Kevert modellek - alapok

Zoltan Kekecs

18 november 2019

Contents

1 Absztract

Ebben a gyakorlatban megismerheted a kevert modellekkel kapcsolatos alapfogalmakat, valamint hogy hogyan lehet oket felepiteni.

2 Adatmenedzsment es leiro statisztikak

2.1 Package-ek betoltese

Ebben a gyakorlatban a kovetkezo package-ekre lezsz szukseg:

```
library(psych)  # for describe
library(tidyverse)  # for tidy code and ggplot2
library(cAIC4)  # for cAIC
library(r2glmm)  # for r2beta
library(lme4)  # for lmer
library(lmerTest)  # to get singificance test in lmer
```

2.2 Sajat funkcio

Ezzel a funkcioval kinyerhetjuk a standardizalt Beta egyutthatot a kevert modellekbol. Ez a funkcio innen lett atemelve: https://stackoverflow.com/questions/25142901/standardized-coefficients-for-lmer-model

```
stdCoef.merMod <- function(object) {
    sdy <- sd(getME(object, "y"))
    sdx <- apply(getME(object, "X"), 2, sd)
    sc <- fixef(object) * sdx/sdy
    se.fixef <- coef(summary(object))[, "Std. Error"]
    se <- se.fixef * sdx/sdy
    return(data.frame(stdcoef = sc, stdse = se))
}
```

2.3 A Bully-zas adat betoltese

Ebben a gyakorlatban az altalanos iskolai bully-zasrol (magyarulk talan "zaklatas"?) teszunk fel kutatasi kerdeseket. Ez egy szimulalt adatbazis, vagyis nem valodi adatokat tartalmaz, de kepzeljuk el, hogy az adatok a kovetkezo kutatasbol szarmazank: Ebben a kutatasban az erdekel minket, hogy a testsuly hogyan beoflyasolja a gyerekek serulekenyseget a bully-zassal szemben. A kutatok azt feltetelezik hogy a testsuly osszefugg az elvett szendvicsek szamaval.

Valtozok:

- sandwich_taken - A bullyzassal kapcsolatos serulekenyseg meroszama. A kutatasban megkerdeztek a vizgaltai szemelyeket (altalanos iskolai gyerekek) hogy az elmult honapban hanyszor kenyszeritettek ki toluk a bully-k az ebedre hozott szendvicsuket
- weight - testsuly
- class - faktor valtozo ami azt mutatja melyik iskolai osztalyba jar a viszgalati szemely. Faktorszintek: class_1, class_2, class_3, class_4.

Ket adatfajlt is betoltunk. Mindket adafajl ugy lett legeneralva, hogy a diakok kulonboznek abban, hogy mennyi szendvicset vesznek el toluk attol fuggoen hogy milyen a testsulyuk es attol fuggoen is hogy melyik osztalyba jarnak. Vagyis mind a testsulynak, mind az osztalynak van hatas az elvett szendvicsek szamara. Viszont a ket adatbazis kulonbozik abban, hogy az, hogy a diak melyik osztalyba jar, befolyasolja-e hogy a testsulynak mekkora hatasa van az elvett szendvicsek szamara. A data_bully_int.csv adatfajlban a testsuly hatasa ugyan akkora minden osztalyban (fuggetlen az osztalytol), mig a data_bully_slope.csv adatfajlban a testsuly hatasa kulonbozik osztalyonkent.

```r
# load data
data_bully_int = read.csv("https://raw.githubusercontent.com/kekecsz/PSYP13_Data_analysis_class-2018/ma

# asign class as a grouping factor
data_bully_int$class = factor(data_bully_int$class)

data_bully_slope = read.csv("https://raw.githubusercontent.com/kekecsz/PSYP13_Data_analysis_class-2018/
data_bully_slope$class = factor(data_bully_slope$class)
```

2.4 Adatellenorzes es adattisztitas

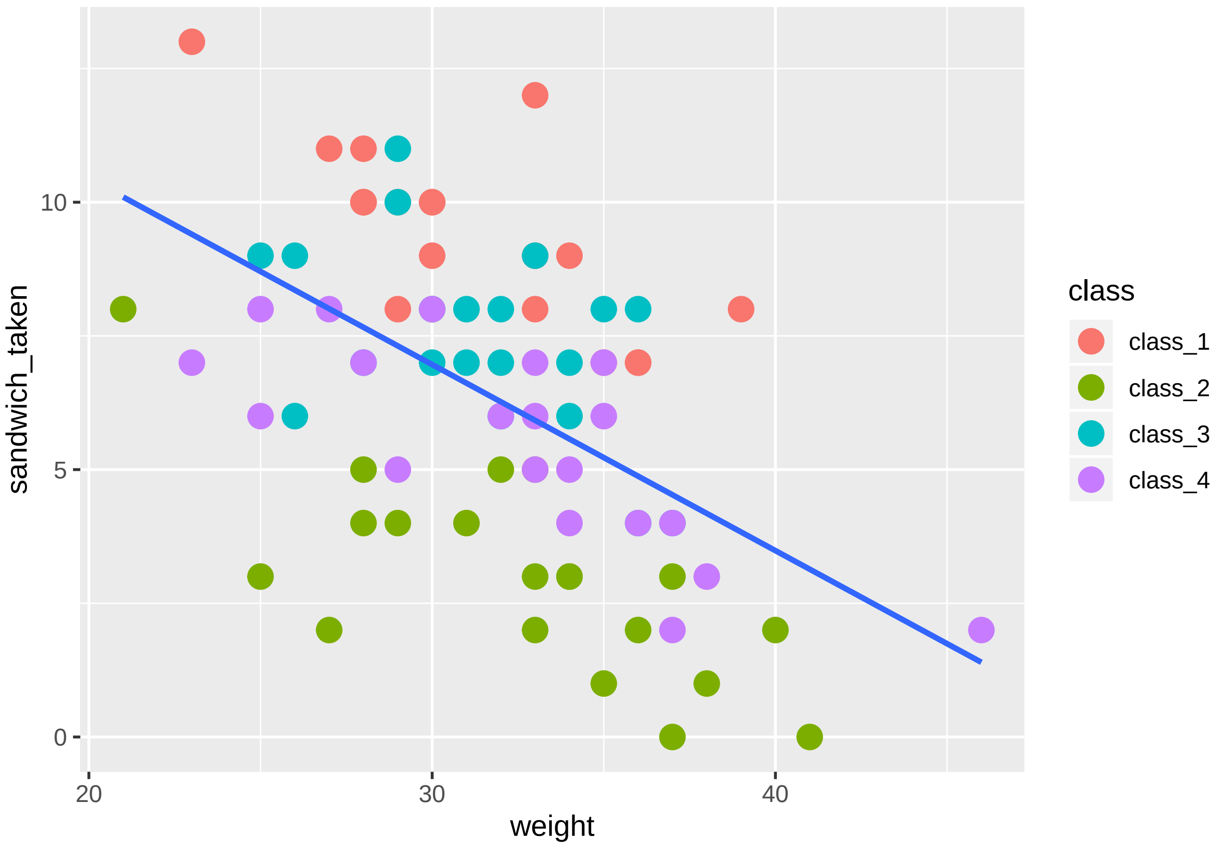
Ahogy mindig, eloszor kezdd az adatok ellenorzesevel es az esetleges adattisztitassal. Ehhez hasznalhatod a View(), summary(), es describe() funkciokat, es a ggplot() funkciot vizualizalashoz.

3 A kevert modellek alapfogalmai

3.1 Clustering (csoportosulas) feltarasa

Vizualizaljuk a sandwitch_taken es weight valtozok osszefuggeset egy pontdiagram (scatterplot) segitsegevel. Az adatok egy egyertelmu negativ osszefuggest mutatnak a sandwitch_taken es weight valtozok kozott, de az adatok variabilitasa nagyon nagy.

```r
data_bully_int %>% ggplot() + aes(y = sandwich_taken, x = weight) +
    geom_point(aes(color = class), size = 4) + geom_smooth(method = "lm",
    se = F)
```



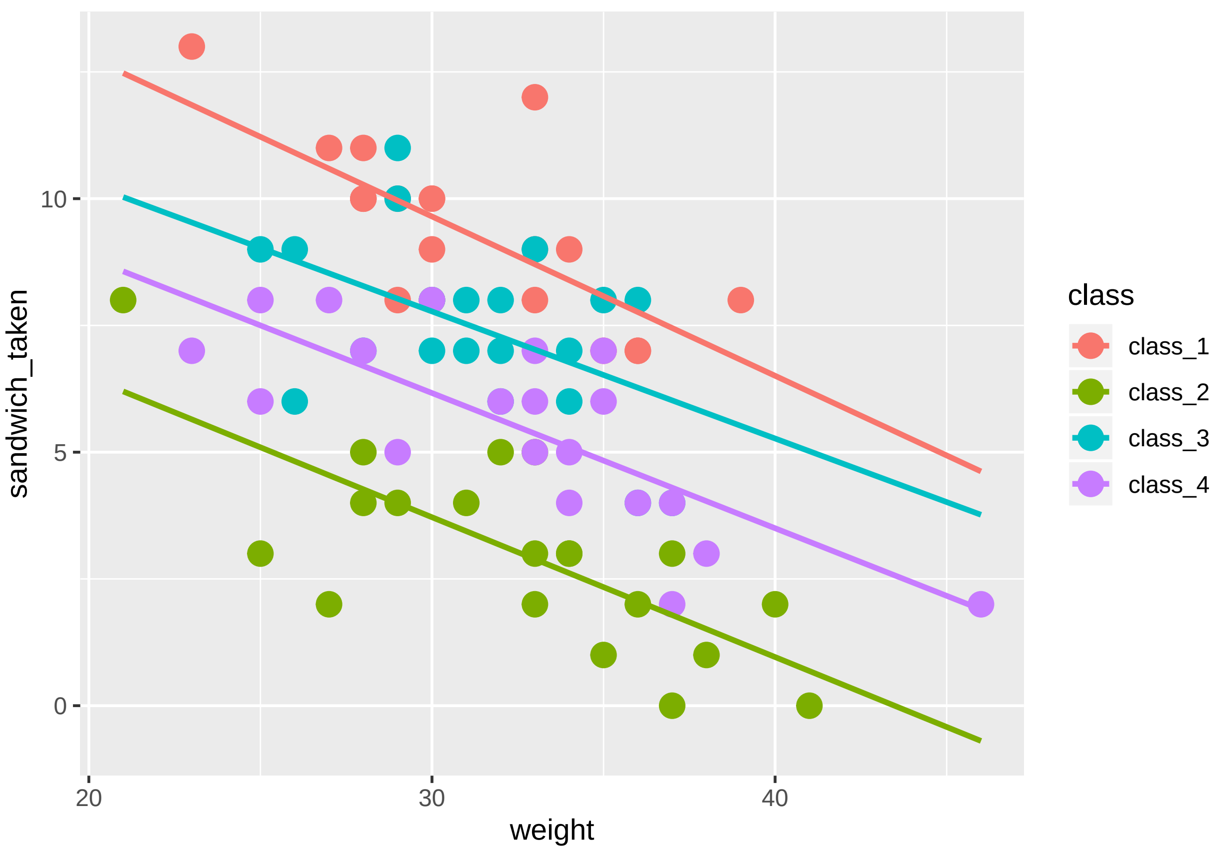
A pon_tok szine az abran azt mutatja, a diak melyik iskolai osztalyba jar (class_1, class_2, class_3, vagy calss_4). Ha jobban megnezzuk, ugy tunik, hogy az azonos szinu pontok egymashoz kozel helyezkednek el az abran, nem pedig random modon elszorva, ami arra utal, hogy az adatpontok nem teljesen fuggetlenek egymastol, hanem csoportosulnak (clusterezodnek).

Nezzuk meg, hogy az iskolai osztaly meg tudja-e magyarazni a variabilitas egy reszet. Peldaul felrajzolhatjuk a regresszios egyeneseket csoportonkent. Ez ugy tunik hogy megmagyarazza a variabilitas egy reszet, hiszen a regresszios vonalak kozelebb kerulnek a valos megfigyelesekhez. Szoval ugy tunik hogy erdemes lenne a class valtozot is figyelembe venni a modellunk megepitesenel.

(Alabb az abrat elmentjuk egy int_plot nevu objektumba, hohgy kesobb ugyan ezt az abrat konnyen elohivhassuk.)

```
int_plot = data_bully_int %>% ggplot() + aes(y = sandwich_taken,
    x = weight, color = class) + geom_point(size = 4) + geom_smooth(method = "lm",
    se = F, fullrange = TRUE)

int_plot
```



3.2 Kevert modellek

Jelen kutasban csak az erdekel minket hogy a testsuly befolyasolja-e az elvett szendvicsek szamat, es ha igen, mennyire. Az iskolai osztalyok hatasa nem fontos a kutatas alapkerdese szempontjabol, es meg ha az is lenne, az informaciot amit ezekrol az iskolai osztalyokrol szerzunk nem tudnank altalanositani mas iskolakban, hiszen a tobbi iskolaban mas osztalyok vannak, amiknek velhetoen masok a karakterisztikai. Szoval az iskolai osztaly ebben az esetben egy "zavaro tenyezo" (nuisance variable). Vagyis ezt a class valtozot nem szeretnenk figyelembe venni a regresszios egyeletben, hiszen akkor mas iskolakban nem tudnak felhasznalni az egyeletet.

A kevert modellek segitsegevel figyelembe vehetjuk az adatok ilyen fajta csoportosulasat anelkul hogy a regresszios egyeletunkbe be kellene tennunk ezeket a zavaro tenyezoket.

Itt fontos megkulonboztetnonk a hatasok ket tipusat.

Fix hatasok (Fixed effects) - Azokat a hatasokat amikkel eddig a linearis modellekben foglalkoztunk, "fix hatasoknak" (fixed effects) nevezzuk. Ezek azok a hatasok/prediktorok, amikre regresszios egyutthatokat szamitottunk ki. Ezek a predikcios modellunk reszei, amiket a kesobbieknben is felhasznalunk majd a bejoslashoz.

Random hatasok (Random effects) - Azokat a hatasokat, amiket a "zavaro tenyezoknek" tulajdonitunk, modellezhetjuk random hataskent. A random hatasokat ugy kepzeljuk el, hogy bar a megfigyelesek kulonboznek a csoportusolasok menten, de az egyes csoportok (mint peldaul itt az osztalyok) hatas nem szisztematikus, hanem egyfajta veletlenszeru kulonbsegbol fakad a csoportok kozott. A csoportok kozotti ilyen veletlenszeru kulonbozoseg felismerese segit abban, hogy pontosabban megbecsuljuk a fix hatasok merteket es azokkal kapcsolatos bizonyossagunkat. Ezek a random hatasok nem kerulnek bele a regresszios egyeletunkbe, es nem kapunk veluk kapcsolatban regresszios egyutthatokat.

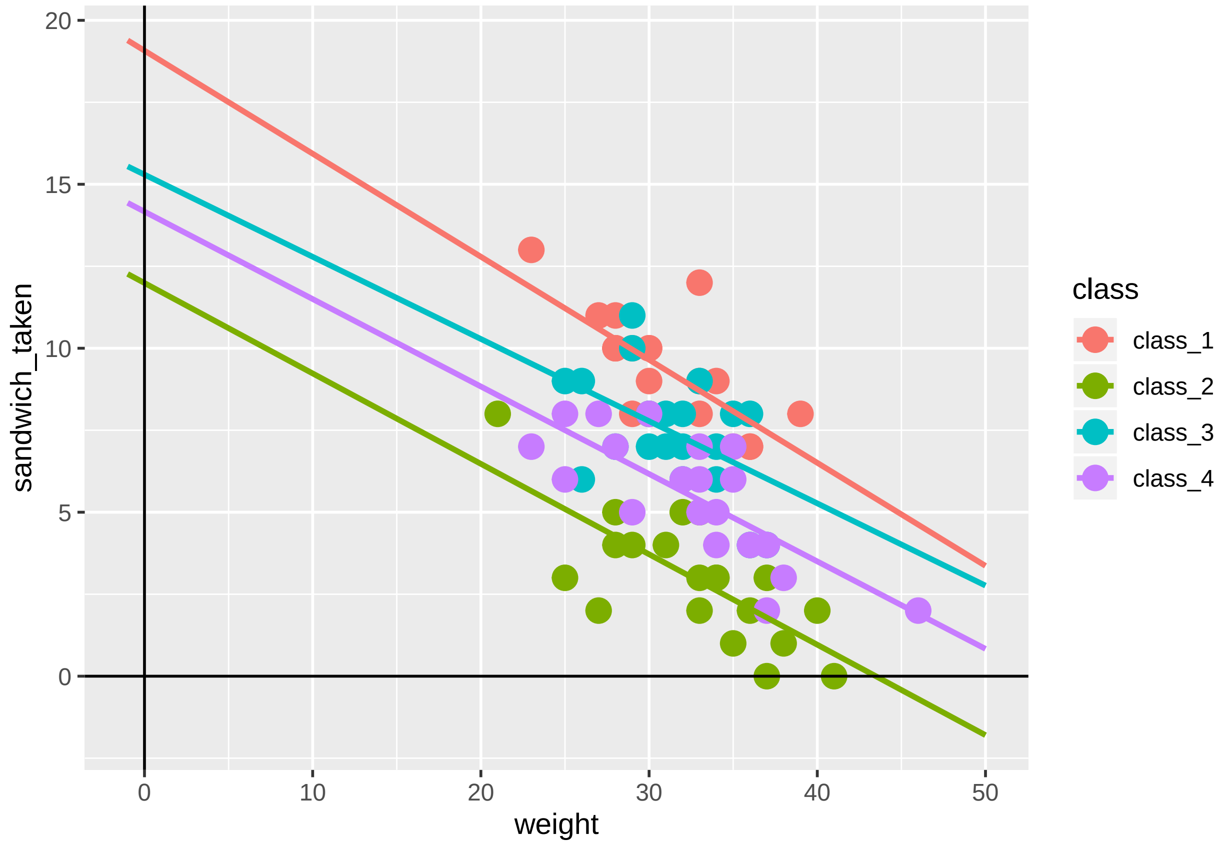
Ezert azokat a modelleket, amik mind fix, mind random hatasokat tartalmaznak, kevert modellekenek (mixed models) nevezzuk.

3.3 A random hatasok ket tipusa

Altalanossagban a random hatasok ket modon lehetnek hatassal a kimeneti valtozora. Az egyik hogy direk hatast fejtenek ki ra (random intercept), a masik hogy arra vannak hatassal, hogy a fix hatasok merteket es iranyat befolyasoljak (random slope).

random intercept, random slope nelkul: Lehetseges hogy a csoportosulasok (cluster-ek) csak abban kulonboznek egymastol, hogy a kimeneti valtozon atlagosan milyen erteket vesznek fel, de a fix hatasok nagyjabol azonosak a csoporosulasok kozott. Ez igaz a data_bully_int adatbazisra. Megfigyelhetjuk az abran, hogy a regresszios egyenbesek meredeksege (slope) nem kulonbozik az osztalyok kozott, ami arra utal hogy a testsuly hatasa ugyan akkora az ehgyes osztalyokban. Az osztalyok csak abban kulonboznek, hogy milyen "magasan" vannak a regresszios egyenesek, vagyis abban, hogy a regresszios egyenesek milyen erteknel metszik az Y tengelyt. Ez lathato az alabbi abran is.

```
int_plot + xlim(-1, 50) + geom_hline(yintercept = 0) + geom_vline(xintercept = 0)
```



random intercept, es random slope: Most vizsgaljuk meg a masik adatbazist (data_bully_slope). Ahogy fent emlitettuk, ebben az adatbazisban azt szimulaltuk, hogy az osztalynak nem csak az elvett szendvicsek szamara van hatasa, hanem a testsuly hatasa is kulonbozik az osztalyok kozott.

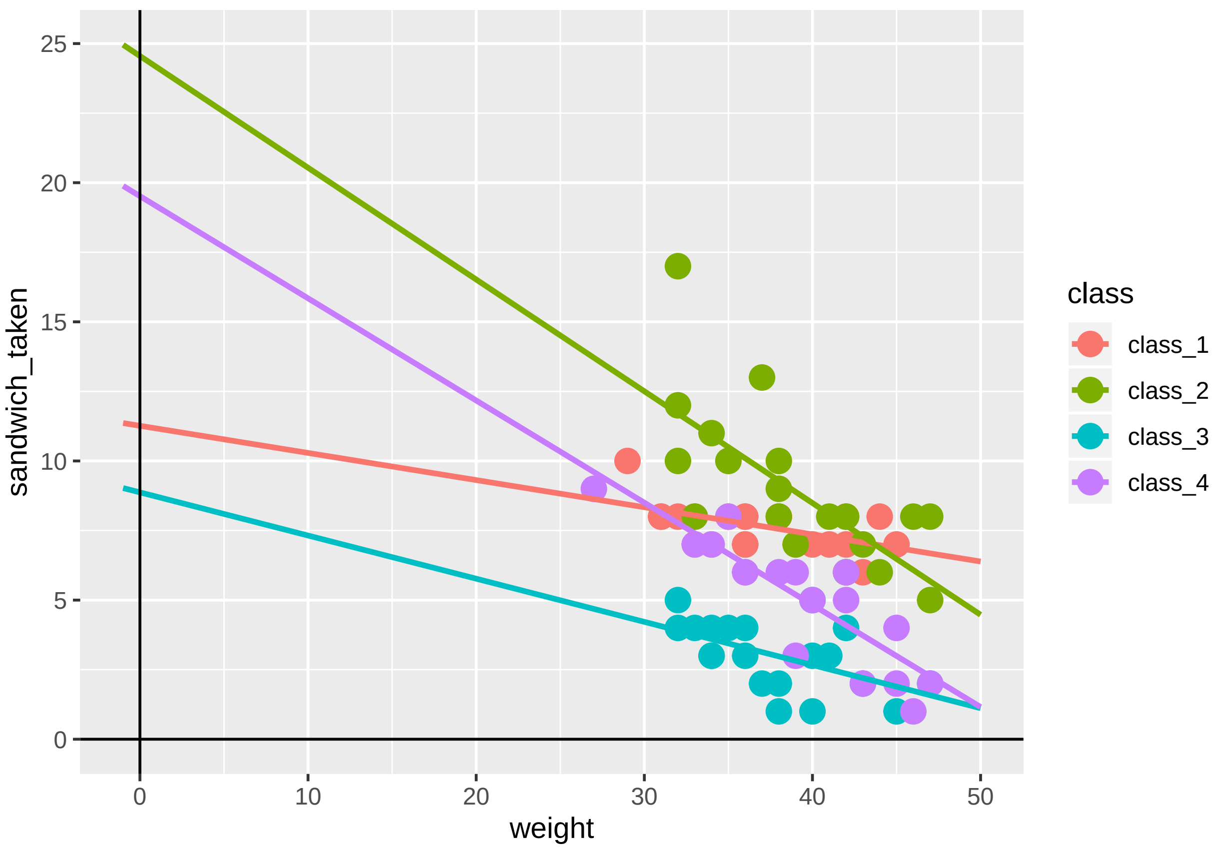
Az abran jol latszik, az osztalyok nem csak abban kulonboznek, hogy a hozzajuk tartozo regresszios egyenes hol metszi az Y tengelyt, de a regresszios egyenesesk meredeksege is kulonbozo.

Peldaul a class_1-ben a testsuly hatas elhanyagolhatonak tunik abbol a szempontbol hogy kitol mennyi szendvicset vesznek el, mig a class_2-ben es class_4-ben a testsuly hatasa szamottevo.

```
slope_plot = data_bully_slope %>% ggplot() + aes(y = sandwich_taken,
    x = weight, color = class) + geom_point(size = 4) + geom_smooth(method = "lm",
    se = F, fullrange = TRUE) + xlim(-1, 50) + geom_hline(yintercept = 0) +
    geom_vline(xintercept = 0)
slope_plot
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_smooth).
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing missing values (geom_point).
```



Az alabbi feladat bemutatja, hogy hogyan lehet a random hatasokat beepiteni a modellekbe.

Harom modellt fogunk epiteni. Eloszor egy szimpla fix hatasokat tartalmazo modellt, majd egy **random intercept modelt**, es egy **random slope modelt**. A fenti abra alapjan arra lehet kovetkeztetni hogy az iskolai osztaly egy olyan random hatas, ami mind a regresszios egyenes intercept-jet, mind a meredkseget (slope) befolyasolja a data_bully_slope adatbazismban. Ezert normalis esetben csak a random slope modellt illesztenenk. A tobbi modell csak demonstracios celbol epitjuk, hogy osszehasonlitsuk azok formulait es bejoslo erejet a random slope modellevel.

Eloszor epitunk egy egyszeru regresszios modellt, melyben egyetlen fix hatas prediktor van: weight. Ezt a modellt a mod_fixed objektumba mnetjuk.

egyszeru regresszios model (csak fix hatas)

```
mod_fixed = lm(sandwich_taken ~ weight, data = data_bully_slope)
```

random intercept modell (a random intercept megengedett, de a random slope nem)

A kevert modellek formulaja nagyon hasonlo a csak fix hatast tartalmazo modellekehez, de az lm() funcio helyett az lmer() funkciot hasznaljuk.

A random intercept random hatast a "+ (1|class)" hozzadadasaval tehetjuk a modellbe.

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy megengedjuk a modellnek hogy kulon regresszios egyenest illesszen minden clusterre (a mi esetunkben minden iskolai osztalyra), de azt meghatarozzuk, hogy minden regresszios egyenesnek ugyan olyan legyen a meredeksege.

Ezt normalis esetben akkor tennenk, ha azt gyanitanank hogy az osztalyok kozott nincs lenyegi elteres a fix hatasokban, csak a kimeneti valtozo atlagos szintjeben. Ez a modell jol illeszkedne a data_bully_int adatbazisra, de a fenti abra alapjan azt varjuk hogy a data_bully_slope adatbazisra kevesbe jol illeszkedik majd.

```
mod_rnd_int = lmer(sandwich_taken ~ weight + (1 | class), data = data_bully_slope)
```

random slope modell (mind a random intercept, mind a random slope megengedett):

Ennek a modelnek a formulaja szinte teljesen megegyezik a random intercept modellevel, egyedul abban kulonbozik, hogy a random hatasrol szolo reszben "+ (1|class)" helyett "+ (weight|class)" szerepel. Ez arra utal, hogy a class random hatas nem csak az interceptre, hanem a weight prediktor hatasara is kiterjed.

Ezzel megengedjuk a modellunknek, hogy kulon regresszios egyenest illesszen minden clusterre, es hogy azoknak mind az Y tengellyel valo metszespontja (intercept), mind a meredeksege (slope) kulonbozhet.

```
mod_rnd_slope = lmer(sandwich_taken ~ weight + (weight | class),
    data = data_bully_slope)
```

```
## Warning in checkConv(attr(opt, "derivs"), opt$par, ctrl =
## control$checkConv, : Model failed to converge with max|grad| = 0.00317298
## (tol = 0.002, component 1)
```

Ha osszehasonlitjuk a harom modell rezidualis hibajat (residual sum os squared differences - RSS), lathatjuk hogy a csak fixed hatast tartalmazo modell hasznalatakor marad a legtobb hiba, a random intercept modell a masodik, es a legkevesebb hibat a random slope modell eseten talaljuk.

```
sum(residuals(mod_fixed)^2)
```

```
## [1] 581.6364
```

```
sum(residuals(mod_rnd_int)^2)
```

```
## [1] 159.5818
```

```
sum(residuals(mod_rnd_slope)^2)
```

```
## [1] 132.2322
```

De ez nem igazan meglepo, hiszen a modell koplexitasa (es ezzel flexibilitasa) egyre nott, es errol tudjuk, hogy csokkenti a hibat azon az adatbazison amin a modellt epitettuk, de a flexibilitas novelese miatt ez tulilleszteshez is vezethet, ami uj adatokon rosszabb bejoslasi hatekonysaghoz is vezethet. Ezert a nyers rezidualis hiba osszehasonlitas helyett olyan modell-illeszkedesi mutatkozhoz kell fordulnunk, amik korrigalva vannak a flexibilitasara (ezt ugy is mondhatjuk hogy a modell parameterek szamara.)

Az egyik ilyen mutato az AIC. De a kevert modellekhez egy specialis AIC mutato-t szamitunk ki, a cAIC mutatot (ami a conditional AIC-bol szarmazik). A cAIC-t megkaphatjuk peldaul a cAIC4 package cAIC() funkcioja segitsegevel.

```
AIC(mod_fixed)
```

```
## [1] 391.7357
```

```
cAIC(mod_rnd_int)$caic
```

```
## [1] 294.4023
```

```
cAIC(mod_rnd_slope)$caic
```

```
## [1] 285.6445
```

3.4 Annak eldontese hogy random slope vagy random intercept modell-t illesszunk

Ahogy korabban is lathattuk, a modellvalasztasnal mindig az elmeletileg leginkabb megalapozott modellt erdemes valasztani. Ha van okunk feltetelezni hogy egy hatas kulonbozo lesz a kulonbozo clusterekben, akkor hasznaljuk a random slope modellt. Ha elmeleti alapon inkabb ugy iteljuk, hogy a fix hatasok valoszinuleg allandoak a csoportok kozott, illesszunk random intercept modellt.

Ennek ellenere van olyan eset, amikor elmeletileg mindket esehetoseg elkepzelheto. Ilyen esetben hagyatkozhatunk az exploratoros elemzesunkre es a modellilleszkedesi mutatokra, hogy eldontsuk, melyik modellt erdemesebb hasznalni.

3.4.1 Random hatasok vizualizacioja

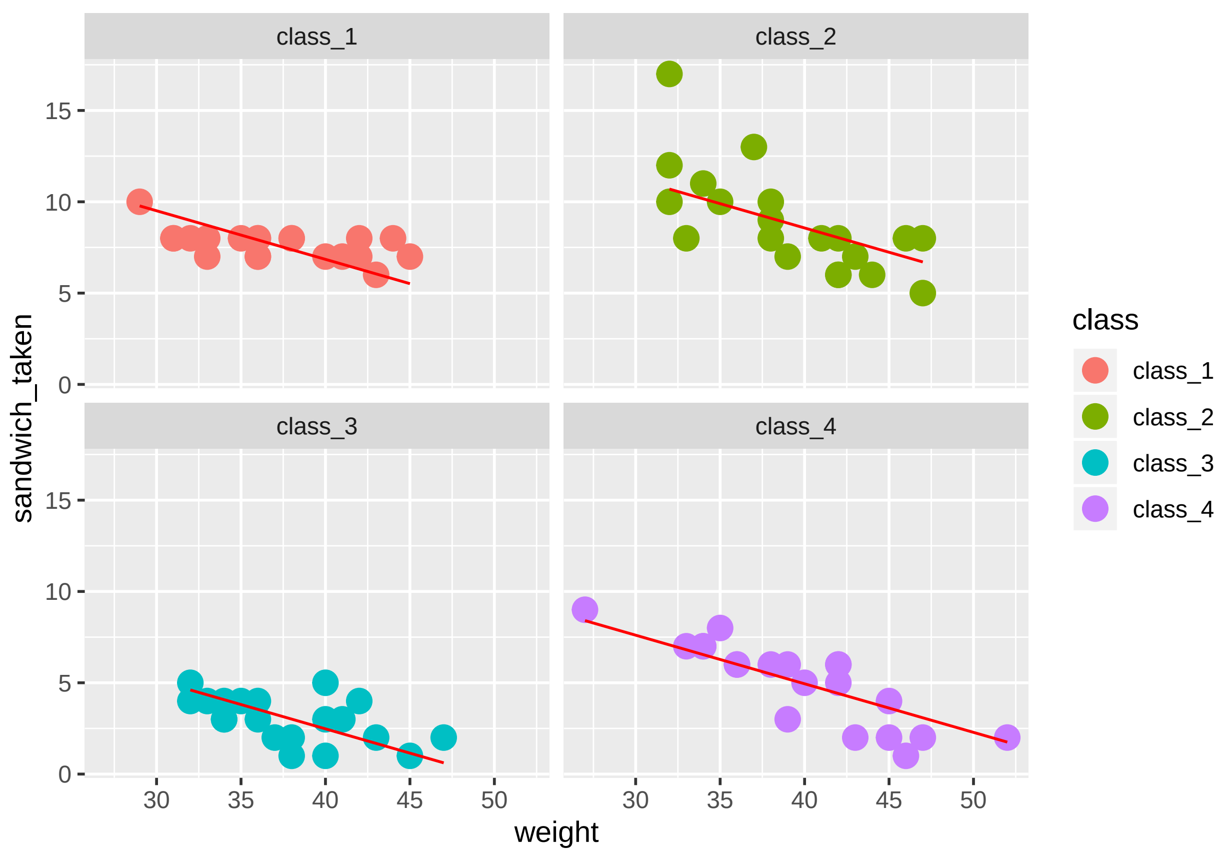
A random hatasok exploracioja eseten a vizualizacio kulcsszerept tolt be.

Eloszor erdemes elmentenunk az intercept es a slope modellek altal bejosolt ertekeket uj valtozokba (alabb a pred_int es pred_slope valtozokba mentjuk ezeket). Az eredeti adatbazisbol szarmazo predikciokat a predict() funkcioval nyerhetjuk ki.

```
data_bully_slope = data_bully_slope %>% mutate(pred_int = predict(mod_rnd_int),
    pred_slope = predict(mod_rnd_slope))
```

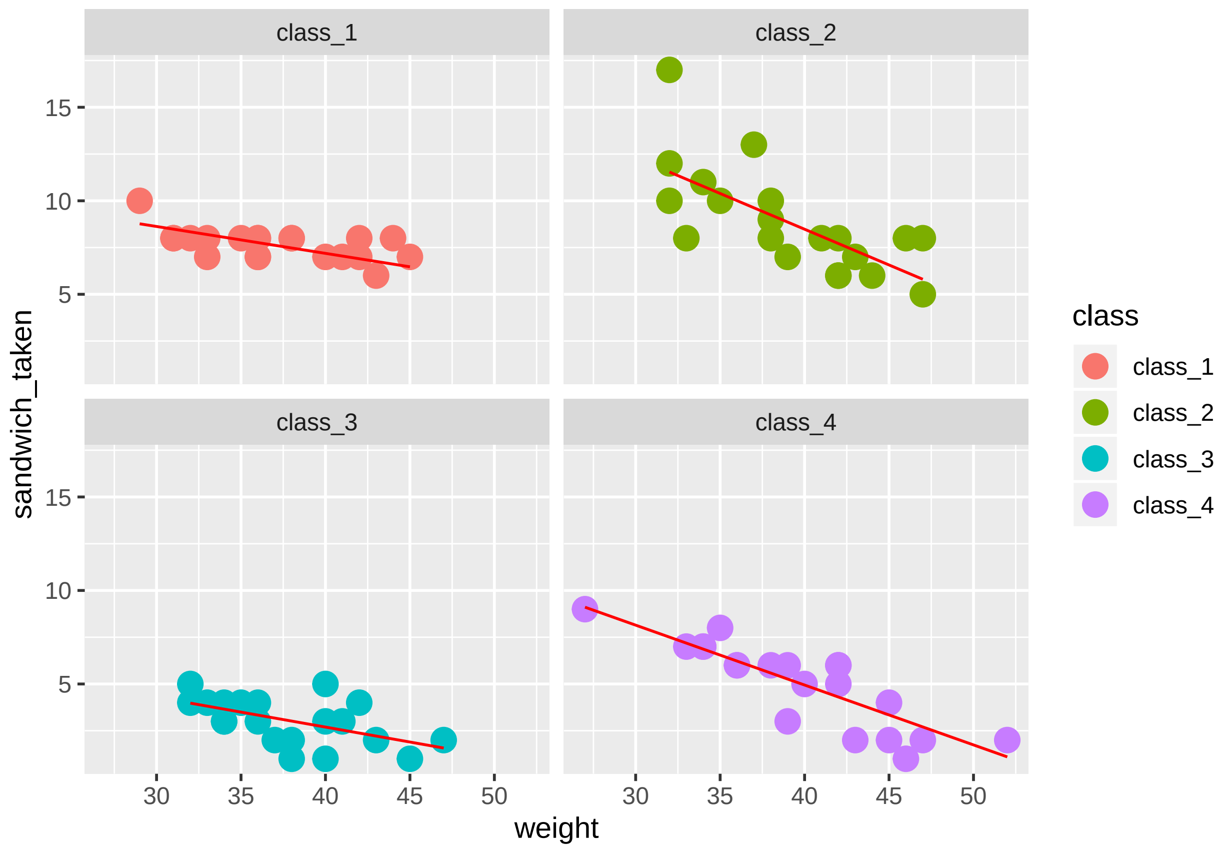
Igy vizualizaljuk a random intercept modell predikciojat:

```
data_bully_slope %>% ggplot() + aes(y = sandwich_taken, x = weight,
    group = class) + geom_point(aes(color = class), size = 4) +
    geom_line(color = "red", aes(y = pred_int, x = weight)) +
    facet_wrap(~class, ncol = 2)
```



Igy pedig a random slope modell predikciojat:

```
data_bully_slope %>% ggplot() + aes(y = sandwich_taken, x = weight,
    group = class) + geom_point(aes(color = class), size = 4) +
    geom_line(color = "red", aes(y = pred_slope, x = weight)) +
    facet_wrap(~class, ncol = 2)
```



Az abrak osszehasonlitasa alapjan bar a random slope modell valamellyest jobb illeszkedeshez vezet, a kulonbseg alig eszreveheto.

3.4.2 Modell-illeszkedesi mutatok hasznalata

A modellek illeszkedeset a cAIC segitsegevel is osszehasonlithatjuk. Ahogy korabban is lattuk az AIC eseten, ha az egyik modell cAIC mutatoja legalabb 2-vel alacsonyabb mint a masik modellhez tartozo cAIC, akkor azt mondhatjuk az alacsonyabb cAIC mutatoval biro modell szignifikansan jobban illeszkedik az adatokhoz. Az anova() funkcio szinten hasznalhato a modellek osszehasonlitasara, de itt is csak a beagyazott modellek eseten (lasd a modell-osszehasonlitas gyakorlatot).

(Az anova() funkcio hasznalatkor egy figyelmeztetest kapunk: 'refitting model(s) with ML (instead of REML)' ez termeszetes es figyelmen kivul hagyhato, a REML es az ML modszerrel illesztett modellek nagyon hasonloak)

```
cAIC(mod_rnd_int)$caic
```

```
## [1] 294.4023
```

```
cAIC(mod_rnd_slope)$caic
```

```
## [1] 285.6445
```

```r
anova(mod_rnd_int, mod_rnd_slope)
```

```
## refitting model(s) with ML (instead of REML)

## Data: data_bully_slope
## Models:
## mod_rnd_int: sandwich_taken ~ weight + (1 | class)
## mod_rnd_slope: sandwich_taken ~ weight + (weight | class)
##               Df    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
## mod_rnd_int    4 310.00 319.53 -151.00   302.00
## mod_rnd_slope  6 307.94 322.23 -147.97   295.94 6.0595      2    0.04833 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

3.5 Mit kell kozolni az elemzesrol

A kozlendo informaciok nagyopn hasonloak ahhoz, amit a fix hatas modellek eseten kozoltunk.

Eloszor is le kell irnunk a modszert amit hasznaltunk:

"Ahhoz hogy a bullyzassal szembeni serulekenyseget meghatarozzuk, egy kevert linearis modellt illesztettunk. A kevert modellben az elvett szendvicsek szamat a testsullyal mint fix hatasu prediktorral josoltuk be. A modellben ezen felul az iskolai osztaly random hatasat modelleztuk. Epitettunk mind egy random slope es egy random intercept modellt. Ahogy ezt a kutatasi tervunkben meghataroztuk, a ket modellt osszehasonlitottuk a cAIC modellilleszkedeis mutatojuk alapjan, es ez alapjan hataroztuk meg, melyik lesz a vegso bejoslo modellunk."

A kovetkezo funkciokkal kapnank meg a kutatasi jelenteshez szukseges eredmenyeket:

cAIC:

```r
cAIC(mod_rnd_int)$caic
```

```
## [1] 294.4023
```

```r
cAIC(mod_rnd_slope)$caic
```

```
## [1] 285.6445
```

anova:


```r
anova(mod_rnd_int, mod_rnd_slope)
```

```
## refitting model(s) with ML (instead of REML)

## Data: data_bully_slope
## Models:
## mod_rnd_int: sandwich_taken ~ weight + (1 | class)
## mod_rnd_slope: sandwich_taken ~ weight + (weight | class)
##               Df    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
## mod_rnd_int    4 310.00 319.53 -151.00   302.00
## mod_rnd_slope  6 307.94 322.23 -147.97   295.94 6.0595      2    0.04833 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```


Modell R^2 es regresszios egytutthatok:

Az r2beta() funkcio kiszamitja a "marginalis R^2" mutatot Nakagawa es Schielzeth (2013) cikkenek ajalnlasa alapjan. Ez az R^2 mutato specialis fajtaja, ami azt mutatja meg, hogy mekkora a modell fix hatasu prediktorai altal megmagyarazott varianciaarany. Ezt az R^2 mutatot erdemes hasznalni a modell bejoslo hatekonysaganak megadasara, hiszen a random hatasu prediktorokat uj adatokon nem tudjuk majd hasznalni bejoslasra.

Nincs egy klasszikus F-test aminek az eredmenyet fel lehetne hasznalni annak ertekelesere, hogy a teljes modell szignifikansan jobb bejoslast eredmenyez-e a null-modellnel, de az r2beta megadja a 95%-s konfidencia intervallumot, amit felhasznalhatunk szignifikanciatesztelesre. Ahogy korabban is, ha a konfidencia intervallim tartalmazza a 0-t, akkor a modell nem szignifikansan kulonbozik a null modelltol bejoslo hatekonysag tekinteteben.

Reference: Nakagawa, S., & Schielzeth, H. (2013). A general and simple method for obtaining R2 from generalized linear mixed-effects models. Methods in Ecology and Evolution, 4(2), 133-142. and Johnson, P. C. (2014). Extension of Nakagawa & Schielzeth's R2GLMM to random slopes models. Methods in Ecology and Evolution, 5(9), 944-946.

```
r2beta(mod_rnd_slope, method = "nsj", data = data_bully_slope)
```

```
##   Effect   Rsq upper.CL lower.CL
## 1  Model 0.147    0.304    0.036
## 2 weight 0.147    0.304    0.036
```

Az eredmenyek resyben igy irhatjuk le ay eredmenyeket:

"A random slope modell jobb modell-illezkedeshez vezetett mint a random intercept modell mind a likelyhood ration test ($\chi^2 = 6.06$, df = 2, p = .048) mind a cAIC alapjan (cAIC intercept = 294.4, cAIC slope = 285.64). Ezert az alabbiakban a random slope modell eredmenyeit kozoljuk.

A kevert linearis modell szignifikansan jobb volt mint a null modell. A modellben a fix hatasu prediktorok az elvett szendvicsek varianciajanak 14.71%-at magyaraztak meg (R^2 = 0.15 [95% CI = 0.04, 0.3])."

Ezen felul a prediktorokhoz tartozo regresszios egyutthatokrol is kozolnunk kell az eredmenyeket. Ezt a korabbiakhoz hasonloan egy tablazatban szoktuk megtenni, ami minden prediktorra kulon sorban kozli az adatokat. (Itt csak egy fix hatasu perdiktor van, szoval csak ket sor lesz a tablazatban, egy az intercept-nek es egy a testsuly prediktornak.)

A vegso tablazat valahogy igy nez majd ki:

```
##                 b 95%CI lb 95%CI ub Std.Beta p-value
## (Intercept) 15.89     8.02    23.72        0    .021
## weight      -0.25    -0.41    -0.09    -0.42     .04
```

A tablazat egyes elemeit itt talalhatod meg:

Regresszios egyutthatok es a hozzajuk tartozo p-ertekek a summary() fuggvennyel kaphatok meg (csak akkor fog p-erteket kiadni a summary fuggveny a kevert modellekre, ha az lmerTest package be van toltve)

```
summary(mod_rnd_slope)
```

```
## Linear mixed model fit by REML. t-tests use Satterthwaite's method [
## lmerModLmerTest]
## Formula: sandwich_taken ~ weight + (weight | class)
##    Data: data_bully_slope
##
## REML criterion at convergence: 297.4
##
## Scaled residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.3403 -0.5630 -0.0076  0.3896  4.0511
##
## Random effects:
##  Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
```

```
##  class    (Intercept) 44.61736 6.6796
##           weight       0.01693 0.1301   -0.94
##  Residual              1.81799 1.3483
## Number of obs: 80, groups:  class, 4
##
## Fixed effects:
##             Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 15.88887    3.55290  2.95835   4.472   0.0215 *
## weight      -0.25155    0.07224  2.98048  -3.482   0.0404 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Correlation of Fixed Effects:
##        (Intr)
## weight -0.940
## convergence code: 0
## Model failed to converge with max|grad| = 0.00317298 (tol = 0.002, component 1)
```

A regresszios egyutthatokhoz tartozo konfidencia intervallumok: (ez a funkcio sokaig fut, mert sok iteraciot vegez a kiszamitashoz)

```
confint(mod_rnd_slope)
```

A standardizalt beta ertekeket pedig a kot elejen levo stdCoef.merMod() sajat funkcioval lehet kinyerni:

```
stdCoef.merMod(mod_rnd_slope)
```

```
##               stdcoef     stdse
## (Intercept)  0.000000 0.0000000
## weight      -0.422144 0.1212255
```