Review

何军辉
hejh@scut.edu.cn

题型

- 填空题 10
- 计算题 80
- 证明题 10

概念

- 误差的来源
  - 模型误差、观测误差、方法误差、舍入误差
- 误差（也称绝对误差）
  - 近似值-准确值：$e^* = e^*(x^*) = e^* = x^* - x$
- 误差限
  - 误差的绝对值不超过的正数：$|e^*| = |x^* - x| \leq \epsilon^* = \epsilon(x^*)$
  - 四舍五入之后所得到的近似值，误差限是末位的半个单位
- 相对误差
  - $e_r^* = \frac{x^* - x}{x}, e_r^* = \frac{e^*}{x^*}$
- 相对误差限：$\epsilon_r^* = \frac{\epsilon^*}{|x^*|}$

概念

- 有效数字
  - 若近似值 x^* 的误差限为该值的某一位的半个单位，且从该位开始往左数到 x^* 的第一位非 0 数字共有 n 位, 则称近似值 x^* 具有 n 位有效数字.
    - 四舍五入的近似值，它的有效数字位等于从该近似值的末位开始往左数起到第一位非0数字的位数
  - 与误差限的关系
    - $x^* = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \times 10^p$ （ $\alpha_1 \neq 0$）
    - 若有 $|x^* - x| \leq \frac{1}{2}\times 10^{p-n}$，则想 x^* 具有 n 位有效数字.
    - 已知近似值的误差限求有效数字位数
    - 已知有效数字位数求近似值的误差限

概念

有效数字

- 与相对误差限的关系
- 若近似数$x^* = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \times 10^p$具有$n$位有效数字（$n \leq m$），则其相对误差限为

$$\epsilon_r^* = \frac{\epsilon^*}{|x^*|} \leq \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-(n-1)}$$

- 若相对误差限满足关系式

$$\epsilon_r^* = \frac{\epsilon^*}{|x^*|} \leq \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则x^*具有n位有效数字

概念

- 数值计算应注意的5种问题
  - 避免两个相近的数相减
    - 有效数字位减少；变换计算公式
  - 要防止小数被大数“吃掉”而使有效数字位损失
    - 指数对齐
  - 要注意减少运算的次数
    - 误差累积
    - 秦九韶算法
  - 避免做除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法
    - 溢出/舍入误差增大
  - 要选择数值稳定的计算公式
    - 误差可控

概念

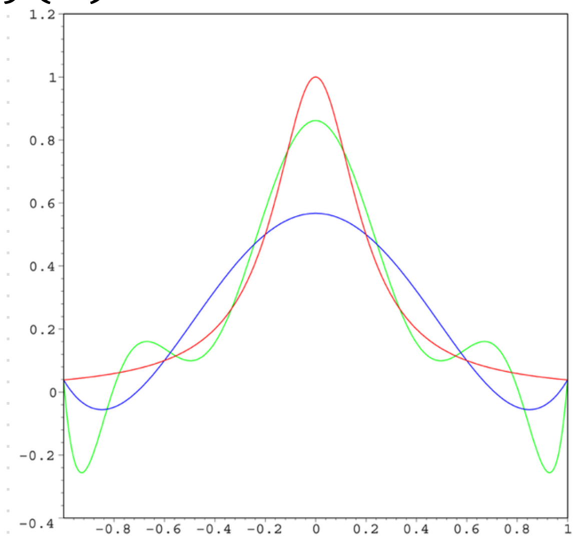
- 插值节点、被插值函数、插值基函数、插值函数
  - $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots (x_n, y_n)$
  - $f(x)$
  - $l_i(x) = \dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$
  - $p_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n$
- n阶差商
  - $f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \dfrac{f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}) - f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{x_0 - x_n}$
  - $f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{f(x_i)}{\omega_k'(x_i)}$

    其中$\omega_k'(x_i) = (x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_k)$

概念

- Runge（龙格）现象
  - 高次插值多项式并不一定很好近似被插函数
    - 红色：$f(x)$；蓝色：$p_5(x)$；绿色：$p_9(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad (-1 \le x \le 1)$$



- 分段插值
  - 把插值区间分为若干段，然后在每个分段上使用低次插值多项式来近似代替 $f(x)$

概念

- 插值比较
  - 拉格朗日/牛顿高阶插值：龙格现象
  - 分段线性：插值节点函数值连续，但导数不连续
  - Hermite插值：插值节点函数值连续，导数也连续，但分段Hermite插值不够光滑（二阶导数不连续）
  - 三次样条插值：
    - 插值函数在节点处连续
    - 其一阶导数节点处连续
    - 其二阶导数节点处连续
    - 插值边界条件

概念

最小二乘数据拟合

- 以“偏差的平方和最小”为原则选择近似函数的方法称为最小二乘法.
- $min \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2$

Newton-Cotes系数$c_i^{(n)}$

- $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} (b-a) c_i^{(n)} f(x_i)$

$$c_i^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{n \cdot i!\,(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i} dt$$

- $c_i^{(n)}$仅依赖于n和 i，不依赖于被积函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$
- 可预先计算Newton-Cotes系数表，系数存在规律

概念

求积公式的代数精度

- 对一般求积公式，如果当$f(x)$为 任意一个次数不高于n次的代数多项式时，积分近似公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k)$$

精确成立，而当$f(x)$为$n+1$次代数多项式时不精确成立，则称该积分近似公式具有n次代数精度

- 梯形求积公式具有1次代数精度.
- Simpson求积公式的代数精度为3.
- Newton-Cotes求积公式至少具有n次代数精度，当n为偶数时，积分代数精度至少为$n+1$次

概念

- 向量范数
  - 非负数、齐次性、三角不等式
  - 1范数、2范数、 ∞范数、 p 范数
- 矩阵范数
  - 非负数、齐次性、三角不等式、乘法不等式
  - 1范数、∞范数、 F 范数、2范数
- 矩阵范数与向量范数是相容
  - $\|\boldsymbol{AX}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{X}\|$
- 谱半径
  - $\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$，谱半径$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{\boldsymbol{1 \leq i \leq n}} |\lambda_i|$

概念

迭代法收敛阶

设序列$\{x_k\}$收敛于x^*，令$\epsilon_k = x^* - x_k$，设$k \to \infty$时，有

$$\frac{|\epsilon_{k+1}|}{|\epsilon_k|^p} \to c \ (c > 0\text{为常数})$$

则称序列$\{x_k\}$是p阶收敛.

- 当$p = 1$时，称为线性收敛
- 当$p = 2$时，称为二阶收敛（几何收敛）
- 当$1 < p < 2$时，称为超线性收敛

证明

- 插值公式及其误差估计
  - 插值公式
    - 线性插值
    - 二次插值误差
    - n次插值误差
    - Hermite插值误差

    1. 根据基函数通过插值节点推导基函数
    2. 插值基函数函数值（导数值）加权求和
  - 插值误差估计

    1. 根据误差余项定义辅助函数
    2. Rolle（洛尔）定理

线性拟合正规方程组

1. 偏差平方和

$$\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_k) = \sum_{m=1}^{n} (y_m - a_0 - a_1 x_{m1} - a_2 x_{m2} - \cdots - a_k x_{mk})^2$$

2. 根据多元函数求极小值方法，对$\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_k)$分别求关于$a_0, a_1, \cdots, a_k$的偏导数并令其等于0

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0 \ (i = 0,1, \cdots, k)$$

3. 解方程组得到$a_0, a_1, \cdots, a_k$

证明

- 求积公式及其误差估计
  - 求积公式
    - 梯形求积公式（线性插值近似被积函数）
    - Simpson求积公式（二次插值近似被积函数）
    - Newton-Cotes求积公式（n次插值近似被积函数）
    - 复化梯形求积公式（积分区间n等分，每个子区间梯形求积）
    - 复化Simpson求积公式（积分区间n=2m等分，每两个子区间应用Simpson求积公式）
  - 误差估计
    - 梯形求积公式（插值余项+积分中值定理）
    - Simpson求积公式（构造三次插值多项式，再利用插值余项+积分中值定理）
    - 复化求积公式（求积公式区误差+连续函数性质）

证明

- 方程右端误差对解的影响
- 系数矩阵误差对解的影响
  - 条件数$Cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$
- 线性方程组迭代法
  - 一般收敛性理论（迭代矩阵的谱半径$\rho(\boldsymbol{M}) < 1$）
  - 误差估计：$\|\boldsymbol{X}^{(k)} - \boldsymbol{X}^*\| \le \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{X}^{(k-1)} - \boldsymbol{X}^{(k)}\| \le \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{X}^{(0)}\|$
  - 强对角占优或者弱对角占优且不可约矩阵收敛性
    - Jacobi迭代、Seidel迭代一定收敛
    - 若松弛因子ω满足$0<\omega\le 1$，则松弛迭代一定收敛.

证明

- 线性方程组迭代法
  - Jacobi、Seidel和SOR迭代收敛充要条件
- 非线性方程迭代法
  - 收敛性条件
    - $|\varphi'(x)| \le q < 1$
    - $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x - y|$，$0 \le q < 1$
  - 误差估计
    - $|x_k - x^*| \le \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|$
    - $|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-q}|x_{k+1} - x_k|$
  - 迭代法收敛阶定理
    - P阶收敛

计算

- 数值运算中的误差估计
  - 一元泰勒展开取线性项估计误差
  - 多元泰勒展开取线性项估计误差
  - 误差绝对值→误差限，由误差/误差限计算相对误差/相对误差限
- 代数插值及误差估计
  - Lagrange插值
  - Newton插值
- 数据拟合
  - 单变量线性拟合
  - 多变量线性拟合
  - 多项式拟合：非线性线性化拟合

计算

- 数值求积公式
  - 梯形求积公式
  - Simpson求积公式
  - 复化梯形求积公式
  - 复化Simpson求积公式
  - 高斯求积公式
- 线性方程组高斯消去法
  - 顺序高斯消去法
  - 列主元高斯消去法
  - 全主元高斯消去法

计算

- 线性方程组分解法
  - 直接LU分解
  - 平方根法
  - LDL^T分解法
- 线性方程组迭代法
  - Jacobi迭代
  - Seidel迭代
  - SOR迭代

计算

- 非线性方程求根
  - 对分法
  - 迭代法
    - 一般迭代法
    - 松弛迭代法
    - 埃特金迭代法
  - 牛顿法
  - 割线法


Thank You!