



*Università degli studi dell'Insubria*

Dipartimento di Scienza e Alta Tecnologia

Laboratorio di Fisica IV

## **Tubo a raggi X**

*Mozzanica Martina, Quaini Alessandro, Savorgnano Sofia*

Docente

Prof.ssa Michela PREST

Data

26 aprile 2020

# **Contents**

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Misura della diffrazione di raggi X</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Misura dello spettro del tubo in funzione della tensione e della corrente</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Misura della costante di Planck</b>	<b>13</b>

# 1 Introduzione

I raggi X sono stati scoperti da W. C. Roentgen (fig. 1) nel 1895 (premio Nobel nel 1901), in un periodo di incredibile attività per la fisica sperimentale delle radiazioni. Altri contributi fondamentali arrivarono con la scoperta della radioattività naturale dall'uranio da parte di H. Becquerel nel 1896 e dell'elettrone da parte di Thomson nel 1897 e con l'attività dei coniugi Curie. Mentre lavorava con un tubo catodico,



(a)



(b)

Figure 1: (a) Prima radiografia effettuata da Roentgen. (b) Esempi di primi tubi a raggi X (tubi di Crookes).

Roentgen si accorse che uno schermo posizionato a grande distanza si illuminava e data la natura allora ignota di queste radiazioni, Roentgen le chiamò “raggi X”. La scoperta dei raggi X fa il giro del mondo in poche settimane e laboratori per radiografie nascono con estrema facilità (e con poca prudenza).

In realtà, mentre la parte applicativa si sviluppa con una velocità incredibile e tuttora i raggi X sono alla base della diagnostica medica, ci sono voluti circa 30 anni per capire esattamente cosa fossero. I lavori di Stokes, Sommerfeld, Barkla e di molti altri sulla natura ondulatoria di tali raggi, e quello di Bragg e Compton sulla loro natura corpuscolare culminarono nell'utilizzo dei raggi X come prove delle caratteristiche della materia (Von Laue e Moseley e la diffrazione di raggi X su cristalli).

**I raggi X** I raggi X sono radiazioni di natura elettromagnetica caratterizzati da lunghezze d'onda relativamente piccole ed alte energie. Tipicamente tali radiazioni corrispondono alla parte dello spettro elettromagnetico compreso tra lunghezze d'onda di  $0.1 \text{ \AA}$  e  $100 \text{ \AA}$  (fig. 2).

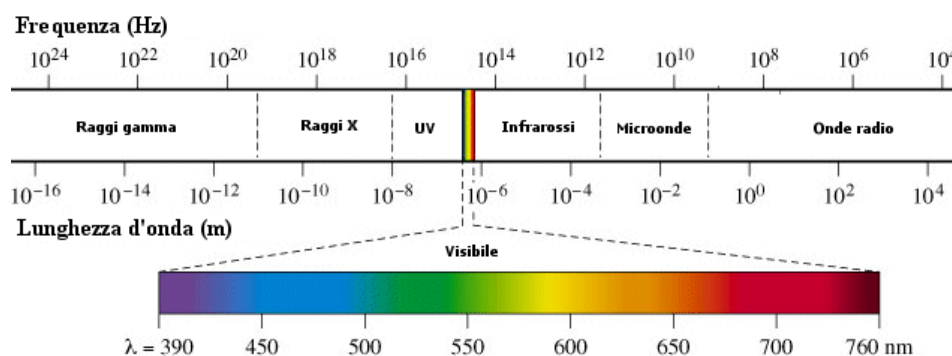


Figure 2: Raggi X nello spettro elettromagnetico.

I raggi X trovano il loro impiego principale nella diagnostica medica, ma vengono ampiamente utilizzati anche in ambito industriale, per rivelare imperfezioni nella struttura di materiali in ambito aerospaziale e nucleare. I raggi X vengono utilizzati anche negli studi che vengono effettuati su dipinti in quanto talvolta la radiografia rileva la presenza di pitture sottostanti più antiche e più importanti, o anche di firme o scritte nascoste.

**Il tubo a raggi X** Un tubo a raggi X (fig. 3) è costituito da un tubo a vuoto che contiene un filamento (catodo), che riscaldato emette elettroni di conduzione per effetto termoionico, e un anodo per la raccolta degli elettroni stessi. Questo fascio di elettroni viene accelerato tramite un'alta tensione che può variare tra qualche decina e qualche centinaio di kV.

Il fascio di elettroni interagisce con il materiale dell'anodo (di solito tungsteno e in alcuni casi particolari molibdeno) e produce raggi X tramite bremsstrahlung (fig. 4 a sinistra), ovvero una forma di radiazione elettromagnetica prodotta a causa dell'accelerazione, o decelerazione, di una particella carica, in questo caso in direzione ortogonale a quella di arrivo degli elettroni. L'energia irradiata corrisponde all'1% dell'energia totale che incide sull'anodo, il resto viene disperso in calore, che deve essere smaltito tramite un sistema di raffreddamento dedicato. Lo spettro X prodotto da un tubo (fig. 4 a destra) è uno spettro continuo il cui punto di massima energia dipende dalla tensione di funzionamento del tubo. L'intensità invece

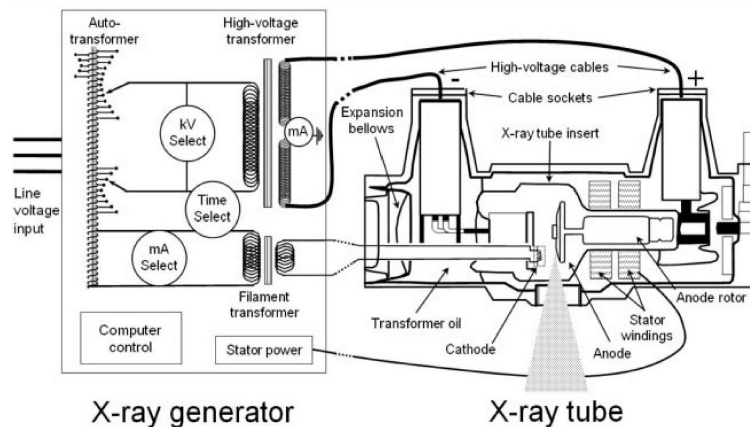


Figure 3: Esempio di schema di un tubo a raggi X.

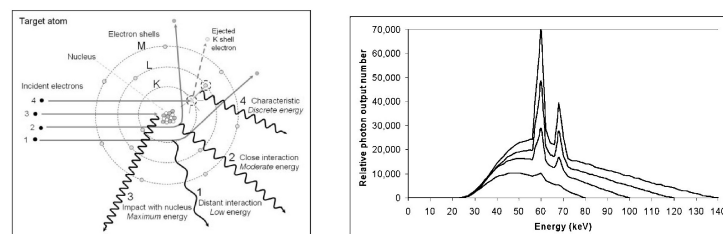


Figure 4: Emissione di raggi X nell'interazione di un elettrone con un atomo (figura a sinistra) e spettro X per diversi potenziali acceleranti del fascio di elettroni (figura a destra).

dipende dalla corrente di funzionamento che riscalda il catodo e causa l'emissione degli elettroni.

La parte di bassa energia dello spettro (che in termini medici è la più pericolosa in quanto si ferma nel corpo andando a contribuire alla dose totale dell'esame radiografico) può essere facilmente attenuata tramite filtri dedicati. I picchi presenti nello spettro sono quelli dovuti ai raggi X caratteristici emessi dal materiale di cui è costituito l'anodo.

### Elenco delle misure

L'esperienza prevedeva le seguenti misure:

- misura della diffrazione dei raggi X con un monocristallo
- misura dello spettro del tubo in funzione della tensione e della corrente di funzionamento del tubo

- misura della costante di Planck

Per tutte le misure è stato utilizzato un monocristallo di NaCl con i piani del reticolo paralleli alle superfici cubiche della cella unitaria. La distanza tra i piani  $d$  è pari alla metà della costante del reticolo che per il monocristallo utilizzato vale  $a_0 = 546.02$  pm. Il tubo a raggi X è rappresentato in fig. 5a con anodo in molibdeno (tab. 1) ed è usato in modalità autoscan. Il rivelatore per l'acquisizione dei dati era un contatore Geiger accoppiato al cristallo e a un goniometro per lo scan angolare (fig. 5b).

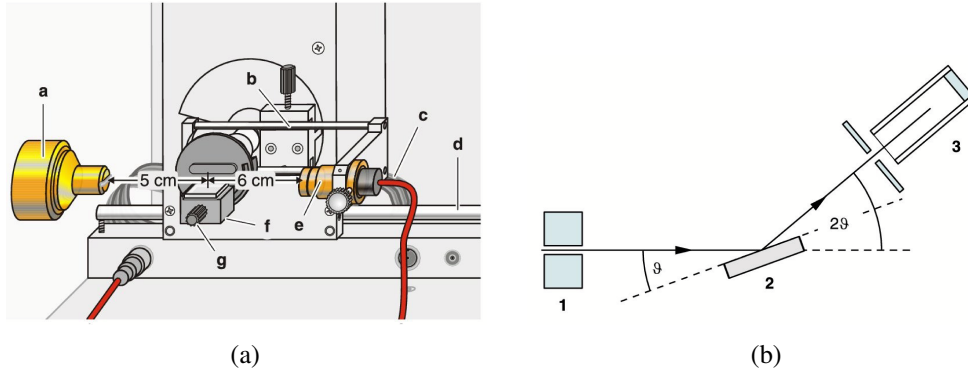


Figure 5: (a) Schema del tubo utilizzato nelle misure. (b) Schema del setup di acquisizione.

	<b>E (keV)</b>	<b><math>\lambda</math> (pm)</b>
$K_{\alpha}$	17.443	71.08
$K_{\beta}$	19.561	63.095

Table 1: Picchi caratteristici del molibdeno.

## 2 Misura della diffrazione di raggi X

Nel 1913, W. H. e W. L. Bragg scoprirono come sia possibile riflettere un fascio di raggi X paralleli (considerati quindi come onde) tramite cristalli. Ogni piano del reticolo cristallino agisce infatti come un centro di scattering che genera a sua volta onde il cui inviluppo corrisponde a un'onda riflessa con la stessa lunghezza d'onda di quelle incidenti. Le onde riflesse (fig. 6) possono fare interferenza costruttiva quando la differenza di percorso è un multiplo intero della lunghezza d'onda:

$$\Delta = n \cdot \lambda$$

dove  $n$  è un intero ( $n=1,2,3,\dots$ ). Considerando le differenze di cammino  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$

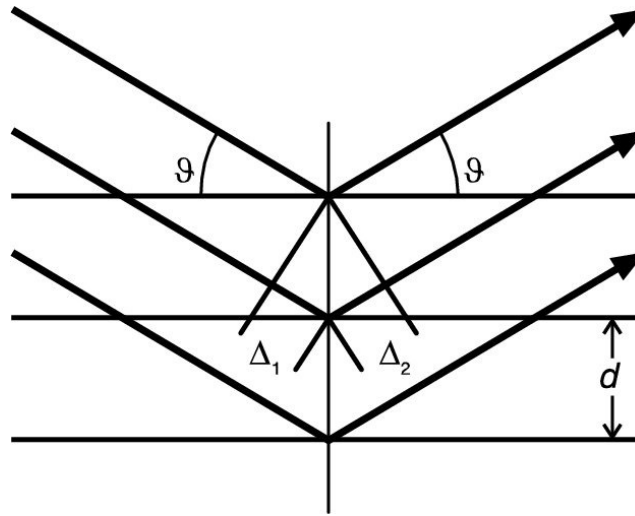


Figure 6: Riflessione di raggi X tramite un cristallo; l'angolo  $\theta$  noto come angolo di glancing.

indicate in fig. 6, e lo spazio tra due piani del reticolo  $d$ , si può ricavare la legge di Bragg della riflessione:

$$n\lambda = 2d\sin\theta \quad (1)$$

che è la legge che verrà verificata in questa misura, sfruttando la radiazione caratteristica, il cui angolo di glancing fino al terzo ordine è riportato in tab. 2.

Il setup della misura era caratterizzato dai seguenti parametri:

- tensione di funzionamento  $U=35$  kV, corrente di funzionamento  $I=1$  mA
- tempo di acquisizione per ogni step: 10 s
- step angolare:  $0.1^\circ$
- range angolare:  $2-25^\circ$

<b>n</b>	$\theta(K_{\alpha})$	$\theta(K_{\beta})$
1	7.24°	6.42°
2	14.60°	12.93°
3	22.21°	19.61°

Table 2: Angolo di glancing per la radiazione caratteristica del tubo fino al terzo ordine.

**Visualizzazione dei dati** Per visualizzare i glancing angles riportati in tabella 2 si esegue un plot del rate in funzione dell'angolo facendo un fit utilizzando una gaussiana.

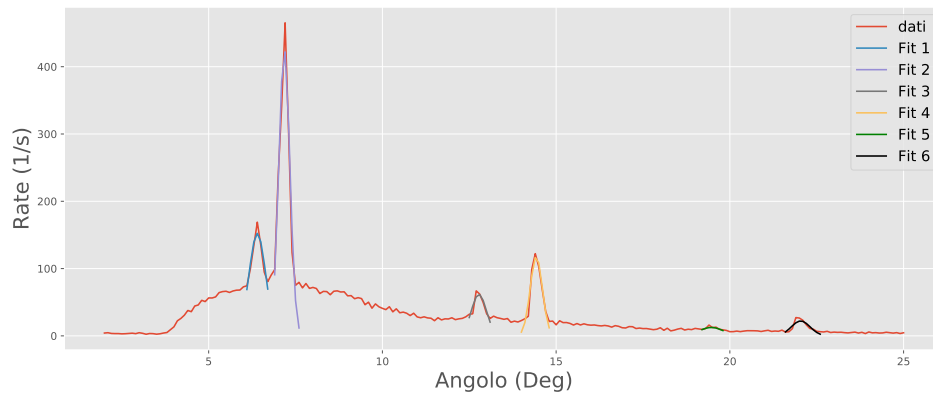


Figure 7: Glancing angles fino al terzo ordine.

Dalla figura 7 si nota che i glancing angles al terzo ordine risultano poco visibili, per questo è stato effettuato un'ulteriore scan, con range angolare: 19-23° e step angolare: 0.1°.

<b>n</b>	$\theta(K_{\alpha})$	$\theta(K_{\beta})$
1	7.18°±0.01°	6.40°±0.02°
2	14.43°±0.02°	12.78°±0.02°
3	22.04°±0.02°	19.47°±0.05°

Table 3: Glancing angles ricavati dai fit.



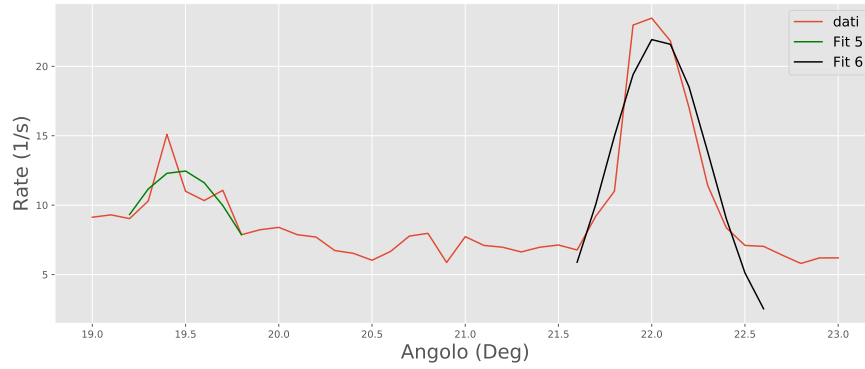


Figure 8: Ingrandimento sulla zona del terzo glancing angle.

Una volta visualizzati i dati si prosegue con il calcolo della lunghezza d'onda sfruttando la legge di Bragg della riflessione (eq. 1), sostituendovi i valori degli angoli ricavati dal fit (tabella 3) e utilizzando  $d$  pari alla metà della costante del reticolo  $a_0 = 546.02$  pm. I risultati che si ottengono sono i valori di lunghezze d'onda associate ai due picchi caratteristici del molibdeno le cui tensioni relative sono riportate in tabella 1. Gli errori sono stati ottenuti propagando quelli ottenuti dal risultato del fit in figura 7.

<b>n</b>	<b><math>\lambda(K_\alpha)</math> (pm)</b>	<b><math>\lambda(K_\beta)</math> (pm)</b>
1	$69 \pm 7$	$61 \pm 8$
2	$69 \pm 4$	$61 \pm 6$
3	$69 \pm 3$	$61 \pm 7$

Table 4: Lunghezza d'onda per ogni ordine di glancing angle per le due tensioni dell'anodo in molibdeno.

**Risultati** I risultati riportati in tabella 4 sono coerenti tra i vari ordini del glancing angle in quanto i valori ottenuti per ogni ordine sono circa uguali. Si calcolano infine i valori medi delle lunghezze d'onda, le relative deviazioni standard e si ottengono i valori:  $\bar{\lambda}(K_\alpha) = 69 \pm 3$  pm e  $\bar{\lambda}(K_\beta) = 61 \pm 4$  pm. Questi risultati sono in accordo con i risultati attesi riportati in tabella 1 in quanto differiscono per meno di una sigma dai valori tabulati.

### 3 Misura dello spettro del tubo in funzione della tensione e della corrente

Il setup per questa misura è identico a quello della misura precedente. La misura ha richiesto due fasi:

- *Fase 1*: con una corrente di 1 mA, un passo angolare per lo scan di  $0.1^\circ$  sul range  $2.5$ - $12.5^\circ$  e un tempo di acquisizione di 10 s per step, si è effettuato uno scan alle tensioni di 15, 20, 25, 30 e 35 kV
- *Fase 2*: con una tensione di 35 kV e gli stessi parametri della fase 1 per quanto riguarda lo scan, si sono analizzate le correnti di 0.4, 0.6, 0.8 e 1 mA.

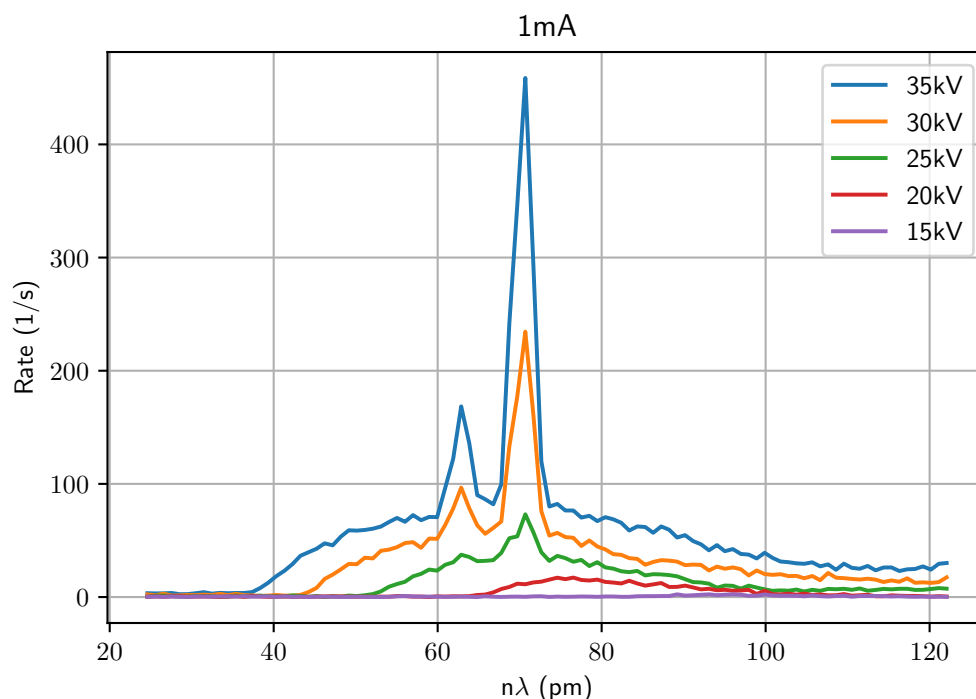


Figure 9: Spettro in funzione della tensione con una corrente di 1 mA.

Nello spettro vediamo la sovrapposizione di due effetti: bremsstrahlung e raggi X caratteristici. L'effetto bremsstrahlung ha un andamento, se guardiamo il logaritmo dell'energia in funzione del logaritmo del numero di quanti prodotti, che è linearmente proporzionale all'inverso dell'energia. Quindi ci si aspetta un numero più elevato di fotoni a bassa energia che diminuisce all'aumentare della stessa. L'energia massima dipende dal potenziale accelerante degli elettroni. I picchi dello spettro corrispondono ai raggi X caratteristici. Ciò che accade è che l'elettrone accelerato urta un elettrone dell'atomo dell'anodo e quindi quest'ultimo esce dall'atomo

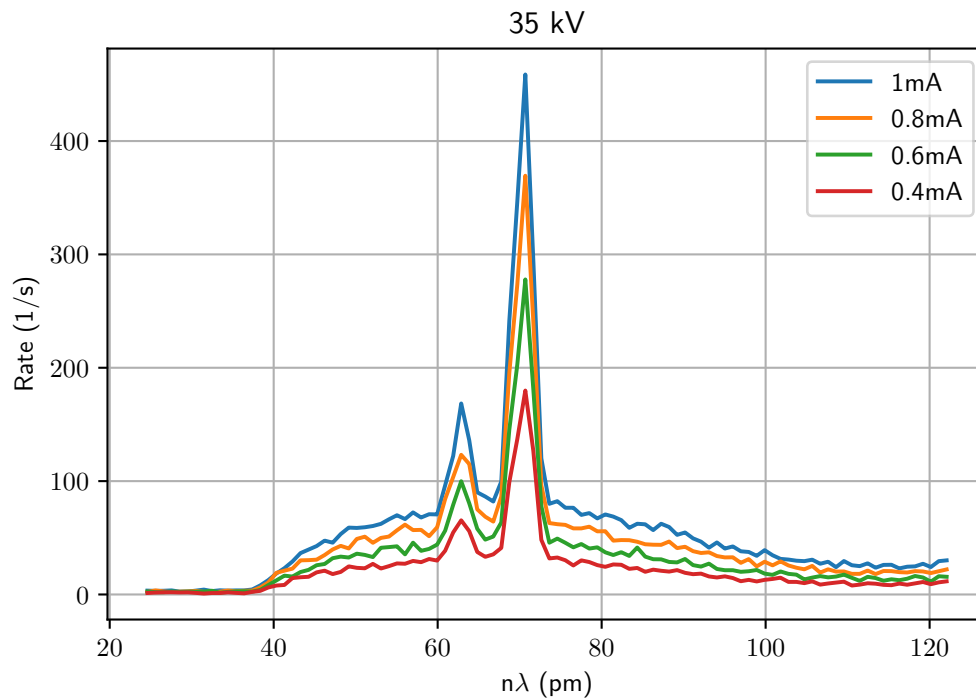


Figure 10: Spettro in funzione della corrente con un potenziale di 35 kV.

lasciando un buco nei livelli più interni che viene riempito da un elettrone esterno emettendo un raggio X caratteristico. L'energia, e di conseguenza la lunghezza d'onda, con cui viene emesso un raggio X dipende dal materiale di cui è fatto l'anodo.

Notiamo che nei grafici in figura 9 e 10 non è visibile la parte iniziale dell'effetto bremsstrahlung, questo perchè i fotoni a bassa energia vengono fermati, in particolare nel nostro caso è stato sufficiente il contenitore del tubo, in quanto anodo e catodo sono sotto vuoto. Vediamo che in figura 9 per tensioni basse (15kV e 20kV) non si osserva nessun picco mentre, aumentando la tensione, i picchi diventano sempre più evidenti.

Questo accade perchè se la tensione è troppo bassa, gli elettroni non vengono sufficientemente accelerati verso l'anodo, di conseguenza non si ha abbastanza energia per eccitarli e non si ha emissione di raggi X caratteristici.

Invece mantenendo una tensione di 35kV ma variando l'intensità di corrente, come mostrato nel grafico 10, varia solamente l'intensità con cui vengono emessi i raggi X. Infatti in questo caso quello che varia è il numero di elettroni che vengono accelerati, quindi quelli che arrivano all'anodo, cioè che hanno un'energia sufficiente per produrre raggi X.

In figura 11 vengono riportate le aree dei grafici in figura 10 in funzione dell'intensità di corrente. Le aree sono state ottenute semplicemente facendo un integrale dello

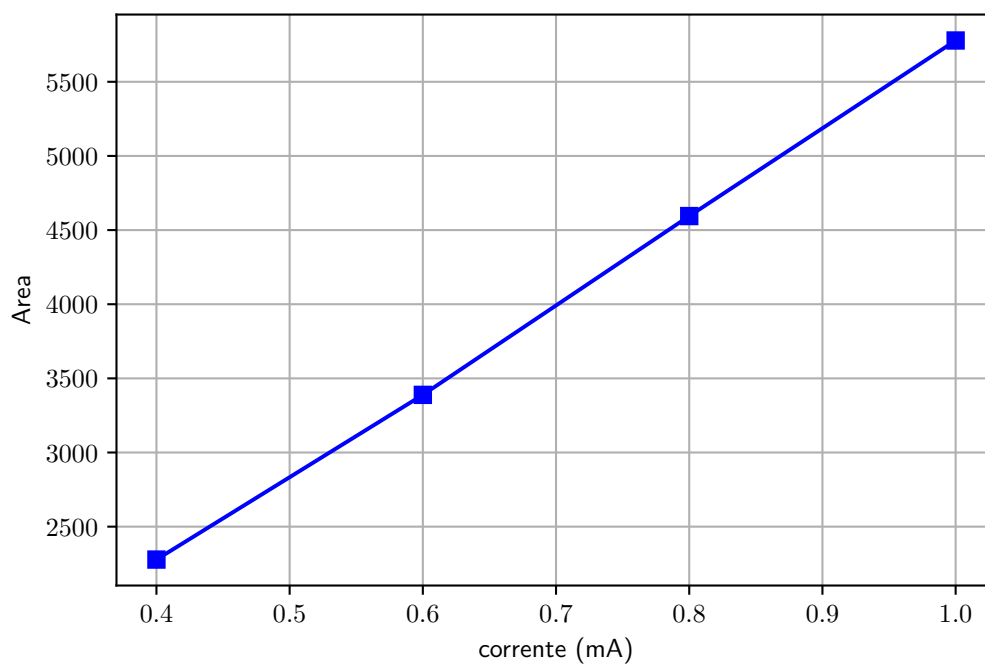


Figure 11: Area in funzione della corrente.

spettro a diverse intensità di corrente.

Notiamo che aumentando l'intensità di corrente aumenta linearmente anche l'area.

## 4 Misura della costante di Planck

La costante di Planck, indicata con  $h$ , è una costante fisica che determina che l'energia e le grandezze fisiche fondamentali ad essa legate non evolvono in modo continuo, ma sono quantizzate, ovvero possono assumere solo valori multipli di tale costante. Essa ha le dimensioni di un'energia per un tempo e, nel sistema delle unità atomiche, compone l'unità di misura del momento angolare. Prende il nome da Max Planck che la introdusse nel 1900 in seguito agli studi sullo spettro della radiazione del corpo nero.

Attraverso l'uso di un setup sperimentale costituito da un tubo a raggi X e da un contatore Geiger, facendo inoltre uso della formula di Bragg, è possibile ottenere una stima per la costante di Planck, ricavata dalla relazione tra la lunghezza d'onda della radiazione rivelata e il potenziale accelerante fornito.

Nel 1915 W. Duane e F. L. Hunt scoprirono questa relazione tra la lunghezza d'onda minima, che corrisponde all'energia massima, e il potenziale accelerante a cui si esegue l'esperimento:

$$\lambda_{min} \approx \frac{1}{U}. \quad (2)$$

Si può trovare esplicitamente la costante di proporzionalità. Dato che si vuole trovare la lunghezza d'onda *minima*, si considera l'energia *massima*:

$$E_{max} = h \cdot \nu_{max}. \quad (3)$$

Volendo esprimere l'energia in funzione del potenziale si ha:

$$E = e \cdot U, \quad (4)$$

da cui invertendo la formula precedente si ricava:

$$\nu_{max} = \frac{e}{h} \cdot U. \quad (5)$$

Infine considerando che  $\lambda = c/\nu$  si ottiene la relazione finale:

$$\lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{e} \cdot \frac{1}{U}. \quad (6)$$

Il fattore di proporzionalità tra la lunghezza d'onda minima dello spettro del tubo e la tensione di funzionamento, cioè il potenziale accelerante degli elettroni, contiene il valore della costante di Planck.

**Analisi dati** Il setup sperimentale utilizzato per la misura della costante di Planck è il medesimo delle due precedenti. Si è fatto variare il potenziale accelerante e la finestra temporale di acquisizione, con i valori riportati in tabella 5. La corrente non è stata fatta variare, bensì è stata mantenuta costante ad un valore di 1 mA per tutti gli scan, mentre lo step angolare è di  $0.1^\circ$ .

U (kV)	$\Delta t$ (s)	Range angolare ( $^\circ$ )
22	30	5.2-6.2
24	30	5.0-6.2
26	20	4.5-6.2
28	20	3.8-6.0
30	10	3.2-6.0
32	10	2.5-6.0
34	10	2.5-6.0
35	10	2.5-6.0

Table 5: Valori di potenziale accelerante, finestra temporale e range angolare per la misura della costante di Planck.

Per ogni valore del potenziale accelerante è stata acquisita una misura di frequenza di conteggi da parte del contatore Geiger, che si vuole rappresentare in funzione della lunghezza d'onda. Per fare ciò, si utilizza la legge di Bragg, espressa in formula 7, in cui  $d$  è la distanza tra i piani, ovvero metà della costante del reticolo. Si considera come valore di  $2d = a_0 = 564.02$  pm, mentre  $\theta$  è il glancing angle. Si tiene come parametro il numero intero positivo  $n$ .

$$n\lambda = 2d \sin(\theta) \quad (7)$$

Una volta ricavata la lunghezza d'onda, è possibile realizzare un grafico (figura 12) con l'andamento del rate misurato in funzione di essa, per ogni run di misure, ovvero per ogni valore di potenziale accelerante utilizzato.

Si vede chiaramente che l'andamento tende ad essere tanto più crescente quanto più è alto il potenziale accelerante, come ci si aspetta. Successivamente si è calcolata la lunghezza d'onda minima per ogni run, ovvero la lunghezza d'onda per la quale l'energia è massima, infatti come spiegato nell'introduzione, grazie a questo risultato è possibile risalire al valore della costante di Planck.

La lunghezza d'onda minima è stata ricavata separatamente per ogni curva, calcolando il punto di intersezione tra una retta orizzontale passante per l'origine ( $y = 0$ ) e una retta che avesse la pendenza della curva in analisi, ovviamente dal punto in cui inizia a crescere. In figura 13 si mostra un grafico esemplificativo con il fit utilizzato per stimare i parametri di coefficiente angolare e intercetta. La retta ottenuta con tali parametri è stata quindi messa a sistema con  $y = 0$  per ricavare la coordinata  $x$ , nonché la lunghezza d'onda minima cercata. Si nota che il fit tiene

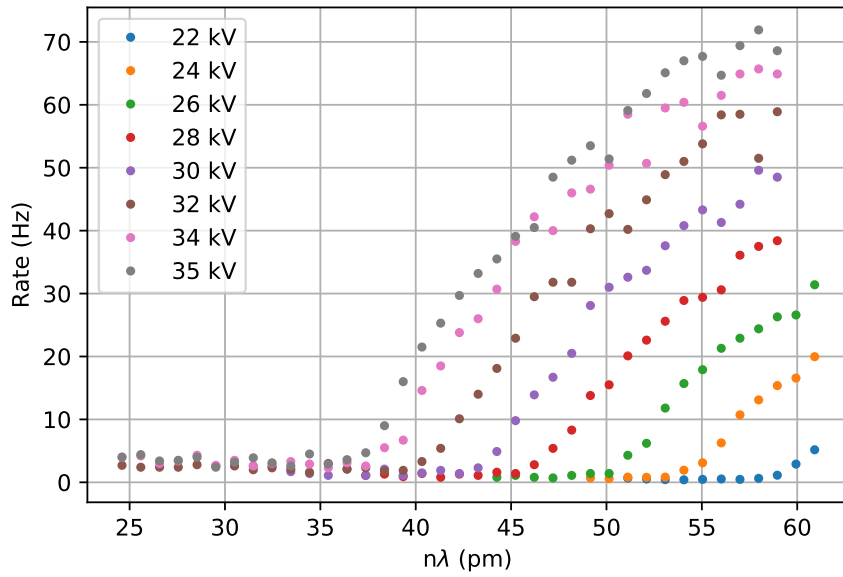


Figure 12: Grafico che mostra l'andamento del rate in funzione della lunghezza d'onda, al variare del potenziale accelerante.

in considerazione solo i primi punti della curva, in quanto sono sufficienti per determinare l'andamento iniziale di essa. I risultati trovati per la lunghezza d'onda minima sono riportati in tabella 6.

U (kV)	$\lambda_{min}$ (pm)
22	58.956
24	53.079
26	49.157
28	45.233
30	42.289
32	39.344
34	39.344
35	36.397

Table 6: Valori di potenziale accelerante e lunghezza d'onda minima corrispondente.

A questo punto è possibile realizzare un grafico che mostri l'andamento della lunghezza d'onda minima al variare dell'inverso del potenziale, al fine di ottenere una curva lineare, il cui coefficiente angolare conterrà la costante di Planck. Si realizza quindi un fit stimando la pendenza della retta. Il grafico con relativo fit è mostrato in figura 14, dove è riportato anche il valore del  $\tilde{\chi}^2$ .

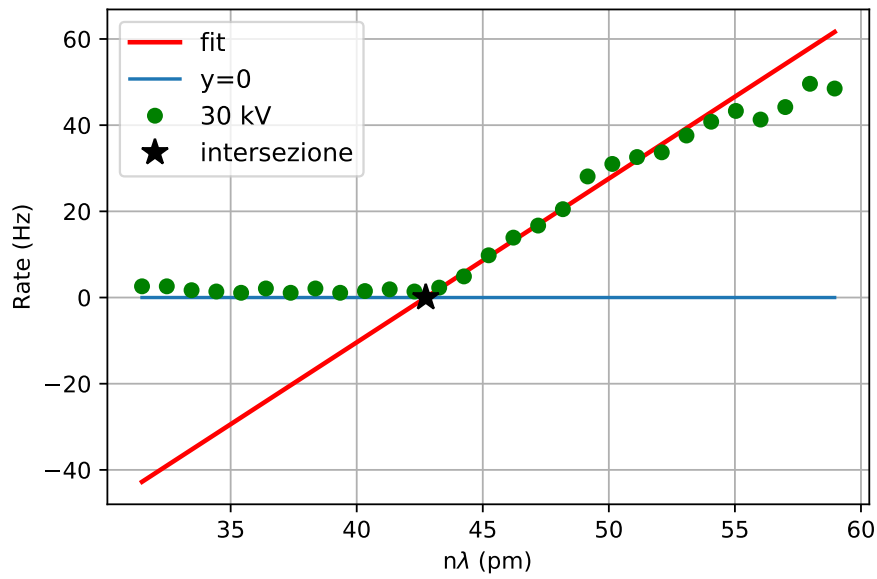


Figure 13: Grafico esemplificativo che mostra il metodo utilizzato per calcolare la lunghezza d'onda minima.

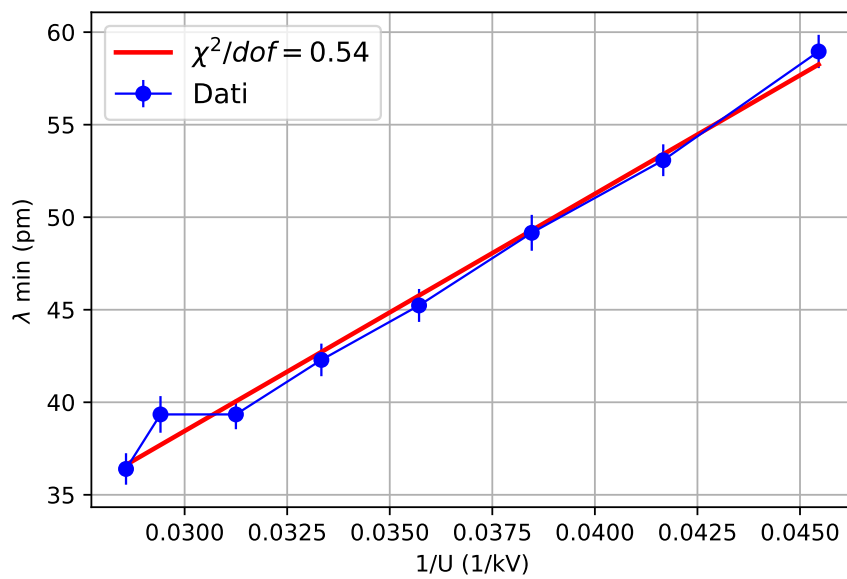


Figure 14: Grafico con fit dell'andamento della lunghezza d'onda minima in funzione dell'inverso del potenziale accelerante.



Il coefficiente angolare stimato dal fit assume un valore di  $k = 1290.277$ . Perciò, grazie all'equazione 4, è possibile ottenere il valore della costante di Planck.

Si assumono i seguenti valori fisici senza errore:

- $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C (carica dell'elettrone)
- $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s (velocità della luce)

Perciò la costante di Planck si ottiene da:

$$h = \frac{ke}{c} \cdot 10^{-9} \quad (8)$$

dove il fattore  $10^{-9}$  è necessario per uniformare le unità di misura delle varie costanti. Tuttavia mentre le costanti fisiche utilizzate si possono considerare prive di errore, non vale la medesima considerazione per i dati sperimentali, per i quali si è scelto di considerare un errore sul numero di conteggi (rate) e di propagarlo nel calcolo svolto per ottenere l'espressione finale della costante di Planck. Infatti per ogni set di dati, l'errore sul numero di conteggi,  $N$ , è stato calcolato come  $\sqrt{N}$ . Successivamente per i valori di  $\lambda_{min}$  sono stati utilizzati gli errori restituiti dal fit, che compaiono come barre d'errore in figura 14. Il valore del potenziale accelerante è considerato privo di errore.

Se una grandezza generica  $x$  è misurata con incertezza  $\delta x$  ed è utilizzata per calcolare il prodotto:

$$q = Bx \quad (9)$$

dove  $B$  non ha incertezza, allora l'incertezza in  $q$  è proprio  $|B|$  volte quella in  $x$ , ovvero:

$$\delta q = |B|\delta x. \quad (10)$$

Allora utilizzando la formula 4 per la propagazione degli errori del prodotto tra  $U$  e  $\lambda_{min}$ , è stato possibile in ultima analisi associare un errore al valore della costante di Planck.

Il valore ottenuto sperimentalmente per la costante di Planck è  $h = 6.849 \cdot 10^{-34} \pm 0.2 \cdot 10^{-34}$  Js. Confrontando questo valore con il valore tabulato pari a  $6.626 \cdot 10^{-34}$  Js, si può affermare che la corrispondenza sia molto buona, infatti il valore ottenuto si trova entro  $1.1\sigma$  dal valore vero.