第一章：随机事件与概率

随机现象和随机试验 I

现象：事物在自然发展规律的推动下，所自发呈现的某种表现形式。

在一定的试验条件下，并不总是出现相同结果的现象被称为**随机现象**。

判断一个现象是否是随机现象，只需要验证该现象是否满足下面的两个特征

1. 试验结果不止一个。
2. 事先无法预知将出现哪个结果。

随机现象和随机试验

下面的现象都是随机的：

1. 投掷一枚硬币，出现的结果有可能是数字面朝上，也有可能国徽面朝上。
2. 投掷一个骰子，有可能出现$1-6$点中的任意一个。
3. 家里某种电器的寿命，可能是$(0, \infty)$上的任意一个实数。
4. 对某种物品的称重，其测量误差可能是$(-\infty, \infty)$中的任意一个实数。

对在相同条件下可以重复的，对随机现象观察，记录的试验称为**随机试验**。

样本空间 I

样本空间

随机试验的**一切**可能的**基本**结果组成的集合，称为样本空间，记为Ω。Ω中的任意一个元素被称为一个**基本事件**或**样本点**。

样本空间的解释：

1. **一切**：随机试验的每一个可能的结果，都在样本空间中有对应的元素。
2. **基本**：最简单的，不能再分的结果。这一点暗示各样本点之间没有非空的交集。

样本空间 II

前述随机现象的对应样本空间

1. 投掷一枚硬币试验的样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中$\omega_1$表示正面朝上，$\omega_2$表示反面朝上。
2. 投掷一个骰子试验的样本空间$\Omega=\{\omega_i:i=1,2,\cdots,6\}$，其中$\omega_i$表示掷出$i$点。
3. 家里某样电器寿命的样本空间$\Omega=\{t:t\geq 0\}$
4. 对某样物品称重误差的样本空间$\Omega=\{m:m\in\mathbb{R}\}$

当样本空间中的样本点有限或者可数时，被称为**离散样本空间**，否则被称为**连续的样本空间**。

课堂练习

讨论下面的随机试验的样本空间：

- 进站间隔为5分钟的列车，某位乘客的等待时间（单位按分钟计算）
- 射击手连续射击2次所得的总环数（环数按整数计算）
- 将一颗骰子掷两次，观察每一次的点数。

随机事件

随机事件：样本空间Ω中若干样本点构成的子集。

下面是几种特殊的随机事件

1. **基本事件**：样本空间Ω中的单个元素组成的子集。
2. **不可能事件**：样本空间的最小子集，即空集∅。
3. **必然事件**：样本空间的最大子集，即它自己Ω。

Q：请定义投掷一个骰子并观察结果的随机试验的所有基本事件，以及点数小于3，点数为偶数这两个随机事件。

事件的关系

同一随机现象的任意两个事件A和B之间有下面的几种关系。

对于任意的$\omega \in \Omega$：

1. 若$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$，那么称$B$**包含**$A$，记为$A \subset B$
2. $A \subset B$且$B \subset A$，则称A与B**相等**，记为$A = B$。
3. $\forall \omega \in \Omega$，要么$\omega \in A$，要么$\omega \in B$，则称$A$和$B$互为对方的**对立事件**，记为$B = \bar{A}$或者$A = \bar{B}$。
4. $A \cap B = \emptyset$，那么称A与B**互不相容**。

练习

对于掷骰子的试验，请对下面事件的关系进行判断：

1. $A = \{\omega_1, \omega_2\}$，$B = \{\omega_3\}$
2. $A = \{\omega_4\}$，$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$
3. $A = \{\omega_i : i\text{为偶数}\}$，$B = \{\omega_i : i\text{为奇数}\}$

事件的运算 I

事件类似集合可以做运算，事件经过某种运算得到的还是事件。

对于某随机试验的随机事件A，B，

1. **事件的积（交）**
   $C=\{A$和B同时发生$\}=\{\omega\in\Omega:\omega\in A$且$\omega\in B\}$，记为$C=A\cap B$。
2. **事件的和（并）**
   $C=\{A$和B中至少有一个发生$\}=\{\omega\in\Omega:\omega\in A$或$\omega\in B\}$，记为$C=A\cup B$。
3. **事件的差**
   $C=\{A$发生但B不发生$\}=\{\omega\in\Omega:\omega\in A$且$\omega\in\bar{B}\}$，记为$C=A\backslash B$或$A-B$。显然$A-B=A\cap\bar{B}$。

事件运算的法则 I

1. **交换律**

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

2. **结合律**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. **分配率**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. **对偶率(德摩根公式)**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

事件运算的法则 II

分配率的概率语言证明：

$$
\begin{aligned}
& A \cap (B \cup C) \\
& \Leftrightarrow A\text{发生且}B\text{和}C\text{中至少有一个发生} \\
& \Leftrightarrow A\text{和}B\text{一起发生或者}A\text{和}C\text{一起发生} \\
& \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

三个事件的关系

1. $D=\{A，B，C$都发生$\}=ABC=A\cap B\cap C$
2. $D=\{A，B，C$都不发生$\}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
3. $D=\{A$发生但$B，C$都不发生$\}=A\bar{B}\bar{C}=A\backslash(B\cup C)=A\cap\overline{B\cup C}$
4. $D=\{A，B，C$中至少有一个发生$\}=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}}=A\cup B\cup C$
5. $D=\{A，B，C$中至少有两个发生$\}$ $=(A\cap B\cap C)\cup\left(A\cap B\cap\bar{C}\right)\cup\left(A\cap\bar{B}\cap C\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\cap C\right)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$
6. $D=\{A，B，C$中最多有一个发生$\}$ $=\left(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)\cup\left(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\right)\cup\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)=$ $\overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)}$

课堂练习

化简下面的复杂事件

$$B\backslash\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}\quad\overline{(\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B)}$$

事件域

事件域$\mathcal{F}$是样本空间Ω的一些子集的集合(即事件集合)，这个集合满足下面三个条件

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. 若$A \in \mathcal{F}$，那么$\bar{A} \in \mathcal{F}$。
3. 若$A_n \in \mathcal{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，那么$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$。

称$\mathcal{F}$中的元素（即Ω的某个子集）为**事件**。下面的集合都是掷骰子试验的事件域

1. $\{\{w_1\}, \{w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}, \Omega, \emptyset\}$
2. $\{A : \forall A \subset \Omega\}$
3. $\{\emptyset, \Omega\}$

概率是随机事件发生可能性的一种**度量**

换言之，概率是随机事件发生可能性的一种测量工具，可以把它理解为刻度尺或者体重秤。事件发生的可能性越大，那么其测量工具上显示的数值就会越大。

概率的公理化定义 I

定义1.2.5

设Ω是随机试验的样本空间，$P(\cdot):\mathcal{F}\rightarrow R$是从事件域$\mathcal{F}$到实数集$\mathbb{R}$的映射，满足

1. **非负性** 对任一事件$A\in\mathcal{F}$，有$P(A)\geq 0$
2. **规范性** $P(\Omega)=1$
3. **可列可加性** 若事件$A_1,A_2,\cdots$**两两不相容**，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

那么称P为事件域$\mathcal{F}$上的**概率测度**，而称$P(A)$为事件A的概率，称三元素$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间。

确定概率：统计方法

频率法：定义1.2.1

为了考察某一随机试验的随机事件A发生的概率，我们重复的进行这一随机试验，并计算下面的数值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

其中n是试验的总次数，n_A为事件A发生的次数。随着试验次数的增加，准确的说当$n \to \infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = p, p \in [0, 1],$$

极限p称为事件A发生的概率。

确定概率：古典方法 I

概率的古典定义：定义1.2.1

设随机试验的样本空间为$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，并且$P(\{\omega_i\})$相同。则事件$A$发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点个数}} = \frac{n_A}{n}$$

请用概率的公理化定义以及样本空间的定义证明上面的定义

古典概率练习

袋子中有3只白球和2只红球，从袋子中任取两只，请问下面事件的概率

1. $A = \{$取得的两只球都是白球$\}$
2. $B = \{$取得一只红球一只白球$\}$

古典概率练习

划拳的规则是

1. 两个人同时出拳，任意伸出0,1,2,3,4,5个手指头中的一种。
2. 出拳的同时，两个人同时叫出0-10中的一个数字

当两人伸出手指头个数的和等于其中一个人（仅一人）叫出的数字，则叫出正确数字的人胜，否则为平局。请问叫哪个数字获胜的概率大?

确定概率：几何方法

如果样本空间连续，怎么确定概率？

1. 某随机试验的样本空间是连续的，我们用面积$S(\Omega)$表示Ω的度量
2. 任意两个事件，只要他们覆盖的样本空间的面积相等，则他们发生的概率相等
3. 对于覆盖样本空间区域Ω_A的事件A，其概率定义为

$$P(A) = \frac{S(\Omega_A)}{S(\Omega)}$$

这个概率被称为几何概率。

请思考几何定义与古典定义的关系？(参考Riemann积分与Riemann和的关系)

会面问题

甲乙两人约定在下午6点到7点间在某处会面，并约定先到的人等候另一个人20分钟，请问两个人能会面的概率。

概率的性质 I

复杂事件的概率的计算，往往需要依靠概率的性质

1. $P(\emptyset) = 0.$
2. **有限可加性** 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容，则
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
3. 对任意事件A，
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
4. **单调性和可减性** 若$A \subset B$，则有
$$P(A) \le P(B), P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$$

概率的性质 II

5 **加法公式**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6 **上（下）连续性** 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$，那么

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(\text{下连续性})$$

若$\cdots \subset A_n \subset \cdots A_2 \subset A_1$

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(\text{上连续性})$$

概率性质的应用

一个箱子中装有36只灯泡，其中32只为一等品，4只为二等品，先从中任取3只，求取出的三只灯泡中至少有一只为二等品的概率？

附加思考：口袋中有编号为$1, 2, \cdots, n$的n个球，从中有放回的任取m次，求取出的球中最大号码为k的概率。

条件概率 I

假设$A, B \in \mathcal{F}$，则

1. 概率$P(A)$：无条件状态下，事件A的概率。
2. 概率$P(A \mid B)$：当B发生的条件下事件A发生的概率。

$$P(A) = P(A \mid \Omega)$$

以打扑克为例，一副扑克牌有54张，黑桃，红桃，方块，梅花各13张之外还有大王小王各一张。现在从牌堆里任取一张，取到任意一张的概率都是相同的，即$\frac{1}{54}$。记

$$A = \{取得扑克为黑桃K\}$$

$$B = \{取得扑克为黑桃\}$$

知 $A \subset B$，故$P(A) = P(A \cap B)$，且

$$P(A) = \frac{1}{54},\ P(B) = \frac{13}{54}$$

如果事先知道一定会取到黑桃花色的牌，那么此时再取到黑桃K的概率为$\frac{1}{13}$

$$P(A|B) = \frac{1}{13} \overset{好巧}{=} \frac{1/54}{13/54} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

条件概率

定义1.3.1

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间，$A,B\in\mathcal{F}$，且$P(B)\neq 0$，那么定义

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为B发生的条件下事件A发生的**条件概率**。

请用韦恩图解释条件概率

条件概率拓展

实际上，对于任意给定的$B \in \mathcal{F}$，并且$P(B) > 0$，定义映射$P_B : \mathcal{F} \to R$，

$$P_B(A) = P(A \mid B), \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

仍然为$(\Omega, \mathcal{F})$上的概率测度，即$(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$也是概率空间。

提示：验证P_B满足概率的公理化定义

乘法公式

将条件概率公式变形，就有**乘法公式**

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

乘法公式表示：

事件AB同时发生的概率等于B发生的概率乘上在B发生的前提下A发生的概率。

条件概率和乘法公式的应用 I

盒子里有3颗红球，7颗白球，现从盒子中任取两次，每次取出一个球，并且取出的第一个不放回。

1. 已知第一次取出的是红球，求第二次也取出红球的概率
2. 两次取出的都是红球的概率

首先规定事件A_i ={第i次取出的是红球}

1. 方法一：第一次取出的是红球，那么盒子中剩下7颗白球，2颗红球；那么第二次试验的样本空间缩小为9个球：

$$P(A_2|A_1) = 2/9$$

方法二：根据条件概率公式以及古典概率的计算办法

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{3\times 2}{10\times 9}}{\frac{3\times 9}{10\times 9}} = 2/9$$

条件概率和乘法公式的应用 II

2. 求$P(A_1A_2)$
   方法一：根据古典概率计算办法

$$P(A_1A_2) = \frac{3\times 2}{10\times 9} = 1/15$$

方法二：根据乘法公式

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2\mid A_1) = \frac{3}{10}\times\frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

更一般的乘法公式 I

定理1.3.1

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$是概率空间，$A_i\in\mathcal{F}$，$i=1,2,\cdots,N$，且$P(A_1A_2\cdots A_{N-1})>0$，那么

$$P(A_1A_2\cdots A_N)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)\cdots P(A_N\,|\,A_1A_2\cdots A_{N-1})$$

Proof: 对n用归纳法，当$n=2$的时候，就是两个事件的乘法公式，论题自然成立。假设当$n=k$的时候，论题也成立，即

$$P(A_1A_2\cdots A_k)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)\cdots P(A_k\,|\,A_1\cdots A_{k-1})$$

更一般的乘法公式 II

当$n=k+1$时，记$B=A_1A_2\cdots A_k$，

$$P(A_1A_2\cdots A_{k+1})=P(B)P(A_k\mid B)$$

再根据归纳法

$$P(B)=P(A_1A_2\cdots A_k)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_k\mid A_1\cdots A_{k-1})$$

所以当$n=k+1$时，论题也成立。

一般乘法公式的应用 I

还是在54张扑克牌中依次无放回抽取扑克的试验。请计算当依次无放回的取出四张牌，下面的事件发生的概率

1. 取出的扑克的花色依次为黑桃，红桃，梅花和方块
2. 取出的扑克的花色各不相同
3. 取出的扑克的花色全部相同

把花色将黑桃，红桃，梅花，方块记为花色$1,2,3,4$，并定义事件A_i^j ={第j次抽取到花色为i的扑克}，那么我们要求概率的三个事件分别为

1. $B_1 = A_1^1A_2^2A_3^3A_4^4$
2. $B_2 = \cup_{i_1i_2i_3i_4}A_{i_1}^1A_{i_2}^2A_{i_3}^3A_{i_4}^4$，$i_1, i_2, i_3, i_4$两两不相同
3. $B_3 = \sum_{i=1}^4 A_i^1A_i^2A_i^3A_i^4$

一般乘法公式的应用 II

1. 根据乘法公式

$$P(B_1) = P(A_1^1)P(A_2^2 \mid A_1^1)P(A_3^3 \mid A_1^1A_2^2)P(A_4^4 \mid A_1^1A_2^2A_3^3)$$
$$= \frac{13}{54}\frac{13}{53}\frac{13}{52}\frac{13}{51}$$

2.

$$P(B_2) = 4! \times P(B_1)$$

3.

$$P(B_3) = 4 \times \frac{13}{54}\frac{12}{53}\frac{11}{52}\frac{10}{51}$$

全概率公式 I

考虑这样的事件A，事件域中的某些不相容事件$B_1, B_2, \cdots$存在一定的概率诱发A的发生，那么根据全概率公式就可以计算A发生的概率。

全概率公式

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B_i \in \mathcal{F}$，$P(B_i) > 0$，$i = 1, 2, \cdots$，且$B_i \cap B_j = \emptyset$，$i \neq j$，且$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$，那么

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

全概率公式 II

Proof: 因为 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$，则$A = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$。又由于$B_i \cap B_j = \emptyset$，$\forall i \neq j$。故$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$，由概率的可列可加性

$$P(A) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} AB_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

全概率公式应用

袋子中间有$m+n$个乒乓球，其中m个为红色，n个为黄色。现在从袋子中无放回的取两次，每次取出一个球，求第二次摸得的是黄球的概率。

分析：记A_i ={第i次取出的是黄球}，那么我们要求的就是$P(A_2)$，根据全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1}) \\
&= \frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1} + \frac{m}{m+n}\frac{n}{m+n-1} \\
&= \frac{n}{m+n}
\end{aligned}
$$

抽奖问题

一共$m+n$张奖券，其中m张有奖，n张没有奖，进行无放回抽奖，请问第k个人抽中有奖奖券的概率。

贝叶斯公式

定理1.3.3

运用全概率公式，若$P(A) > 0$，那么

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

我们把$P(B_1)$，$P(B_2)$，$\cdots$叫做**先验概率**。

贝叶斯公式是根据已经发生的结果来推导某中诱因的可能性。

贝叶斯公式的应用

某无线电话运营商同时担负了3种制式的通话网络，三种通话网络的市场占有率分别为30%，45%和25%，各种网络的故障率为0.3%，0.2%和0.4%。为最大限度的保证网络出现故障时有维护人员及时抢修，该如何配置维护人员的百分比。

分析

因：$B_i=\{$用户选择第i种网络$\}$，B_1,B_2,B_3是两两不相容事件。

果：$A=\{$用户的网络发生故障$\}$。

正确的解题步骤是：

1. 计算先验概率

$$P(B_1) = 0.3, P(B_2) = 0.45, P(B_3) = 0.25$$

2. 计算条件概率

$$P(A \mid B_1) = 0.003, P(A \mid B_2) = 0.002, P(A \mid B_3) = 0.004$$

3. 由全概率公式计算

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i) = 0.003 * 0.3 + 0.002 * 0.45 + 0.004 * 0.25 = 0.0028$$

4 计算贝叶斯概率

$$P(B_1 \mid A) = \frac{0.3 * 0.003}{0.0028} = 0.3214$$
$$P(B_2 \mid A) = \frac{0.45 * 0.002}{0.0028} = 0.3214$$
$$P(B_3 \mid A) = \frac{0.25 * 0.004}{0.0028} = 0.3571$$

事件的独立性

如果在一次随机试验中，事件$A(B)$发生与否，不影响$B(A)$发生的概率，那么称A与B**相互独立**。

譬如抛两个硬币的试验，那么定义

A="第一个硬币为数字面"，　B="第二个硬币是数字面"

显然A和B的发生是互不影响的

独立性定义

定义1.3.2

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$A, B \in \mathcal{F}$，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

那么称A和B**相互独立**。

上面的定义有一个等价的表述：

$$P(A) = P(A|B).$$

独立性定义的应用

从一副54张的扑克中任取一张，记

A = "取得的花色是黑桃"，　B = "取到K"

请问A和B是否独立?

当A和B相互独立的时候，下面几组事件也是相互独立事件

$$A\text{与}\bar{B} \quad \bar{A}\text{与}B \quad \bar{A}\text{与}\bar{B}$$

例如： 由于$A \cap \bar{B}$与$A \cap B$是不相容事件，
而$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$，所以

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A)P(B)$$

故

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

多个事件相互独立

定义1.3.3

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$，如果以下等式

$$
\begin{gathered}
P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\ 1\le i<j\le n\\
P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1\le i<j<k\le n\\
\cdots\cdots\\
P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)
\end{gathered}
$$

都成立，则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立。

两两独立不够用

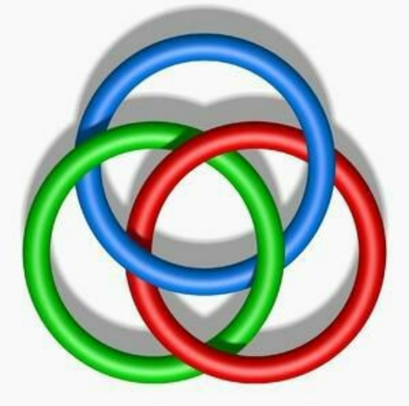

Figure 1 : Borromean Rings

多个事件相互独立

相互独立的一系列事件有下面的性质：

1. 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，则$A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_s}$也相互独立，$2 \le s < n$，$k_1 < k_2 < \cdots < k_s$。
2. 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$相互独立，则将其中的任意s个换成其对立事件，所得的k个事件也相互独立。

试验的独立性

请思考下面的随机试验有什么相似点

1. 投掷n次硬币，观察每一次的正反
2. 检查n件产品，考察每一件是否合格
3. 投掷一枚硬币观察正反并检查一件产品是否合格

独立随机试验

定义1.3.4

设有随机试验$E_1, E_2, \cdots, E_n$，如果对E_i的任意结果（事件）A_j，$j = 1, 2, \cdots, n$，都有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

则称随机试验$E_1, E_2, \cdots E_n$相互独立。

n重独立试验

若n个随机试验的条件相同，并且可能出现的结果也相同，则这n个试验被称为n**重独立试验**。

最简单的n重独立试验是n**重伯努利试验**，其中每个试验都只有两个可能的结果，成功(A)和失败$(\bar{A})$。

n重伯努利试验

定理1.3.4

设伯努利试验中$P(A)=p$，则n重独立伯努利试验中恰好成功k次的概率为

$$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

独立试验概型的应用

$\{A, B, C, D, E\}$5个人参与一项药物的疗效测试，该药物治愈的概率为0.6，求

1. A，B都被治愈的概率
2. 五个人中有两个人被治愈的概率
3. 五个人中至少有两个人被治愈的概率