证明。 由命题3.10，对辛坍缩 $\pi: X \rightarrow Y$ ，我们有

$$\pi^* c_1(K_Y^{-1}) = c_1(K_X^{-1}) + \sum_{i=1}^k \text{PD} \cdot [E_i],$$

这里 E_1, \dots, E_k 是 X 中的一组例外球面，且沿着它们辛坍缩得到 Y ，且 $\omega' = \pi^* \omega$ 。因此结合 E_j 为辛子流形，有对任意 $1 \leq j \leq k$ ，

$$(\text{PD} \cdot [E_j]) \cdot \omega = \int_{E_j} \omega > 0,$$

我们有

$$c_1(Y) \cdot \omega' = \pi^* c_1(Y) \cdot \omega = \left(c_1(X) + \sum_{i=1}^k \text{PD} \cdot [E_i] \right) \cdot \omega > 0,$$

即为欲证。 □

因此我们只需要证明定理F的极小情形即可，现在我们假设 (X, ω) 为满足 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 的极小辛四维流形，回忆我们在正数量曲率度量条件下的证明思路，大致可划分如下两步：

1. 利用 SW 不变量得出 $b_2^+ = 1$ 。
2. 找到一个上同调类 c 使得
 - $\mathfrak{s}_J + c$ 在一个室内的 SW 不变量为 0，
 - 满足(A)，(B)，(C)和 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ 。

注意到满足(A), (B), (C)和 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ 的上同调类 c 我们可以直接选取上一节分类讨论构造的, 因此我们只需要进一步讨论开始的两个条件.

先证明 $b_2^+(X) = 1$, 若不然即 $b_2^+(X) > 1$, 此时对 $c = -c_1(X, \omega)$, 由定理5.56可知

$$\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c) = \mathrm{SW}_X(-c_1(X, \omega)) = \mathrm{SW}_X(-\mathfrak{s}_J) = \pm 1 \neq 0,$$

因此由定理6.2可知 $\mathrm{PD}(-c_1(X, \omega))$ 可以被表示为嵌入 J -全纯曲线 Σ , 且 J 是 ω -控制的, 进而我们有

$$-c_1(X, \omega) \cdot \omega = \int_{\Sigma} \omega > 0,$$

这与 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 矛盾!

注 6.16 这里我们不加证明的使用了 SW 不变量的对称性, 也即对 $a \in \mathrm{Char}(X)$, 注意到 $-a \in \mathrm{Char}(X)$, 我们有^[15] 对充分小的 δ 成立 $\mathrm{SW}_X(a, (g, \delta)) = \pm \mathrm{SW}_X(-a, (g, \delta))$, 证明是容易的, 但囿于篇幅我们略去.

因此现在对满足 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 的极小辛四维流形 (X, ω) , 我们有 $b_2^+(X) = 1$, 故可以选取 $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ 为我们在本章第二节分类讨论构造的满足(A), (B), (C)和 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ 的上同调类.

注意到在第二节的构造中, 我们实际上做到了 c 和 ω 落在光锥 \mathcal{L} 的同一连通分支中, 因此 $c \cdot \omega > 0$ (由光锥引理6.7可知不为 0), 故结合 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 可知

$$c_1(\mathfrak{s}_J + c) \cdot \omega = (c_1(X, \omega) + 2c) \cdot \omega > 0. \quad (6.8)$$

我们下面证明 $\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_\omega, \delta)) = 0$, 这里 g_ω 为与 ω 相容的黎曼度量, δ 充分小, 从而可知

$$\int_X \left(c_1(\mathfrak{s}_J + c) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) \wedge \omega > 0, \quad \int_X \left(c_1(-\mathfrak{s}_J - c) + \frac{1}{2\pi i} \delta \right) \wedge \omega < 0. \quad (6.9)$$

反证法, 若 $\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_\omega, \delta)) \neq 0$, 则由注6.16中提到的 SW 不变量的对

称性，我们有

$$\mathrm{SW}_X(-\mathfrak{s}_J - c, (g_\omega, \delta)) = \pm \mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_\omega, \delta)) \neq 0,$$

注意到

$$\int_X \left(c_1(-\mathfrak{s}_J - c) + \frac{1}{2\pi i} (F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega) \right) \wedge \omega < 0$$

对充分大 r 成立，因此对 Spin^c 结构 $-\mathfrak{s}_J - c$ ，我们有 (g_ω, δ) 和 $(g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega)$ 落在同一个室内！故我们有

$$\mathrm{SW}_X(-\mathfrak{s}_J - c, (g_\omega, F_{A_0}^+ - \sqrt{-1}r\omega)) = \mathrm{SW}_X(-\mathfrak{s}_J - c, (g_\omega, \delta)) \neq 0,$$

从而由定理6.2可知对 $c' = -c_1(X, \omega) - c$ ，由 $c_1(\mathfrak{s}_J + c') = c_1(X, \omega) - 2c_1(X, \omega) - 2c = c_1(-\mathfrak{s}_J - c)$ ，我们有 $\mathrm{PD}.c'$ 可以被表示为辛子流形 Σ ，从而

$$0 > -(c_1(X, \omega) + c) \cdot \omega = c' \cdot \omega = \int_\Sigma \omega > 0$$

矛盾！因此我们有

$$\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}_J + c, (g_\omega, \delta)) = 0,$$

故由 c 满足(A)，(B)，(C)和 $w(\mathfrak{s}_J + c)$ ，我们可用与命题6.5完全一样的讨论证明极小的 X 包含自相交数非负的辛嵌入球面，进而是 $\mathbb{C}P^2$ 或直纹面，从而完成定理F的证明！

总结一下，结合注6.11中的讨论和定理F的证明，我们得到了

推论 6.17 设 (X, ω) 为闭辛四维流形，若其满足如下两个条件之一，即

- $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$,
- 或 (X, ω) 极小且 $c_1(X, \omega) \cdot c_1(X, \omega) < 0$,

则 (X, ω) 会包含一个自相交数非负的辛嵌入球面.

我们将会在本章第四节证明定理6.18时使用上述推论6.17.

第四节 浸入球面与嵌入球面

我们在本章第二节中已经给出了定理A在极小情形下的证明，在证明一般情形之前，正如本章第一节末尾提到的，Taubes 的定理6.2此时并不能保证我们找到的是嵌入的球面，因此本节先铺垫一个从浸入球面找到嵌入球面的结果：

定理 6.18 ([22]) 设 (X, ω) 为闭辛四维流形，且允许一个辛正浸入球面 $S \looparrowright (X, \omega)$ ，且 $c_1([S]) \geq 2$ ，则 (X, ω) 包含一个自相交数非负的辛嵌入球面。

与 McDuff 原始证明^[22]不同，我们这里给出一个使用 SW 不变量的证明方案，在此之前，我们先铺垫一些必要的概念：

定义 6.19 给定辛四维流形 (X, ω) 以及一个曲面浸入 $\iota: S \looparrowright (X, \omega)$ ，我们称 ι 是辛正浸入的，若 $\iota^*\omega$ 为 S 上的辛形式，且所有 $\iota: S \rightarrow X$ 的自交点均为正横截相交的二重点 (*double point*)。

注 6.20 自交点 $p \in \text{Im}(\iota: S \rightarrow X)$ 称为 n 重，如果 $\iota^{-1}(p)$ 恰有 n 个不同点。由经典的代数拓扑^[1]可知曲面到四维流形的映射一般 (*generically*) 均为浸入，且满足自交点为横截的二重点。

引理 6.21 设 $\iota: S \rightarrow (X, \omega)$ 为一个浸入，且自交点均为横截二重点，则 ι 为辛正浸入当且仅当存在 X 上 ω -控制的近复结构 J 和 S 上的复结构 j 使得 $\iota: (S, j) \rightarrow (X, J)$ 为 J -全纯曲线。

证明. 容易发现此时 ι 为辛正浸入当且仅当自交点为正相交，且 $\iota^*\omega$ 为 S 上辛形式，因此注意到若 ι 是 J -全纯，则由正相交定理2.59以及引理2.6可知两者是等价的。□

一般而言，在复几何中我们可以对浸入的曲面做奇点消解得到嵌入的曲面，在辛范畴下我们也可以做同样的事情：

引理 6.22 设 $\iota: S \rightarrow (X, \omega)$ 为辛正浸入， $\iota(z) = \iota(w) \in X$ 为 S 的一个横截自交二重点，且 $z \neq w \in S$ ，则存在辛正浸入 $\iota': S' \rightarrow (X, \omega)$ 使得其可视为去掉 z, w 处的小圆盘 $\mathbb{D}_z, \mathbb{D}_w$ ，然后用一个圆环 A 粘贴起来，从而 $S' \setminus A$ 与 $S \setminus (\mathbb{D}_z \cup \mathbb{D}_w)$ 微分同胚， $\iota'|_{S' \setminus A} = \iota|_{S \setminus (\mathbb{D}_z \cup \mathbb{D}_w)}$ ，也即粗糙来讲， ι' 相比 ι 消解掉了 $\iota(z) = \iota(w)$ 处的奇点，并且 $\iota_*[S] = \iota'_*[S']$ 。从而归纳下去，可以得到一个辛嵌入曲面 $i: \Sigma \rightarrow (X, \omega)$ ，使得 $i_*[\Sigma] = \iota_*[S]$ ，特别的 $c_1([\Sigma]) = c_1([S])$ 。

证明. 由引理6.21可知在 X 的点 $p = \iota(z) = \iota(w)$ 处, 可以选取局部坐标 (U, φ) 使得 $(U, \iota(\mathbb{D}_z), \iota(\mathbb{D}_w))$ 全纯同构于 $(V, \{z_1 = 0\} \cap V, \{z_2 = 0\} \cap V)$, 这里 V 是 \mathbb{C}^2 中包含原点的一个小邻域, 也即 p 局部上 S 的像可以和 \mathbb{C}^2 中 $z_1 z_2 = 0$ 等同起来, 则我们现在考虑替换为 $z_1 z_2 = \varepsilon$, 这里 $\varepsilon > 0$ 充分小, 容易看到这在小邻域 (如 $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1$) 里是一个圆环 (如同构于 $\{z: |z|^4 - |z|^2 + \varepsilon \leq 0\} \subset \mathbb{C}$), 因此我们可以保持边界不变的替换为这个圆环, 因此可以得到 $\iota': S' \rightarrow X$ 仍然是 J -全纯的, 并且 $\iota'|_{S' \setminus A} = \iota|_{S \setminus (\mathbb{D}_z \cup \mathbb{D}_w)}$, 以及 $\iota'|_A$ 为嵌入, 因此 ι' 仍是一个浸入, 且自交点均为横截二重点, 故再次由引理6.21可知 ι' 为辛正浸入.

注意到 $\iota_*[S] = \iota'_*[S']$ 是显然的, 粗糙来讲 $\{(z_1, z_2): z_1 z_2 \in [0, \varepsilon]\}$ 给出了两者之间的配边, 从而同调类是一样的. \square

利用上述引理6.22, 为证明定理6.18我们只需证明:

定理 6.23 设 (X, ω) 为闭辛四维流形, 且允许一个辛嵌入闭曲面 $i: \Sigma \rightarrow (X, \omega)$ 使得 $c_1([\Sigma]) \geq 2$, 且 Σ 不是例外球面, 则 (X, ω) 包含一个自相交数非负的辛嵌入球面.

证明. 我们先说明只需要在 (X, ω) 极小的情形下证明即可: 由 Σ 为辛嵌入, 可知存在 ω -控制的近复结构 J 使得 Σ 为 J -全纯曲线 $u: S \rightarrow X$ 的像, 且有

$$\text{ind}(u) = -\chi(\Sigma) + 2c_1([u]) = 2g - 2 + 2c_1([u]) > 2g - 2,$$

故有定理2.54可知 u 是 Fredholm 正则的, 因此对 J 的小扰动 J' 其仍是满足 Fredholm 正则性的 J' -全纯曲线, 故可以不妨假设 $J = J'$ 满足一般性.

假设 (X, ω) 并非极小, 则选取 X 中一族极大两两不交的例外球面 E_1, \dots, E_k , 由假设可知 Σ 不为例外球面从而不为其中一员, 由定理3.12可假设 E_1, \dots, E_k 均为 J -全纯的, 并且们均和 Σ 横截相交.

现在我们辛坍缩 E_1, \dots, E_k 得到极小辛流形 $(\check{X}, \check{\omega})$, 以及 $\check{\omega}$ -控制的近复结构 \check{J} 和伪全纯坍缩映射 $\beta: (M, J) \rightarrow (\check{M}, \check{J})$, 则由命题3.4, 我们有 $\check{u} = \beta \circ u: S \rightarrow X$ 为浸入 \check{J} -全纯曲线且

$$c_1(v(\check{u})) = c_1(v(u)) + \sum_{i=1}^k [\Sigma] \cdot [E_i] \geq c_1(v(u)),$$

其中 $[\Sigma] \cdot [E_i] \geq 0$ 用到了正相交定理2.59, 由此可知 \check{u} 的像 $\check{\Sigma}$ 为辛正浸入曲面且由联结公式2.64,

$$c_1([\check{\Sigma}]) = c_1(v(\check{u})) + \chi(S) \geq c_1(v(\Sigma)) + \chi(S) = c_1([\Sigma]) \geq 2,$$

进一步使用引理6.22消解掉自交二重点我们即可在极小辛流形 $(\check{X}, \check{\omega})$ 里找到辛嵌入闭曲面 $i: \check{\Sigma}' \rightarrow (\check{X}, \check{\omega})$ 使得 $c_1([\check{\Sigma}']) \geq 2$, 且 $\check{\Sigma}'$ 不是例外球面.

因此我们不妨假设 (X, ω) 极小, 下面先证明 $b_2^+(X) = 1$, 注意到由 (X, ω) 为辛流形从而自动有 $b_2^+(X) \geq 1$, 因此反证法若 $b_2^+(X) > 1$, 则由定理6.2, 结合注6.16

$$\text{SW}_X(\mathfrak{s}_J - c_1(\mathfrak{s}_J)) = \text{SW}_X(-\mathfrak{s}_J) = \pm 1,$$

可知存在一般性的 ω -控制近复结构 J 以及一个 J -全纯曲线 v 使得 $[v] = \text{PD.}(-c_1(\mathfrak{s}_J)) = -\text{PD.}c_1(TX)$, 因此由 Σ 也 J -全纯可知 Σ 和 v 要么重合要么正相交, 因此有

$$0 \leq [v] \cdot [\Sigma] = -\text{PD.}(c_1(TX)) \cdot [\Sigma] = -c_1([\Sigma]) < 0,$$

矛盾!

故我们现在有 $b_2^+(X) = 1$, 由推论6.17结合此时 (X, ω) 极小, 可知若 $c_1(X, \omega)^2 < 0$ 或 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 则 (X, ω) 中均会自动包含一个自相交数非负的辛嵌入球面, 因此我们现在不妨假设两者均不成立, 即

$$c_1(X, \omega)^2 \geq 0 \text{ 且 } c_1(X, \omega) \cdot \omega \leq 0,$$

则可知 $-c_1(X, \omega)$ 落在光锥 $\mathcal{L} = \{\alpha \in H^2(X; \mathbb{R}) | \alpha \cdot \alpha \geq 0\}$ 中, 且和 $[\omega]$ 落在同一连通分支中, 因此由光锥引理6.7可知 $-c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$, 否则若为 0 则有 $\omega^2 = 0$, 与辛形式非退化矛盾.

现在对辛嵌入曲面 Σ ，我们有

$$(\text{PD} \cdot [\Sigma]) \cdot \omega = \int_{\Sigma} \omega > 0,$$

以及由联结公式2.64

$$[\Sigma] \cdot [\Sigma] = c_1([\Sigma]) - \chi(\Sigma) \geq 2 - 2 = 0,$$

因此我们有 $\text{PD} \cdot [\Sigma]$ 也落在光锥 \mathcal{L} 中，并且和 ω 落在同一连通分支，因此进一步使用光锥引理6.7，可知

$$0 \leq -c_1(X, \omega) \cdot \text{PD} \cdot [\Sigma] = -c_1([\Sigma]) < 0,$$

矛盾！因此 $c_1(X, \omega)^2 < 0$ 和 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 两者至少有一者成立，即证包含自相交数非负的辛嵌入球面。

综上所述我们完成了证明。 □

因此现在结合引理6.22以及定理6.23即可得到定理6.18的证明。

第五节 定理A的证明 (一般情形)

有了第三节和第四节的准备工作，我们现在终于可以开始着手证明定理A在非极小的情形了。

设 E_1, \dots, E_k 为 (X, ω) 的一组极大不交例外球面，记沿着它们进行辛坍缩得到 (Y, ω') ，则 (Y, ω') 为极小辛四维流形，朴素的想法是在 Y 中寻找自相交数非负的辛嵌入球面，但遗憾的是和定理F或定理6.23的情形不同，我们并不能保证坍缩得到的 Y 上仍然具有正数量曲率度量，因此非极小情形的结果并不是极小情形的直接推论。

现在回忆定理6.6，我们对正数量曲率度量 g 对应的与辛形式 ω 落在光锥 \mathcal{L}

同一连通分支的自动偶调和二形式 ω_0 , 有

$$\int_X c_1(X, \omega) \wedge \omega_0 > 0.$$

注意到若设 $X = Y \#^k \overline{\mathbb{C}P^2}$, 则有

$$H^2(X; \mathbb{R}) = H^2(Y; \mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{R} \langle \text{PD} \cdot [E_j] \rangle,$$

因此对 $\omega_0 \in H^2(X; \mathbb{R})$, 我们有分解

$$\omega_0 = \omega_Y + \sum_{j=1}^k a_j \cdot \text{PD} \cdot [E_j],$$

这里类似于 ω_0 , ω_Y 是 Y 对应的光锥 $\mathcal{L}_Y := \{\alpha \in H^2(Y; \mathbb{R}) : \alpha^2 \geq 0\}$ 中与 ω' 在同一连通分支中的元素.

注意到 $\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上存在保定向微分同胚 R , 其中 $R([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^{-1} : z_1^{-1} : z_2^{-1}]$, 其中对 $H^2(\overline{\mathbb{C}P^2})$ 的生成元 $[E]$, 容易看到 $R_*[E] = -[E]$, 因此回忆 $M \# \overline{\mathbb{C}P^2} = (M - U) \cup (\overline{\mathbb{C}P^2} - V)$, 则可以选取 $f = (\text{id}_M, R)$ 为 $M \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上的微分自同胚, 使得 f_* 在 $H^2(M \# \overline{\mathbb{C}P^2}) = H^2(M) \oplus H^2(\overline{\mathbb{C}P^2})$ 上表现为 $(\text{id}, -1)$.

因此我们可以对 $X = Y \#^k \overline{\mathbb{C}P^2}$ 作用上述给出的微分自同胚 f , 使得在分解 $\omega_0 = \omega_Y + \sum_{j=1}^k a_j \cdot \text{PD} \cdot [E_j]$ 中我们可以做到每个 a_j 均小于 0, 进而结合命题 3.10, 对辛坍缩 $\pi : X \rightarrow Y$, 我们有

$$\pi^* c_1(K_Y^{-1}) = c_1(K_X^{-1}) + \sum_{i=1}^k \text{PD} \cdot [E_i],$$

因此

$$\begin{aligned} 0 < c_1(K_X^{-1}) \cdot \omega_0 &= \left(\pi^* c_1(K_Y^{-1}) - \sum_{i=1}^k \text{PD} \cdot [E_i] \right) \cdot \left(\omega_Y + \sum_{j=1}^k a_j \cdot \text{PD} \cdot [E_j] \right) \\ &= c_1(K_Y^{-1}) \cdot \omega_Y + \sum_{j=1}^k a_j < c_1(K_Y^{-1}) \cdot \omega_Y, \end{aligned}$$

也即我们有

$$c_1(K_Y^{-1}) \cdot \omega_Y > 0.$$

因此仿照我们在本章第二节中对极小情形的讨论, 我们可以在 $H^2(Y; \mathbb{Z}) \subset H^2(X; \mathbb{Z})$ 中找到一个元素 c 使得对 X 满足(A), (B)和(C)这三个不等式. 进而可知在 X 中, c 或 $2c$ 可以被表示为一个 J -全纯曲线 $u: \Sigma = \cup \Sigma_i \rightarrow X$.

注 6.24 注意此时因为 X 并不极小, 因此直接利用定理6.2和上述 c 或 $2c$ 找到的 u 未必连通也未必嵌入,

由 c 的选取容易看出对任意 $j = 1, \dots, k$, 我们有 $[u(\Sigma)] \cdot E_j = 0$. 因此假如全体 E_j 与 $u(\Sigma)$ 不交, 则我们可以假设 $u(\Sigma)$ 是 Y 中的一条 J -全纯曲线, 此时由 Y 极小, 我们就可以使用之前极小情形的论述, 利用联结不等式找到一条 J -全纯嵌入球面, 进而极小可知自相交数非负, 因此由 McDuff 的分类定理B可知 Y 为 $\mathbb{C}P^2$ 或为直纹面, 因此 X 为 $\mathbb{C}P^2$ 或爆破直纹面.

现在设有某个 E_j 与 $u(\Sigma)$ 相交, 则由正相交定理, 以及 $[u(\Sigma)] \cdot E_j = 0$, 因此可知 E_j 为 $u(\Sigma)$ 的子集, 进而设其重数为 m (u 不一定为单曲线). 并且 $u(\Sigma)$ 中存在 J -全纯曲线 $C \subseteq u(\Sigma)$ 使得 $C \cdot E_j > 0$ (否则 $u(\Sigma) = E_j$ 可以为矛盾). 进而设 C_1, \dots, C_p 为 C 的不可约分支且为单曲线, 并且由正相交定理2.59, 其与 E_j 相交数 $C_i \cdot E_j = k_i > 0$, 并且设 C_i 重数为 n_i , 则有

$$\sum_{i=1}^p k_i \cdot n_i = m.$$

若存在 i 使得 C_i 为球面,

- 若其嵌入且自相交数非负, 则自动证完.
- 一般的, 我们考虑将 C_i 与 E_j 在一交点处连接起来, 定义域做连通和仍为球面, 可以定义出一个 J -全纯节点曲线 C' , 由微分拓扑的结果^[1] 可知 J -全纯球面可以形变为辛正浸入的 J -全纯球面, 从而有 $[C'] = [C_i] + [E_j]$ 以及对对应伪全纯曲线模空间维数非负, 可得到 $c_1([C_i]) \geq 1$, $c_1([E_j]) \geq 1$, 进而 $c_1([C']) \geq 2$.

因此由 McDuff 浸入球面蕴含嵌入球面的定理6.18, 我们可以找到一条嵌

入的自相交数非负的辛嵌入球面, 进而我们有 X 有理或直纹.

现在假设不存在 i 使得 C_i 为球面, 我们下面证明 $C_i^2 \geq 0$ 且 $c_1([C_i]) - C_i^2 \leq 0$.

由伪全纯曲线模空间维数非负可知

$$c_1([C_i]) + (g_i - 1) \geq 0,$$

这里 g_i 为 C_i 定义域的亏格 ≥ 1 , 进而由 C_i 单可知有联结不等式

$$c_1([C_i]) - C_i^2 \leq 2(1 - g_i) \leq 0.$$

因此我们有 $C_i^2 \geq g_i - 1 \geq 0$, 以及 $c_1([C_i]) - C_i^2 \leq 0$.

记 $D = mE_j + \sum_{i=1}^p n_i C_i$, 则我们有

$$\begin{aligned} c_1([D]) - D^2 &= m \cdot c_1([E_j]) + \sum_{i=1}^p n_i \cdot c_1([C_i]) \\ &\quad - \left(-m^2 + \sum n_i^2 \cdot C_i^2 + 2m \sum n_i \cdot k_i + \sum_{i \neq j} n_i n_j C_i \cdot C_j \right) \\ &\leq m - m^2 + \sum_{i=1}^p n_i (c_1([C_i]) - C_i^2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

这里用到了 $c_1([E_j]) = 1$ 以及 $\sum_{i=1}^p n_i \cdot k_i = m$.

现在设 $D' = u(\Sigma) - D$, 则 D 与 D' 没有公共分量 (因为按照重数全部减去了), 因此由正相交公式我们有 $D \cdot D' \geq 0$, 因此有

$$\begin{aligned} &c_1([D + D']) - (D + D')^2 \\ &= (c_1([D]) - D^2) + (c_1([D']) - D'^2) - 2D \cdot D' \\ &\leq c_1([D']) - D'^2, \end{aligned}$$

注意到由 $D + D' = [u(\Sigma)] = \text{PD}.c$ 或 $\text{PD}.(2c)$, 我们由 c 满足(A)可知 $c_1([D + D']) - (D + D')^2 > 0$, 进而我们有

$$c_1([D']) - D'^2 > 0,$$

从 D' 出发归纳下去可以找到一个 J 全纯曲线 \hat{D} 使得其与所有 E_j 均不交, 且 $c_1([\hat{D}]) - \hat{D}^2 > 0$, 进而我们在 Y 中找到了一条嵌入的自相交数非负的辛嵌入球面, 进而可知 Y 为 $\mathbb{C}P^2$ 或为直纹面, 因此 X 为 $\mathbb{C}P^2$ 或爆破直纹面.

至此, 我们完成了本文主定理A的全部证明!

第六节 本章小结

本章我们主要完成了本文主定理A的证明,

- 第一节中我们主要借助 Taubes 的定理6.2以及穿墙公式将证明划归成了寻找满足不等式(A), (B)和(C)以及 $w(\mathfrak{s}_J + c) \neq 0$ 的上同调类 c 上.
- 第二节我们在极小的情形下, 分类讨论构造出了符合要求的上同调类 c , 从而给出了定理A在极小情形下的证明.
- 第三节我们宕开一笔, 利用前两节发展的方法证明定理F.
- 第四节我们为证明定理A的一般情形铺垫, 讨论如何从辛正浸入的球面找到自相交数非负的辛嵌入球面, 给出了定理6.18的证明.
- 第五节我们结合第四节的结果, 我们归纳构造了一条与所有例外球面不交的自相交数非负的辛嵌入球面从而完成了定理A的证明.

第七章 猜想与展望

本章我们从定理A出发, 从黎曼几何与低维拓扑两方面去延申讨论一些相关的结果与猜想.

第一节 黎曼几何与辛几何

黎曼几何一侧, 除了本文讨论正数量曲率度量, 人们自然会问的下一个问题是, 我们对带有双曲度量 (即常截面曲率为 -1) 的辛四维流形能说些什么呢? 人们有如下猜想,

猜想 7.1 辛四维流形上不允许双曲度量.

注 7.2 事实上人们猜测双曲四维流形的 SW 不变量均为 0, 从而由定理 5.56, 辛四维流形的 SW 不变量不恒为 0, 因此可知两种结构相互排斥, 无法共存.

例 7.3 我们首先来看几个闭辛四维流形上不允许双曲结构的例子:

- 单连通辛流形都不是双曲流形, 如 $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, $K3$ 曲面等. 这是因为双曲流形均为 $K(\pi, 1)$ 空间, 因此若双曲流形 X 单连通则其可缩, 进而 $H^2(X) = 0$, 其上不会允许辛结构.
- $\Sigma_g \times \Sigma_h$ 均不为双曲流形, 这里 Σ_g 表示亏格 $g \geq 0$ 的可定向闭曲面. 若 $g, h \geq 1$, 则基本群包含 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 为子群, 不为闭双曲流形^[23]. 若 $gh = 0$, 则其万有覆叠为 $S^2 \times \mathbb{R}^2$ 或 $S^2 \times S^2$ 不微分同胚于 \mathbb{R}^4 , 因此也不为双曲流形.
- 更一般的所有基本群不是双曲群的辛四维流形. 但 Gompf 证明了^[24] 任何有限表现群 G 都可以实现为一个辛四维流形的基本群, 因此仍有很多辛四维流形无法排除.

另一方面, 尽管双曲三维流形已经被广泛研究, 但人们对双曲四维流形没有什么可以用来研究的工具, 目前对于猜想 7.1, 只有 I. Agol 和 F. Lin 在 [25] 中证明了一些算术双曲流形的 SW 不变量确实为 0, 其余情形据笔者所知暂无进展.

第二节 辛流形的分类与 Kodaira 维数

低维拓扑一侧，对于光滑四维流形的分类问题，人们常常会构造出许多奇异四维流形的例子，也即一个拓扑四维流形允许不同的光滑结构，因此很难对一般的流形得到令人满意的分类结果，于是人们自然想到对光滑流形增加一些额外的限制，如复结构，辛结构等，并对这些范围小一点的流形试图给出一个分类.

对于复四维流形，也即复曲面，甚至更一般的代数曲面，Kodaira-Enriques 借助如下复流形上 Kodaira 维数的概念对其进行了分类，

定义 7.4 设 S 为复曲面， $K_S := \det T^*S$ 为 S 上的典范线丛，记 $P_n(S)$ 为 $H^0(S, K_S^{\otimes n})$ 的维数，也即 $K_S^{\otimes n}$ 的全纯截面构成的向量空间的维数，则如下定义 S 的 **Kodaira 维数** $\kappa(S)$ ，

- $\kappa(S) := -\infty$ ，如果对任意 $n > 0$ 有 $P_n(S) = 0$.
- $\kappa(S) := 0$ ，如果存在 $n > 0$ 使得 $P_n(S) \neq 0$ ，且 $\{P_n(S)\}_{n>0}$ 有界.
- $\kappa(S) := 1$ ，如果 $\{P_n(S)\}_{n>0}$ 无界，但 $\{P_n(S)/n\}_{n>0}$ 有界.
- $\kappa(S) := 2$ ，如果 $\{P_n(S)/n\}_{n>0}$ 无界.

例 7.5 由 Kodaira 消灭定理^[26]，我们有 \mathbb{CP}^2 上的全纯线丛 $K_S^{\otimes n}$ 在 $n > 0$ 时没有全纯截面，因此对任意 $n > 0$ 有 $P_n(\mathbb{CP}^2) = 0$ ，从而 $\kappa(\mathbb{CP}^2) = -\infty$.

例 7.6 设 S 为 $K3$ 曲面，则 $c_1(S) = 0$ ，从而 $K_S = \mathbb{C}$ 为平凡丛，因此对任意 n ，有 $P_n(S) = 1$ ，因此可知 $K3$ 曲面的 Kodaira 维数为 0.

正如本文一以贯之的哲学，辛流形作为近复流形可以看成是复流形的推广，因此人们自然期待能将复曲面上借助 Kodaira 维数的分类策略推广到辛流形上. 虽然辛流形上也有典范线丛，但此时其并非全纯线丛，因此无法讨论全纯截面，所以人们采用如下典范线丛的 Chern 类来定义辛四维流形上的 Kodaira 维数，

定义 7.7 设 (X, ω) 为辛四维流形， $c_1(X, \omega)$ 为其第一 Chern 类，首先假设 X 极小，则如下定义 X 的 **Kodaira 维数** $\kappa(X)$ ，

- $\kappa(X) := -\infty$ ，如果 $c_1(X, \omega) \cdot \omega > 0$ 或 $c_1^2(X, \omega) < 0$.
- $\kappa(X) := 0$ ，如果 $c_1(X, \omega) \cdot \omega = 0$.
- $\kappa(X) := 1$ ，如果 $c_1(X, \omega) \cdot \omega < 0$ 且 $c_1^2(X, \omega) = 0$.

- $\kappa(S) := 2$, 如果 $c_1(X, \omega) \cdot \omega < 0$ 且 $c_1^2(X, \omega) > 0$.

若 X 不极小, 则取 X 的极小模型 X_{\min} , 并定义 $\kappa(X) := \kappa(X_{\min})$.

注 7.8 这里我们含糊了非极小情形的 Kodaira 维数的良定义性, 事实上, 上述定义的 Kodaira 维数只与流形的微分同胚型有关, 与辛结构的选取无关, 具体讨论可以参考 [27].

事实上, 正如注 6.13 中提到的, Kodaira 维数为 $-\infty$ 的良定义性不难证明, 因为极小模型只能是 $\mathbb{C}P^2$ 或直纹面. 而对于其余情形, 可以证明若 X 允许一个极小模型 X_{\min} 满足 $\kappa(X_{\min}) \geq 0$, 则 X_{\min} 在微分同胚意义下是唯一的, 由此可见良定义性.

不难发现 Kähler 流形既是复流形也是辛流形, 因此自然会问对于这种情况, 两种 Kodaira 维数 κ_{comp} 和 κ_{symp} 之间的关系如何呢? 意料之中的, 我们有

定理 7.9 若 X 是 Kähler 曲面, 则有 $\kappa_{\text{comp}}(X) = \kappa_{\text{symp}}(X)$.

因此某种程度上, 我们这里给出的辛四维流形上的 Kodaira 维数确实可以看成是复流形版本的 Kodaira 维数的类比与延申.

现在我们来讨论一些关于辛四维流形 Kodaira 维数的分类结果, 正如注 6.13 中提到的, 我们在本文中证明的推论 6.17 告诉我们,

定理 7.10 设 X 为辛四维流形, 若 $\kappa(X) = -\infty$, 则 X 是 $\mathbb{C}P^2$ 或是爆破辛直纹面. 因此本文实际上给出了辛四维流形在 Kodaira 维数为 $-\infty$ 情形下的分类.

对于 $\kappa(X) = 0$ 的情形, 我们只有部分结果,

定理 7.11 (Morgan-Szabó, [28]) 设 X 为单连通辛四维流形, 若 $\kappa(X) = 0$, 则 X 拓扑同胚于 $K3$ 曲面.

注 7.12 事实上, Taubes 证明了对满足 $\kappa(X) = 0$ 的辛四维流形 (X, ω) , 若 $b_2^+(X) > 1$, 则有 $c_1(X, \omega) = 0$, 若 $b_2^+(X) = 1$, 则有 $2c_1(X, \omega) = 0$. 因此粗糙的讲, 此时由定理 5.56 可知 $\text{SW}_X(0) = \text{SW}_X(c_1(X, \omega)) = \pm 1$, 而 Morgan-Szabó^[28] 证明了若单连通四维流形 X 若满足 $\text{SW}_X(0)$ 为奇数, 则 X 拓扑同胚于 $K3$ 曲面, 从而综合两方面得到了定理 7.11.

注 7.13 Fintushel-Stern 证明了^[29], 对 $K3$ 曲面沿着 Alexander 多项式非平凡的纽结做手术, 可以得到拓扑同胚但不微分同胚于 $K3$ 曲面的四维流形, 而由

Alexander 多项式非平凡的纽结有无穷多个, 因此我们知道拓扑 $K3$ 曲面上允许无穷多种不同的微分结构, 因此想要将定理 7.11 证明到微分同胚看起来是一个棘手的问题.

对于 $\kappa(X) > 0$ 的情形, 我们所知更少, 而且事实上这类辛流形也相当多, 定理 7.14 (Gompf, [24]) 对任意有限表现群 G , 存在辛四维流形 X 满足 $\kappa(X) = 1$ 且 $\pi_1(X) = G$.

对于满足 $\kappa(X) = 2$ 的辛四维流形, 称其为一般型的 (general type), 这个定义源自于复流形的版本.

对于一般型也即 $\kappa = 2$ 的极小复曲面 S , 若记其全纯欧拉示性数为 $\chi_h(S) := \frac{1}{4}(\sigma(S) + \chi(S))$, 则常用的拓扑约束是两个如下的重要不等式:

1. Bogomolov-Miyaoka-Yau 不等式,

$$c_1^2(S) \leq 9\chi_h(S).$$

2. Noether 不等式,

$$c_1^2(S) \geq 2\chi_h(S) - 6.$$

人们自然想问上述两个不等式是否对于一般型的极小辛四维流形也成立? 遗憾的是, Noether 不等式此时并不成立, 事实上, Fintushel-Stern 利用^[30] 有理坍缩 (rational blow-down) 对任意满足 $0 < x - 3 \leq c \leq 2x - 6$ 的正整数对 (x, c) , 构造了一个单连通辛四维流形 X 满足 $\chi_h(X) = x$, $c_1^2(X) = c$.

至于 Bogomolov-Miyaoka-Yau 不等式, 人们目前一无所知, 也即有猜想 7.15 设 (X, ω) 为满足 $\kappa(X) = 2$ 的极小辛四维流形, 则有

$$c_1^2(X, \omega) \leq 9\chi_h(X).$$

综上所述, 除了本文讨论并证明的 $\kappa = -\infty$ 的情形, 对于其余 Kodaira 维数的辛四维流形的分类人们并没有得到太多令人满意的结果, 只能得到一些零零散散的拓扑约束.

最后作为收尾, 我们列出一个关于非负 Kodaira 维数拓扑描述的一个猜想,

猜想 7.16 (Gompf) 设 X 为满足 $\kappa(X) \geq 0$ 的辛四维流形，则有其欧拉示性数满足 $\chi(X) \geq 0$.

参考文献

- [1] Robert E Gompf, András I Stipsicz. 4-manifolds and Kirby calculus. American Mathematical Society, 1999.
- [2] Dusa McDuff. The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds. Journal of the American Mathematical Society, 1990, 3(3): 679–712.
- [3] Clifford H Taubes. $SW \Rightarrow Gr$: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves. Journal of the American Mathematical Society, 1996: 845–918.
- [4] Clifford Henry Taubes. $Gr \Rightarrow SW$: from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions. Journal of Differential Geometry, 1999, 51(2): 203–334.
- [5] J Peter May. A concise course in algebraic topology. University of Chicago press, 1999.
- [6] Chris Wendl. Holomorphic curves in low dimensions. Springer, 2018.
- [7] Helmut Hofer, Véronique Lizan, Jean-Claude Sikorav. On genericity for holomorphic curves in four-dimensional almost-complex manifolds. The Journal of Geometric Analysis, 1997, 7: 149–159.
- [8] Dusa McDuff, Dietmar Salamon. Introduction to symplectic topology. Oxford University Press, 2017.
- [9] Otto Forster. Lectures on Riemann surfaces. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] Alexandru Scorpan. The wild world of 4-manifolds. American Mathematical Soc., 2005.
- [11] Simon Kirwan Donaldson. Lefschetz pencils on symplectic manifolds. Journal of Differential geometry, 1999, 53(2): 205–236.
- [12] H Blaine Lawson, Marie-Louise Michelsohn. Spin geometry. Princeton university press, 1989.

-
- [13] John W Morgan. The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds. Princeton University Press, 1996.
 - [14] John D Moore. Lectures on Seiberg-Witten invariants. Springer, 2009.
 - [15] Dietmar Salamon. Spin Geometry and Sieberg-Witten Invariants. ETH, 2000.
 - [16] Tian-Jun Li, A Liu. General wall crossing formula. Mathematical Research Letters, 1995, 2: 797–810.
 - [17] Hiroshi Ohta, Kaoru Ono. Notes on symplectic 4-manifolds with $b^+=1$, II. Int. J. Math, 1996, 7: 755–770.
 - [18] Raoul Bott, Loring W Tu. Differential forms in algebraic topology. Springer Science & Business Media, 1991.
 - [19] Mikhael Gromov, H Blaine Lawson. The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature. Annals of Mathematics, 1980, 111(3): 423–434.
 - [20] JP Serre. A Course in Arithmetic Springer-Verlag. Berlin etc, 1973.
 - [21] Wolf Barth, Klaus Hulek, Chris Peters, et al. Compact complex surfaces. Springer Science & Business Media, 2003.
 - [22] Dusa McDuff. Immersed spheres in symplectic 4-manifolds. In: Annales de l’institut Fourier, 1992: 369–392.
 - [23] Bruno Martelli. An introduction to geometric topology. arXiv preprint 1610.02592, 2016.
 - [24] Robert E Gompf. A new construction of symplectic manifolds. Annals of Mathematics, 1995: 527–595.
 - [25] Ian Agol, Francesco Lin. Hyperbolic four-manifolds with vanishing Seiberg-Witten invariants. arXiv preprint 1812.06536, 2018.
 - [26] Daniel Huybrechts. Complex geometry: an introduction. Springer, 2005.
 - [27] Tian-Jun Li. Symplectic 4-manifolds with Kodaira dimension zero. Journal of differential geometry, 2006, 74(2): 321–352.
 - [28] John W Morgan, Zoltán Szabó. Homotopy K3 surfaces and mod 2 Seiberg-Witten invariants. Mathematical Research Letters, 1997, 4(1): 17–21.

- [29] R. Fintushel, R. Stern. Knots, links, and 4-manifolds. *Inventiones mathematicae*, 1998, 134: 363–400.
- [30] Ronald Fintushel, Jongil Park, Ronald J Stern. Rational surfaces and symplectic 4-manifolds with one basic class. *Algebraic & Geometric Topology*, 2002, 2(1): 391–402.