第七章：参数估计

什么是参数

总体参数基本分为下面几类

1. **总体分布中所含的参数** 比如正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中的μ和σ^2。
2. **总体参数的函数** 比如服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的总体，其取值不超过某个给定常数a的概率，即$P(X\leq a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$。
3. **分布的数字特征** 比如均值$E[X]$，方差$Var[X]$等。

参数估计的形式

参数估计的形式有下面两种：

1. 点估计。
2. 区间估计。

参数的点估计

点估计

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体X的一个容量为n的样本，称用于估计未知参数θ的统计量$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为$\theta$的**点估计量**。

点估计的意义在于，设计一个统计量去作为总体某个参数的估计量

点估计方法的分类

本课程要求掌握的点估计方法分为以下几类

1. **矩法估计**
2. **最大似然估计**
3. 顺序统计量估计

矩法估计 I

矩法估计

矩法估计，就是用**样本的**k**阶原点矩**来估计**总体的**k**阶原点矩**。

矩估计的思想: 假设总体$X \sim F_X(x;\theta_1,\theta_2)$，其中总体含有未知参数$\theta_1$,$\theta_2$:

1. 计算$E[X]$和$E[X^2]$，有

$$E[X] = f_1(\theta_1,\theta_2),$$
$$E[X^2] = f_2(\theta_1,\theta_2),$$

矩法估计 II

2. 求解上面的方程组得到

$$\theta_1 = g_1(E[X], E[X^2]),$$
$$\theta_2 = g_2(E[X], E[X^2]).$$

3. 施行矩法估计，将上面方程中的$E[X]$换成$\overline{X}$，$E[X^2]$换成$\overline{X^2}$即可

请思考总体有n个参数的矩估计?

比如对于总体X，其概率密度函数$f_X(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$含有$k$个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$。假若$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$是总体前$k$阶原点矩$E[X^i]$，$i=1,2,\cdots,k$的函数，即

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(E[X],E[X^2],\cdots,E[X^k]) \\ \theta_2 = \theta_2(E[X],E[X^2],\cdots,E[X^k]) \\ \quad \cdots \\ \theta_k = \theta_k(E[X],E[X^2],\cdots,E[X^k]) \end{cases}$$

矩法估计的具体操作 I

矩估计法的基本步骤

1. **矩法估计的基本条件**：把总体的参数表示成总体各阶**原点矩**的函数。
2. **矩法估计的基本方法**：用前k阶样本原点矩$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^j$代替$X$的前$k$阶原点矩$E[X^j]$，$j=1,2,\cdots,k$，得到$\theta_j$的**矩法估计量**$\hat{\theta}_j$，

$$
\begin{cases}
\hat{\theta}_1 = \theta_1(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k) \\
\quad \cdots \\
\hat{\theta}_k = \theta_k(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k)
\end{cases}
$$

矩法估计的具体操作 II

3. 对样本进行一次观测，假设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是样本的一个观测值，那么将其带入$\hat{\theta}_j$得到的数值$\hat{\theta}_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就是参数$\theta_j$的**矩法估计值**。

矩法估计应用 I

1. 显然的$\widehat{E[X^k]} = \overline{X^k}$。
2. 一批产品合格率(不合格率)的估计： 由于总体$X \sim B(1, p)$，$p = E[X]$。将$E[X]$换成$\overline{X}$，即可得到合格率的矩法估计量

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{X}}$$

假如$n = 100$，其中一次抽取中有3件不合格品，那么

$$\hat{p}_M = \frac{1}{100} \times 3 = 0.03.$$

即0.03为矩法估计值。

矩法估计应用 II

3 总体方差$\sigma^2 = Var[X]$以及标准差σ的估计。
因为

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2, \quad \sigma = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$$

作矩法估计

$$\boldsymbol{\widehat{E[X]} = \overline{X}, \quad \widehat{E[X^2]} = \overline{X^2}}$$

有

$$\boldsymbol{\widehat{\sigma^2} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = S_n^2, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = S_n}$$

总体的各阶中心矩的矩法估计量就是样本的相应阶中心矩。

例题7.1.3设总体在某一区间上均匀取值，试用矩法估计该区间的左右端点。

解： 根据题意，设总体$X \sim U[a,b]$，此题要估计的就是a和b。均匀分布的数字特征我们知道，

$$E[X] = \frac{a+b}{2},\ Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

反解得

$$\begin{cases} a = E[X] - \sqrt{3Var[X]} = \mu - \sqrt{3}\sigma \\ b = E[X] + \sqrt{3Var[X]} = \mu + \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

依据将μ和σ换成其相应的矩法估计量，有

$$\hat{a}_M = \overline{X} - \sqrt{3}S_n$$
$$\hat{b}_M = \overline{X} + \sqrt{3}S_n$$

矩法估计量不唯一 I

例7.1.4 设总体的分布密度函数为

$$f_X(x,\theta) = \frac{\theta}{2}e^{-\theta|x|}, \infty < x < \infty, \theta > 0$$

求θ的矩法估计量。

考虑总体的偶数阶矩，

$$E[X^{2k}] = \theta \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-\theta x}\,\mathrm{d}x = \frac{(2k)!}{\theta^{2k}}$$

即

$$\theta = \left(\frac{(2k)!}{E[X^{2k}]}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

矩法估计量不唯一 II

再由

$$\widehat{E[X^{2k}]}_M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{2k}$$

所以

$$\hat{\theta}_M = \left(\frac{(2k)!n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

最大似然估计 I

最大似然估计的基本思想是**某一次**抽样的观测结果是**概率最大的**。

问题分类：

1. **离散型总体** 联合概率分布列在观测点处概率最大。
2. **连续型总体** 联合概率密度函数在观测点处取值最大。

似然函数 I

1. 总体X服从某种离散型分布，含有参数θ，某次观察值为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其**似然函数**为

$$\boldsymbol{L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n; \theta)}$$

2. 总体X服从某种连续型分布，含有参数θ，某次观察值为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其**似然函数**为

$$\boldsymbol{L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = f(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n; \theta)}$$

最大似然估计

如上定义**似然函数**$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)$，如果某统计量$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \max_{\theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$$

就称$\boldsymbol{\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)}$为$\theta$的**最大似然估计量**。

在数学优化问题中，一个函数（一元或者是多元）的极值点等价于使这个函数的导数（或者梯度）为零的点。而极大值点不仅满足上述条件还会使得目标函数的Hessian矩阵在该点负定。

最大似然估计 I

对服从参数为λ的指数分布的总体X，使用最大似然估计。

由于$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，假设从中抽取容量为$n$的样本，那么当$x_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$的时候，并假设样本的一次观测值为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，那么

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

为了方便讨论，我们运用$\ln x$的单调性，来研究

$$\max_{\lambda} \ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$$

最大似然估计量 II

计算一下

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

对上式求其驻点，即求使得

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

的λ，得到

$$\lambda^\star = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

验证下

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\lambda^2}\Big|_{\lambda^\star} = -\frac{n}{\lambda^2}\Big|_{\lambda^\star} = -\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} < 0$$

最大似然估计量 III

所以$\lambda^\star$确实是L的极大值点，即

$$\hat{\lambda}_L = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$$

最大似然估计量 I

对于服从$[0,\theta]$上均匀分布的总体X，估计区间的右端点θ。

假设样本容量为n，那么X似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,\theta]\\ 0, & else\end{cases}$$

对L求导后发现什么?

显然
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta^{n+1}} < 0$$
说明L是$\theta \in [\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \infty)$上的单调递减函数。

单调函数的极值点在区间端点处取得。

对于**确定**的观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，要使得L取到最大值，那么

$$\theta = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

即

$$\theta = x_{(n)} \Rightarrow \hat{\theta}_L = X_{(n)}$$

也就是说区间右端点的最大似然估计量为顺序统计量$X_{(n)}$.

我们也可以用矩法估计θ，因为

$$E[X] = \frac{\theta}{2},$$

所以$\theta = 2E[X]$，说明

$$\hat{\theta}_M = 2\overline{X}$$

即区间右端点的矩法估计量为$2\overline{X}$.

无偏估计量 I

定义7.2.1

设总体$X \sim F_X(\cdot,\theta)$，$\theta\in\Theta$，g为θ的函数，$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是$g(\theta)$的一个估计量，如果

$$E[T(X_1,X_2,\cdots,X_n)] = g(\theta),$$

称$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$g(\theta)$的**无偏估计量**。如果

$$\lim_{n\to\infty} E[T(X_1,X_2,\cdots,X_n)] = g(\theta)$$

则称$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$g(\theta)$的**渐进无偏估计量**。

无偏与渐进无偏估计量 I

分析当$X \sim U[0,\theta]$，其区间右端点的矩估计量$\hat{\theta}_M$与最大似然估计量$\hat{\theta}_L$是否为θ的无偏估计量?

1. 对于矩法估计量

$$\hat{\theta}_M = 2\overline{X}$$

计算

$$\begin{aligned} E_\theta[\hat{\theta}_M] = 2E_\theta[\overline{X}] &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E_\theta[X_i] \\ &= \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{2} = \theta \end{aligned}$$

所以$\hat{\theta}_M$是θ的无偏估计量。

无偏与渐进无偏估计量 II

2 对于最大似然估计量

$$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$$

根据(6.3.19)，知

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F_X(x)]^{n-1} f_X(x)$$

而

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 0, & else \end{cases}$$

并且

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 1, & else \end{cases}$$

无偏与渐进无偏估计量 III

所以

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 0, & else \end{cases}$$

所以

$$E_\theta[\hat{\theta}_L] = E_\theta[X_{(n)}] = \int_0^\theta xn\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\theta$$

所以$\hat{\theta}_L$不是θ的无偏估计量，而是θ的渐进无偏估计量。我们令

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L$$

那么$\hat{\theta}$就是θ的无偏估计量。

无偏与渐进无偏估计量 IV

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量，那么$g(\hat{\theta})$一般不是$g(\theta)$的无偏估计量，除非$g(x)$是线性函数。

例如S_n^{*2}是σ^2的无偏估计量，但是S_n^*却不是σ的无偏估计量。

有效估计量 I

对于总体X的参数$g(\theta)$的两个**无偏估计量**$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，若有

$$\boldsymbol{Var[T_1] < Var[T_2]}$$

则称T_1比T_2**有效**。

由于方差反映随机变量取值的波动程度，认为波动较小的统计量更有效是合理的

有效估计

判断总体$X \sim U[0,\theta]$的区间右端点的矩估计量和最大似然估计量哪一个更有效?

$$
\begin{aligned}
Var[\hat{\theta}_M] &= Var[2\overline{X}] = Var[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] \\
&= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{4}{n^2} n \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}
\end{aligned}
$$

无偏统计量 I

$$
\begin{aligned}
Var[\hat{\theta}_L] &= Var[\frac{n+1}{n}X_{(n)}] \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}[E[X_{(n)}^2] - \left(E[X_{(n)}]\right)^2] \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{\int_0^\theta x^2 n \frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right\} \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{\frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right\} \\
&= \frac{\theta^2}{n(n+2)}
\end{aligned}
$$

无偏统计量 II

显然的，当$n > 1$，就有

$$Var[\hat{\theta}_L] < Var[\hat{\theta}_M]$$

即$\hat{\theta}_L$比$\hat{\theta}_M$要好。

一致最小方差无偏估计量 I

定义7.2.2

设总体$X \sim F_X(\cdot,\theta)$，$\theta \in \Theta$，
若$T_0(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$g(\theta)$的无偏估计量，且对$g(\theta)$的任意无偏估计量$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$都有

$$Var[T_0] \leq Var[T], \ \forall \theta \in \Theta$$

则称T_0是$g(\theta)$的**一致最小方差无偏估计量**。

一致最小方差无偏估计量一般不易求得，除非事先知道$g(\theta)$无偏估计量的方差的下界，再去寻找达到该方差的无偏估计量

相合估计量

定义7.2.3

设总体$X \sim F_X(\cdot,\theta)$，$\theta \in \Theta$，并且设$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$g(\theta)$的估计量，如果对于任意的$\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} P(|T(X_1, X_2, \cdots, X_n) - g(\theta)| \geq \epsilon) = 0, \forall \theta \in \Theta,$$

则称$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为$g(\theta)$的**相合估计量**。

由弱大数定律，$\overline{X^k}$是总体k阶原点矩的相合估计量

相合估计量的判定依据

若$\hat{\theta}$为θ的相合估计，且$\eta = g(\theta)$为θ的连续函数，那么$\hat{\eta} = g(\hat{\theta})$为$\eta$的相合估计量。

1. $\overline{X^k}$是$E[X^k]$的相合估计量。
2. S_n^2和S_n^{*2}都是σ^2的相合估计量。
3. S_n和S_n^*都是σ的相合估计量。

参数的区间估计 I

区间估计

参数的**区间估计**表示以$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$和$T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为一个**随机区间**的端点，并且使得该随机区间包含参数的**概率**满足给定的条件。

定义7.3.1

设总体$X \sim F_X(\cdot,\theta)$，$\theta \in \Theta$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为样本。若有统计量$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$和$T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得对给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$有

$$\boldsymbol{P(T_1(X_1, \cdots, X_n) \le g(\theta) \le T_2(X_1, \cdots, X_n)) = 1 - \alpha}$$

则称$[T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$是$g(\theta)$的**置信度为**$1-\alpha$**的区间估计**，置信度$1-\alpha$-置信区间。

区间估计的一般方法

置信度为$1-\alpha$的区间估计的一般方法可以分为下面三步：

1. 构造一个样本和未知参数θ的函数，记为$Y(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$，使得$Y$服从的分布**不依赖**于$\theta$。
2. **适当选择**两个常数a, b，使得

$$P(a \le Y \le b) = 1-\alpha$$

3. 根据$a \le Y \le b$**反解出**θ的范围

$$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

即有了θ的$1-\alpha$置信区间。

正态分布总体均值的区间估计 I

对于正态分布总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中$\sigma_0$已知，求$\mu$的置信度为$1-\alpha$的区间估计。

假设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为其样本，根据推论6.3.1知

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$$

所以

$$Y = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

由

$$P(|Y| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

正态分布总体均值的区间估计 II

知

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}}\right| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

变化为

$$P\left(\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \le \mu \le \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}\right) = 1-\alpha.$$

所以我们有μ的置信度为$1-\alpha$的区间估计为

$$\left[\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}, \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}\right]$$

总体方差σ^2未知，给出总体均值μ的区间估计量

根据推论6.3.2有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$$

由

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}\sqrt{n-1}\right|\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

知μ的置信度为$1-\alpha$的区间估计为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}},\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right]$$

$\mu=\mu_0$，其中μ_0已知，求σ^2的区间估计。

由于总体与样本独立同分布，所以

$$Y_i=\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$$

根据命题6.3.2知

$$Z=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\sim\chi^2(n)$$

所以

$$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\le Z\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n))=1-\alpha$$

σ^2的区间估计 II

即

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) = 1-\alpha$$

得到σ^2置信度为$1-\alpha$的区间估计为

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$$

σ^2的区间估计

μ未知，估计σ^2的置信度$1-\alpha$的区间。

由抽样分布基本定理，

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

令

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

所以σ^2的置信度$1-\alpha$的区间估计为

$$\left[\frac{nS_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{nS_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

两个正态总体参数的区间估计

设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且$X$，$Y$相互独立，样本分别为$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$。其中总体$X$与$Y$的样本均值与方差分别为

$$\overline{X},\ \overline{Y},\ S_m^2,\ S_n^2$$

$\mu_1 - \mu_2$和$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$的区间估计量分别是什么?

$\mu_1 - \mu_2$的区间估计 I

σ_1^2和σ_2^2已知，求$\mu_1 - \mu_2$的区间估计。

由推论6.3.1

$$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}), \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}),$$

所以

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

然后令

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$\mu_1 - \mu_2$的区间估计 II

求得$u_1 - u_2$的置信度为$1-\alpha$区间估计为

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},(\overline{X}-\overline{Y})+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right]$$

两个正态总体参数的区间估计 I

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 未知，求$\mu_1 - \mu_2$的区间估计。

由推论6.3.4知

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

以及t分布关于y轴对称的性质，得到

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right) = 1 - \alpha$$

两个正态总体参数的区间估计 II

知$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的区间估计量为

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},(\overline{X}-\overline{Y})+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计 I

μ_1, μ_2已知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计。

首先，下面的结论是显然的

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2 \sim \chi^2(m),\ \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2 \sim \chi^2(n)$$

根据F分布的定义有

$$\frac{n}{m}\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m,n)$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计 II

特别的

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n) \leq \frac{n}{m}\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)\right) = 1-\alpha$$

由此可得$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的区间估计

$$\left[\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}, \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\right]$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计 I

μ_1, μ_2未知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计。

根据推论6.3.3有

$$\frac{mS_m^2}{nS_n^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{n-1}{m-1} \sim F(m-1, n-1)$$

所以

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1) \leq \frac{mS_m^2}{nS_n^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{n-1}{m-1} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\right) = 1-\alpha$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计 II

可得$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的区间估计量为

$$\left[\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\frac{m(n-1)S_m^2}{n(m-1)S_n^2}, \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\frac{m(n-1)S_m^2}{n(m-1)S_n^2}\right]$$