6 解线性代数方程组的迭代法

Iterative Methods of Linear System of Equations

王家兵
jbwang@scut.edu.cn

背景

- 解线性代数方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的直接法大多数计算过程均需对系数矩阵进行分解，一般不能保持$\boldsymbol{A}$的稀疏性
  - 实际问题中，特别是偏微分方程数值求解，常会遇到大型稀疏矩阵
- 高斯消去法、LU分解法的乘除法次数为$\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$，LDL^T分解法的乘除法次数为$\frac{1}{6}n^3+O(n^2)$，当n较大时，计算量相当大.
- 迭代法能充分利用系数矩阵的稀疏性，当n较大时，能有效控制计算量.

- Jacobi雅可比迭代
  - 设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$$

其中$\boldsymbol{A}$是$n\times n$系数矩阵，非奇异；$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{b}$是$n$维向量

  - 将第k个方程的$a_{kk}x_k$项保留在左端，其余项移到右端，然后两边再除以$a_{kk}(k = 2,3,\cdots,n)$.

- 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$变成下列等价方程组：

$$\begin{cases} x_1 = \phantom{b_{21}x_1 +} b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n + g_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 \phantom{+ b_{12}x_2} + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n + g_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{n,n-1}x_{(n-1)} + g_n \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j) \\ b_{ii} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \\ g_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}} \ (i = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

- 若令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{g}$$

- 形成雅可比Jacobi迭代公式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}$$

- 取初始向量$\boldsymbol{X}^{(0)}\in\boldsymbol{R}^n$，产生一个向量序列$X^{(0)},X^{(1)},\cdots,X^{(k)},\cdots$，若收敛于$\boldsymbol{X}^*$，则$\boldsymbol{X}^*$一定是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的解.

- Jacobi迭代算法
  - ① 输入$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$，初始向量$\boldsymbol{Y}$，容许误差$\epsilon$，容许最大迭代次数$M$
  - ② 令$k = 1$
  - ③ 形成迭代矩阵$\boldsymbol{B}$(存放在$\boldsymbol{A}$中)
    - 对$i = 1,2,\cdots,n$循环
      - 若$|a_{ii}| < \epsilon$，则打印"求解失败"，停机；否则
      - $T = a_{ii}$
      - 对$j = 1,2,\cdots,n$计算

$$a_{ii} = -\frac{a_{ij}}{T}, a_{ii} = 0, g_i = \frac{b_i}{T}$$

④ 迭代:

- 对$i = 1,2,\cdots,n$计算

$$x_i = g_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} y_j$$

⑤ 若$\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\| < \epsilon$，输出$\boldsymbol{X}, k$,停机；否则

⑥ 若$k < M$,则$k = k + 1$，将$\boldsymbol{X}$赋值给$\boldsymbol{Y}$,转④；否则，输出求解失败信息，停机

Seidel迭代法

- 设有雅可比迭代法

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + g$$

- 将迭代矩阵$B = (b_{ij})_{n\times n}$分解为$B = L + U$，其中

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ b_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- Seidel迭代公式

$$X^{(k+1)} = LX^{(k+1)} + UX^{(k)} + g \ (k = 0,1,\cdots,n)$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + g_i \ (i = 1,\cdots,n)$$

- Seidel迭代算法

① 输入$\mathbf{A}, \boldsymbol{b}$，初始向量$\boldsymbol{Y}$，容许误差$\epsilon$，容许最大迭代次数$M$

② 令$k = 1$，$x_i = y_i$

③ 形成迭代矩阵$\boldsymbol{B}$(存放在$\boldsymbol{A}$中)

- 对$i = 1,2,\cdots,n$循环
  - 若$|a_{ii}| < \epsilon$，则打印"求解失败"，停机；否则
  - $T = a_{ii}$
  - 对$j = 1,2,\cdots,n$计算

$$a_{ii} = -\frac{a_{ij}}{T}, a_{ii} = 0, g_i = \frac{b_i}{T}$$

④ 迭代:

- 对$i = 1,2,\cdots,n$计算

$x_i = g_i + \sum_{j\neq i} a_{ij} x_j$

⑤ 若$\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\| < \epsilon$，输出$\boldsymbol{X}, k$,停机；否则

⑥ 若$k < M$,则$k = k + 1$，将$\boldsymbol{X}$赋值给$\boldsymbol{Y}$,转④；否则，输出求解失败信息，停机

松弛法（SOR迭代）

- 可以看作是Seidel迭代法的加速，Seidel迭代法是松弛法的特例

- 松弛法公式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = (1-\omega)\boldsymbol{X}^{(k)} + \omega\left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{g}\right) \ (k = 0,1,\cdots,)$$

其中ω称为松弛因子，$\omega > 1$称超松弛；$\omega < 1$称低松弛

- 松弛迭代算法
  1. 输入$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$，初始向量$\boldsymbol{Y}$，松弛因子$\omega$，容许误差$\epsilon$，容许最大迭代次数$M$
  2. 令$k = 1$，$x_i = y_i$
  3. 形成迭代矩阵$\boldsymbol{B}$(存放在$\boldsymbol{A}$中)
     - 对$i = 1,2,\cdots,n$循环
       - 若$|a_{ii}| < \epsilon$，则打印"求解失败"，停机；否则
       - $T = a_{ii}$
       - 对$j = 1,2,\cdots,n$计算

$$a_{ii} = -\omega\times\frac{a_{ij}}{T}, a_{ii} = 1-\omega, g_i = \omega\times\frac{b_i}{T}$$

④ 迭代:

- 对$i = 1,2,\cdots,n$计算

$x_i = g_i + \sum_{j\neq i} a_{ij} x_j$

⑤ 若$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| < \epsilon$，输出$\boldsymbol{X}, k$,停机；否则

⑥ 若$k < M$,则$k = k + 1$，将$\boldsymbol{X}$赋值给$\boldsymbol{Y}$,转④；否则，输出求解失败信息，停机

例：用Jacobi迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

答：Jacobi迭代公式如下

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.84 \end{cases}$$

取$\boldsymbol{X}^{(0)} = (0,0,0)^T$：迭代收敛

例：用Jacobi迭代法解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 20x_3 = 11 \\ -10x_1 + x_2 - 5x_3 = -14 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

答：Jacobi迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 10x_2^{(k)} - 20x_3^{(k)} + 11 \\ x_2^{(k+1)} = 10x_1^{(k)} + 5x_3^{(k)} - 14 \\ x_3^{(k+1)} = 5x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 3 \end{cases}$$

1. 取$\boldsymbol{X}^{(0)} = (0,0,0)^T$：迭代发散
2. 取$\boldsymbol{X}^{(0)} = (1,1,1)^T$：迭代收敛

定理：设A是任意$n \times n$矩阵，由A的各次幂组成的矩阵序列

$$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^k, \cdots$$

收敛于零，即$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k = 0$的充要条件是$\rho(\boldsymbol{A}) < 1$

定理：对任何初始向量$\boldsymbol{X}^{(0)}$和常数项$\boldsymbol{f}$，迭代公式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{f} \quad (k = 0,1,\cdots)$$

产生的向量序列$\{\boldsymbol{X}^{(k)}\}$收敛的充要条件是迭代矩阵的谱半径$\rho(\boldsymbol{M}) < 1$

- **必要性**：若$\{X^{(k)}\}$收敛到X^*, 则有$X^* = MX^* + f$。令$\varepsilon_k = X^{(k)} - X^*$。则$\varepsilon_k = X^{(k)} - X^* = MX^{(k-1)} + f - (MX^* + f) = M(X^{(k-1)} - X^*) = \ldots = M^k \varepsilon_0$, 因对任意初始向量$\epsilon_0$，$\epsilon_k \to 0$，故有 $\lim M^k \to 0$，故$\rho(M) < 1$。

- **充分性**：若$\rho(M) < 1$, 则1不是 M的特征值且$I - M$非奇异, 方程组$(I-M)X = f$有唯一解, 记为X^*，我们仍有$X^* = MX^* + f$，则递推式$\epsilon_k = M^k\epsilon_0$仍成立。因$lim M^k \to 0$, 所以对任意初始向量$\epsilon_0$, $lim \epsilon_k \to 0$, 即$lim X^{(k)} \to X^*$。

定理： 若迭代矩阵$\boldsymbol{M}$的范数$\|\boldsymbol{M}\| = q < 1$，则迭代公式$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{f}$对任何初始向量$\boldsymbol{X}^{(0)}$一定收敛，且

$$\|\boldsymbol{X}^{(k)} - \boldsymbol{X}^*\| \leq \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{X}^{(k)} - \boldsymbol{X}^{(k-1)}\|$$

$$\leq \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{X}^{(0)}\|$$

观察：

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} - \boldsymbol{X}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{X}^{(k)} - \boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}^{(k)} - \boldsymbol{X}^{(k+1)} + \boldsymbol{X}^{(k+1)} - \boldsymbol{X}^*$$

应用：人口迁移问题

- 设有如下矩阵A，a_{ij}表示城市j的人口每年迁移到城市i的百分比

$$
\begin{array}{c} \\ 北京 \\ 上海 \\ 广州 \\ 深圳 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 北京 & 上海 & 广州 & 深圳 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.95 & 0.005 & 0.005 & 0.0001 \\
0.02 & 0.99 & 0.01 & 0.0005 \\
0.02 & 0.004 & 0.98 & 0.0004 \\
0.01 & 0.001 & 0.005 & 0.999
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

- 给定初始城市人口分布$[2000, 2000, 1500, 1500]^T$，问十年后人口如何变化?
- 人口会永远变下去吗?

人口迁移问题

- 一年后:

$$\begin{array}{c} \text{北京} \\ \text{上海} \\ \text{广州} \\ \text{深圳} \end{array} \begin{bmatrix} 1917.65 \\ 2035.75 \\ 1518.6 \\ 1528 \end{bmatrix}$$

- 2年后

$$\begin{array}{c} \text{北京} \\ \text{上海} \\ \text{广州} \\ \text{深圳} \end{array} \begin{bmatrix} 1839.69205 \\ 2069.6955 \\ 1535.3352 \\ 1555.27725 \end{bmatrix}$$

人口迁移问题

- 当矩阵A满足如下属性: (1) 每列之和为1； (2) A对应的图强连通，则存在向量$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{AP}$$

- 1是A的特征值，且为A的谱半径。
- 上述方程是一个矩阵特征值问题，其解对应于特征值为1的特征向量。

迭代矩阵谱半径与系数矩阵A的关系

1. Jacobi迭代

- Jacobi迭代矩阵$B = D^{-1}(D - A)$

$$|\lambda I - B| = 0$$

$$|\lambda I - D^{-1}(D - A)| = 0$$

$$|D^{-1}| \cdot |\lambda D - (D - A)| = 0$$

$$|\lambda D - (D - A)| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

定理： Jacobi迭代收敛的充要条件是上述行列式的所有根的绝对值小于1.

2. Seidel迭代

- Seidel迭代矩阵：$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=0$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}|=0$$

$$|\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}|=0$$

$$|\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}|=0, |\lambda\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{DL}-\boldsymbol{DU}|=0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

定理：Seidel迭代收敛的充要条件是上述行列式的所有根$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$的绝对值小于1.

3. 松弛迭代（SOR迭代）

■ 松弛迭代矩阵：$\boldsymbol{B_w} = (\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{U}]$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{U}]| = 0$$

$$|\lambda(\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{L}) - [(1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{U}]| = 0$$

$$|\lambda \boldsymbol{D} - \omega\lambda \boldsymbol{D}\boldsymbol{L} - [(1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\lambda+\omega-1)a_{11} & \omega a_{12} & \cdots & \omega a_{1n} \\ \omega\lambda a_{21} & (\lambda+\omega-1)a_{22} & \cdots & \omega a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega\lambda a_{n1} & \omega\lambda a_{n2} & \cdots & (\lambda+\omega-1)a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

定理：松弛迭代收敛的充要条件是上述行列式的所有根 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$的绝对值小于1.

定义：如果矩阵$\boldsymbol{A}$不能通过行交换和相应的列交换变成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ 0 & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$为方阵，则称$\boldsymbol{A}$为不可约.

定义：若矩阵$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right| \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

且至少有一个i值使上式中不等式严格成立，则称矩阵$\boldsymbol{A}$具有对角优势（弱对角占优）；若所有的i值对上式中不等式严格成立，则称矩阵$\boldsymbol{A}$具有强对角占优.

定理： 若A是强对角占优，或者A弱对角占优且不可约，则$detA \neq 0$.

定理 A 矩阵不可约的充要条件是 A 矩阵对应的邻接图是一个强连通图。

定理： 若A是强对角占优，或者A弱对角占优且不可约，则

1. Jacobi迭代、Seidel迭代一定收敛
2. 若松弛因子ω满足$0 < \omega \leq 1$，则松弛迭代一定收敛.

- 雅可比。若不收敛，则存在一个λ_0，$|\lambda_0| \geq 1$。

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 因为$|\lambda_0|\ |a_{ii}| \geq |a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$,即上式中的矩阵与A一样强对角占优，故$det A \neq 0$)，矛盾。
- 赛德尔类似。

- 松弛法。若$\lambda \geq 1$,且 $0 < \omega \leq 1$，则$\lambda + \omega - 1 \geq \omega$，且 $\lambda(1-\omega) \geq (1-\omega) \Rightarrow \lambda + \omega - 1 \geq \omega\lambda$

$$\begin{vmatrix} (\lambda+\omega-1)a_{11} & \omega a_{12} & \cdots & \omega a_{1n} \\ \omega\lambda a_{21} & (\lambda+\omega-1)a_{22} & \cdots & \omega a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega\lambda a_{n1} & \omega\lambda a_{n2} & \cdots & (\lambda+\omega-1)a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 即上式中的矩阵与A一样强对角占优，故上式不成立。

定理： 松弛法收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

- 对于任何系数矩阵$\boldsymbol{A}$，若要松弛法收敛，其松弛因子$\omega \in (0,2)$.
- 当松弛因子满足条件$0 < \omega < 2$时，并不是对所有的系数矩阵$\boldsymbol{A}$松弛法均收敛.

- 因为松弛法收敛，故有$\rho(\boldsymbol{B}_w) < 1.$

$$\boldsymbol{B}_w = (\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{U}]$$

- 所以$|\det \boldsymbol{B}_w| = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| < 1$。
- 因为$|(I-\omega L)^{-1}| = 1$, $|(1-\omega)I+\omega U| = |(1-\omega)^n|$，所以有
- $|(1-\omega)^n| = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| < 1$，故$|1-\omega| < 1$, $0 < \omega < 2.$

6.2 迭代法收敛性理论

- **定理：** 若矩阵A对称正定，且有$0 < \omega < 2$时，则松弛法收敛.

例：取初始向量$X^{(0)}=(1,1,1)^T$，用SOR法求解方程组

$$\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ 30\\ 24\end{bmatrix}$$

使$\left|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right|<10^{-5}$

答：SOR法的迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}\left[24-3x_2^{(k)}\right]\\ x_2^{(k+1)}=(1-\omega)x_2^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}\left[30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}\right]\\ x_3^{(k+1)}=(1-\omega)x_3^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}\left[-24+x_2^{(k+1)}\right]\end{cases}$$

分别取ω=1.8（迭代了65次），ω=1.22（迭代了11次）

定理：设

1. $\boldsymbol{A}$为分块三对角阵，且$a_{ii} \neq 0$
2. Jacobi迭代的迭代矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值为实值，且$0 < \rho(\boldsymbol{B}) < 1$.

则

① 当$0 < \omega < 2$时，SOR法迭代收敛

② SOR法最优松弛因子

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(\boldsymbol{B})}}$$

定义：使松弛法收敛最快的松弛因子称最优松弛因子.

例题

- 设$B\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\rho(B)>1$, 但B有一个特征值满足$|\lambda|<1$。试证明存在初始向量$\mathbf{x}^{(0)}$, 使得简单迭代式

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\mathbf{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}\ (k=0,1,2,\ldots)$$关于此初始向量收敛。

例题

- 设 $A \in R^{n\times n}$，且对称正定，其最小和最大特征值分别是λ_1, λ_n。试证迭代法:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha(b - AX^{(k)})$$

- 收敛的充要条件是 $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$。又问参数取何值时迭代矩阵的谱半径最小。

- 作业：3、4题