1. A．1＋101＝110　　B．中国人民是伟大的。

C．全体起立！　　D．计算机机房有空位吗？

在上面句子中，是命题的是(**B**)

2．设 Q（x）：x 是有理数，R（x）：x 是实数。命题“某些实数是有理数”在谓词逻辑中的符号化公式是(**D**)

A．$(\forall x)(Q(x) \to R(x))$　　B．$(\forall x)(Q(x) \wedge R(x))$

C．$(\exists x)(Q(x) \to R(x))$　　D．$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$

3．对于集合{1, 2, 3}，下列关系中不等价的是(**B**)

A．R={<1,1>，<2,2>, <3,3>}

B．R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,4>}

C．R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<3，2>,<2,3>}

D．R={<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<1,3>, <3,1>,,<3,3>,<2,3>,<3,2>}

4．设 A={1，2，3，4，5}，B={a，b，c，d，e}，以下哪个函数是从 A 到 B 的双射函数(**B**)

A．F ={<1，b>，<2，a>，<3，c>，<1，d>，<5，e>}

B．F={<1，c>，<2，a>，<3，b>，<4，e>，<5，d>}

C．F ={<1，b>，<2，a>，<3，d>，<4，a>}

D．F={<1，e>，<2，a>，<3，b>，<4，c>，<5，e>}

5．下列判断不正确的是(**D**)

A．$\{n\sqrt{2} | n \in N\}$ 关于普通加法构成群

B．$\{n\sqrt{2} | n \in N\}$ 关于普通乘法构成独异点

C．所有实数对 $<a,b>$ 关于 $\circ$ 运算，其中 $<a,b>\circ<c,d>=<a+c,b+d>$ 构成群

D．实数集 R 关于 $\circ$ 运算构成半群，其中 $a \circ b = 2(a+b)$

二、判断题（本大题 20 分，每小题 4 分）

1、命题公式 $p \to (\neg p \wedge q)$ 是重言式。 （ × ）

2、 $((\forall x)A(x) \to B) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \to B)$。 （ √ ）

3、设 A={a, b, c}, R∈ A×A 且 R={< a, b>,< a, c>}, 则 R 是传递的。 （ √ ）

4、n 阶无向完全图 K_n 的每个顶点的度都是 n。 （ × ）

5、根树中除一个结点外，其余结点的入度为 1。 （ × ）

三、解答题（计算或者证明题：本大题 50 分，每小题 10 分）

1．设命题公式为 $\neg Q \wedge (P \to Q) \to \neg P$。

（1）求此命题公式的真值表；

（2）求此命题公式的析取范式；

（3）判断该命题公式的类型。

P	Q	¬Q	P→Q	$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)$	$\neg P$	$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg P$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

（2） $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg(\neg Q\wedge(\neg P\vee Q))\vee\neg P$

$\Leftrightarrow$ （ $Q\vee\neg(\neg P\vee Q))\vee\neg P\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\vee\neg P)\Leftrightarrow 1$（析取范式）

$\Leftrightarrow$ （¬P∧¬Q）∨（¬P∧Q）∨（P∧¬Q）∨（P∧Q）（主析取范式）

（3）该公式为重言式

2．用直接证法证明：

前提：$(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$，$(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))$

结论：$(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$。

2、证(1) $(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))$ P

(2) $C(c)\wedge Q(c)$ ES (1)

(3) $(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$ P

(4) $C(c)\rightarrow W(c)\wedge R(c)$ US(3)

(5) $C(c)$ T(2)I

(6) $W(c)\wedge R(c)$ T(4,5)I

(7) $R(c)$ T(6)I

(8) $Q(c)$ T(2)I

(9) $Q(c)\wedge R(c)$ T(7,8)I

(10) $(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$ EG(9)

3．设 R 是集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$上的整除关系。

(1) 给出关系 R;

（2） 给出 COV A

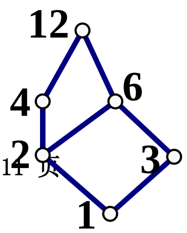
（3） 画出关系 R 的哈斯图;

（4） 给出关系 R 的极大、极小元、最大、最小元。

3、解 R={<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,6>，<1,12>,<2,4>,<2,6>，<2,12>，<3,6>，<3,12>，<4,12>,<6,12>}∪I_A

COV A={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>， <3,6>， <4,12>， <6,12>}

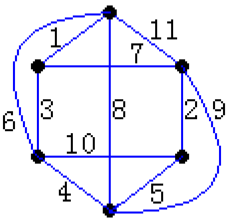
作哈斯图如右：



极小元和最小元为 1;

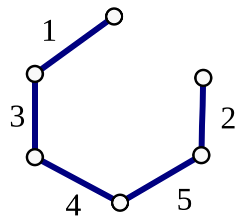
极大元和最大元为 12

4. 如图所示带权图，用避圈法（Kruskal 算法）求一棵最小生成树并计算它的权值。



(2)

解

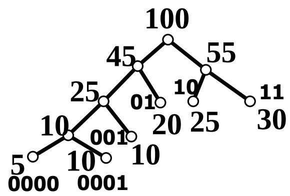


$C(T)=1+3+4+5+2=15$

5、设字母 a,b,c,d,e,f 在通讯中出现的频率为：$a:30\%,b:25\%,c:20\%$，$d:10\%,e:10\%,f:5\%$。试给出传输这 6 个字母的最佳前缀码？问传输 1000 个字符需要多少位二进制位？

解　先求传输 100 个字符所需要的位数。$a:30,b:25,c:20,d:10,e:10,f:5$ 是依照出现频率得出的个数。构造最优二叉树如下：

5	10	10	20	25	30
	15	10	20	25	30
		25	20	25	30
			25	45	30
				45	55
					100



需要二进制位数为 $10W(T)=10\times\{4\times(5+10)+3\times10+2\times(20+25+30)\}=2400$

《离散数学》模拟试题

专升本 2013.12

一．填空

（1）设 P：你努力。Q：你失败。在命题逻辑中，命题：“除非你努力，否则你将失败。” 可符号化为：（ ¬P→Q ）。

（2）对于命题公式 A，B，当且仅当(A→B)是重言式时，称“A 蕴含 B”，并记为 A⇒B。

（3）设 P ，Q 是命题公式，德·摩根律为：¬（P ∧ Q）⇔(¬P∨¬Q)。

（4）令 M(x)：x 是大学生，P(y)：y 是运动员，H(x, y)：x 钦佩 y。则命题“有些大学生不钦佩所有运动员。”可符号化为(∃x(M(x) ∧∀y (P(y)→ ¬H(x, y))))。

（5）设集合 E={a, b, c}，E 的幂集 P(E)＝ ({Φ, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}})。

（6）设 R 为定义在集合 A 上的一个关系，若 R 是(自反的，对称的，传递的)，则 R 称为是集合 A 上的等价关系。

（7）设集合 A 上的关系 R 和 S，R={<1, a>, <3, b>, <4, d>, <2, e>}，　S={<a, b>, <b, c>, <c, d>, <a, d>}，则 R∘S= ({<1, b>, <1, d>, <3, c>})。

（8）一个代数系统<S, ＊ >，其中 S 是非空集合。*是 S 上的一个二元运算，如果(运算*是封闭的)，则称代数系统<S, ＊ >为广群。

（9）设图 G＝ <V，E >，如果有图 G´=<V´，E´>，且(V′⊆V　′E⊆E　)，则称 G´是 G 的子图。

（10）一棵有 n 个顶点的树含有(n－1)边。　P322

(11) 如果二元运算运算*对集合 A 封闭，则意味着对任意的 $a,b \in A$有

(a*b∈A)。

(12) 设非空集合 A 的幂集为 $\rho(A)$，则在代数系统 $<\rho(A),\cap,\cup>$ 中，对于∪运算的幺元是(Φ)；

(13) 设 G 是个具有 5 个结点的简单无向完全图，则 G 有(5*(5-1)/2)条边。

(14) 设 G 是个无自环的无向图，其中有 2 个结点的度数为 4，其余结点的度为 2，有 6 条边。则 G 中共有(2)个结点。因此，G 是个(多重)图。

二．判断下列命题的对错。正确的在括号内填√,错误的在括号内填×。

1. “我们要努力学习” 是命题。 (×)
2. 命题“如果雪是黑的，那么太阳从东方出”是假命题。 (×)
3. (∃x)(A(x)→B(x))⇔ (∀x)A(x)→ (∃x)B(x) 。P70 (√)
4. 命题公式 (¬Q∧(P→Q))→¬P 是重言式。 P19, 永真式 (×)
5. 命题公式(P∧Q)∨(¬R→T)是析取范式。P31 析取范式定义 (×)
6. R(x)：“x 是大学生。” 是命题。 (×)
7. 设 A，B 是任意集合，则 A⊕B ＝(A−B) ∪(B−A)。P92 (√)
8. 集合 A={1,2,3}上的关系{<1,1>,<1,2>,<3,2>,<2,3>}是对称的。 (×)
9. 集合 A 的幂集 $\rho(A)$ 上的包含关系是偏序关系。 P140 (√)

10. 每个元素都有逆元的半群是群。 不一定有幺元 （ × ）

11. 设 X={1, 2, 3}, Y={a, b }。关系 F={<1, a>,<2, b>,<2, a>}是函数。 （ × ）
P147

12. n 阶无向完全图 K_n 的每个顶点的度都是 n。 顶点数-1 （ × ）

13. 设 I 是整数集，＋是 I 上的普通加法，则代数系统<I, +>是群。 （ √ ）

14. 经过图中每条边一次且仅一次的回路称为汉密尔顿回路。 （ × ）

15. 根树中除根结点外，其余结点的入度都为 1。 （ √ ）

16. 设 A，B 都是合式公式，则 $A \wedge B \to \neg B$ 也是合式公式。 （ √ ）

17. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 。 （ √ ）

18. 对谓词公式（∀x）（P（y）∨Q（x,y））∧R（x,y）中的自由变元进行代入后得到公式（∀x）（P（z）∨Q（x, z））∧R（x,y）。 （ √ ）

19. 对任意集合 A、B、C，有 $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$。P95 （ √ ）

20. 一个结点到另一个结点可达或相互可达。 P284 (×)

三、在每小题的备选答案中只有一个正确答案，将正确答案序号填入下列叙述中的__________内。

1. (1) 如果天气好，那么我去散步。 (2) 天气多好呀！
(3) x=3。 (4) 明天下午有会吗？
在上面句子中 _____________ 是命题。 (1)

2. 设：P：王强身体很好；Q：王强成绩很好。命题“王强身体很好，成绩也很好。”在命题逻辑中可符号化为_____________。(4)
（1）$P \vee Q$ （2）$P \to Q$
（3）$P \wedge \neg Q$ （4）$P \wedge Q$

3. 设 S（x）：x 是学生，J（y）：y 是教师，L（x，y）：x 钦佩 y。命题“所有学生都钦佩一些教师”的符号化公式是_____________ 。(3)
（1） ∀x（S（x）∧∀y（J（y）∧L（x，y）））
（2） ∀x∃y（S（x）→（J（y）→L（x，y）））
（3） ∀x（S（x）→∃y（J（y）∧L（x，y）））
（4） ∃y∀x（S（x）→（J（y）∧L（x，y）））

4. 下列式子是合式公式的是_____________ 。(2) P9
（1）$(P \vee Q \wedge \to Q)$ （2） $\neg(P \wedge (Q \vee R))$
（3）$(P \neg Q)$ （4）$\wedge Q \to \wedge R \to P$

5. 下列式子中正确的是_____________ 。(4)
（1）¬（∀x）P（x）⇔（∃x）P（x）
（2）¬（∀x）P（x）⇔（∀x）¬P（x）
（3）¬（∃x）P（x）⇔（∃x）¬P（x）
（4）¬（∃x）P（x）⇔（∀x）¬P（x）

6. 设 S={Φ，3，a，{a}}，则 S 的幂集 P（S）有___________个元素。(3) P85
（1）8 （2）12 （3）16 （4）32

7. 设 R 为定义在集合 A 上的一个关系，若 R 是______，则 R 为等价关系。(2)
（1） 反自反的，对称的和传递的 （2）自反的，对称的和传递的
（3） 自反的，反对称的和传递的 （4）对称的，反对称的和传递的

8. 设 A={1，2，3}，B={1，2}，则下列命题不正确的是_____________ 。(3)

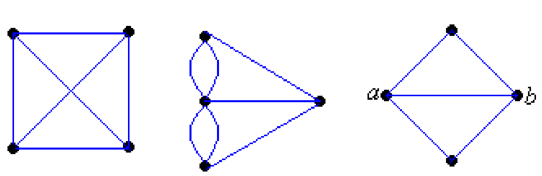
（1） A∩B={1，2}　　　　　　（2） A－B={ 3}　　　P90
（3） A⊕B={2, 3}　　　　　　（4） B⊆A

9. 命题公式 P 蕴涵 Q 是指____________ 。（3）
（1） P 与 Q 都是重言式　　　　（2） P∧Q 是重言式
（3） P→ Q 为重言式　　　　　（4）Q ↔ R 为重言式

10. 设 A={1，2，3，4，5}，B={6，7，8，9，10}，以下哪个关系是从 A 到 B 的入(单)射函数___________ 。（2）　一一对应
（1） F = {<1，7>，<2，6>，<3，5>，<1，9>，<5，10>}
（2） F = {<1，8>，<2，6>，<3，7>，<4，9>，<5，10>}
（3） F = {<1，7>，<2，6>，<3，5>，<4，6>}
（4） F = {<1，10>，<2，6>，<3，5>，<4，8>，<5，10>}

11．运算“－”是整数集 I 上的普通减法，则代数系统 <I, －> 满足下列性质___________ 。（4）
（1）结合律　　（2）交换律　　（3）有零元　　（4） 封闭性

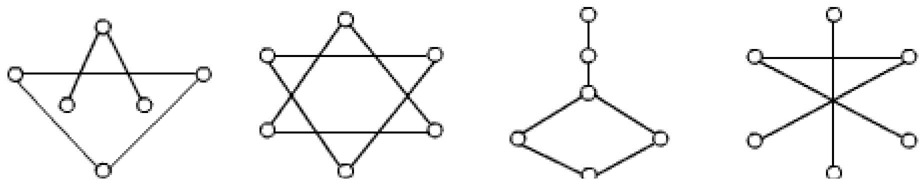
12. 下列为欧拉图的是___________ 。（4）　P301，P302



(1)　(2)　(3)　(4)

13. 设 I 是整数集，N 是自然数集，P（S）是 S 的幂集，“×，＋，∩”是普通的乘法，加法和集合的交运算。下面代数系统中___________是群。（2）
（1）<I，×>　（2）<I，＋>　（3）<P(S)，∩>　（4）<N，+>

14. 下列四个有 6 个结点的图___________是连通图。　P281（3）


(1)　(2)　(3)　(4)

15. 有 m 条边的图的结点度数总和为__________。　**P274（4）**
（1） m　　　　　　（2）m－1
（3）2（m-1）　　　（4）2m

16. 设：p：刘平聪明。q：刘平用功。在命题逻辑中，命题：“刘平不但聪明，而且用功” 可符号化为：________ 。（1）
（1）P∧Q　　（2）¬P∨Q
（3）P∨¬Q　　（4）P∧¬Q

17. 对于命题公式 A，B，当且仅当 _______ 是重言式时，称“A 蕴含 B”，并记为 A⇒B。 （2）

（1）$\neg A \to \neg B$　　（2）$A \to B$

（3）$A \to \neg B$　　（4）$\neg A \to B$

18．设 Q（x）：x　是有理数，R（x）：x 是实数。命题“每一个有理数是实数”在谓词逻辑中的符号化公式是 ＿＿＿＿＿　（1）

（1）$(\forall x)(Q(x) \to R(x))$　　（2）$(\forall x)(Q(x) \wedge R(x))$

（3）$(\exists x)(Q(x) \to R(x))$　　（4）$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$

19. 设[a,b]和（c,d）分别表示实数集上的闭区间和开区间，则 $([0,4] \cap [2,6]) - (1,3) =$ ＿＿＿＿＿　（1）

（1）[3，4]　（2）(3,4)　（3）{3,4}　（4）[0，1] ∪ [3, 6]

20. 对于集合{1, 2, 3}，下列关系中不等价的是 ＿＿＿＿＿　（2）

（1）　R={<1,1>，<2,2>, <3,3>}

（2）　R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,4>}

（3）　R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<3，2>,<2,3>}

（4）　R={<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<1,3>, <3,1>,,<3,3>,<2,3>,<3,2>}

21．集合 S 的幂集 P(S)关于集合的并运算“∪”的零元为 ＿＿＿＿＿　（2）

（1）Φ　（2）S　（3）没有　（4）P(S)

22．给定无孤立点无向图 G 的边集：{（1，2)，(1，3)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，4)，(3，5)}，找出图 G 的一棵生成树为 ＿＿＿＿＿　P324（1）

（1）{（1，2)，(1，3)，(2，4)，(3，5)}

（2）{（1，2)，(1，3)，(2，3)，(2，4)}

（3）{（1，2)，(1，3)，(3，5)，(4，5)}

（4）{（1，2)，(3，4)，(3，5)，(4，5)}

四、完成下列问题

（1）求此命题公式 $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P$ 的真值表；

（2）求命题公式 $(P \wedge (Q \to R)) \to S$ 的析取范式。

真值表：

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg Q \wedge (P \to Q)$	$\neg P$	$(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

析取范式：　　P31

$(P \wedge (Q \to R)) \to S$

$\Leftrightarrow \neg (P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$

六、用推理规则证明　　P75

$$\forall x\,(P(x)\to Q(x)) \Rightarrow \forall x\,P(x)\to \forall x\,Q(x)$$

证明:

① $(\forall x)P(x)$	P（附加前提）
② $P(u)$	US(全称指定规则),①
③ $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	P
④ $P(u)\to Q(u)$	US,③
⑤ $Q(u)$	T,②,④,I_{11}
⑥ $(\forall x)Q(x)$	UG(全称推广规则),⑤
⑦ $(\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$	CP

七、求下面公式的主析取范式与主合取范式，并写出相应的成真赋值

$$\neg((P\to Q)\wedge(R\to P))\vee\neg((R\to\neg Q)\to\neg P)$$ P34

P	Q	R	$\neg((P\to Q)\wedge(R\to P))\vee\neg((R\to\neg Q)\to\neg P)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

主析取范式: $m_{110} \vee m_{101} \vee m_{100} \vee m_{010}$

$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

主合取范式: $m_{111} \wedge m_{011} \wedge m_{001} \wedge m_{000}$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

八、用直接证法证明：

前提：

$(\forall x)(C(x) \to (W(x) \wedge R(x)))$，$(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$

结论：$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$。

证明:

前提: $(\forall x)(C(x) \to (W(x) \wedge R(x)))$

$(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$

结论: $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$

推理：

①	$(\forall x)(C(x) \to (W(x) \wedge R(x)))$	P
②	$(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$	P
③	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(存在指定规则), ②
④	$C(a) \to (W(a) \wedge R(a))$	US, ①
⑤	$C(a)$	T, ③,I_1
⑥	$W(a) \wedge R(a)$	T, ④⑤,I_{11}
⑦	$Q(a)$	T, ③,I_2
⑧	$R(a)$	T, ⑥,I_2
⑨	$Q(a) \wedge R(a)$	T, ⑦, ⑧,I_9
⑩	$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$	EG(存在推广规则), ⑨

九、设 **R** 是集合 **A = {1, 3, 4, 6, 8, 9, 18}**上的整除关系。　　　P140

（1）　给出关系 **R**;

（2）　给出 **COV A**

（3）　画出关系 **R** 的哈斯图;

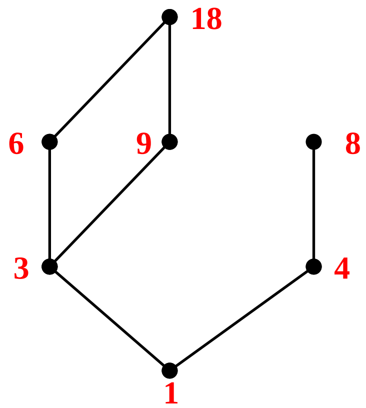
（4）　给出关系 **R** 的极大、极小元、最大、最小元。

解

(1)R={〈1, 1〉, 〈1, 3〉, 〈1, 4〉, 〈1, 6〉, 〈1, 8〉, 〈1, 9〉, 〈1, 18〉, 〈3, 3〉, 〈3, 6〉, 〈3, 9〉, 〈3, 18〉, 〈4, 4〉, 〈4, 8〉, 〈6, 6〉, 〈6, 18〉, 〈8, 8〉, 〈9, 9〉, 〈9, 18〉, 〈18, 18〉}

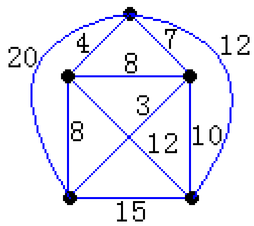
(2) COVR={〈1, 3〉, 〈1, 4〉, 〈3, 6〉, 〈3, 9〉, 〈4, 8〉, 〈6, 18〉, 〈9, 18〉}

(3)

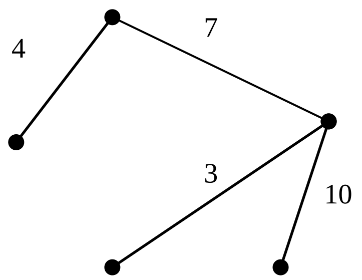


（4）R 的极大元为 8 和 18、没有最大元，极小元为 1、最小元是 1.

十、求带权图 G 的最小生成树，并求最小生成树的权。　P326



(1)



最小生成树的权 W(T)＝3＋4＋7＋10＝24

十一、给定权为 1，9，4，7，6 和 3,构造一颗最优二叉树，并求此最优二叉树的权 。P334

解

1 3 4 6 7 9

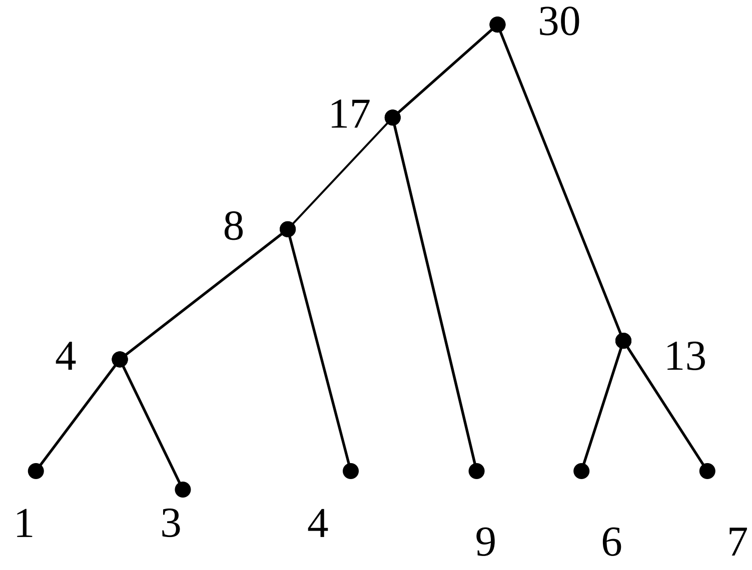
4 4 6 7 9

8 6 7 9

8 13 9

13 17

30



t 片树叶 V_i （i=1, 2, …, t), 带权 W_i， $L(V_i)$为 V_i的层数, 最优二叉树的权。

$W(T)= W_1*L(V_1)+ W_2*L(V_2)+\cdots+ W_t*L(V_t)$

最优二叉树的权 W(T)=(1+3)*4+4*3+(9+6+7)*2=72