Учебная практика
гр. 23634/1, 2018/2019 уч. год

Описание задания

1. Постановка задачи

Рассчитать стационарное поле температуры в плоской неограниченной пластине с равномерно распределённым источником 1) ***внутреннего объемного тепловыделения*** и коэффициентом теплопроводности, линейно 2) ***зависящим от температуры***. На боковых поверхностях пластины ГУ 3 рода 3) ***с различными коэфф. теплоотдачи***. Задачу решить численно методом конечных разностей 4) ***на неравномерной сетке*** с использованием неявной аппроксимации. Стационарное решение искать методом установления, линеаризация уравнений методом запаздывающих коэффициентов.

Требования к программному коду:

- все исходные данные считываются из внешнего файла;

- блочная структура, отдельные модули для построения неравномерной сетки и процедуры прогонки;

- контроль сходимости решения по тепловому балансу.

2. Математическая постановка задачи

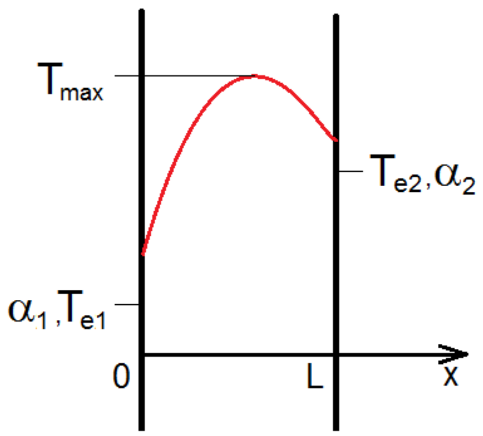

Рис.1. Расчетная область и стационарный профиль температуры.

Одномерное стационарное уравнение теплопроводности с источником внутреннего тепловыделения:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q_v \text{, где } 0 \le x \le L,\ Q_v = \text{Const},\ \lambda = \lambda_0\left(1 + k_t\left(T - T_0\right)\right). \tag{1}$$

Граничные условия:

$$\left.\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_1\left(T - T_{e1}\right) \tag{2}$$

$$\left.-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha_2\left(T - T_{e2}\right) \tag{3}$$

Нестационарный аналог уравнения (1) для решения методом установления

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q_v \text{, где } \tau \text{ – итерационный параметр.} \qquad (4)$$

3. Построение конечно-разностной сетки

Введем обозначение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - шаг сетки. Для неравномерной сетки величина сгущения узлов определяется отношением двух соседних шагов сетки: $\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} = k_i$ – коэффициент сгущения. Из теории разностных схем известно, что допустимый диапазон изменения коэффициента сгущения $0,5 < k_i < 2$.

Сгущение вблизи левой границы предполагает, что с возрастанием индекса i шаг сетки увеличивается. В этом случае $1 < k_i < 2$. Для практических целей вполне достаточно рассмотреть случай $k_i = \mathrm{Const}$. Тогда последовательность шагов сетки образует геометрическую прогрессию, сумма всех членов которой равна (k, Im и L заданы)

$$\sum_{i=2}^{Im} \Delta x_i = \Delta x_2 \frac{k^{Im-1} - 1}{k - 1} = L \, . \qquad (5)$$

Из (5) можно найти величину наименьшего шага сетки Δx_2. Все последующие шаги и координаты узлов могут быть найдены по рекуррентным соотношениям

$$\Delta x_i = \Delta x_{i-1} \cdot k \text{, } i = 3 \text{ .. Im;} \qquad x_i = x_{i-1} + \Delta x_i \;\; i = 2 \text{ .. Im.}$$

Поскольку в задаче сгущение должно быть с двух сторон, следует построить сетку со сгущением для половины расчетной области (при этом Im* = (Im+1)/2, где Im обязательно нечетное), а на вторую половину перенести координаты узлов отражением от центра пластины x = L/2.

4. Вывод сеточных уравнений

Для построения разностной схемы введем в рассмотрение понятие элементарной сеточной ячейки, границы которой обозначены XX_i (рис. 2). При этом узлы сетки (за исключением граничных) расположены в центре сеточных ячеек.

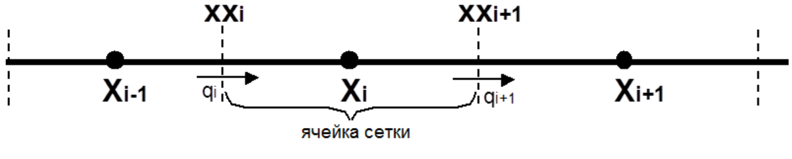

Рис.2. Шаблон аппроксимации уравнения теплопроводности.

Считаем, что в пределах одной сеточной ячейки коэффициент λ постоянен: $\lambda_i = f(T_i)$. Тогда тепловой поток на границе интервала (см. рис. 2) может быть вычислен по формуле

$$q_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{\frac{x_i - xx_i}{\lambda_i} + \frac{xx_i - x_{i-1}}{\lambda_{i-1}}} \qquad (6).$$

С учетом (6) неявную разностную аппроксимацию уравнения (4) для внутренних узлов (i = 2 – (Im-1)) запишем в виде

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^{n}}{\Delta\tau}=\frac{1}{xx_{i+1}-xx_i}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_i^{n+1}}{\frac{x_{i+1}-xx_{i+1}}{\lambda_{i+1}}+\frac{xx_{i+1}-x_i}{\lambda_i}}-\frac{T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{\frac{x_i-xx_i}{\lambda_i}+\frac{xx_i-x_{i-1}}{\lambda_{i-1}}}\right)+Q_v \qquad (7)$$

Аппроксимацию граничных условий (2) для i = 1 и (3) для i = Im предлагаем записать самостоятельно.

В выражении (7) предполагается, что значения λ_i вычисляются на текущем временном слое, т.е. с «запаздыванием»: $\lambda_i = f(T_i)^n$.

5. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Разностное уравнение (7) представим в виде

$$A_i T_{i+1}^{n+1} + B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} + D_i = 0. \qquad (8)$$

где T – искомая сеточная функция, A_i, B_i, C_i, D_i – прогоночные коэффициенты.

Как видно из (8), коэффициенты A_i, B_i и C_i представляют собой выражения, на которые умножаются соответствующие неизвестные значения T в разностном уравнении (7). Коэффициент D_i объединяет слагаемые разностного уравнения, которые не вошли ни в один из коэффициентов A_i, B_i, C_i.

Перенесем все слагаемые (7) в правую часть уравнения. Тогда получим:

$$D_i = \frac{T_i^n}{\Delta\tau} + Q_v\,.$$

Для крайних узловых точек некоторые из прогоночных коэффициентов не определены. Поэтому постулируем $C_1 = A_{Im} = 0$.

Когда все четыре массива **A**, **B**, **C**, **D** сформированы, для нахождения массива $\mathbf{T}^{n+1}$ следует выполнить обращение к процедуре векторной прогонки (см. Приложение).

6. Этапы программной реализации (вместо блок-схемы)

1) Задание исходных данных
2) Вычисление координат узлов (массив X) и координат границ сеточных ячеек (массив XX).
3) Вычисление итерационного параметра $\Delta\tau$.
4) Присвоение начальных значений массиву $\mathbf{T}^n$.
5) Начало итеративного цикла.
6) Вычисление значений $\lambda(T)^n$ в узлах сетки.
7) Вычисление прогоночных коэффициентов.
8) Обращение к процедуре прогонки (вычисление массива $\mathbf{T}^{n+1}$).
9) Проверка достижения теплового баланса (условие выхода из цикла).
10) Переприсвоение массивов ($\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^{n+1}$)
11) Возврат к п.6

7. Структура отчета

1) Титульный лист.
2) Постановка задачи.
3) Метод решения (краткое описание).
4) Рисунок с расположением узлов сетки вблизи стенки (примерно 10 узлов).
5) Стационарный профиль температуры (с маркерами в узлах сетки).
6) Значение максимальной температуры и температуры на стенках.
7) Распределение коэффициента λ в сечении пластины.
8) Суммарное тепловыделение в сечении платины, Вт/м^2.
9) Суммарный тепловой поток на границах, Вт/м^2.
10) Точность решения (невязка теплового баланса).
11) Приложение (текст программы с необходимым минимумом комментариев).

Приложение

```
UNIT Prog;
  { Трёхточечная прогонка на шаблоне An*U(n+1)+Bn*U(n)+Cn*U(n-1)+Dn=0 }
INTERFACE
  Procedure Progonka ( Im: integer; A,B,C,D: Vector; var U: Vector);
IMPLEMENTATION
  Procedure Progonka;
  Var  i   : integer;
       t   : real;
       F,G : Vector;
  Begin
    f[1]:= -a[1]/b[1]; g[1]:= -d[1]/b[1];
    for i:= 2 to Im-1 do begin
        t:= b[i]+c[i]*f[i-1];
        f[i]:= -a[i]/t; g[i]:= -(d[i]+c[i]*g[i-1])/t end; { i }
    u[Im]:= -(d[Im]+c[Im]*g[Im-1])/(b[Im]+c[Im]*f[Im-1]);
    for i:= Im-1 downto 1 do u[i]:= f[i]*u[i+1]+g[i];
  End; { Progonka }
END.
```