

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析(上)》期末考试(A)

- 注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;
2. 考试形式: 闭卷;
3. 请用蓝色或黑色水笔答题, 不要用铅笔或者其他颜色的笔答题;
4. 交卷时除了草稿纸不用交之外, 每页试卷都要交;
5. 本试卷共 10 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

一、 (10分)用 $\varepsilon - \delta$ 语言叙述 $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = B$ 的定义. 并用定义证明 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}(a > 0)$.

二、 (10分)计算下列极限

(1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{1+t} \right)^t;$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\left(2 + \frac{1}{x} \right) e^x - \frac{1}{x} \right).$

三、 (10分)完成下面两题

(1) 设 $y = x^2 e^{3x}$, 求 $y^{(n)}(x)$.

(2) 定义函数

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

问 $g(x)$ 在 $x = 0$ 有几阶导数.

四、 (10分)计算以下两题

(1) $\int x^2 e^{-x} dx,$

(2) $\int \sqrt{x^2 + 4} dx.$

五、 (10分) 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) > 0$. 则存在唯一的 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^\xi f(t) dt = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)} dt$.

六、 (10分)设心脏线的极坐标方程为 $r = b(1 + \cos \theta)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}, b > 0$.

(1) 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) 求心脏线所围成的面积.

七、(10分)完成下面两题

(1) 讨论函数 $g(x) = \ln x$ 的凹凸性;

(2) 设 $p, q > 0$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 又设 $a > 0, b > 0$, 证明:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

八、 (10分) 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ 满足 $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, 则在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

九、(10分) 设 $g(x) \in C[0, 1]$, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $g(0) = 1, g(1) = 0$. 证明: 存在一点 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $g'(x_0) = -\frac{g(x_0)}{x_0}$.

十、(10分) (1) 设 $g(x)$ 在任一有限区间上可积, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = a.$$

(2) 第(1)小题的逆命题是否成立? 如果不成立, 给出反例. 如果加上一个条件: $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调上升, 第(1)小题的逆命题是否成立? 给出理由.