2020-2021-2 学期《概率论与数理统计》试卷 A

一、选择题（共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=($ $)$.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$

1. B 要点：$\max\{X，Y\}\le 1 \Leftrightarrow X\le 1，Y\le 1$

2. 设 T 服从自由度为 n 的 t 分布，若 $P\{|T|>\lambda\}=\alpha$，则 $P\{T<-\lambda\}=$（ ）.

(A) α (B) $\frac{\alpha}{3}$ (C) $\frac{\alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{4}$

2. C 要点：t 分布具有对称性

3. 从总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，易证估计量

$$\mu_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3,\quad \mu_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$$
$$\mu_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3,\quad \mu_4=\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$$

均是总体均值 μ 的无偏估计量，则其中最有效的估计量是( ).

(A) μ_3 (B) μ_1 (C) μ_2 (D) μ_4

3. A 要点：考虑有效性即考虑方差。利用 $Var[aX_1+bX_2+cX_3]=(a^2+b^2+c^2)Var[X]$

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为−2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为−0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\ge 6\}\le($ $)$.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{8}$

4. C 考点：协方差、方差、切比雪夫不等式。

解 因为 $$E(X+Y)=EX+EY=0$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}$$

$$=1+4-2\times 0.5\times 2=3$$

根据切比雪夫不等式

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

所以
$$P\{|X+Y|\geq 6\}\leq\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

5. 设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\bar{C})=$ ( ).

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

5. D 考点：条件概率，事件之间关系的运用。

由条件概率的定义，

$$P(AB\mid\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}$$

其中 $P(\bar{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)=\frac{1}{2}-P(ABC)$

由于 A,C 互不相容，即 $AC=\phi,\ P(AC)=0$

又 $ABC\subset AC$，得 $P(ABC)=0$，代入得 $P(AB\bar{C})=\frac{1}{2}$，故$P(AB\mid\bar{C})=\frac{3}{4}$.

6. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布 ( ).

(A) $N(0,1)$ (B) $t(1)$ (C) $\chi^2(1)$ (D) $F(1,1)$

6. B 考点：三大分布的结构。要注意的是分母的表达形式和根号之间的关系。

解: 从形式上，该统计量只能服从 t 分布。故选 B 。

证明如下:

$$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}=\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$$

由正态分布的性质可知， $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与$\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均服从标准正态分布且相互独立，可知

$$\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1)$$

7. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{2e}$　(B) $\frac{1}{3e}$　(C) $\frac{e}{3}$　(D) $\frac{e}{4}$

7. A　　　要点：别想太多了。按部就班地做。第一步，求 $E[X^2]$，得到具体数字后再套泊松分布的分布列。

因为 X 服从参数为 1 的泊松分布，所以其概率布为

$P\{X=k\}=\frac{1}{k!}e^{-1}(k=0,1,2,\cdots)$ ，$E(X)=D(X)=1$

从而 $E(X^2)=[E(X)]^2+D(X)=2$. 于是，

$$P\{X=EX^2\}=P\{X=2\}=\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2e}$$

8. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本， $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本修正方差，记统计量$T=\bar{X}-S^2$, 则 $E(T)=($ $)$.

(A) np^2　(B) $n(1-p)^2$　(C) np　(D) $n(1-p)$

8. A　　　考点：$\bar{X}$ 和 S^2 的性质。注意这里指的是修正样本方差。要通读题目！不管是样本方差还是修正样本方差，做法都是一样的。课件 6-1，P27

因为 $X\sim B(n,p)$, 故 $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$

因为 $E(\bar{X})=E(X), E(S^2)=D(X)$, 所以

$$E(T)=E(\bar{X}-S^2)=E(\bar{X})-E(S^2)=np-np(1-p)=np^2$$

9. 设二维离散型随机变量 X、Y 的联合分布律如下，则联合分布函数值 $F(0,3)=($ $)$.

Y \ X	0	2	4

0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{18}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$

9. B 直接在表上操作。将 x>0 的划掉，再 y>3 的划掉，剩下的相加。

10. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是( )

(A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$ (C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

10. D 很显然前三个在整个实数轴上积分未必是 1，D 即为 F_1F_2 的导函数，F_1F_2 满足分布函数的要求。

由分布函数和概率密度的性质可得

$F_1'(x)=f_1(x)$，$F_2'(x)=f_2(x)$,

$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\geq 0(-\infty<x<+\infty)$.

从而有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_1(x)F_2(x)]'\mathrm{d}x$$

$$=[F_1(x)F_2(x)]_{-\infty}^{+\infty}=F_1(+\infty)F_2(+\infty)-F_1(-\infty)F_2(-\infty)=1$$

所以 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 是概率密度，即正确选项为 D.

11. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则 $E(XY^2)$ =( ).

(A) $\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$ (B) $\sigma\left(\mu^2+\sigma^2\right)$ (C) $\mu^2+\sigma^2$ (D) $\mu\sigma\left(\mu^2+\sigma^2\right)$

11. A 考点：1、对于二维正态分布，相关系数=0 等价于 X 与 Y 独立。2、期望和方差的运算性质。

因为 (X,Y) 服从二维正态分布，所以$E(X)=E(Y)=\mu$，$D(X)=D(Y)=\sigma^2$，$\rho_{XY}=0$

对二维正态随机变量(X,Y)：$\rho_{XY}=0$，所以 X,Y 相互独立，从而 X,Y^2 也相互独立，所以

$E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=E(X)\{D(Y)+[E(Y)]^2\}=\mu(\sigma^2+\mu^2)$

12. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$, 且相关系数$\rho_{XY}=1$, 则( ).

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

12. D　　要点：将 Y 中心化(Y-1)/2。相关系数为 1 时，P（X=(Y-1)/2）=1。这样更快。根据相关系数的公式，就是 X 和 Y 中心化的乘积的数学期望。

二、(10 分）甲、乙两人轮流投篮，甲先投。一般来说，甲、乙两人独立投篮的命中率分别为 0.7 和 0.6。但由于心理因素的影响，如果对方在前一次投篮中投中，紧跟在后面投篮的这一方的命中率就会有所下降，甲、乙的命中率分别变为 0.4 和 0.5。求：

(1) 乙在第一次投篮时投中的概率；　(2) 甲在第二次投篮时投中的概率。

要点：红色部分翻译过来即条件概率。要想到全概率公式和贝叶斯公式。

解：令 A_1 表示事件“乙在第一次投篮时投中”，

令 B_i 表示事件“甲在第 i 次投篮时投中”，$i=1,2$

（1）$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(\overline{B_1})P(A_1|\overline{B_1})$

$=0.7\times0.5+0.3\times0.6=0.53$　　(5 分）

（2）$P(A_1)=0.53,\quad \Rightarrow P(\overline{A_1})=0.47$

$P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(B_2|\overline{A_1})$

$=0.53\times0.4+0.47\times0.7=0.541$　　(5 分)

三、(10 分）有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不超过 3m。现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根超过 3m 的概率是多少？

附：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.5)=0.9332$，$\Phi(2)=0.9773$，$\Phi(2.5)=0.9938$

要点：题目提示使用中心极限定理近似计算。

解　设$X_i=\begin{cases}1 & 当所取的第i根木柱超过3m\\ 0 & 当所取的第i根木柱不超过3m\end{cases}$　$(i=1,2,\cdots,100)$　　(2 分)

则 $X_i \sim B(1, 0.2)$, 记 $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, 则 $X \sim B(100, 0.2)$.　　(2 分)

由棣莫佛-拉普拉斯定理得

$$P\{X \ge 30\} = 1 - P\{X < 30\} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= 1 - P\left\{\frac{X - 100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}} \le \frac{30 - 100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{30-20}{10\times 0.4}\right) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062 \qquad (4\text{ 分})$$

四、(10 分) 设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值$\bar{x} = 10$，样本修正方差$s^{*2} = 0.16$.

(1) 求μ 的置信度为 0.95 的置信区间；(保留四位小数)

(2) 检验假设$H_0: \sigma^2 = 0.1$（显著性水平为 0.05）。

附： $t_{0.975}(16) = 2.1199$，$t_{0.975}(15) = 2.1315$，$t_{0.95}(16) = 1.7459$，

$\chi^2_{0.975}(15) = 27.488$，$\chi^2_{0.975}(16) = 28.845$，$\chi^2_{0.025}(15) = 6.262$，

要点：都是参数未知的情形。T 和卡方，注意自由度要减 1！本题不用计算器也能解答。

解：（1）μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间:

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}},\quad \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{X} = 10,\quad S^* = 0.4,\quad n = 16,\quad \alpha = 0.05,\quad t_{0.975}(15) = 2.1315$

所以 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7869，10.2132）　　(5 分)

(2)　$H_0: \sigma^2 = 0.1$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$\chi^2_{0.975}(15) = 27.488,\quad \chi^2_{0.025}(15) = 6.262$

$$\chi^2 = \frac{15\times 0.16}{0.1} = 24$$

因为 $\chi^2_{0.025}(15) < \chi^2 = 24 < \chi^2_{0.975}(15)$，所以接受 H_0.　　(5 分)

五、（10 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\ge 2.\end{cases}$

(1) 求 Y 的分布函数；　　(2) 求概率 $P\{X\le Y\}$.

解 (1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

要点：由 Y 的表达形式知，概率集中在区间[1，2]

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$;　　(1 分)

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$;　　(1 分)

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<X\le y\}$

$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx$

$=\frac{1}{27}(y^3+18)$　(2 分)

综上　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{1}{27}(y^3+18), & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$　(1 分)

(2) 观察 Y 的表达形式，可知 X≤Y⇔X<2

$P\{X\le Y\}=P\{X<2\}=\int_0^2\frac{1}{9}x^2dx=\frac{8}{27}$

六、**(10 分)** 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的样本值：

3,　1,　3,　0,　3,　1,　2,　3.

求 θ 的矩估计和最大似然估计.

解　$EX=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$

$$\bar{X}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$$

令 $3-4\hat{\theta}=2$，解得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M=\frac{1}{4}$.　(5 分)

对于给定的样本值，似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，解得 $\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$. 因 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$ 不合题意，所以 θ 的最大似然估计值为

$\hat{\theta}_L=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.　(5 分)

七、(14 分) 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(1) 求二维随机向量 (X,Y) 的概率分布.

(2) 求 $Z=XY$ 的数学期望 E(Z).

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解: (1) 由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ 可得（直接在表上操作更快!）

$P\{X^2\neq Y^2\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0$　(2 分)

所以

$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$

$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,\mathrm{Y}=0\}$

$\therefore P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{3}$

$P\{Y=-1\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=1,Y=-1\}$

$\therefore P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}$

$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}$

$\therefore P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$

所以 (X,Y) 的概率分布为　(4 分)

X \ Y	−1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(2) 因为 $Z=XY$ 的可能取值为 -1, 0, 1.（直接在上表中操作，得到 XY 的分布列）

$P\{Z=-1\}=P\{XY=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}$

$P\{Z=1\}=P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$

$P\{Z=0\}=P\{XY=0\}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$E(XY)=E(Z)=(-1)\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$　(4 分)

(3) $E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$E(Y)=(-1)\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，从而可得$X$ 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=0$.　(4 分)