Modeldiagnosztika

Zoltan Kekecs

26 November 2019

Contents

1 Absztrakt

Ebben a gyakorlatban arra térünk ki, hogyan ellemorizhetjük hogy a lineáris regresszió elofeltetelei teljesülnek-e a modellünkre, milyen következményei vannak ha sérülnek ezek az elofeltetelek és mi a teendo ilyenkor.

2 Adat kezelés és leiró statisztikák

2.1 Csomagok betoltese

Ennek a gyakorlatnak a során az alábbi csomagokat fogjuk használni:

```
library(psych) # for describe
library(car) # for residualPlots, vif, pairs.panels, ncvTest
library(lmtest) # bptest
```

```
## Warning: package 'lmtest' was built under R version 3.6.3
```

```
library(sandwich) # for coeftest vcovHC estimator
library(boot) # for bootstrapping
library(tidyverse) # for tidy code
```

2.2 Saját függvények

Az ora soran hasznalunk majd sajat fuggvenyeket, melyek nem szerepelnek a fenti package-ekben. Ezeket toltsd be most hogy a kesobbi kodok rendben lefussanak.

A bootstrapped confidencia intervallumok meghatározásához az alábbi saját függvényeket alkalmazzuk majd:

```
# function to obtain regression coefficients
# source: https://www.statmethods.net/advstats/bootstrapping.html
bs_to_boot <- function(model, data, indices) {
  d <- data[indices,] # allows boot to select sample
  fit <- lm(formula(model), data=d)
  return(coef(fit))
}

# function to obtain adjusted R^2
# source: https://www.statmethods.net/advstats/bootstrapping.html (partially modified)
adjR2_to_boot <- function(model, data, indices) {
  d <- data[indices,] # allows boot to select sample
  fit <- lm(formula(model), data=d)
  return(summary(fit)$adj.r.squared)
}


# Computing the booststrap BCa (bias-corrected and accelerated) bootstrap confidence intervals by Elfro
# This is useful if there is bias or skew in the residuals.

confint.boot <- function(model, data = NULL, R = 1000){
  if(is.null(data)){
    data = eval(parse(text = as.character(model$call[3])))
  }
  boot.ci_output_table = as.data.frame(matrix(NA, nrow = length(coef(model)), ncol = 2))
  row.names(boot.ci_output_table) = names(coef(model))
  names(boot.ci_output_table) = c("boot 2.5 %", "boot 97.5 %")
  results.boot = results <- boot(data=data, statistic=bs_to_boot,
```

```
                            R=1000, model = model)

  for(i in 1:length(coef(model))){
    boot.ci_output_table[i,] = unlist(unlist(boot.ci(results.boot, type="bca", index=i))[c("bca4", "bca5
  }

  return(boot.ci_output_table)
}
```

2.3 A King County, USA-beli ingatlanárakat tartallmazó adatsor beolvasása

Ebben a gyakorlatban a különbözo ingatlanok árának meghatározását tuzzük ki célul.

A Kaggle-bol származó adatsort fogjuk használni, amely tartalmazza az ingatlan árakat és az ezeket potenciálisan befolyásoló egyéb tényezok értékeit. Adatsorunk a King County, USA (Seattle és környéke)-beli ingatlanárakat tartalmazza, beleértve Seattle-t is. Az adatokat 2014 és 2015 Májusa között vették fel. További információ az adatsorról az alábbi linken: https://www.kaggle.com/harlfoxem/housesalesprediction

Mi az adatsornak csak egy részét fogjuk használni, összesen N = 200 ingatlant vizsgálva.

Az adatok az alábbi kód futtatásával olvashatóak be:

```
data_house = read.csv("https://bit.ly/2DpwKOr")
```

2.4 Az adatsor megtekintése

Fontos, hogy az elemzést mindig az adatsor megismerésével, és az esetleges ellentmondások javításával kezdjük.

A következo kódrészletben atvaltjuk az USA dollar-t millio forint mertekegysegre,az alapterület mértékegységét az eredeti négyzetlábról négyzetméterré alakítjuk, illetve a has_basement változót is megnevezzük mint faktort.

```
data_house %>%
  summary()
```

```
##        id                         date         price            bedrooms
##  Min.   :1.600e+07   20140623T000000:  5   Min.   : 153503   Min.   :1.00
##  1st Qu.:1.885e+09   20141107T000000:  5   1st Qu.: 299250   1st Qu.:3.00
##  Median :3.521e+09   20150317T000000:  4   Median : 425000   Median :3.00
##  Mean   :4.113e+09   20140627T000000:  3   Mean   : 453611   Mean   :2.76
##  3rd Qu.:6.424e+09   20140717T000000:  3   3rd Qu.: 550000   3rd Qu.:3.00
##  Max.   :9.819e+09   20140902T000000:  3   Max.   :1770000   Max.   :3.00
##                      (Other)        :177
##    bathrooms      sqft_living      sqft_lot          floors        waterfront
##  Min.   :0.75   Min.   : 590   Min.   :   914   Min.   :1.000   Min.   :0.000
##  1st Qu.:1.00   1st Qu.:1240   1st Qu.:  4709   1st Qu.:1.000   1st Qu.:0.000
##  Median :1.75   Median :1620   Median :  7270   Median :1.000   Median :0.000
##  Mean   :1.85   Mean   :1728   Mean   : 12985   Mean   :1.472   Mean   :0.005
##  3rd Qu.:2.50   3rd Qu.:1985   3rd Qu.: 10187   3rd Qu.:2.000   3rd Qu.:0.000
##  Max.   :3.50   Max.   :4380   Max.   :217800   Max.   :3.000   Max.   :1.000
##
##       view          condition         grade          sqft_above   sqft_basement
##  Min.   :0.000   Min.   :3.00   Min.   : 5.00   Min.   : 590   Min.   :   0.0
##  1st Qu.:0.000   1st Qu.:3.00   1st Qu.: 7.00   1st Qu.:1090   1st Qu.:   0.0
##  Median :0.000   Median :3.00   Median : 7.00   Median :1375   Median :   0.0
##  Mean   :0.145   Mean   :3.42   Mean   : 7.36   Mean   :1544   Mean   : 184.1
##  3rd Qu.:0.000   3rd Qu.:4.00   3rd Qu.: 8.00   3rd Qu.:1862   3rd Qu.: 315.0
```

```
##  Max.   :4.000   Max.   :5.00   Max.   :11.00   Max.   :4190   Max.   :1600.0
##
##     yr_built     yr_renovated       zipcode           lat
##  Min.   :1900   Min.   :   0.00   Min.   :98001   Min.   :47.18
##  1st Qu.:1946   1st Qu.:   0.00   1st Qu.:98033   1st Qu.:47.49
##  Median :1968   Median :   0.00   Median :98065   Median :47.58
##  Mean   :1968   Mean   :  79.98   Mean   :98078   Mean   :47.57
##  3rd Qu.:1993   3rd Qu.:   0.00   3rd Qu.:98117   3rd Qu.:47.68
##  Max.   :2015   Max.   :2014.00   Max.   :98199   Max.   :47.78
##
##       long        sqft_living15    sqft_lot15          has_basement
##  Min.   :-122.5   Min.   : 740   Min.   :   914   has basement: 65
##  1st Qu.:-122.3   1st Qu.:1438   1st Qu.:  5000   no basement :135
##  Median :-122.2   Median :1715   Median :  7222
##  Mean   :-122.2   Mean   :1793   Mean   : 11225
##  3rd Qu.:-122.1   3rd Qu.:2072   3rd Qu.: 10028
##  Max.   :-121.7   Max.   :3650   Max.   :208652
##
```

```
data_house = data_house %>%
  mutate(price_mill_HUF = (price * 293.77)/1000000,
         sqm_living = sqft_living * 0.09290304,
         sqm_lot = sqft_lot * 0.09290304,
         sqm_above = sqft_above * 0.09290304,
         sqm_basement = sqft_basement * 0.09290304,
         sqm_living15 = sqft_living15 * 0.09290304,
         sqm_lot15 = sqft_lot15 * 0.09290304
         )
```

3 Modell diagnosztika

Valahányszor egy modellt statisztikai következtetések levonására alkalmazunk, ellenoriznünk kell, hogy a **lineáris regresszió alapveto elofeltetelei** teljesülnek-e modellünkre.

Éppen ezért fontos, hogy elemzésünk minden fontosabb modelljét ellenorizzuk. Ez mindenkeppen erinti a végso modellunket, de gyakran erdemes a modellvalasztas soran epitett koztes modelleket is ellenorizni.

Fontos megjegyezni, hogy ha bármit valtoztatunk a modellünkön, vagy az adatainkon a modelldiagnosztika eredményei alapján, úgy a diagnosztikát **ujra el kell végeznünk**.

3.1 Modell eloállítása

Elso lépésként állítsunk elo egy modellt, amely pusztán az sqm_living és grade változók alapján megállapítja az ingatlan árát.

Futassuk ezen a modellen a modell diagnosztikát!

```
mod_house2 <- lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house)
```

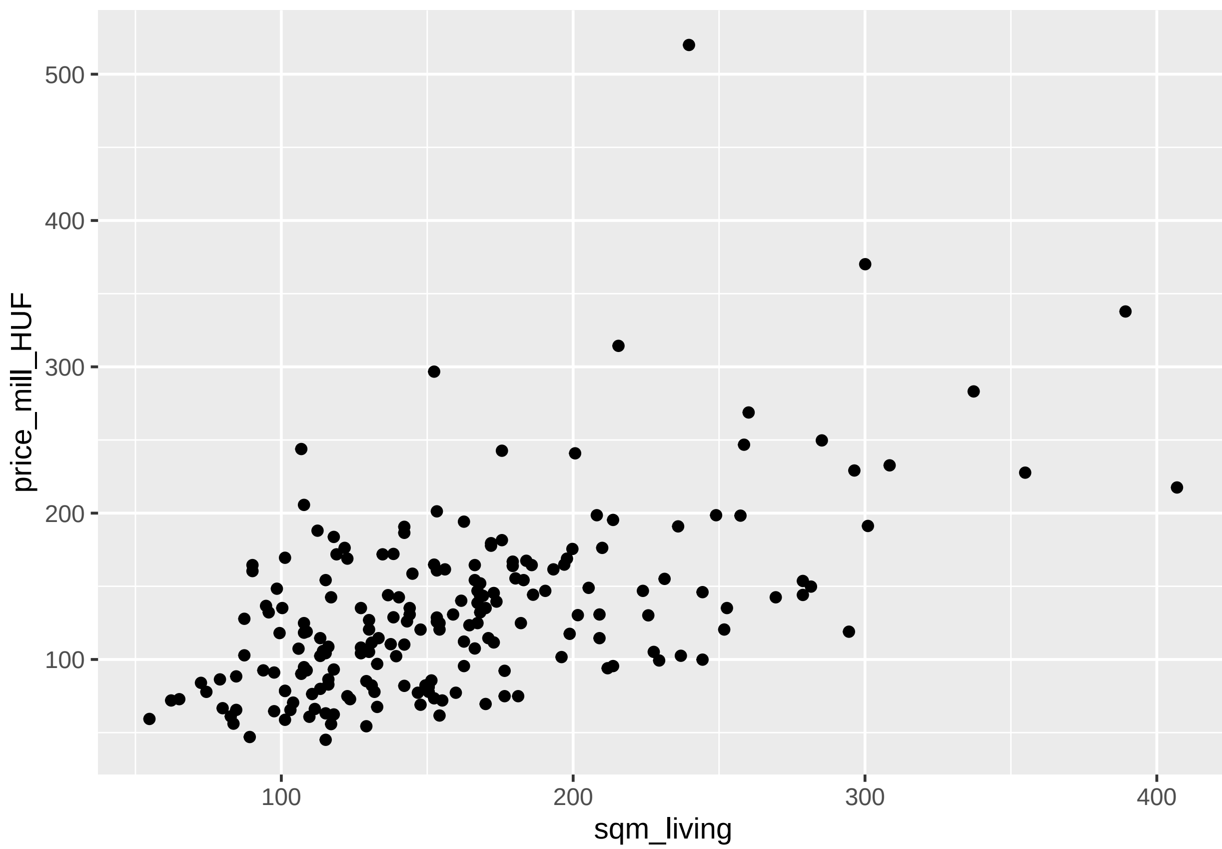
4 Kiugró adatok kezelése

4.1 Szélsoséges esetek azonosítása

A szélsoséges eseteket azonosithatjuk a kimeneti valtozok azonosithatjuk peldaul az **adatok vizualizacioja** soran.

Példánkban az ár és alapterület adatait ábrázoljuk scatterplot-on.

```
data_house %>%
  ggplot() +
  aes(x = sqm_living, y = price_mill_HUF) +
  geom_point()
```



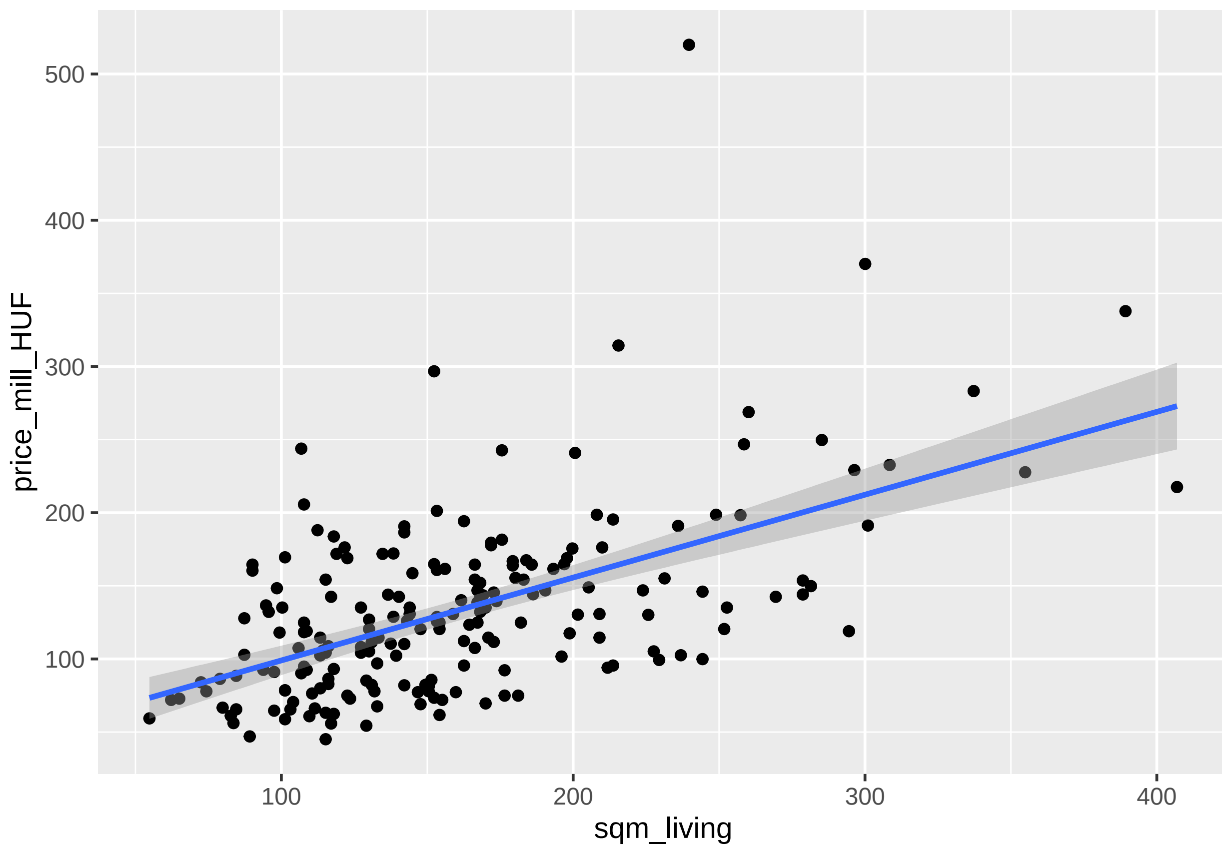
Lathato hogy a legtöbb ingatlan végso ára 200 millió forint alatt volt, de voltak kivételek is. Az 200 millió forintnál drágább ingatlanokat tekinthetjük szélsoséges értékeknek, különösképp az 500 millió forint árú ingatlant.

Nem szükséges azonban eltávolítani ezeket az adatokat ha van elég pontunk ami ellensúlyozhatja ezeknek a hatását.

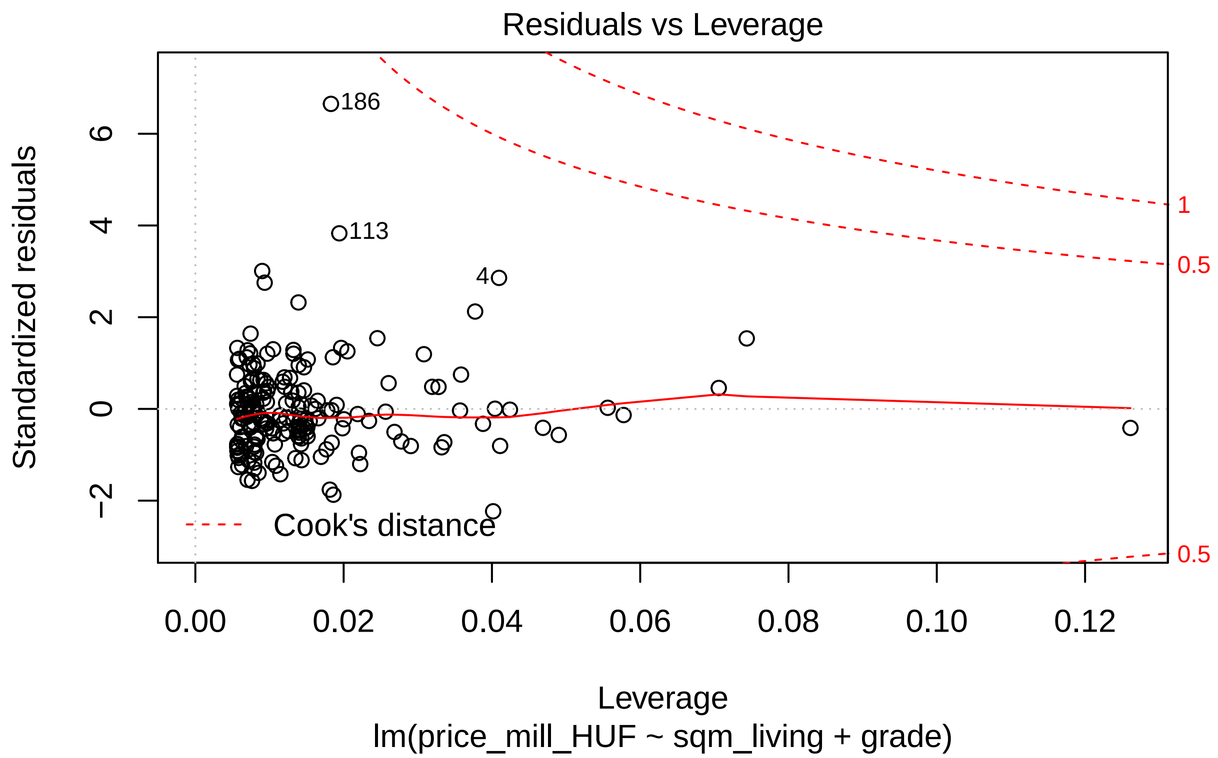
4.2 Jelentos hatasu kiugro ertekek azonositasa

A helyzet bonyolultabb azokban az estekben ha az érték nem csak jelentosen eltér a többi adattól, de **a regressziós vonalra is számottevo hatással bír**. Ezeket nagy befolyasu eseteknek nevezzuk (**high leverage cases**). Ezeket a nagy befolyasu eseteket a scatter plot-ot vizsgálva, a residual-leverage plot segítégével, es a Cook távolságon keresztul fedezhetjuk fel.

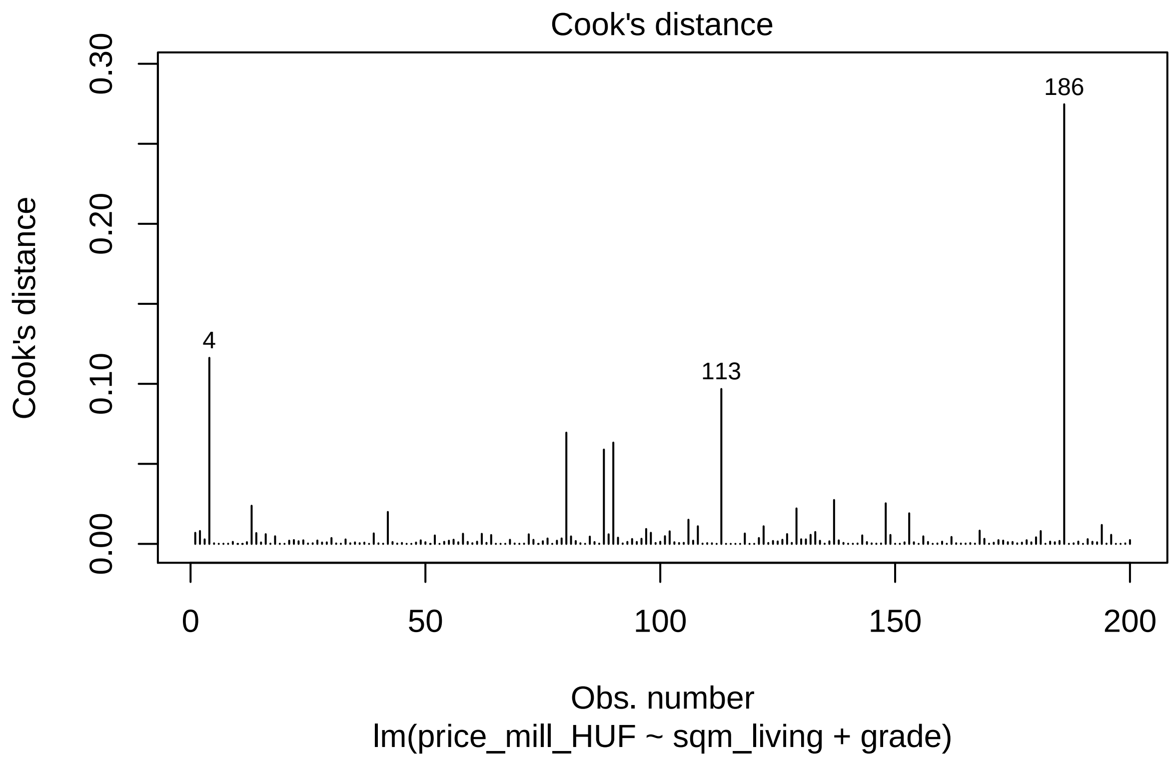
```
data_house %>%
  ggplot() +
  aes(x = sqm_living, y = price_mill_HUF) +
  geom_point() +
  geom_smooth(method = "lm")
```




```
mod_house2 %>%
  plot(which = 5)
```




```
mod_house2 %>%
  plot(which = 4)
```



Azok a pontok, melyek a diagrammon a regressziós vonal közepéhez közel helyezkednek el kissebb befolyassal vannak arra mint a **végeknél lévoek**. Azok az esetek (megfigyelesek) amelyek nagy reziduális hibaval és nagy befolyással jellemezhetoek, nagy hatast fejtenek ki a modellre. A **Cook távolság** mutatja meg, mekkora egy eset hatasa a modellre.

Bár nincs kokrét szabály a problémás esetek meghatározására, de van néhány álltalános alapelv. Vannak akik az **1-nél nagyobb** Cook távolságú értékeket, míg mások a **4/N-nél (ahol N az adatok száma) nagyobb** Cook távolságot tekintik jelentos hatasunak.

Esetünkben egyetlen esetben sem nagyobb a Cook távolság 1-nél, néhány esetben azonban 0,02-t már meghaladja. Vagyis a második kirtérium alapján van nehany nagy hatasu eset a mintaban.

A nagy hatasu esetek jelenlete onmagaban nem feltetlenul jelent orvosolando problemat, viszont ez konnyen vezethet a regresszios modell **bejoslo erejenek csokkenesehez**, es ahhoz, hogy a regresszio alapfeltetelei megserulnek.

Eloször is teszteljük hogy teljesülnek-e a többszörös regresszió elofeltetelei, és csak utána hozzunk dontest azzal kapcslatban, hogy mit kezdunk a nagy hatasu esetekkel.

5 A lineáris regresszió elofeltetelei

- **Normalitás**: A modell rezidualisai normáleloszlást követnek
- **Linearitás**: A prediktor és az eredmény között lineáris kapcsolat kell legyen
- **Homoszkedaszticitás**: A rezidualisok varianciája minden értékre hasonló a prediktorokéhez
- **Nincs kollinearitás**: egyetlen prediktor sem határozható meg a többi prediktor lineáris kombinációjaként.

5.1 Normalitás

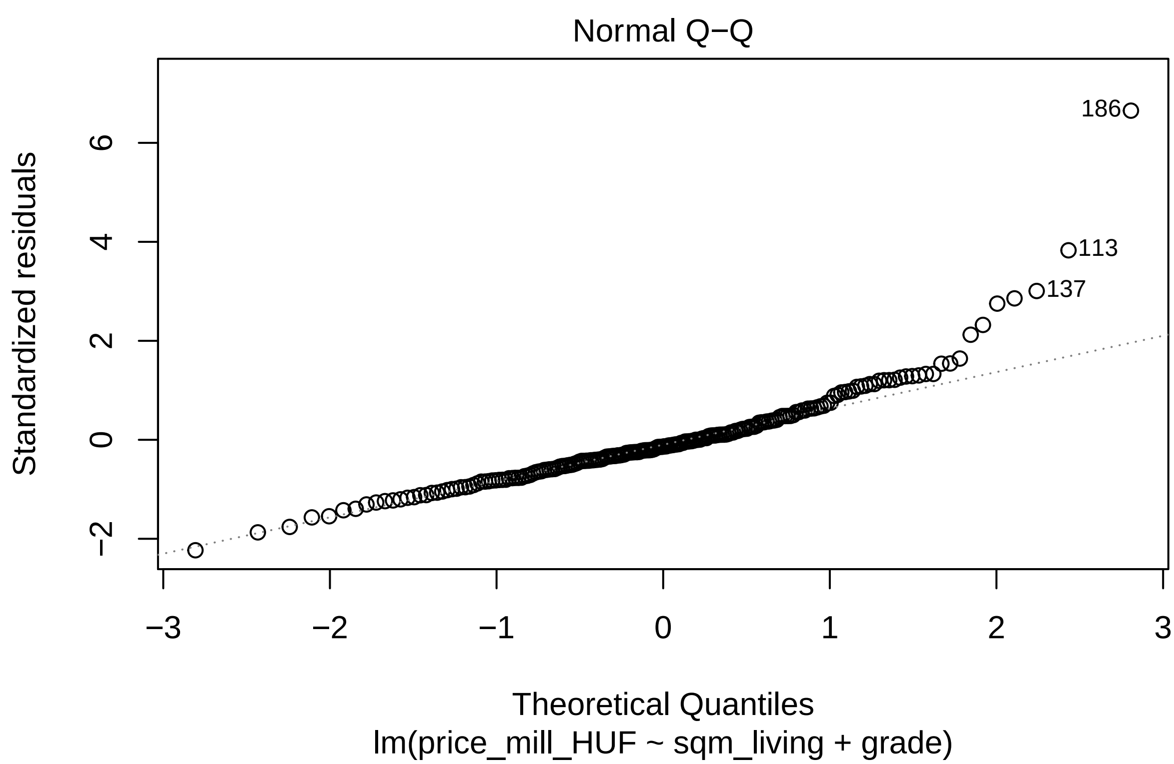
A modell **rezidualisai normáleloszlást** kell kövessenek Megjegyzendo, hogy itt a modellbol származó elorejelzés hibájáról (rezidualisáról), és nem az egyes prediktorok vagy bejosolt valtozo eloszlásáról beszélünk.

Ezt a elofeltetelt egy QQ diagramm (**QQ plot**) ábrázolásával, és az esetek elméleti, diagonálishoz viszonyított elrendezésének vizsgálatával ellenorizhetjük. Ha az esetek jelentosen eltérnek az ábrán szaggatott vonallal jelzett elmeleti diagonálistól, úgy a normalitásra vonatkozó elofeltetel sérülhet.

A rezidualisok **hisztogrammját** is érdemes szemügyre vennünk. Ezen egy a normál eloszlásnak megfelelo, Gauss-görbéhez hasonló alakzatot kell látnunk ha a normalitás feltétele teljesül.

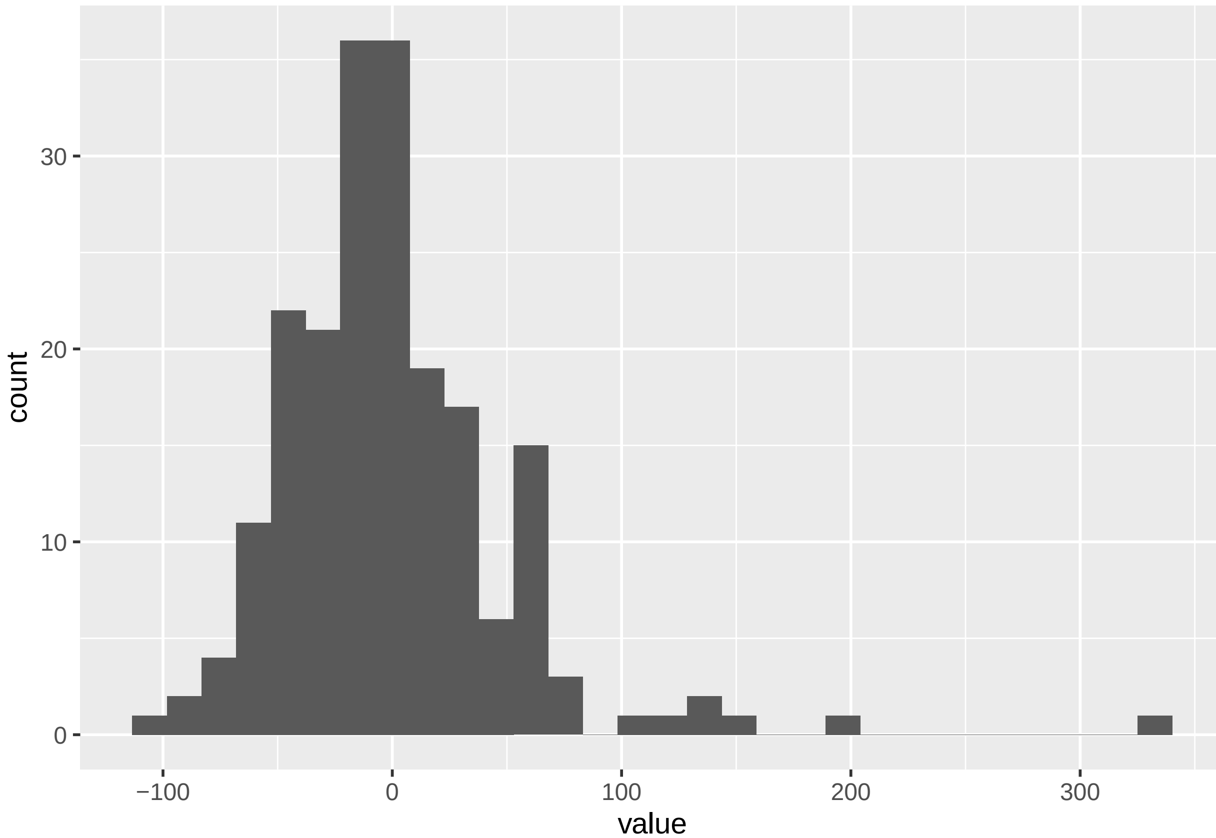
A **skew és kurtosis** statisztikákat is lekérdezhetjük a describe() függvény segítségével. ha a skew és kurtosis > 1, úgy az a normalitási feltétel sérülését jelezheti.

```
# QQ plot
mod_house2 %>%
  plot(which = 2)
```




```
# histogram

residuals_mod_house2 = enframe(residuals(mod_house2))
residuals_mod_house2 %>%
  ggplot() +
  aes(x = value) +
  geom_histogram()
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```




```r
# skew and kurtosis
describe(residuals(mod_house2))
```

```
##    vars   n mean    sd median trimmed   mad     min    max range skew kurtosis
## X1    1 200    0 49.71  -6.79   -4.31 36.98 -109.26 329.24 438.5 2.05     9.73
##      se
## X1 3.52
```

Az eredmenyek alapjan lathato hogy a rezidualisok enyhén eltérnének a normalitási feltételtol, ami elsosorban a néhány problémás esetnek tudható be.

5.1.1 Mi történik a normalitási feltétel sérülése esetén?

A becslések és **konfidencia intervallumok pontossága** a normalitási feltétel sérülése esetén csökkenhet. Ennek mértéke a **minta méretétol** is függ. Nagy minták esetén (N>500) a hatás szinte elhanyagolható, míg kissebb minták esetén (N kb. 100) a hatás nagyobb.Lumey Diehr, Emerson és Chen (2002) kutatásában például a normalitás szélsoséges sérülése esetén (skewness = 8,8; kurtosis = 131) a 95%-os konfidencia intervallum a szimulaciok 93,6%-ában tartalmazta a populációatlag N=500-as minta esetén, és 91,3%-ában az N=65-ös esetben.

Következik tehát, hogy a normalitási feltétel sérülése esetén a konfidencia intervallumok és p értékek kevésbé lesznek megbízhatóak, de ennek figyelembevetelevel tovabbra is felhasznalhatoak.

Hivatkozások:

Lumley, T., Diehr, P., Emerson, S., & Chen, L. (2002). The importance of the normality assumption in large public health data sets. Annual review of public health, 23(1), 151-169.

5.1.2 Mit tegyünk, ha a normalitási feltétel sérül?

1. Kezelhetjük egyszeruen óvatosabban eredményeinket, például **99%-os konfidencia intervallum** használatával a szokásos 95%-os helyett, vagy tekinthetjük $p < 0{,}01$-et a szignifikancia határának.
2. Megpróbálhatjuk a prediktorainkat vagy a bejosolt valtozot ugy **transzformálni**, hogy rezidualisaink eloszlása közelebb legyen a normál eloszláshoz. Ekkor azonban fontos figyelembe venni, hogy az így kapott egyutthatok is transzformálva lesznek. Ugyan ez vonatkozik a hiba feltételekre, azaz ha a modell transzformált értékekre vonatkozó RSS-je nem lesz összehasonlítható az transzformalatlan értékekével. Az átalakításról további információk az alábbi linken találhatóak: http://abacus.bates.edu/~ganderso/biology/bio270/homework_files/Data_Transformation.pdf (a file szerzoje számomra ismeretlen, de a dokumentum tartalmilag pontos, és megfelelo hivatkozásokkal ellátott).
3. Ha mindössze néhány eset okozza a normalitástól való eltérést, úgy hasznos lehet a **kiugró értékek kizárása**. Formális hipotézisteszt esetén a változók kizárása nem alapulhat a p-értéken. A kizárás feltételei preregisztrálhatóak, vagy egy érzékenységi elemzest is használhatunk, azaz az adott elemzest kétszer lefuttathatjuk adatainkon, egyszer a problémás értékek bevonásával, egyszer pedig azok kizárásával, majd az eredményeket összehasonlíthatjuk a két esetben.

Esetünkben, lévén adataink mindössze néhány kiugro eset miatt sértik a normalitási feltételt, megpróbálhatjuk kizárni ezeket az adatokat, hátha így kiküszöbölheto a probléma. Itt a **186-os és 113-as esetek** kizárását választottuk azok Cook távolsága alapján, és mivel a **QQ plot** alapján szerepük volt a normalitástól való eltérésben.

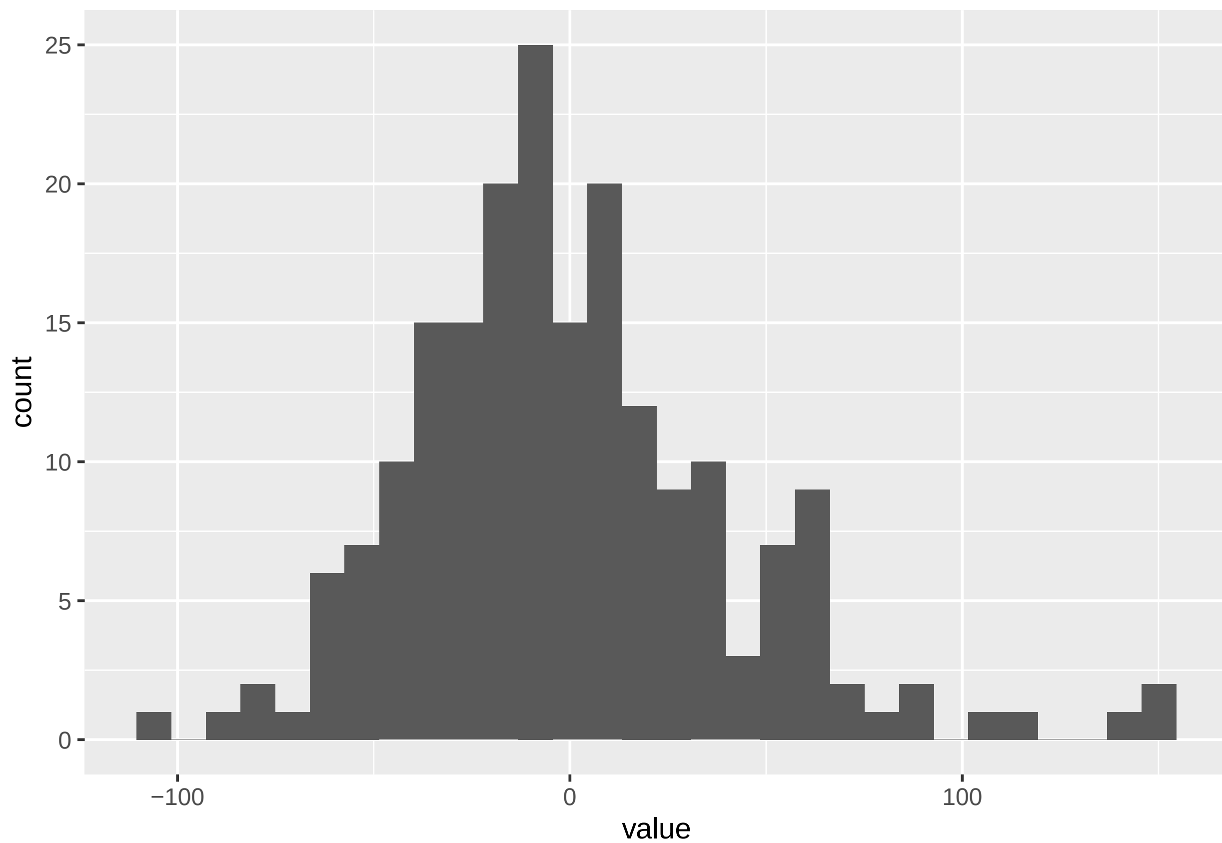
Az alábbiakban a fenti két eset kizárásával újra illesztjük modellünket, és ujra ellenorizzük a normalitási feltételt. Látható, hogy a kiugró adatok nélkül a rezidualisok a normál eloszláshoz lényegesen hasonlóbb eloszlást mutatnak mint korábban.

```
data_house_nooutliers = data_house %>%
  slice(-c(186, 113))

mod_house3 = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house_nooutliers)

# recheck the assumption of normality of residuals
describe(residuals(mod_house3))
```

```
##    vars   n mean    sd median trimmed   mad     min max  range skew kurtosis
## X1    1 198    0 41.87  -4.99   -2.52 35.66 -102.13 154 256.13 0.79     1.35
##      se
## X1 2.98
```

```
residuals_mod_house3 = enframe(residuals(mod_house3))

residuals_mod_house3 %>%
  ggplot() +
  aes(x = value) +
  geom_histogram()
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



Amikor a két modellt összehasonlitjuk, lathato hogy a kiugró adatok kizarasa nem változtatott a statisztikai következtetéseinket, hisz a korábban jelentos prediktorok továbbra is jelentosek, és a modell F próbája is szignifikás mindkét esetben. Az **adjusted R^2 érték lényegesen javult**, hisz a regressziós vonalunk mostmár sokkal jobban illeszkedik a megmaradó adatainkra.

(Ugyanakkor a modell illeszkedését új adatokon, vagy egy **test-seten** is érdemes kipróbálnunk, hogy az elorejelzéseink hatékonyságáról tisztább képet alkothassunk, hiszen a kizártakhoz hasonló kiugró értékek az új adatok között is szerepelhetnek, melyek meghatározásában modellünk pontatlan lesz.)

```r
# comparing the models on data with and without the outliers
summary(mod_house2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -109.26  -29.55   -6.79   19.65  329.24
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -51.2305    27.9831  -1.831 0.068646 .
## sqm_living    0.3768     0.0783   4.813 2.96e-06 ***
## grade        16.8485     4.7158   3.573 0.000444 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
##
## Residual standard error: 49.96 on 197 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.358,  Adjusted R-squared:  0.3515
## F-statistic: 54.94 on 2 and 197 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
summary(mod_house3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house_nooutliers)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -102.130  -28.175   -4.994   21.582  154.004
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -48.21536   23.84403  -2.022   0.0445 *
## sqm_living    0.34451    0.06614   5.208 4.82e-07 ***
## grade        16.78639    4.01091   4.185 4.31e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 42.08 on 195 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.413,  Adjusted R-squared:  0.407
## F-statistic: 68.59 on 2 and 195 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

A további feltétel-vizsgálatokban azt a modell-t vizsgaljuk majd, amibol mar kizartuk ezeket a kiurgo eseteket (186-os és 113-as esetek).

4. **Bootstrapping** modszert is használhatjuk a konfidencia szintek robosztus becslésére a normalitas feltetel serulese eseten.

5.1.3 Bootstrapping

A bootstrapping lenyege hogy **saját mintánkbol véletlenszeruen mintakat veszunk**, es ezeken az uj mintakon illesztjuk ujra a modellunket. Ezt a folyamatot **sokszor megismételjük** (1000-10000 alkalommal), majd ezek eredményei alapján következtetünk a konfidencia határokra.

(Az alábbiak megfelelo muködéséhez szükséges a fenti saját függvények futtatása.)

Hasonlítsuk össze a szokasos és a bootstrapping módszerrel nyert konfidencia intervallumokat.

```r
# regular confidence intervals for the model coefficients
confint(mod_house3)
```

```
##                  2.5 %     97.5 %
## (Intercept) -95.240646 -1.1900718
## sqm_living    0.214059  0.4749585
## grade         8.876049 24.6967253
```

```r
# bootstrapped confidence intervals for the model coefficients
confint.boot(mod_house3)
```

```
##             boot 2.5 % boot 97.5 %
## (Intercept) -95.9123881   3.0288921
## sqm_living    0.2196625   0.4945387
## grade         8.6735323  23.8084958
```

```r
# regular adjusted R squared
summary(mod_house3)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.406965
```

```r
# bootstrapping with 1000 replications
results.boot <- boot(data=data_house, statistic=adjR2_to_boot,
                R=1000, model = mod_house3)

# get 95% confidence intervals for the adjusted R^2
boot.ci(results.boot, type="bca", index=1)
```

```
## BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
## Based on 1000 bootstrap replicates
##
## CALL :
## boot.ci(boot.out = results.boot, type = "bca", index = 1)
##
## Intervals :
## Level       BCa
## 95%   ( 0.2212,  0.4857 )
## Calculations and Intervals on Original Scale
```

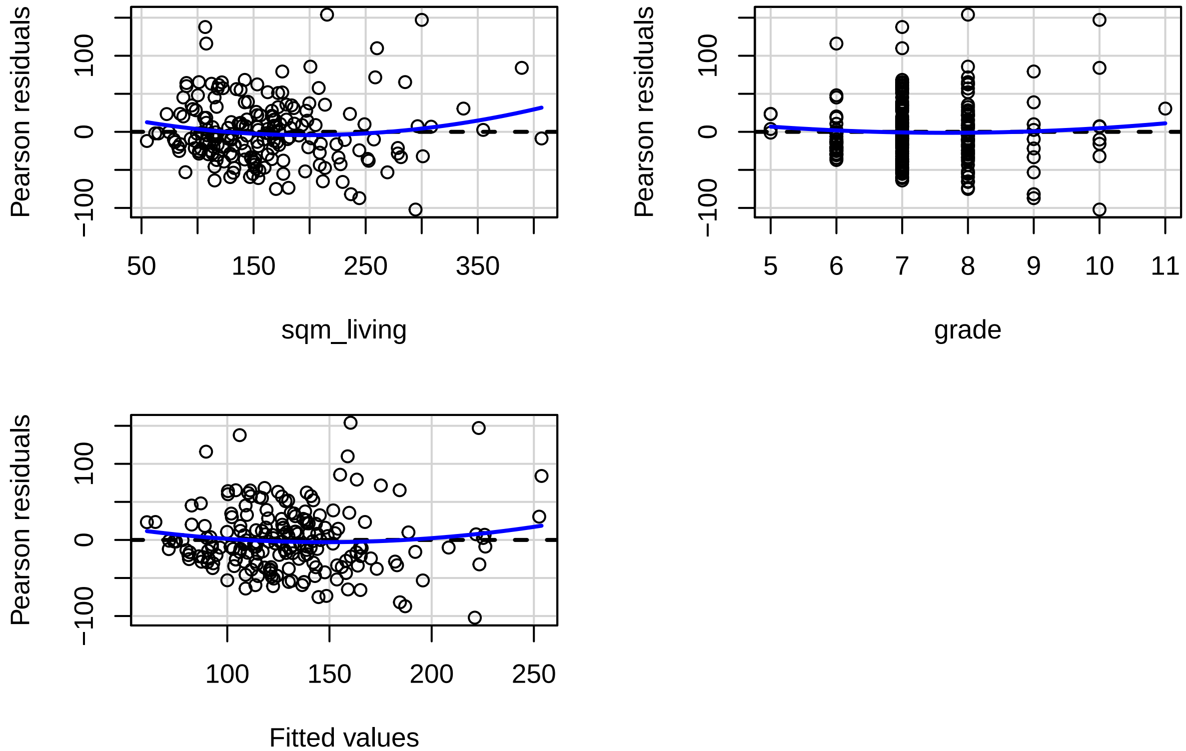
5.2 Linearitás

Az eredmény és a prediktorok között lineáris kapcsolat kell legyen.

A car csomag residualPlots() függvényének prediktoronkénti használatával vizsgálhatjuk meg a linearitást. A függvény eredményeként egy **scatterplot-ot kapunk egy spline-al**, mely dúrván jelzi a prediktor és az eredmény közti kapcsolatot, illetve a rezidualis-elorejelzett érték plot-ot is megkapjuk. A linearitás teljesülése esetén az összes kapott ábrán megközelítoleg vízszintes vonalakat kell látnunk.

A **residualPlots() függvény** a linearitás serulesenek tesztjet is elvegzi. A teszt szignifikanciája esetén ($p < 0.05$) arra kovetkeztethetunk, hogy a linearitási feltétel sérül.

```r
mod_house3 %>%
  residualPlots()
```




```
##              Test stat Pr(>|Test stat|)
## sqm_living    1.6218           0.1065
## grade         0.6485           0.5174
## Tukey test    1.2576           0.2085
```

Esetünkben, bár látható némi görbület az árákon, a tesztek egyike sem szignifikáns, vagyis a modellünk feltehetoen eleget tesz a linearitási elvárásnak.

5.2.1 Mi a hatasa a linearitás sérülésenek?

Ha a prediktorok és bejosolt valtozok között nem lineáris a kapcsolat, úgy **modellünk elorejelzései pontatlanok** lehetnek. Továbbá a modell egyutthatoi is megbízhatatlanok lesznek ha elorejelzéshez szeretnénk használni oket. Peldaul a linearutas feltetelenek serulese eseten elofordulhat hogy a standardizált egyutthatok, t-próbák és p-értékek azt sejtethetik, hogy egy prediktornak nincs hatása a kimenetre, lehet hogy valójában a prediktor megis hordoz relevans informaciot a bejoslashoz, csak az osszefugges nem lineáris.

5.2.2 Mit tegyünk ha a linearitás sérül?

A linearitás sérülése esetén modellünk rugalmasabbá tételével érdemes próbálkoznunk.

1. egyik lehetoseg a **hatvanyprediktorok** hasznalata. (Ennek pontos menetet a speciális prediktorok gyakorlatban targyaltuk.) Álltalában a másod és harmadrendu hatvanyprediktorok használata már elégnek bizonyul. Érdemes elkerülni hogy túl magasrendu hatvanytenyezot tegyunk a modellunkbe, ugyanis az overfitting-hez vezethet.
2. ha a hatvanyprediktorok nem alkalmasak az összefüggés leírására, érdemes lehet a **nem lineáris regresszióval** próbát tenni. Ez nem resze a tananyagnak ezen a szinten. Akit erdekel, az az alábbi könyvben olvashat errol a modszerrol:

James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2013). An introduction to statistical learning. New York: springer.

Ingyen hozzaferheto itt: http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/

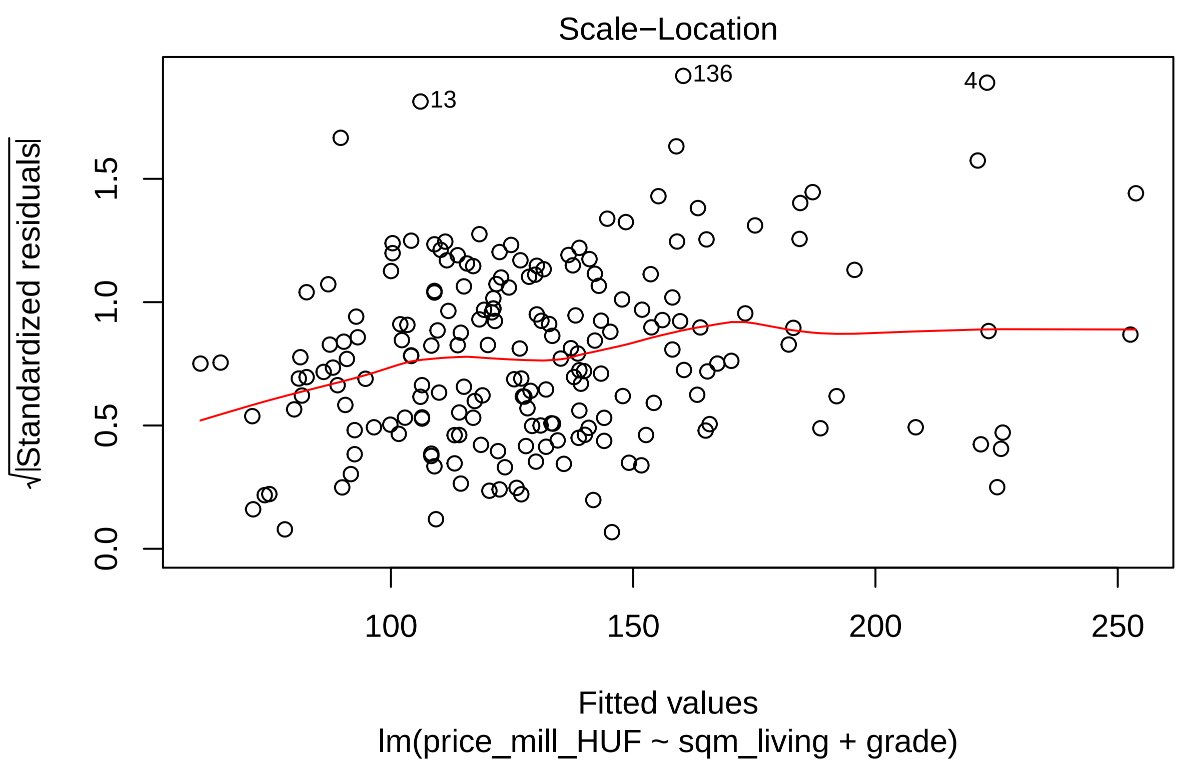
5.3 Homoszkedaszticitás

A regresszió során feltételezzük, hogy a **hiba tagok (rezidualisok) szórása konstans és a prediktorok értékétol független**. Tehát például a rezidualisok varianciájának 60 négyzetmeter alapterületu és 300 négyzetmeter alapterületu ingatlanok esetén meg kell egyezzen.

Ezt a standardizált **rezidualisokat és a prediktorokat ábrázoló diagramm** vizsgálatával ellenorizhetjük, ahol azt varjuk, hogy megközelítoleg azonos varianciát figyelnünk majd meg minden elorejelzett érték esetén. Hasznos statisztikai próbák is rendelkezésünkre állnak. Így például a **Breush-Pagan tesztet** a bptest() fügvénnyel hívhatjuk meg, melyet a lmtest csomagban találhatunk. Egy másik lehetoség az **NCV teszt** amely az ncvTest() függvénnyel hívható meg, és az R-nek eleve részét képzi (nincs szükség további csomagra). Ha a p-érték < 0.05 ezekben a tesztekben, úgy a homoszkedaszticitás sérülésére (vagyis jelentos heteroszkedaszticitásra) kovetkeztethetunk.

A fent említett tesztek alapján jelentos heteroszkedaszticitást talalunk a mod_house3 modellben, így ezt további vizsgálatnak kell alávetnünk.

```
mod_house3 %>%
  plot(which = 3)
```




```
mod_house3 %>%
  ncvTest() # NCV test
```

```
## Non-constant Variance Score Test
```

```
## Variance formula: ~ fitted.values
## Chisquare = 17.01078, Df = 1, p = 3.7168e-05
```

```
mod_house3 %>%
  bptest() # Breush-Pagan test
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  .
## BP = 10.028, df = 2, p-value = 0.006645
```

5.3.1 Mi a helyzet a heteroszkedaszticitás esetén?

Amennyben heteroszkedaszticitás lép fel, úgy **modellünk pontatlan lehet**. Ettol függetlenül **használható marad** a modell, egyszeruen csak pontatlanabbul határozhatjuk meg az új adatainkat.

Ami fontosabb, hogy a modell egyutthatoi és a hozzájuk tartozó **konfidencia intervallumok is pontatlanok** lesznek.

Ha tehát szeretnénk meghatározni az ingatlanok értékeit a prediktorok alapján, azt bár pontatlanabbul, de a heteroszkedaszticitás fennállása mellett is megtehetjük, de az egyes egyutthatok és a konfidencia intervallumok megbizhatosaga serul.

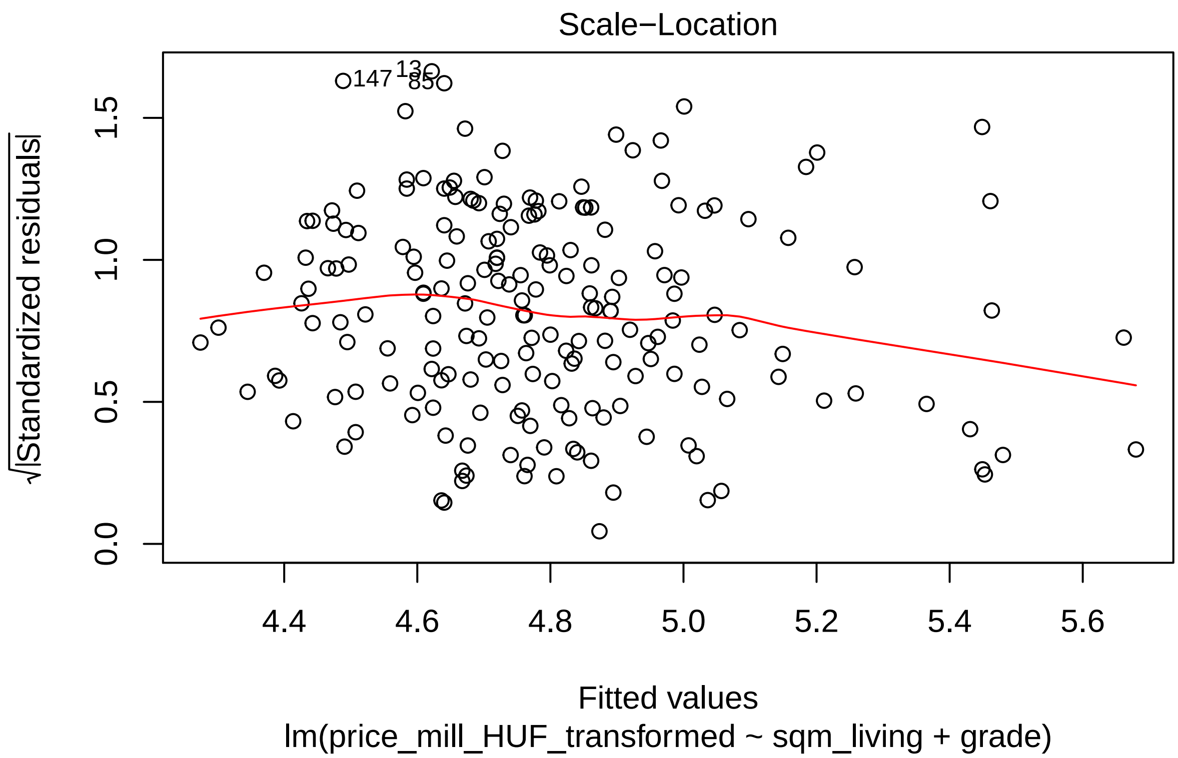
5.3.2 Mit tehetünk a heteroszkedaszticitás orvoslására?

Ebben az esetben az alábbi módszerek bizonyulhatnak célravezetonek:

1. **Transzformáció**. ha elsodleges célunk az, hogy javítsuk elorejelzéseink pontosságát, úgy ezt a **kimeneti értékek és/vagy prediktorok** transzformációjával elérhetjük, azok **normál eloszlásúvá tételével**, így homogenizálva a varianciát az adatsor bizonyos részeire. Például alább a **log()** transzformációt alkalmazzuk a bejosolt valtozora, vagyis az ingalanok árára, majd ennek megfeleloen újra illesztjük modellünket. Ennek az eljárásnak az eredményeként a heteroszkedaszticitas tesztek mar nem szignifikansak.

Ne feledkezzük meg azonban arról, hogy mostmár nem az árakat, hanem azok logaritmusát határozuk meg, ezért a kapott eredményeket vissza kell még transzformálni az exponenciális "exp()" fügvénnyel. A modell egyutthatok meghatározásánál is fontos, hogy az ár értékek helyett azok logaritmusait használtuk.

```
data_house_nooutliers = data_house_nooutliers %>%
  mutate(price_mill_HUF_transformed = log(price_mill_HUF))

mod_house4 = lm(price_mill_HUF_transformed ~ sqm_living + grade, data = data_house_nooutliers)

mod_house4 %>%
  plot(which = 3)
```




```
mod_house4 %>%
  ncvTest() # NCV test
```

```
## Non-constant Variance Score Test
## Variance formula: ~ fitted.values
## Chisquare = 0.5274885, Df = 1, p = 0.46766
```

```
mod_house4 %>%
  bptest() # Breush-Pagan test
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  .
## BP = 0.97249, df = 2, p-value = 0.6149
```

A kapott eredményeket az **exp() fügvénnyel transzformálhatjuk vissza** az eredeti skálára.

```
exp(predict(mod_house4))
```

2. **Robosztus becsles alkalmazása.** ha fontos hogy megtartsuk az eredeti skálát hogy a modell egyutthatok megtarthassák intuitív jelentésük, haználhatunk robosztus közelítési módszereket a heteroszkedaszticitás-konzisztens (HC) standard hibák meghatározására, és használhatjuk ezeket a konfidencia intervallumok, és a modell egyutthatoira vonatkozó korrigált p-értékek meghatározására. Az így kapott értékek kevéssé érzékenyek a heteroszkedaszticitásra, ezért nevezzük oket robosztus becsleseknek. Az alábbi példában a **Huber-White Sandwich becslest** hasznaljuk.

Kis minták esetén (N kb. 50) a standardizált hiba korrigálásához más módszerre lehet szükség, például a **Bell-McCaffrey féle közelítésre**. Ennek részletesebb leírását lásd Imbens és Kolesar (2016) cikkében, az álltaluk használt R függvényeket pedig az alábbi linken: https://github.com/kolesarm/ Robust-Small-Sample-Standard-Errors

Hivatkozások:

Imbens, G. W., & Kolesar, M. (2016). Robust standard errors in small samples: Some practical advice. Review of Economics and Statistics, 98(4), 701-712.

```
# compute robust SE and p-values
mod_house3_sandwich_test = coeftest(mod_house3, vcov = vcovHC, type = "HC")
mod_house3_sandwich_test
```

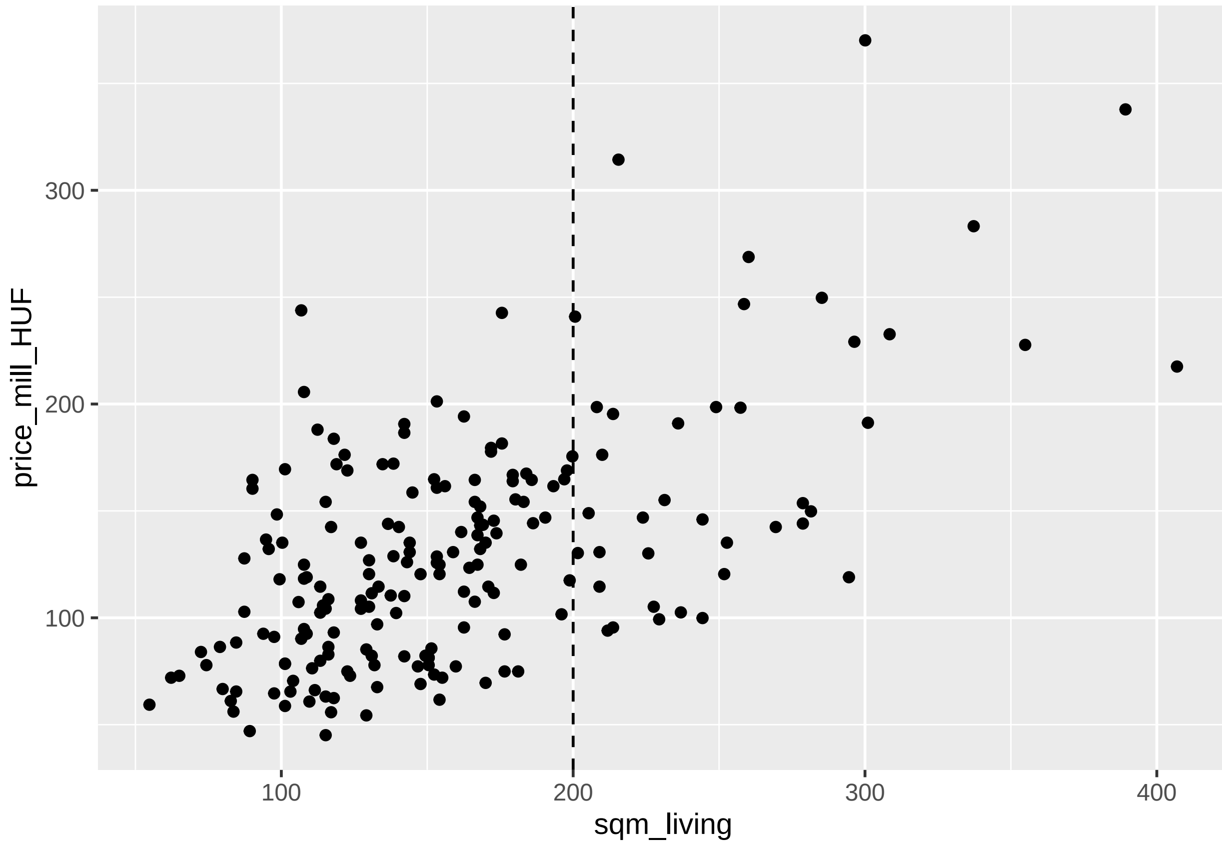
```
##
## t test of coefficients:
##
##               Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept) -48.215359  24.025852 -2.0068   0.04615 *
## sqm_living    0.344509   0.067113  5.1332 6.864e-07 ***
## grade        16.786387   3.819320  4.3951 1.817e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
mod_house3_sandwich_se = unclass(mod_house3_sandwich_test)[,2]

# compute robust confidence intervals
CI95_lb_robust = coef(mod_house3)-1.96*mod_house3_sandwich_se
CI95_ub_robust = coef(mod_house3)+1.96*mod_house3_sandwich_se

cbind(mod_house3_sandwich_test, CI95_lb_robust, CI95_ub_robust)
```

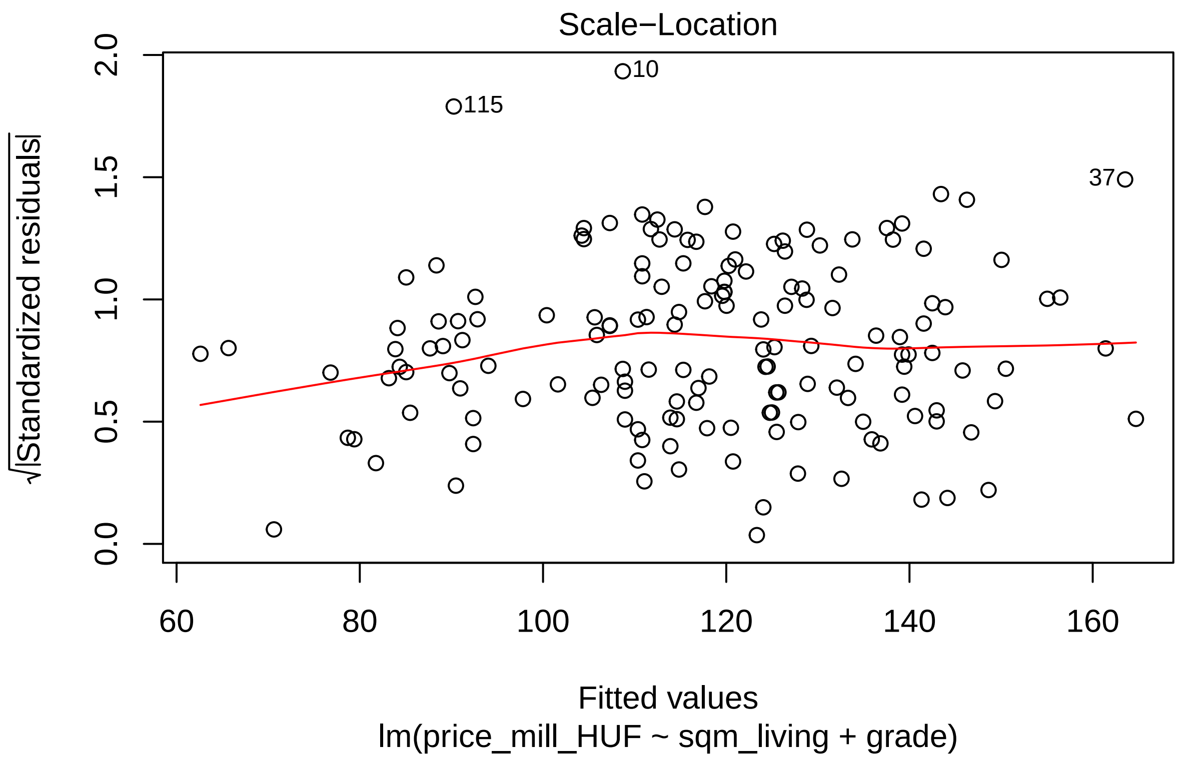
```
##                Estimate  Std. Error   t value     Pr(>|t|) CI95_lb_robust
## (Intercept) -48.2153590 24.02585161 -2.006812 4.615088e-02    -95.3060282
## sqm_living    0.3445087  0.06711329  5.133242 6.864072e-07      0.2129667
## grade        16.7863869  3.81931981  4.395125 1.816739e-05      9.3005201
##             CI95_ub_robust
## (Intercept)     -1.1246899
## sqm_living       0.4760508
## grade           24.2722538
```

3. **Külön modellek az adatsor eltéro részeihez**. Egy újabb modszert is bevethetunk, ha a variancia valamilyen egyszeru mintazat / csoportosulas szerint mutat heteroszkedaszticitast. A mi mintánk esetében megfigyelheto, hogy a 200 négyzetméteres alapterületu ingatlanok esetén hirtelen megnol a variancia. Az adatainkat tehát kettéválasztjuk 200 négyzetméteres és az alatti alapterületu (data_house_small), illetve annál nagyobb alapterületu ingatlanokra (data_house_large), majd ezekre külön-külön modelleket illesztünk. Így ha egy 200 négyzetméter, vagy az alatti lakas értékét szeretnénk meghatározni, úgy a mod_house3_small, míg ha ennél nagyobb ingatlanét, úgy a mod_house3_large modellt kell használnunk. A heteroszkedaszticitas tesztjei nem szignifikansak ebben a ket modellben.

```
data_house_nooutliers %>%
  ggplot() +
  aes(x = sqm_living, y = price_mill_HUF) +
  geom_point()+
  geom_vline(xintercept = 200, lty = "dashed")
```




```
data_house_small = data_house_nooutliers %>%
  filter(sqm_living <= 200)

data_house_large = data_house_nooutliers %>%
  filter(sqm_living > 200)

mod_house3_small = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house_small)
mod_house3_large = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house_large)


mod_house3_small %>%
  plot(which = 3)
```



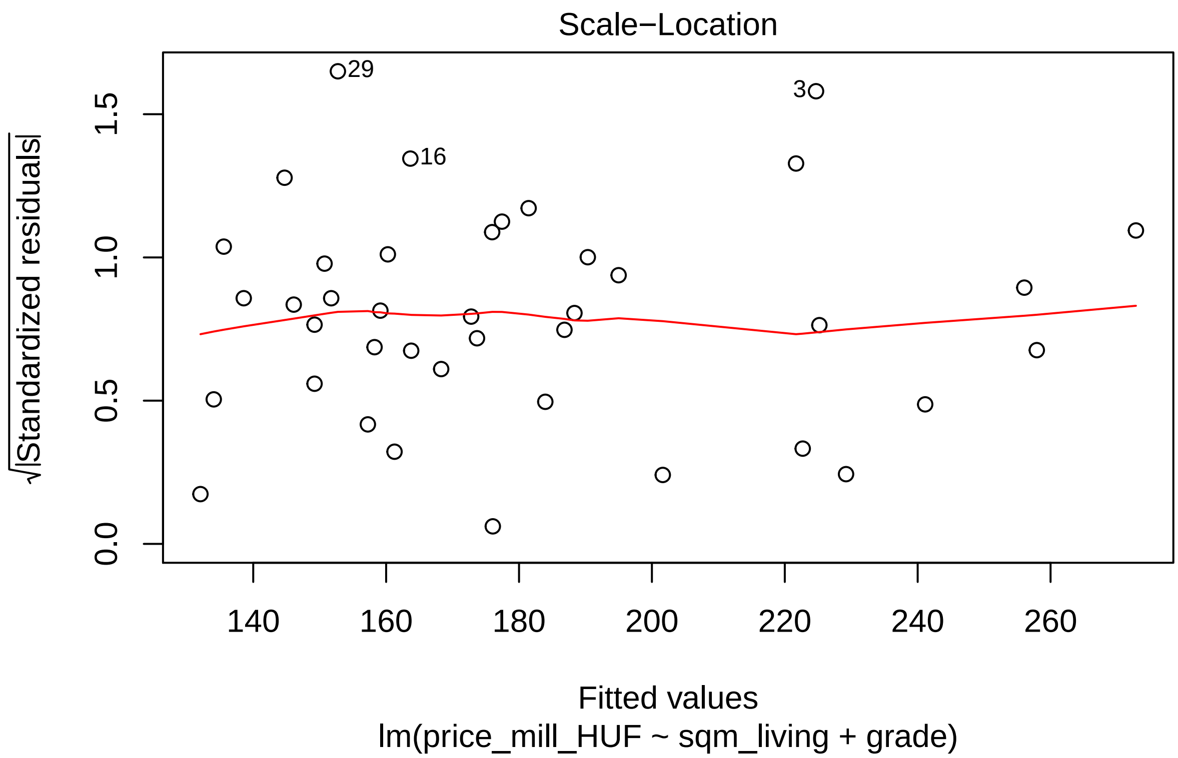

```r
mod_house3_small %>%
  ncvTest() # NCV test
```

```
## Non-constant Variance Score Test
## Variance formula: ~ fitted.values
## Chisquare = 0.2195388, Df = 1, p = 0.63939
```

```r
mod_house3_small %>%
  bptest() # Breush-Pagan test
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  .
## BP = 0.95326, df = 2, p-value = 0.6209
```

```r
mod_house3_large %>%
  plot(which = 3)
```




```
mod_house3_large %>%
  ncvTest() # NCV test
```

```
## Non-constant Variance Score Test
## Variance formula: ~ fitted.values
## Chisquare = 0.005016941, Df = 1, p = 0.94353
```

```
mod_house3_large %>%
  bptest() # Breush-Pagan test
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  .
## BP = 0.35366, df = 2, p-value = 0.8379
```

5.4 A Multikollinearitas tesztelese

Feltételezzük, hogy a **prediktoraink lineárisan függetlenek** (egyik sem jelentosen bejosolhato a többi prediktor ismerete alapjan). Ez álltalában azt feltételezi, hogy az egyes prediktorok között **nincs eros korreláció**, ez azonban magában még kevés, hisz ha a prediktorok párosával esetleg még nem is mutatnak komoly korrelációt, ez magában még nem zárja ki azt hogy több prediktor bonyolult lineáris kombinációjaként eloállhassanak.

A feltételezés ellenörzése érdekében kiszámoljuk a variancia infláció faktort (VIF) minden prediktorra, a vif() függvény hasunálatával, melyet a car csomagban találhatunk meg.

Arról, hogy mely **VIF értékek** jelölnek a kollinearitás szempontjából problémát, még nem született konszenzus.

Vannak akik a 10 vagy afölötti vif értékeket tekintik problémásnak (pl.: Montgomery és Peck ,1992). Egy konzervatívabb megközelítés, ha a 3 feletti VIF értékek esetében már külön eljárunk. (Zuur, Ieno, és Elphick, 2010 javaslata alapján). A ZHk-ban hasznaljuk a **3 feletti VIF értékeket**, mint kriteriumot a multikollinearitas azonositasara.

Hivatkozások: Montgomery, D.C. & Peck, E.A. (1992) Introduction to Linear Regression Analysis. Wiley, New York. Zuur, A. F., Ieno, E. N., & Elphick, C. S. (2010). A protocol for data exploration to avoid common statistical problems. Methods in ecology and evolution, 1(1), 3-14.

```
mod_house3 %>%
  vif()
```

```
## sqm_living      grade
##   1.849221   1.849221
```

A fenti példában nincs probléma a kollinearitást illetoen.

5.4.1 Mi a helyzet kollinearitás esetén?

Regresszió esetén gyakran szeretnénk tudni az egyes **prediktorok egyedi hozzaadott erteket** a modellhez, és hogy ez a hozzaadott ertek statisztikailag **szignifikáns-e**. Az egyes prediktorokhoz tartozo regressszios egyutthatok jelzik, a prediktor hatásanak irányát és mértékét a többi prediktor hatasanak fixen tartása mellett. Eroesen korreláló prediktorok esetén ritkán fog elofordulni, hogy az egyik magas, míg a többi alacsony, így az egyedi hatások is nehezen lesznek szétválaszthatóak.

Röviden összegezve tehát kollinearitás esetén a **modell egyutthatoi** és az egyedi predikciós értékeikre vonatkozó t-próbák **kevésbé lesznek megbízhatóak**. Továbbá a modell egyutthatoi kifejezetten instabilak lesznek, azaz a modell változásai esetén (pl.: egy prediktor eltávolítása esetén) nagyokat változhatnak, sot akár **elojelet is válthatnak**.

Szerencsére az **elorejelzések pontosságát nem befolyásolja** a kollinearitás, így ha csak ez érdekel bennünket, nem is kell vele foglalkoznunk, csak ha érdekelnek minket az egyes regresszios egyutthatok, és szeretnénk következtetni az egyes prediktorok egyedi hatásaira vagy modellhez valo hozzajarulasara.

5.4.2 Mi a teendo kollinearitás esetén?

A kollinearitásnak két formája van:

Szerkezeti kollinearitás, ebben az esetben egy olyan prediktort is hozzáadunk a modellünkhöz, mely egy vagy több másik prediktorból származik. Például hatvanyprediktorok (például grade és grade^2), vagy iterációk (pl.: long*lat).

Adat kollinearitás, ebben az esetben a kollinearitás magában az adatban jelenik meg, és nem csak a modellünk terméke.

Ezek vizsgalatahoz most két új modellt fogunk eloállítani.

5.4.2.1 Szerkezeti kollinearitás kezelése

Eloször is állítsunk elo egy modellt, melyben az sqm_living és grade változókon túl a GPS koordinatakat is bevonjuk a modellunkbe mint prediktorokat.

Az elso modellben csak a prediktorok elsodleges hatásával fogunk foglalkozni, azaz nem lesznek interkciós elemek. A modell summary azt mutatja, hogy a hosszúság (long) egyutthatoja negatív, vagyis minél keletebbre megyünk, annál olcsóbbak lesznek az ingatlanok, ami logikus, hiszen a vizsgált terület nyugati részén helyezkedik el Seattle es az ocean. A szélességhez (lat) tatozó koefficiens pozitív, vagyis északra no az ingatlanok ára. A szélesség prediktív értéke szignifikáns modellünkben. A VIF alapján nincs problemas multikollinearitás ebben a modellben.

```
mod_house_geolocation = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + long + lat, data = data_house_nooutlie
summary(mod_house_geolocation)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + long + lat,
##     data = data_house_nooutliers)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -70.384 -23.279  -4.365  16.446 142.030
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1.022e+04  1.960e+03  -5.214 4.74e-07 ***
## sqm_living   3.794e-01  5.638e-02   6.730 1.89e-10 ***
## grade        1.547e+01  3.397e+00   4.555 9.29e-06 ***
## long        -2.208e+01  1.546e+01  -1.429    0.155
## lat          1.572e+02  1.838e+01   8.551 3.72e-15 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 35.53 on 193 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5858, Adjusted R-squared:  0.5772
## F-statistic: 68.25 on 4 and 193 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
mod_house_geolocation %>%
  vif()
```

```
## sqm_living      grade       long        lat
##   1.884575   1.860764   1.041486   1.024952
```

Most helyezzük el az interakciós tagot is modellünkben (a * jelet használva a + helyett), ahol a szélesség és hosszúság interakcióját is bele foglaljuk a modellbe. Ekkor a coefficiensek és elojelek egy markáns változáson mennek keresztül. A hosszúság most pozitív koefficienssel, míg a szélesség negatív koefficiense rendelkezik. A szélesség predikciós mérteke sem szignifikáns többé. Ugyanakkor a long, lat és long:lat változók VIF értéke rendkívül magas, jelentos multikollinearitást jelezve. Az eredményeinkben látható jelentos változás a kollinearitás miatti instabilitásból fakad. Bár a modell koefficiensei jelentosen megváltoztak, a modell R^2 értéke csak egész kicsit mozdult el.

```r
mod_house_geolocation_inter = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + long * lat, data = data_house_noo

summary(mod_house_geolocation_inter)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + long * lat,
##     data = data_house_nooutliers)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -65.679 -22.234  -4.974  17.289 140.811
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.461e+06  7.802e+05   1.873   0.0626 .
## sqm_living   3.814e-01  5.602e-02   6.809 1.23e-10 ***
## grade        1.597e+01  3.385e+00   4.717 4.59e-06 ***
## long         1.202e+04  6.384e+03   1.882   0.0613 .
```

```
## lat         -3.079e+04  1.641e+04  -1.876   0.0621 .
## long:lat    -2.532e+02  1.342e+02  -1.886   0.0608 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 35.3 on 192 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5934, Adjusted R-squared:  0.5828
## F-statistic: 56.03 on 5 and 192 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
mod_house_geolocation_inter %>%
  vif()
```

```
##   sqm_living        grade         long          lat     long:lat
## 1.885276e+00 1.872074e+00 1.799568e+05 8.275735e+05 1.125795e+06
```

A long:lat interakciós taggal a long es a lat prediktorok eros korrelációt mutatnak. Itt szerkezeti kollinearitásról beszélhetünk, hiszen a multikollinearitast ket mar a modellunkben levo prediktorbol kepezett uj prediktor okozza. A kevert interakciós tag mind a long mind pedig a lat prediktoroktól függ, ebbol származik a magas korreláció.

A változók standardizálásával megoldható a probléma. Egy lehetséges **jó megoldás a "centrálás"**, azaz minden erintett prediktor esetén a mintaatlagot kivonjuk az egyes értékekbol. Ezzel a módszerrel megorizzük a változók eredeti skáláját, és így, a egyutthatok ugyan azt fogják jelenteni mint korábban, a centrálás elott. (Használhatnánk Z transzformációt is, de az a egyutthatok értelmezését is megváltoztatná, mivel ilyenkor a prediktorok skálája is valtozik.)

A longitude (hosszúság) és lattitude (szélesség) centrálását követoen a kollinearitás megszunik, és megközelítoleg hasnonló a hatás mértéket is mint az interakció bevonasa elott. A szélességnek megint van szignifikáns prediktív értéke. Ugyanakkor az R^2 érték teljesen érintetlenül marad a multikollinearitás eltávolítása során. Azaz az elorejelzésekre való alkalmasság változatlanul marad, de a regresszios egyutthatok stabilabbá és könnybben interpretálhatóvá váltak.

```r
data_house_nooutliers = data_house_nooutliers %>%
  mutate(long_centered = long - mean(long),
         lat_centered = lat - mean(lat))


mod_house_geolocation_inter_centered = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + long_centered * lat_cen

mod_house_geolocation_inter_centered %>%
  vif()
```

```
##                sqm_living                     grade
##                  1.885276                  1.872074
##             long_centered              lat_centered
##                  1.058954                  1.049776
## long_centered:lat_centered
##                  1.050759
```

```r
summary(mod_house_geolocation_inter_centered)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + long_centered *
##     lat_centered, data = data_house_nooutliers)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
```

```
## -65.679 -22.234  -4.974  17.289 140.811
##
## Coefficients:
##                             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                -49.00975   20.17976  -2.429   0.0161 *
## sqm_living                   0.38144    0.05602   6.809 1.23e-10 ***
## grade                       15.96840    3.38501   4.717 4.59e-06 ***
## long_centered              -25.83501   15.48572  -1.668   0.0969 .
## lat_centered               151.80613   18.47973   8.215 3.08e-14 ***
## long_centered:lat_centered -253.17679  134.24659  -1.886   0.0608 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 35.3 on 192 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5934, Adjusted R-squared:  0.5828
## F-statistic: 56.03 on 5 and 192 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

5.4.2.2 Adat kollinearitás kezelése Állítsunk elo egy modellt, melyben az sqm_living és grade változókon túl az sqm_above változót is használjuk mint prediktort (az ingatlan földfelszín feletti területe négyzetmeterben).

A vif itt 3 feletti.

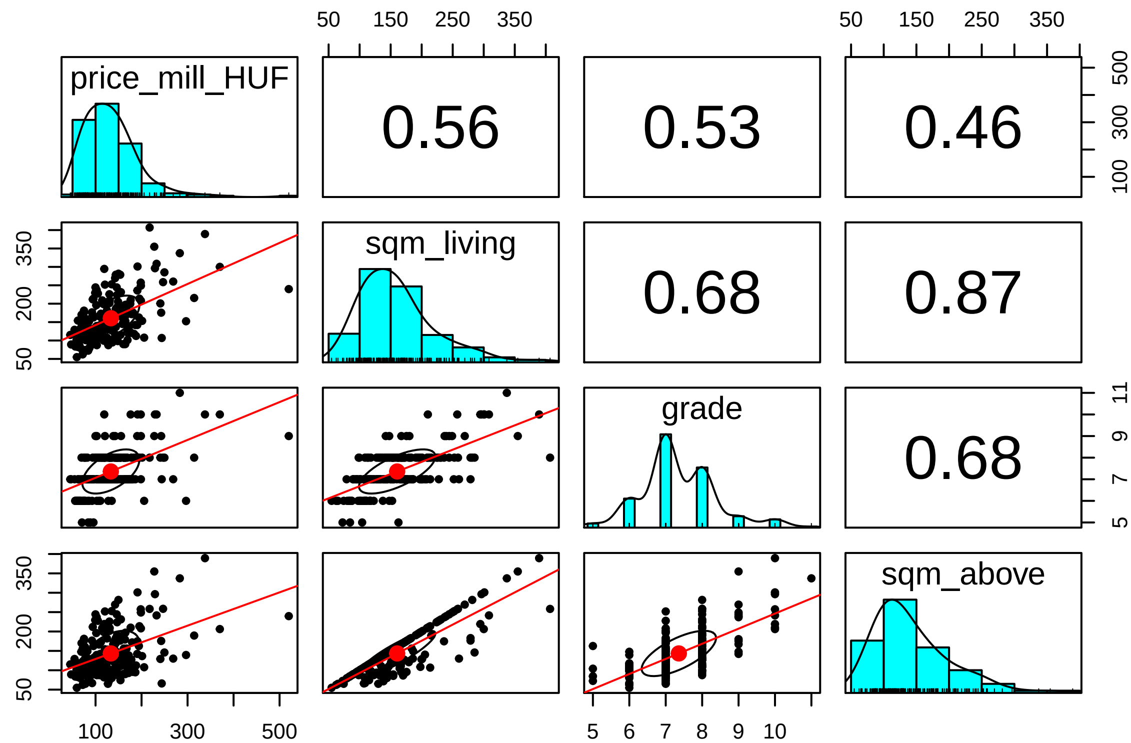
```
mod_house5 = lm(price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + sqm_above, data = data_house)

vif(mod_house5)
```

```
## sqm_living      grade  sqm_above
##   4.505215   1.972816   4.532763
```

Ennek okat megvizsgalhatjuk a prediktorok korrelációs mátrixának tanulmanyozasaval. A pairs.panels() függvény sok hasznos diagrammal szolgál, melyeken nem csak a változók közti korrelációt, de a változók eloszlását, illetve a páronkénti kapcsolatuk scatter plotjait is láthatjuk.

A korrelációs mátrix alapján egyértelmu, hogy az sqm_living és sqm_above korrelációja igen magas.

```
data_house %>%
  select(price_mill_HUF, sqm_living, grade, sqm_above) %>%
    pairs.panels(col = "red", lm = T)
```



A ket modell eredmenyenek összehasonlítása alapján mit állapíthatunk meg? Ertelmezd a ket modell regresszios egyutthatoit!

```
summary(mod_house5)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade + sqm_above,
##     data = data_house)
##
## Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -122.62  -26.66   -7.43   20.90  336.08
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -63.2813    28.1906  -2.245   0.0259 *
## sqm_living    0.5880     0.1208   4.868 2.32e-06 ***
## grade        19.5424     4.8139   4.060 7.10e-05 ***
## sqm_above    -0.2905     0.1275  -2.279   0.0238 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 49.44 on 196 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3746, Adjusted R-squared:  0.365
## F-statistic: 39.13 on 3 and 196 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
summary(mod_house3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price_mill_HUF ~ sqm_living + grade, data = data_house_nooutliers)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -102.130  -28.175   -4.994   21.582  154.004
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -48.21536   23.84403  -2.022   0.0445 *
## sqm_living    0.34451    0.06614   5.208 4.82e-07 ***
## grade        16.78639    4.01091   4.185 4.31e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 42.08 on 195 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.413,  Adjusted R-squared:  0.407
## F-statistic: 68.59 on 2 and 195 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

A multikollinearitásból fakadóan nem bízhatunk a mod_house5 egyes egyutthatoiban, sem a prediktorokra vonatkozó t-próbákban.

Több lehetoség is nyitva áll a kollinearitás megoldására:

1. A szorosan korreláló prediktorok valamelyikének **eltávolítása**,
2. A prediktorok **lineáris kombinálása**, pl minden megfigyeléshez két adat **átlagát** használni. (pl a 3as esetben sqm_living = 1050, sqm_above = 950, azaz az átlag ebben az esetben 1000). Ugyanakkor az nem egyértelmu, hogy hogyan értelmeznénk az egyes prediktorokat.
3. Használhatóak akár teljesen más statisztikai eljárások is (pl.: parciális legkissebb négzetek regressziója, vagy **fokomponens elemzes**)

Jelenleg a legkezenfekvobb talán az elso módszer, vagyis a ket problemas prediktor kozul az egyik eltavolitasa a modellbol, hiszen az sqm_living és sqm_above nagyon megegyeznek es konceptualisan sem igazan hordoznak kulonbozo informaciot. Válasszuk ki azt, amelyik intuitíve többet számít az ingatlan árába! Jelen esetben talán az sqm_living megtartása lehet célravezeto, hiszen az az elméletünk, hogy a lakható terület mérete befolyásolja az ingatlan árát, a pince meglétérol szogáló információt pedig figyelembe vehetjük a has_basement változóval is egy késobbi modellben. ha van valamiféle ismeretünk korábbi, ingatlan árazást érinto kutatásokról, úgy azt is felhasználhatjuk annak eldöntésében, hogy melyik prediktort érdemes elhagyni. Praktikus szempontokat is figyekembevehetünk, mint például azt, hogy az össz lakóterület könnyebben hozzáférheto információ, mint a földfelszín feletti terület, így ha az össz lakóterületet választjuk ki mint prediktort, akkor több esetben használhatjuk modellünket az árak elorejelzésére.

Azt, hogy melyik prediktort hagyjuk fel, és melyiket tartsuk meg, elméleti alapon, vagy korábbi kutatási eredmények alapján kell eldönteni, ezért nem javasolt hogy ezt a dontest a modellek illeszkedesenek osszehasonlitasa alapjan hozzuk meg.

További anyagok az alábbi linkeken:

https://statisticalhorizons.com/multicollinearity

http://blog.minitab.com/blog/understanding-statistics/handling-multicollinearity-in-regression-analysis

http://statisticsbyjim.com/regression/multicollinearity-in-regression-analysis/

______________________Gyakorlás________________________

Végezzünk modell diagnoztikát a ma tanultak alapján, egy új lineáris modellen, ahol az “sqm_living”, “sqm_living15”, “yr_built”, és “condition” prediktorok alapján határozzuk meg az ingatlan árakat.