对疫情防控策略的概率论分析

学号:2023211531 班级:2023211807 姓名:田炎烁

摘要

本文通过运用概率论方法,对新冠疫情期间的核酸检测准确性、检测效率优化,以及疫苗接种策略进行了系统性分析.结合敏感性、先验概率、贝叶斯公式及群体检测等核心概念,探讨如何提升核酸检测和疫苗接种的效果,为优化防控资源配置和提升检测效率提供理论依据和实用方法.结果表明,科学应用概率论知识能够显著提高大规模筛查的准确性和效率,有效遏制病毒的传播,助力精准防控.

问题描述

在疫情防控过程中,如何快速、高效地开展大规模人群核酸检测与疫苗接种是防控工作的核心挑战.然而,实际应用中面临诸多问题:其一,核酸检测资源有限,难以在短时间内满足大规模筛查的需求；其二,核酸检测的敏感性和特异性存在局限,可能出现假阴性或假阳性的结果,影响防控决策；其三,疫苗供应初期资源紧张,如何科学分配以最大化防控效果亟需策略优化.针对这些问题,本文从提高检测效率、提升检测准确性、优化疫苗分配等方面入手,对疫情防控措施的合理性进行分析.

问题分析

本文应用敏感性、先验概率、贝叶斯公式和群体检测等概率论知识,对多次检测策略、群体检测策略、疫苗分配策略的合理性进行了分析.

首先介绍一些有关传染病的概率论术语:

（1）先验概率:在检测前,对某个体是否感染的初始估计概率,通常根据历史数据或群体感染率得出.

（2）后验概率:后验概率是在得到检测结果后,更新对某个体感染概率的判断.

（3）敏感性:敏感性指的是在所有感染者中,能够被正确检测为阳性的比例,反映检测方法对感染者的识别能力.

（4）基本再生数:表示在一个完全易感（没有免疫）的人群中,单个感染者在传染期内平均能传染给的人数.它表征理论上的理想状态下的传播潜力.若基本再生数>1,意味着每个感染者能引起多个新感染,疫情会扩散；反之,若基本再生数<1 ,疫情会逐步减弱并最终消失.

（5）有效再生数:指在实施防控措施或有一定免疫屏障的条件下,单个感染者在传染期内实际能够传染的平均人数.有效再生数随着时间变化,反映了疫情在现实条件下的传播潜力.若有效再生数>1,疫情仍可能扩散；若有效再生数<1,疫情可能得到控制并逐渐消退.

1.多次检测策略合理性分析

多次检测策略是在疫情防控中,通过对个体或群体进行多次核酸检测,以提高检测准确性、降低误判风险、及时发现感染者的有效方法.我们通过计算在检测为阳性时,真正被感染的后验概率来说明采用多次检测策略的必要性.

根据网络公布的数据,截至 2020 年 11 月 12 日,确诊 9.2 万,总人口 14 亿.假设核酸检测感染者阳性准确率为 99% ,未感染者被误报率为 5%.

计算先验概率 $\mathrm{P}(\text{先验}) = 92000/(1.4*10^{10}) = 0.0067\%$,我们用此概率来估计被感染的概

率.

设: $\mathrm{A_n}$: 某人n次检测时的是感染者　　$\mathrm{B_n}$: 某人 n 次检测均为为阳性

由数据可知,P(阳性|感染)=99% ,P(阳性|未感染)=5%

每次检测使用同一试剂且仅对上一次检测为阳性的个体检测,所以我们

令 $\mathrm{p}=\mathrm{P}(\mathrm{B_n} \mid \mathrm{A_n})=99\% \quad q=P(B_n \mid \overline{A_n})=5\%$

先由全概率公式计算 P(B1)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_1) &= P(B_1 \mid A) * P(A)+P(B_1 \mid \overline{A_1}) * P(\overline{A_1}) \\
&= 99\% * 0.0067\% + 5\% * (1-0.0067\%) \\
&= 0.05006298
\end{aligned}
$$

接着使用条件概率公式计算一次检测为阳性条件下被感染的概率

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_1 &= \frac{P(B_1 \mid A_1) P(A_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{99\% * 0.0067\%}{0.05006298} \\
&= 0.13\%
\end{aligned}
$$

可见,**在低患病率下,即使检测结果为阳性,但实际上被感染的的概率仅为 0.13%**. 如果直接对一次检测为阳性的人员进行隔离等措施,会浪费大量的资源.

倘若对第一次检测为阳性的人进行二次检测,此时样本空间发生改变,检测群体中感染人数占比发生变化.

$$
\mathrm{P}(A_2)=\frac{0.0067\% * 99\% * X}{5\% * (1-0.0067\%) * X + 0.0067\% * 99\% * X}=P_1=0.13\%
$$

不难发现,第二次检测时检测人数占比即为在一次检测为阳性情况下,实际被感染的概率.

同样,计算 P(B2)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_2) &= P(B_2 \mid A_2) * P(A_2)+P(B_2 \mid \overline{A_2}) * P(\overline{A_2}) \\
&= 99\% * 0.13\% + 5\% * (1-0.13\%) \\
&= 0.051222
\end{aligned}
$$

接着利用条件概率计算二次检测为阳性的条件下是感染者的概率.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_2 &= \frac{P(B_2 \mid A_2) P(A_2)}{P(B_2)} \\
&= \frac{99\% * 0.13\%}{0.051222} \\
&\approx 2.5\%
\end{aligned}
$$

可见,二次检测仍为阳性,那么此人真正被感染的概率由 0.13%提高到了 2.5%,**多进行一次检测准确性提高了约 20 倍**.

按此规律推算,

$$P_{n+1}=\frac{P_n*P(B_n|A_n)}{P_n*P(B_n|A_n)+\overline{P_n}*P(B_n|\overline{A_n})}$$
$$=\frac{P_n*p}{P_n*p+(1-P_n)*q}$$

我们编写一个 java 程序来模拟:

```
public class in {
    public static void main(String[] args) {
        double p[] = new double[10];
        double Yang_true = 0.99;// 感染者被检测为阳性的概率
        double false_Yang = 0.05;// 非感染者被检测出阳性的概率
        // p[0]为先验概率
        // p[i]为P(患病|i 次检测为阳性)
        p[0] = 0.000067;
        for (int i = 1; i <= 9; i++) {
            p[i] = p[i - 1] * Yang_true;
            p[i] = p[i] / (p[i] + (1 - p[i - 1]) * false_Yang);
        }
        for (int i = 1; i < 10; i++) {
            System.out.printf("P(感染|%d 次检测为阳性):", i);
            System.out.println(p[i]);
        }
    }
}
```

得到:

P(感染|1 次检测为阳性):0.0013249311167653221
P(感染|2 次检测为阳性):0.02559607112720986
P(感染|3 次检测为阳性):0.3421550826677523
P(感染|4 次检测为阳性):0.911490946431373
P(感染|5 次检测为阳性):0.9951197117241598
P(感染|6 次检测为阳性):0.9997523733394841
P(感染|7 次检测为阳性):0.9999874906618054
P(感染|8 次检测为阳性):0.9999993682077386
P(感染|9 次检测为阳性):0.999999680912808

可以见得,随着检测次数增加,核酸检测的准确性也在增加,在 5 次检测均为阳性的准确率已经超过 99%,只对多次检测仍为阳性的人员采取措施有效地节约了资源.

2.群体检测策略合理性分析

群体检测:多个样本合并进行一次检测,如果结果为阴性则所有人都是阴性;如果结果为阳性,则对每个样本再单独检测.下面我们通过分别计算单独检测和群体检测期望的检测次数来说明采用群体检测策略的必要性.

假设一个地区正在进行大规模核酸检测,目标是筛查 30000 人,该地区的感染率预估为 1%.

单独检测:

每个人样本都需检验一次显然需要进行 30,000 次检测,但使用群体检测策略可以大幅减少检测次数.

群体检测:

采取检测池为 15,即 15 人一组,若检测为阴性无需再进行检测,为阳性则需要再进行 15 次检测.每组不需要再次检测的概率 $a=p^{15}=0.99^{15}\approx 0.8601$,需要进行检测的概率 $b=1-a=0.1399$.

第一轮检测进行 30000/15=2000 次,其中无需进行二次检测的组数(期望值)为 2000 ∗ 0.8601 ≈ 1720,需要进行二次检测组数为 380 组.

第二轮检测需要对 380 组进行二次检测,又检测 380*15=5700 次

所以采用群体检测策略(15 人 1 组)仅需要 7700 次,节省了约 77.44%的检测次数.

那么如何确定检测池使检测次数的期望尽可能的小?

N:总检测人数

p:感染率(即每个人被感染的概率)

k:检测池的大小(每组样本数量)

第一轮检测次数: $\dfrac{N}{k}$

第二轮期望检测次数: $\dfrac{N}{k}*\left[1-(1-p)^k\right]*k$,即 $N*\left[1-(1-p)^k\right]$

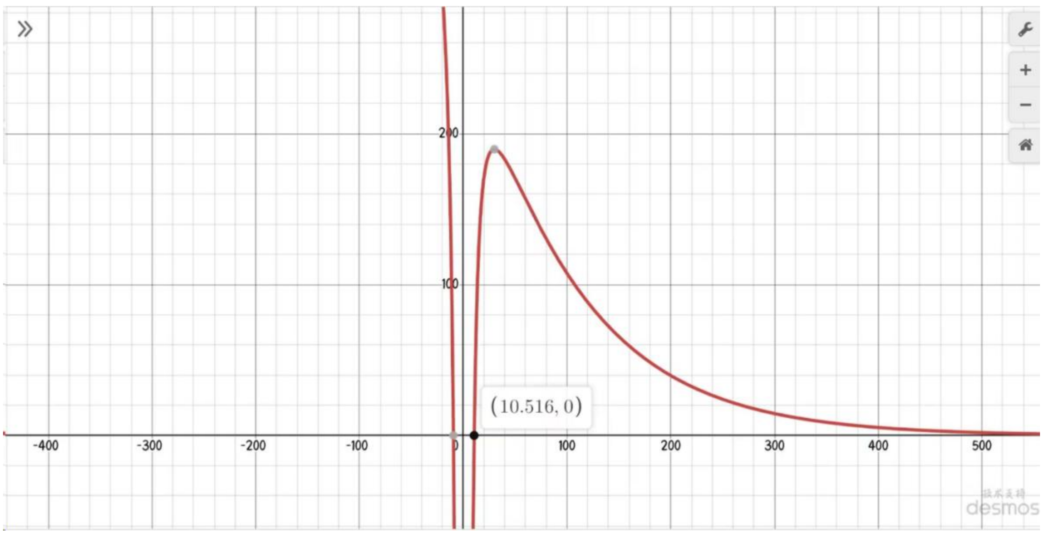
期望检测的总次数: $\mathrm{E(T)}=\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{k}}+N\left[1-(1-p)^k\right]$

上式对 k 求导,有 $\dfrac{d_{E(T)}}{d_k}=-\dfrac{N}{k^2}+N\left[-(1-p)^k*\ln(1-p)\right]$

当导数为 0 时,解出 k 值,即为使得期望检测次数最小的 k.

代入数据: $-\dfrac{30000}{k^2}-30000(0.99^k*\ln 0.99)=0$

上述方程难以手工求解,借助绘图工具绘制图像得到下图:



可以知道在 10. 516 处导数为 0, 此时有最小值, 但是由于实际应用时只能取整数, 经过计算 k=10 时, 检测次数的期望向上取整为 5869, k=11 时的数学期望向上取整为 5868. 两者差距不大, 节省了约 80. 5%的检测.

但是,实际问题中 N 的值往往很大,即使借助计算机工具,可能也难以得到精确的结果.查阅资料可以知道,实际生活中常用经验公式 $k_{opt}=\frac{1}{\sqrt{p}}$ 来估计最优的检测池大小.对于上面的例子,

$$k_{opt}=\frac{1}{\sqrt{0.01}}=10$$

与精确计算的最优检测池相差不大.

3.疫苗接种策略合理性分析

国家卫生健康委疾控局负责人崔钢在发布会上介绍,中国大陆的疫苗接种的策略是按照“两步走”方案,第一步主要是针对部分重点人群开展接种,包括从事进口冷链、口岸检疫、船舶引航、航空空勤、生鲜市场、公共交通、医疗疾控等感染风险比较高的工作人员,以及前往中高风险国家或者地区去工作或者学习的人员,尽力缓解输入性疫情防控的压力,降低本土病例发生和国内疫情爆发的风险; 第二步则是“应接尽接”,逐步在各人群当中构筑起人群的免疫屏障,来阻断病毒在国内的传播.

上述数据引用自 中国大陆 2019 冠状病毒病疫苗接种计划 - 维基百科,自由的百科全书

下面, 我将借助有效再生数和基本再生数来分析采取上述策略的合理性.

（1）优先接种重点人群策略分析

假设新冠病毒的基本再生数 R_0 在没有任何干预措施下约为 3（即每个普通感染者平均会传染 3 个人）. 假设重点人群占总人口的 5%（以 14 亿人口计, 大约 7000 万人）. 由于这些群体的工作性质, 其传播潜力假设为普通人群的 3 倍, 即 $R_0^{'}=9$, 若这些重点人群接种疫苗后, 感染风险降低 80%, 假设初始由于资金限制只能提供 7000 万疫苗.

接种前

$$R_0^{总}=5\%*9+95\%*3=3.3$$

重点人群接种后,对应的再生数（传播潜力）减少了 11%

$$R_0^{总}=9*20\%*5\%+3*95\%=2.94$$

不分重点人群接种,传播潜力下降并不明显

$$R_0^{总}=\frac{(14亿-7000万)*5\%*9+(14亿-7000万)*95\%*3+7000万*2.94}{14亿}=3.282$$

实际意义:通过优先接种重点人群,与不分人群直接接种相比能够显著降低疫情传播速度,从而为医疗系统争取更多应对时间,这种策略可以有效减缓病毒扩散,减少输入性病例引发的社区传播,为逐步扩大疫苗接种赢得窗口期.

（2）“应接尽接”策略分析

群体免疫所需的免疫覆盖率（即有免疫力人的比例）由 $\mathrm{P_c} = 1 - \frac{1}{R_0}$ 计算.

假设疫苗对预防感染的有效性为 90%（即接种疫苗后,90% 的人获得免疫）, $\mathrm{R}_0 = 3$

实际接种率 $= \frac{1-\frac{1}{3}}{0.9} \approx 74.1\%$,只有当实际接种率达到 60%时,有效再生数 R 才会小于 1,感染者占比才会逐渐减少,疫情消退.

实际意义:“应接尽接”接种后,即便病毒偶尔输入,广泛的群体免疫力能够防止大规模暴发.同时,在未达到 100% 接种率的情况下逐步解除封控政策,是基于群体免疫理论和有效再生数的科学指导.只要接种率足够高,使有效再生数降到小于 1,就可以有效控制病毒传播.在此基础上,通过动态调整防控措施,能够在防控疫情的同时,逐步恢复经济生产和社会生活.

总结

多次检测策略有效减少假阴性和假阳性结果,减少误判导致的漏检或误隔离风险.

群体检测策略通过将多个样本混合后进行一次统一检测,减少了所需的检测次数,节省了试剂和实验设备,特别是在低感染率人群中效果更为显著；同时,大大提高了检测速度,能够更快地获得检测结果.

结合多次检测策略,群体检测在实际操作中是先对混合样本进行检测,而对阳性结果再拆分进行复测,这在低感染率情况下能有效降低单次检测误差所带来的假阳性风险.具有很强的灵活性和可扩展性.通过感染率的动态监测,可以调整检测池大小和检测频率.在感染率上升时,可逐步缩小检测池大小甚至恢复单样本检测,从而有效应对疫情变化,实现检测资源的最优分配.

疫苗接种策略优先覆盖高风险人群.首先对高风险群体进行优先接种,有助于迅速建立局部免疫屏障,减少输入性传播风险,从而延缓疫情的扩散速度.这种策略基于先验概率的考量,能够在疫苗供应有限的情况下,实现防控效果的最大化.随着接种范围的扩大,逐步提升普通人群的疫苗覆盖率,可以进一步压低有效再生数,使疫情趋于可控.