诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2021-2022-2 学期《概率论与数理统计》试卷 A

注意事项：1. 所有答案请答在答题卡上，答在试卷上无效；
2. 选择题请用 2B 铅笔涂黑；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共七道大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、选择题（共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

1. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄的，30 个白的，现在两个人不放回地依次从袋中随机各取一球。则第二人取到黄球的概率是(　　).

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{3}{5}$　(D) $\frac{4}{5}$

答案 (B)

2. 设 A，B 是两个随机事件，$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{4}{5}$，$P(B|\overline{A})=\frac{5}{6}$，则(　　).

(A)$P(\overline{A}|B)=\frac{1}{2}$　(B)$P(\overline{A}|B)=\frac{3}{4}$　(C)$P(\overline{A}|B)=\frac{5}{8}$　(D)$P(\overline{A}|B)=\frac{12}{25}$

解. (C)

由已知有$P(\overline{A})=\frac{3}{5}$

$$\therefore P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$$

3. 若 $X\sim(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$，那么 (X,Y) 的联合分布为(　　).

(A) 二维正态分布，且 $\rho=0$　　(B) 二维正态分布，且 ρ 不定

(C) 未必是二维正态分布　　(D) 以上都不对

答案 (C)

座位号________ 线 专业班级________ 学院________ (密 封 线 内 不 答 题) 封 学号________ 密 姓名________

4. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，其中 X_1 在[0，6]上服从均匀分布，X_2 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布，记 $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$，则 Y 的方差 $Var[Y] = (\quad)$.

(A) 34 (B) 14 (C) 10 (D) 26

答案 (A)

解. $DY = D(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = DX_1 + 4DX_2 + 9DX_3 = \frac{6^2}{12} + 4\times1 + 9\times3 = 34$

5. 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著水平 0.05 下接受 $H_0: \mu = \mu_0$，那么在显著水平 0.01 下，下列结论中正确的是(　　).

（A）必须接受 H_0　　（B）可能接受，也可能拒绝 H_0

（C）必须拒绝 H_0　　（D）不接受，也不拒绝 H_0

答案 (A)

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}$ 是分别来自两个正态总体 $N(-1,4)$ 和 $N(2,5)$ 的样本，且相互独立，S_1^{*2} 和 S_2^{*2} 分别是两个样本的修正样本方差，则服从 $F(7,9)$ 的统计量是(　　).

(A) $\frac{2S_1^{*2}}{5S_2^{*2}}$　(B) $\frac{4S_1^{*2}}{5S_2^{*2}}$　(C) $\frac{5S_1^{*2}}{2S_2^{*2}}$　(D) $\frac{5S_1^{*2}}{4S_2^{*2}}$

答案 (D)

解. $\dfrac{\frac{7S_1^{*2}}{4\times7}}{\frac{9S_2^{*2}}{5\times9}} = \frac{5S_1^{*2}}{4S_2^{*2}} \sim F(7,9)$

7. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \le 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \qquad (a>0, b>0)$$

为概率密度，则 a, b 应满足(　　).

(A) $a+b=2$ (B) $3a+2b=4$ (C) $2a+3b=4$ (D) $a+b=1$

答案 (C)

解. 由已知条件可得

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\mathrm{d}x + b\int_{0}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = 1,$

即 $2a+3b=4$.

8. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z=X-0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为(   ).

(A) 0.4 (B) 0.5 (C) 0.1 (D) 0.9

答案 (D)

9. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(   ).

(A) $F^2(x)$ (B) $F(x)F(y)$ (C) $1-[1-F(x)]^2$ (D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

答案 (A)

解. 由分布函数的定义及随机变量 X,Y 独立同分布，可得

$$F_Z(x)=P\{Z\le x\}=P\{\max\{X,Y\}\le x\}=P\{X\le x,Y\le x\}=P\{X\le x\}P\{Y\le x\}=F_X(x)F_Y(x)=F^2(x)$$

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^{*2} 分别为样本均值和修正样本方差. 若 $\bar{X}+kS^{*2}$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k=$ (   ).

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

答案 (B)

解. 因为 $E(\bar{X})=E(X),E(S^{*2})=D(X)$, 于是

$$E(\bar{X}+kS^{*2})=E(\bar{X})+kE(S^{*2})=E(X)+kD(X)=np+knp(1-p)=np^2$$

由此可得 $k=-1$.

11. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$ $(i=1,2,\cdots)$,

那么 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于(   ).

(A) $\mu+\sigma^2$ (B) σ^2 (C) μ^2 (D) $\mu^2+\sigma^2$

答案 (D)

解. 根据辛钦弱大数定理,

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$以概率收敛于$\mathrm{E}\left(X^2\right)$

$\mathrm{E}\left(X^2\right)=DX+\left(EX\right)^2=\sigma^2+\mu^2$

12. 设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为

$$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$$

记$F_z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_z(z)$的间断点个数为(　).

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

答案 (B)

解. $Z=XY$ 的分布函数为

$F_z(z)=P\{XY\le z\}=\ P\{XY\le z\mid Y=0\}P\{Y=0\}\ +P\{XY\le z\mid Y=1\}P\{Y=1\}$

$=\frac{1}{2}P\{XY\le z\mid Y=0\}\ +\frac{1}{2}P\{XY\le z\mid Y=1\}$

$=\frac{1}{2}[P\{XY\le z\mid Y=0\}+P\{X\le z\}]$

$$=\begin{cases}\dfrac{\Phi(z)}{2}, & z<0\\ \dfrac{1+\Phi(z)}{2}, & z\ge 0\end{cases}$$

所以 $z=0$ 为 $F_z(z)$ 的唯一间断点.

二、(10 分)

设甲、乙、丙三个地区爆发了某种流行病，三个地区的总人数比为 2:5:3，而三个地区感染此病的比例分别为 6%，4%，3%。现从这三个地区任意抽取一个人，问（1）此人感染此病的概率是多少？（2）如果此人感染此病，此人选自乙地区的概率是多少？

（注：最后结果可以是小数或者分数，但分数不能四舍五入写成小数）

解　设 B=｛此人感染此病｝，

A_1，A_2，A_3 分别表示此人选自甲、乙、丙三个地区

由已知，有 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.3$，

$$P(B|A_1)=0.06，P(B|A_2)=0.04，P(B|A_3)=0.03$$

（1）由全概率公式有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=0.2\times0.06+0.5\times0.04+0.3\times0.03=0.041 \qquad (5分)$$

（2）由贝叶斯公式有

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.5\times0.04}{0.041}=\frac{20}{41} \quad （10 分）$$

三、(10 分)

一个复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成。在运行期间，每个部件损坏的概率为 0.1，而为了使整个系统正常工作，至少必需有 84 个部件工作，求整个系统能正常工作的概率。

附：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.5)$=0.9332，$\Phi(2)$=0.9773，$\Phi(2.5)=0.9938$

解：系统中能够正常工作的部件数 X 服从二项分布：$X\sim B(100,0.9)$。（2 分）

于是

$$P\{X\ge84\}=1-P\{X<84\}=1-P\left\{\frac{X-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times(1-0.9)}}<\frac{84-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times(1-0.9)}}\right\} \quad （7 分）$$

$$=1-P\left\{\frac{X-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times(1-0.9)}}<-2\right\}\approx1-\Phi(-2)=\Phi(2)=0.9773 \qquad （10 分）$$

四、(10 分)

某工厂宣称该厂的日用水量平均为 350 公斤，抽查 11 天的日用水量的记录，计算得均值 $\bar{x}=359$，修正方差 $S_{11}^{*2}=400$。假设用水量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

(1)能否同意该厂的看法？（显著性水平 $\alpha=0.05$，$\sqrt{11}\approx3.32$）

(2)求方差 σ^2 的置信度为 95%的置信区间。（注：(2)小题结果就用分位数表示）

附：$t_{0.95}(10)=1.8125$，$t_{0.95}(11)=1.7959$，$t_{0.975}(10)=2.2281$，$t_{0.975}(11)=2.2010$

解：(1) $H_0:\mu_0=350$ $\qquad t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S_n^*}\cdot\sqrt{n}=\frac{359-350}{20}\sqrt{11}=1.494<t_{0.975}(10)=2.2281$

∴ 接受原假设，同意该厂说法。（5 分）

(2) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1) \qquad x_{0.025}^2(10)\le\frac{(11-1)\times400}{\sigma^2}\le x_{0.975}^2(10)$

$\therefore \sigma^2$ 的 95%的置信区间为$\left[\dfrac{4000}{x_{0.975}^2(10)}, \dfrac{4000}{x_{0.025}^2(10)}\right]$ （10 分）

五、（12 分）

设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$$

在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)$ $(i=1,2)$.

(1) 求X的分布函数 $F_X(\mathrm{x})$.

(2) 求Y的分布函数 $F_Y(y)$.

解 (1) X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{1}{2} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases} \quad （5 分）$$

(2)

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,X=1\}+P\{Y\le y,X=2\}$$
$$=P\{Y\le y|X=1\}P\{X=1\}+P\{Y\le y|X=2\}P\{X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\} \qquad (7分)$$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=0$

当 $0\le y<1$ 时, $F_Y(y)=\frac{1}{2}\left(y+\frac{y}{2}\right)=\frac{3}{4}y$

当 $1\le y<2$ 时, $F_Y(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)$

当 $y\ge 2$ 时， $F_Y(y)=1$

所以 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right), & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$ （12 分）

六、(10 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 当0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中$\theta>-1$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个容量为n的简单随机样本,分别用矩法估计和最大似然估计法求θ的估计量.

解 (1) 矩法估计

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令$EX=\bar{X}$，得θ的矩法估计量为$\hat{\theta}_M=\dfrac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$. （5 分）

(2) 最大似然估计

似然函数$L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta} & 当0<x_i<1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

取对数$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$，求导得

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令上式等于 0，解得$\theta=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$

所以θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_L=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$. （10 分）

七、(12 分)

设随机变量X,Y的概率分布相同，X的概率分布为

$$P\{X=0\}=\frac{1}{3},\ P\{X=1\}=\frac{2}{3}$$

且X与Y的相关系数$r_{XY}=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 (X,Y) 的概率分布;

(2) 求 $P\{X+Y\le 1\}$.

解. (1) 由已知条件可得 $E(X)=E(Y)=\frac{2}{3}, D(X)=D(Y)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$$r_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{2}$$

所以 $P\{X=1,Y=1\}=E(XY)$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}+E(X)\cdot E(Y)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{9}}\times\sqrt{\frac{2}{9}}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$$ （3 分）

设 (X,Y) 的概率分布与边缘分布为

X \ Y	**0**	1	$p_{i\cdot}$
0	p_1	p_2	p_1+p_2
1	p_3	$\frac{5}{9}$	$p_3+\frac{5}{9}$
$p_{\cdot j}$	p_1+p_3	$p_2+\frac{5}{9}$	1

则由已知条件可得

$$\begin{cases} p_1+p_2=p_1+p_3=\frac{1}{3} \\ p_2+\frac{5}{9}=p_3+\frac{5}{9}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

解方程组得 $p_1=\frac{2}{9}, p_2=p_3=\frac{1}{9}$. 于是, (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

（9 分）

(2) $P\{X+Y\le 1\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}$

$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$$

（12 分）