



Università degli studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza e Alta Tecnologia

Laboratorio Fisica III:

I Filtri

Mozzanica Martina, Quaini Alessandro, Savorgnano Sofia

Docente
Prof. Valerio MASCAGNA

Data
4 febbraio 2020

Contents

1	Introduzione ai filtri	3
2	Descrizione del set up sperimentale	5
3	Filtro Passa Alto	6
3.1	Set di misure	7
3.2	Derivatore	11
4	Filtro Passa Basso	15
4.1	Set di misure	17
4.2	Integratore	21
5	Introduzione Filtri Passa Banda	27
6	Filtro Passa Banda in Serie	30
7	Filtro Passa Banda in Parallello	37
8	Filtro Elimina Banda in Serie	43

1 Introduzione ai filtri

In elettronica si dà il nome di filtro a quei circuiti in grado di discriminare i segnali periodici di ingresso in base alla loro frequenza, permettendone il passaggio solamente di segnali entro determinate bande di frequenza. In altre parole un filtro è un circuito che non fornisce una risposta uguale per tutte le frequenze del segnale in ingresso. In generale i filtri vengono studiati a regime sinusoidale; cioè fornendo in ingresso del filtro un segnale sinusoidale.

Per realizzare un filtro è sufficiente combinare in modo adeguato tre componenti passive, come resistori, condensatori e induttanze. Questi circuiti sono genericamente chiamati "*filtri passivi*", ovvero filtri che provocano un attenuazione del segnale in entrata. Questo fenomeno può essere descritto da un punto di vista energetico in quanto le componenti passive che si utilizzano nella realizzazione di questi circuiti tendono a convertire parte dell'energia trasportata dal segnale in ingresso, in energia termica per effetto Joule, per questo le componenti si surriscaldano e il segnale si attenua.

Per ogni filtro si calcola:

- **guadagno**: il rapporto fra l'ampiezza del segnale in output e quella del segnale in input.
- **sfasamento**: la differenza di fase tra l'onda in output e l'onda in input.
- **frequenza di taglio**: considerata come un limite convenzionale tra le frequenze alle quali un filtro permette il passaggio e quelle che vengono fortemente attenuate, e viene definita come il valore della frequenza per la quale il modulo del guadagno è pari a: $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

I filtri considerati durante il corso sono i seguenti:

- **Filtro Passa Alto:** è un circuito RC, permette solo il passaggio di frequenze al di sopra della frequenza di taglio.
- **Filtro Passa Basso:** è un circuito RC, condivide con il Filtro Passa Alto le stesse componenti ma a differenza di esso permette solo il passaggio di frequenze al di sotto della frequenza di taglio.
- **Filtro Passa Banda:** si suddividono in "Passa Banda in serie" e in "Passa Banda in parallelo", e sono circuiti RLC che permettono il passaggio di una determinata banda di frequenze.
- **Filtro Elimina Banda:** è un circuito RLC che contrariamente al Filtro Passa Banda, questo filtro blocca il passaggio di determinate frequenze.

Per ogni filtro sono state eseguite le seguenti analisi:

- Studio delle risposte dei filtri per onde in ingresso a tre frequenze diverse.
- Analisi delle curve di guadagno e sfasamento in funzione della frequenza.

Per i filtri passa alto e passa basso, si è verificato anche il comportamento come derivatori e integratori. Per quelli RLC si è considerata la complessità dell'induttanza reale, che può essere modellizzata come un'induttanza con una resistenza in serie e una capacità in parallelo. Questa resistenza e capacità non sono componenti fisiche reali ma questo modello descrive in modo accurato il funzionamento di un induttore reale che presenta queste componenti dette parassite, dovute alla forma (accoppiamento capacitivo tra spire adiacenti) e al materiale che costituiscono l'induttanza (il filo di rame ha una resistenza elettrica).

2 Descrizione del set up sperimentale

I principali componenti utilizzati sono i seguenti

- Circuito
- Digilent
- Software Analyzer

Il circuito in particolare è costituito da una basetta conduttrice, ovvero una piattaforma forata dove vengono inseriti i componenti che costituiscono il circuito. Essa è poi collegata tramite un cavo coassiale al Digilent, un apparato che funge contemporaneamente da oscilloscopio e da generatore di funzioni.

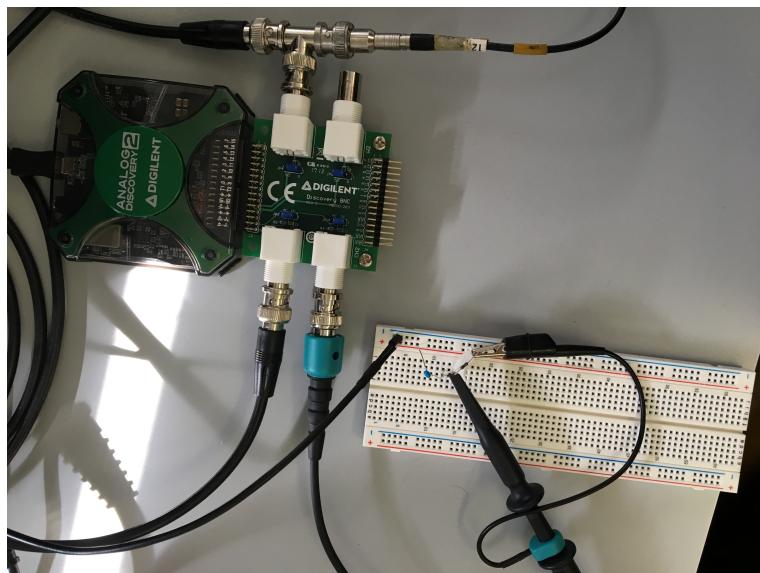


Figure 1: Digilent e basetta con montato un circuito.

Inoltre è stata utilizzata una sonda, presente in figura (1), collegata alla basetta bianca, che permette di leggere il segnale che fluisce in un qualsiasi punto del circuito.

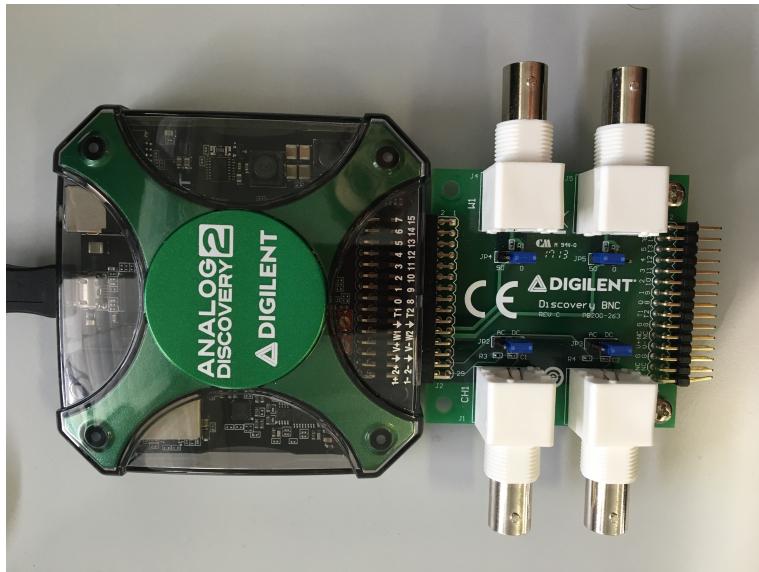


Figure 2: Zoom su Digilent, in cui sono visibili i due canali, Channel 1 (entrata/uscita) e Channel 2 (entrata/uscita).

3 Filtro Passa Alto

Il filtro passa-alto permette il passaggio delle frequenze alte ed è rappresentato dal punto di vista circuitale in figura 3.

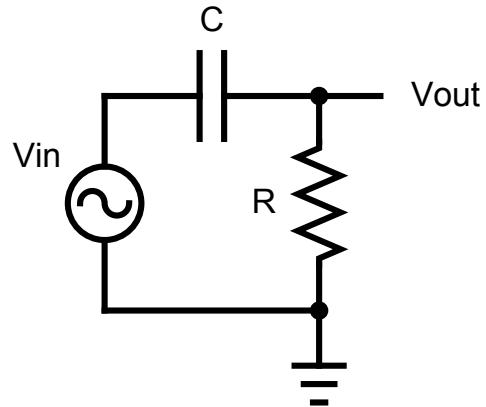


Figure 3: Filtro passa-alto: schema del circuito.

Il filtro passa-alto è caratterizzato dai seguenti parametri:

- Guadagno dato da:

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

- Sfasamento dato da:

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{1}{\omega C R} \right) \quad (3)$$

- ω_{3dB} data da:

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{RC} \quad (4)$$

3.1 Set di misure

Per prima cosa si è calcolato per il circuito montato con una resistenza $R = 1 \text{ k}\Omega$ e una capacità $C = 1 \cdot 10^5 \text{ pF}$ la frequenza di taglio f_{3dB} corrispondente. Sapendo che sussiste la relazione $f_{3dB} = \omega_{3dB}/(2\pi)$, e sostituendoci l'equazione 4 si ottiene:

$$f_{3db} = \frac{1}{2\pi RC}, \quad (5)$$

da cui si ricava, sostituendo i valori di R e C :

$$f_{3db} = 1.6 \text{ kHz}. \quad (6)$$

Inoltre è importante sottolineare che i valori di resistenza e capacità dei componenti utilizzati sono noti con un valore di incertezza relativa pari a:

$$\delta R = 0.1 \quad (7)$$

$$\delta C = 0.2 \quad (8)$$

Dopo aver calcolato la f_{3dB} si è verificato il corretto funzionamento del circuito inviando un segnale in ingresso alla precisa frequenza di taglio (figura 4) per osservare che il filtro producesse una riduzione del segnale tale che:

$$V_{in} = 0.7 \cdot V_{out}. \quad (9)$$

Si è quindi continuato lo studio della risposta del filtro a diverse frequenze, scegliendo di considerare oltre alla f_{3dB} altre due frequenze che differissero da essa di un ordine di grandezza. Le misure effettuate sono riportate in tabella 1.

misura	frequenza (Hz)
1	1600 (f_{3dB})
2	16000
3	160

Table 1: Frequenze utilizzate per effettuare le misure.

Per ciascuno dei tre valori della frequenza sono stati realizzati dei grafici (figure 4, 5, 6) che mostrano come il filtro passa alto consenta il passaggio di onde ad alta frequenza, lasciando pressoché inalterato il segnale in ingresso, mentre al contrario i segnali a bassa frequenza vengono smorzati nettamente.

Sono stati inoltre effettuati i fit dei segnali utilizzando la funzione:

$$f(t) = \sin(2\pi ft + \phi) \quad (10)$$

dove la frequenza f e il tempo t sono noti dai dati sperimentali mentre lo sfasamento ϕ viene lasciato come parametro libero.

Le curve di fit si dimostrano perfettamente coerenti con quelle sperimentali.

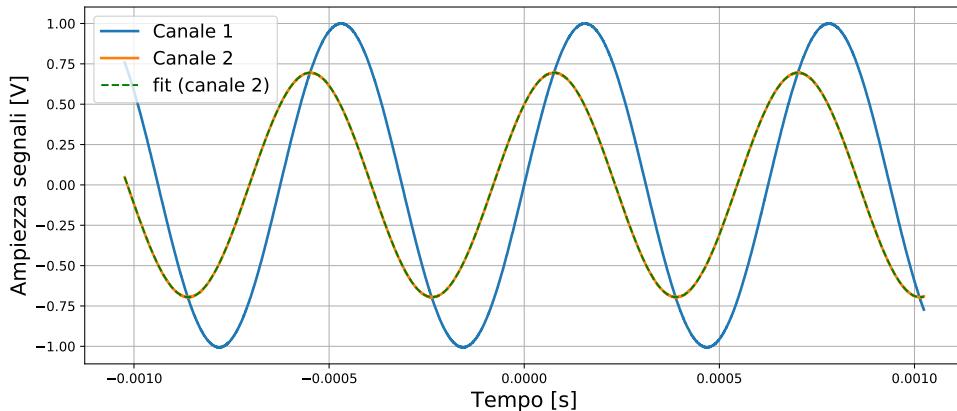


Figure 4: Grafico dell'onda in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) con fit, a frequenza f_{3dB} (1.6 kHz).

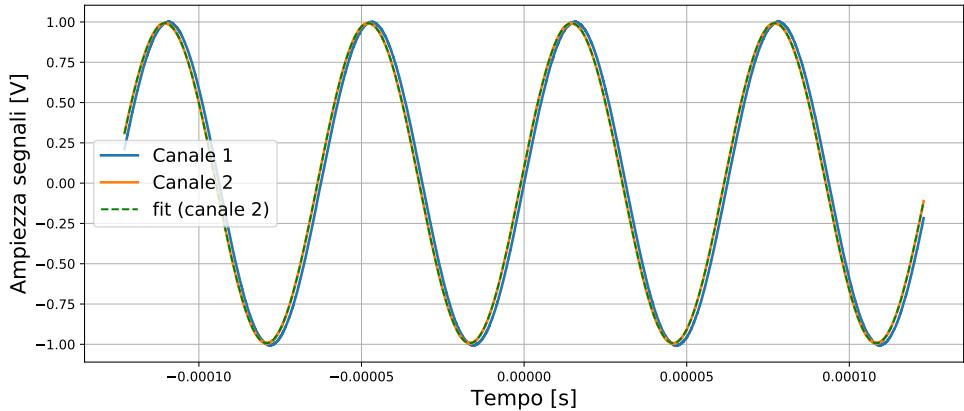


Figure 5: Grafico dell'onda in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) con fit, a frequenza 16 kHz.

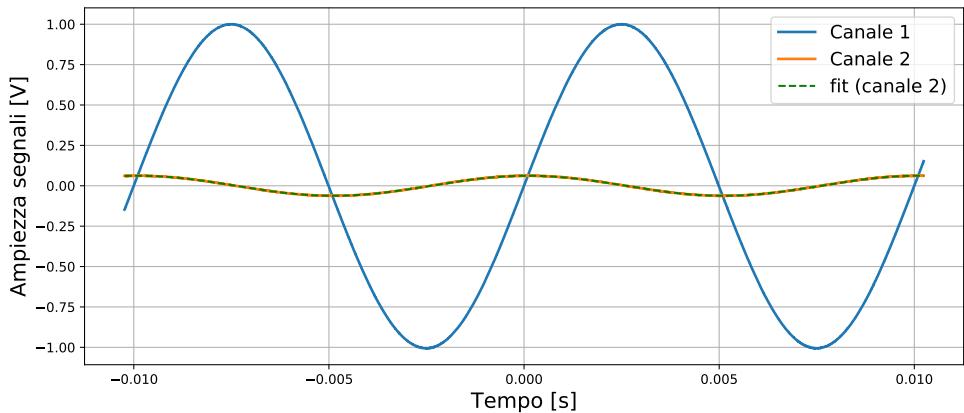


Figure 6: Grafico dell'onda in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) con fit, a frequenza 160 Hz.

Per il filtro passa alto è stata fatta anche un'analisi della risposta del filtro in termini di guadagno e sfasamento del segnale al variare della frequenza dell'onda in ingresso. Per fare ciò è stato effettuato uno scan in frequenze, partendo dal valore di 1 Hz fino ad arrivare a 5 MHz acquisendo dati per cento valori. I dati sono stati confrontati con le funzioni teoriche fornite dalle equazioni 2 e 3, come mostra la figura 7. In seguito sono stati effettuati i fit degli stessi dati (figura 8) utilizzando come funzioni di fit le stesse equazioni 2 e 3 lasciando il valore della capacità inserita nel circuito come parametro libero.

Guadagno e sfasamento in funzione della frequenza

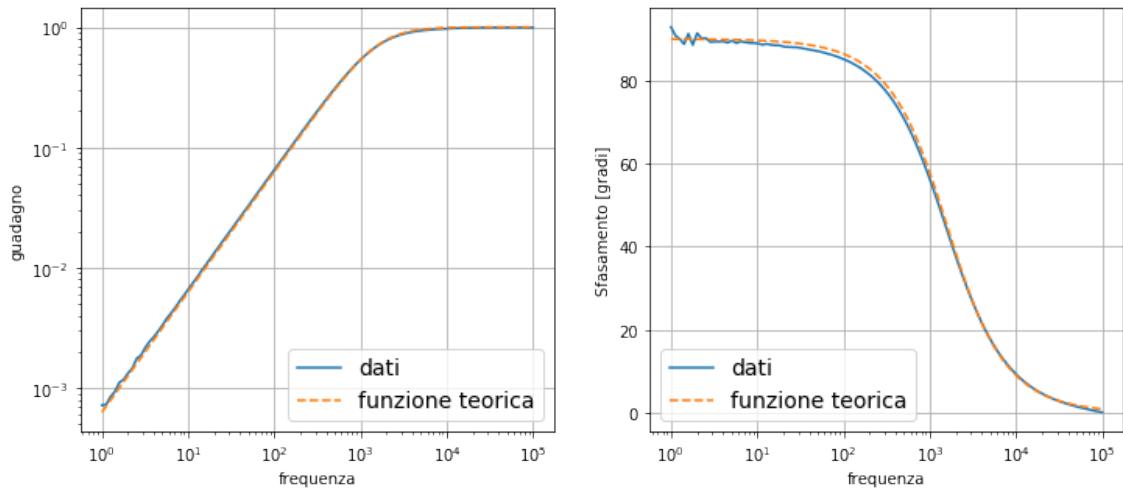


Figure 7: Grafico del guadagno e dello sfasamento in funzione della frequenza per il filtro Passa Alto.

Guadagno e sfasamento in funzione della frequenza (filtro RC passa alto)

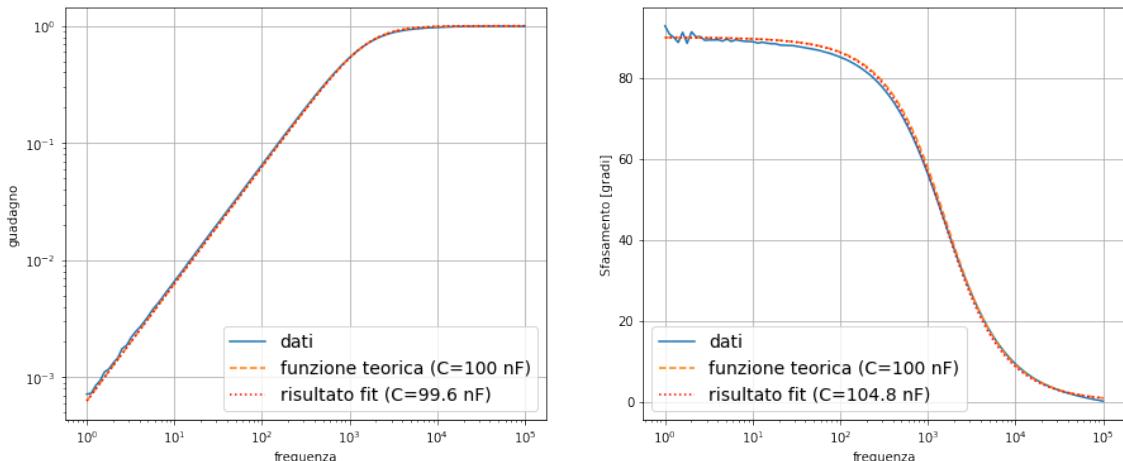


Figure 8: Fit di guadagno e sfasamento per il filtro Passa Alto.

Si noti che i valori calcolati per le capacità di 99.6 nF e 104.8 nF non differiscono di molto dal valore noto di 100.0 nF, infatti considerando le tolleranze associate ai componenti del circuito (equazioni 7 e 8), si può affermare che i risultati ottenuti sono accettabili.

3.2 Derivatore

In condizioni di RC piccolo, cioè, nel dominio della frequenza, ben al di sotto del limite a 3dB, il filtro passa alto funziona da derivatore:

$$V(t) = RC \frac{dV_{in}(t)}{dt}, \quad (11)$$

cioè l'output è proporzionale al rate di cambiamento dell'input. Infatti definendo la tensione in ingresso

$$V_{in} = \sin(\omega t) \quad (12)$$

la tensione ai capi del condensatore è

$$\Delta V = V_{in} - V_{out} \quad (13)$$

Data la legge di Ohm

$$I = C \frac{d(V_{in} - V)}{dt} = \frac{V}{R} \quad (14)$$

se R e C sono sufficientemente piccoli possiamo dire che:

$$\frac{dV}{dt} \ll \frac{dV_i}{dt} \quad (15)$$

Approssimando in questo modo l'equazione 14 otteniamo:

$$C \frac{dV_i}{dt} \approx \frac{V}{R} \quad (16)$$

e quindi

$$V(t) = RC \frac{dV_i(t)}{dt} \quad (17)$$

da cui sostituendo l'equazione 12 si ottiene:

$$V_{out} = RC\omega \cos(\omega t) \quad (18)$$

che mostra come l'output sia proporzionale al rate di cambiamento dell'input.

In particolare è stato verificato questo comportamento inviando una volta un'onda triangolare, una volta un'onda quadrata.

Inviando al circuito onde triangolari con le frequenze riportate in tabella 1 si osserva che al diminuire della frequenza il comportamento del filtro come derivatore si manifesta come previsto. Infatti si può osservare in modo esplicito che il fit dell'onda in uscita per la frequenza più bassa (figure 11 e 12) rispecchi un'onda quadrata, che è effettivamente la derivata di un segnale triangolare.

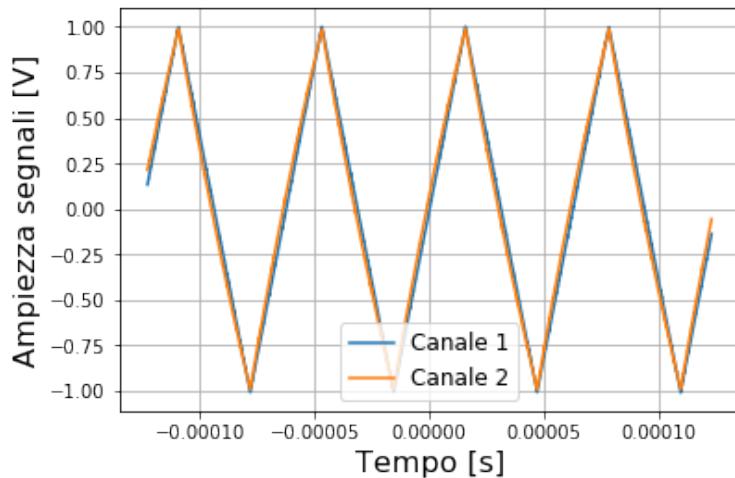


Figure 9: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza 16 kHz.

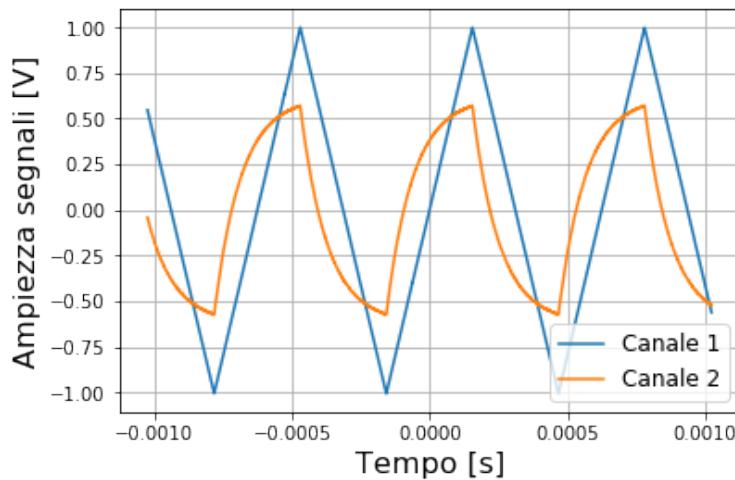


Figure 10: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza 3 dB (1.6 kHz).

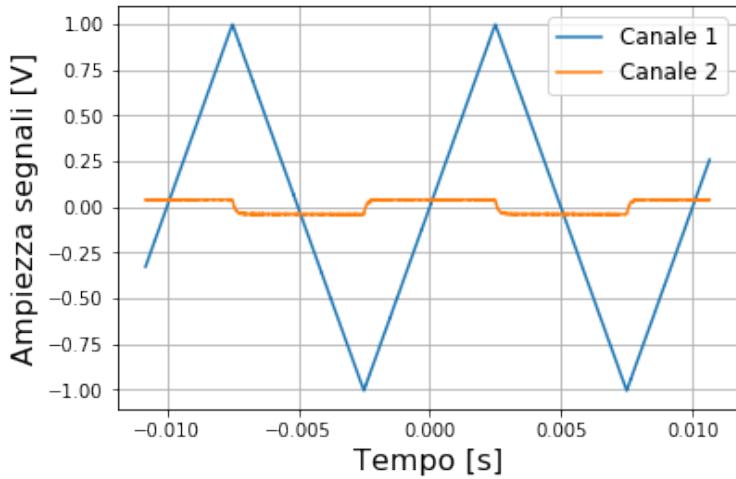


Figure 11: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza 160 Hz.

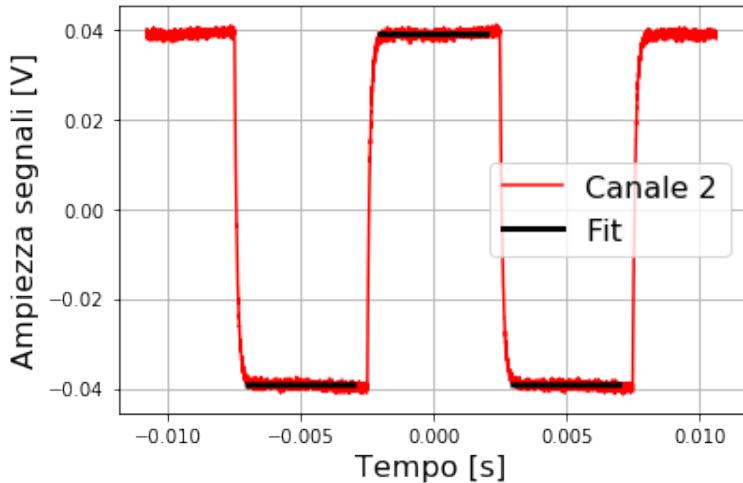


Figure 12: Fit del segnale in uscita con frequenza di 160 Hz.

Analogamente si effettua un'analisi inviando come input un'onda quadrata.

Anche per l'onda quadrata si nota che al diminuire della frequenza il comportamento del filtro passa alto come derivatore si manifesta come previsto. Infatti per alte frequenze l'output è assimilabile all'input, mentre per basse frequenze l'output assume un andamento prevedibile dalla derivazione dell'onda in input. Il punto di non derivabilità viene tradotto in un picco esponenziale. È stato realizzato il fit del decadimento esponenziale per l'onda in uscita a frequenza 160 Hz (figura 15), con uno zoom sul singolo picco (figura 16).

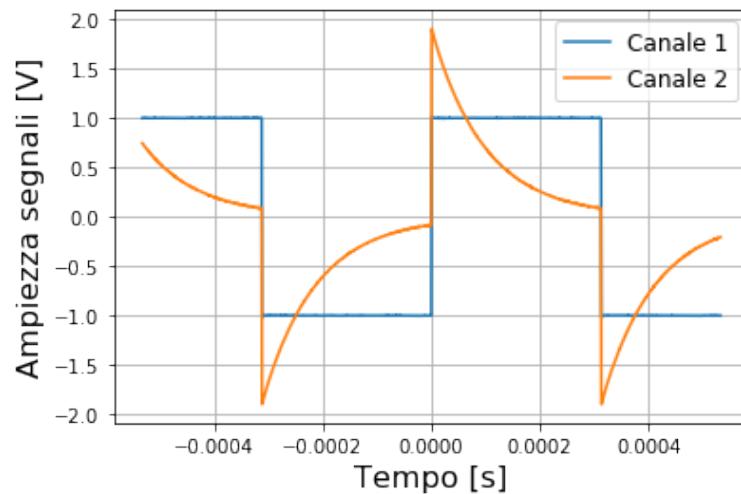


Figure 13: Grafico dell'onda quadrata in entrata (canale 1) e in uscita (canale 2) con frequenza 3 dB.

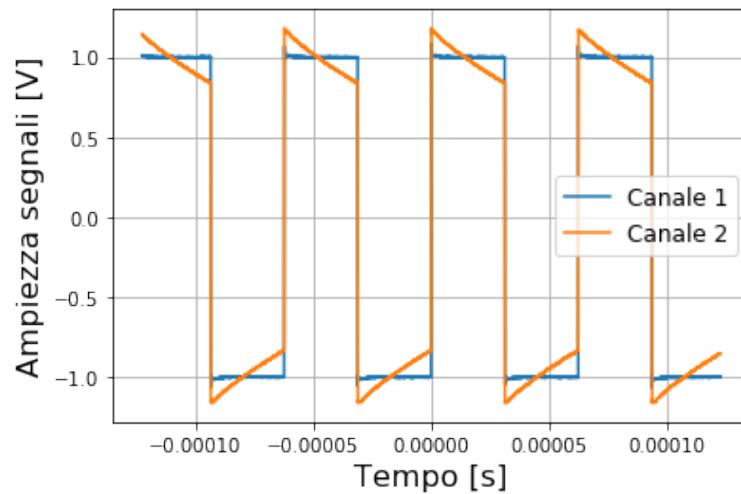


Figure 14: Grafico dell'onda quadrata in entrata (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza 16 kHz.

Si ottiene un risultato per il tempo di decadimento coerente con quello teorico. Avendo utilizzato una resistenza da $1 \text{ k}\Omega$ e una capacità da 10^5 pF il valore teorico risulta essere $\tau=1\cdot10^{-4} \text{ s}$, valore analogo a quello ricavato dal fit e riportato nella legenda della figura 15.

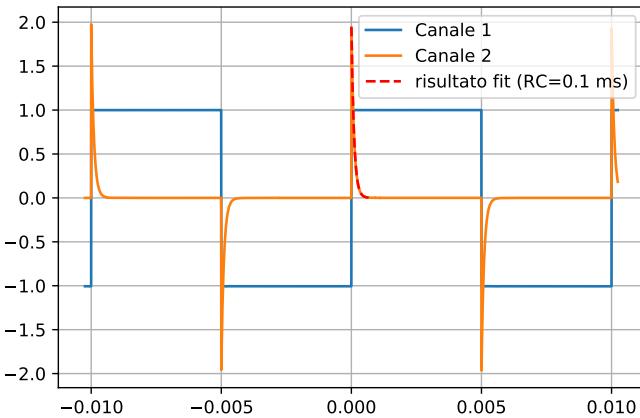


Figure 15: Grafico dell'onda quadrata in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza 160 Hz.

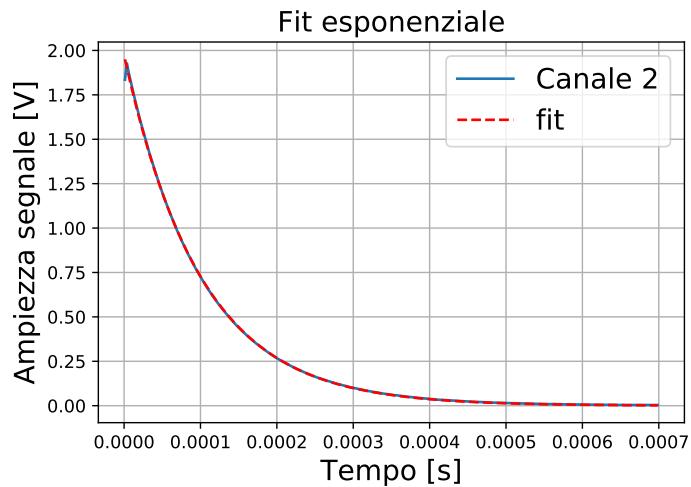


Figure 16: Fit del decadimento esponenziale di un singolo picco.

4 Filtro Passa Bassa

Il filtro passa basso permette il passaggio delle frequenze basse ed è rappresentato dal punto di vista circuitale in figura 17.

Il filtro passa-basso è caratterizzato dai seguenti parametri:

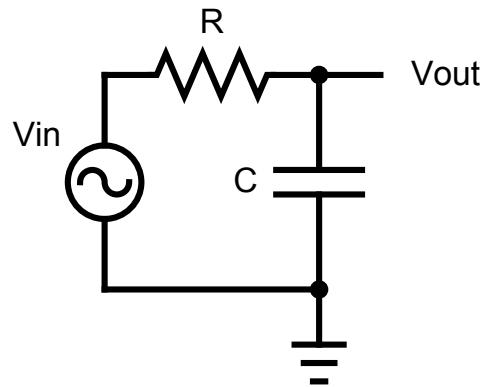


Figure 17: Filtro passa-basso: schema del circuito.

- Guadagno dato da:

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (19)$$

- Sfasamento dato da:

$$\phi = \text{atan}(-\omega C R) \quad (20)$$

- ω_{3dB} data da:

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{RC} \quad (21)$$

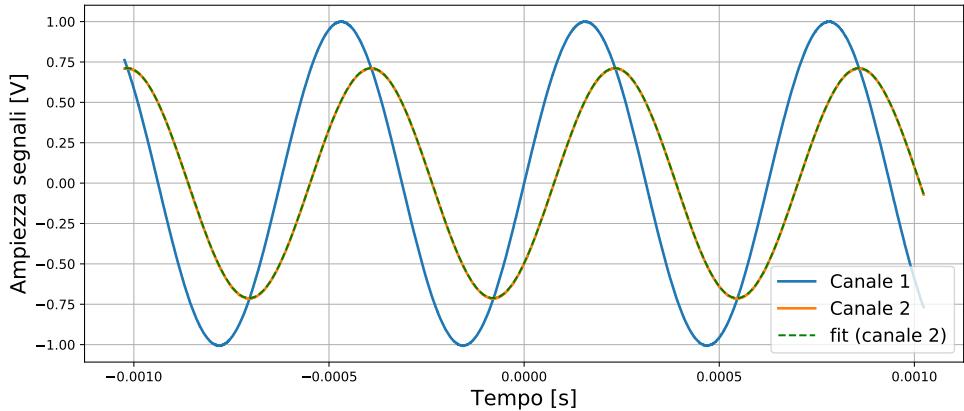


Figure 18: Grafico dell'onda in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) con fit, a frequenza f_{3dB} (1.6 kHz).

4.1 Set di misure

Non avendo modificato la capacità e la resistenza del circuito, la frequenza f_{3dB} per il circuito passa basso risulta essere la stessa di quella già calcolata per il circuito passa alto, ovvero di 1.6 kHz.

Si è studiata la risposta del filtro a diverse frequenze, scegliendo di considerare oltre alla f_{3dB} altre due frequenze che differissero da essa di un ordine di grandezza. Le misure effettuate sono riportate in tabella 2.

misura	frequenza (Hz)
1	160
2	1600 (f_{3dB})
3	16000

Table 2: Frequenze utilizzate per effettuare le misure.

Per ciascuno dei tre valori della frequenza sono stati realizzati dei grafici (figure 18, 19, 20) che mostrano come il filtro passa basso consente il passaggio di onde a bassa frequenza, lasciando pressoché inalterato il segnale in ingresso, mentre al contrario i segnali ad alta frequenza vengono smorzati nettamente. Sono stati inoltre effettuati i fit dei segnali utilizzando la funzione 10.

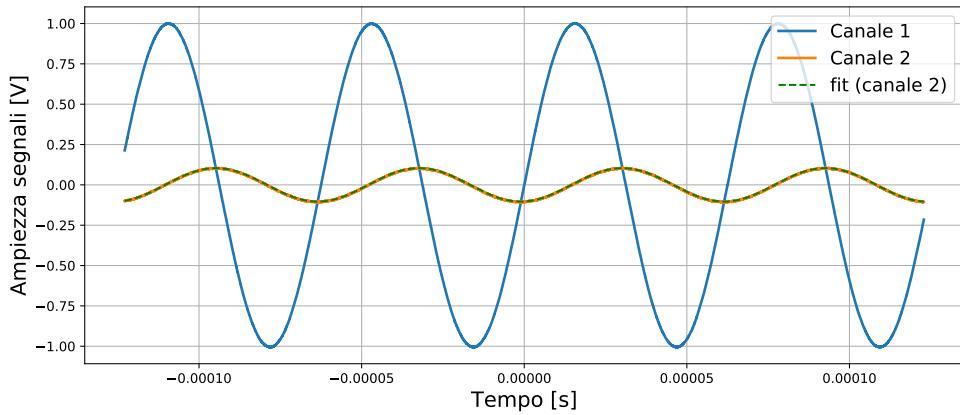


Figure 19: Grafico dell'onda in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) con fit, a frequenza $f=16$ kHz.

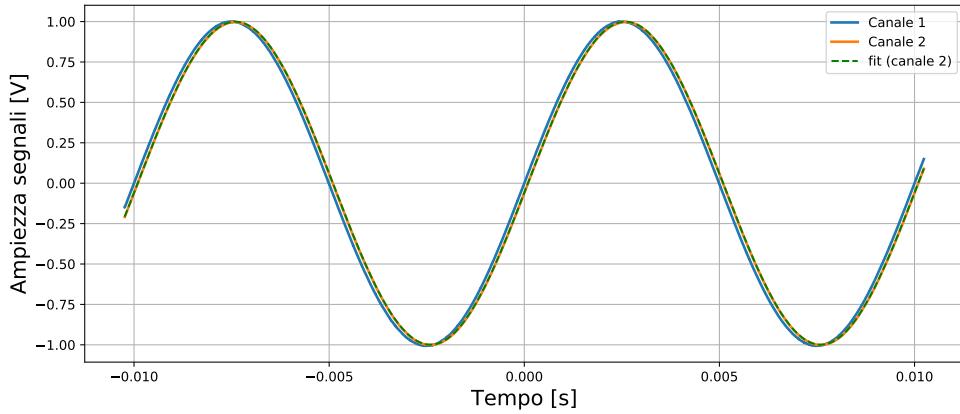


Figure 20: Grafico dell'onda in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) con fit, a frequenza $f=160$ Hz.

Come per il filtro passa alto, le curve di fit si dimostrano perfettamente coerenti con quelle sperimentali.

Per il filtro passa basso è stata fatta anche un'analisi della risposta del filtro in termini di guadagno e sfasamento del segnale al variare della frequenza dell'onda in ingresso. Per fare ciò è stato effettuato uno scan in frequenze, partendo dal valore i 1 Hz fino ad arrivare a 5 MHz acquisendo dati per cento valori. I dati sono stati confrontati con le funzioni teoriche fornite dalle equazioni 19 e 20 come mostra la figura 21, in seguito sono stati effettuati i fit degli stessi dati (figura 22) utilizzando come funzioni di fit le stesse equazioni (19 e 20) lasciando il valore della capacità inserita nel circuito come parametro libero.

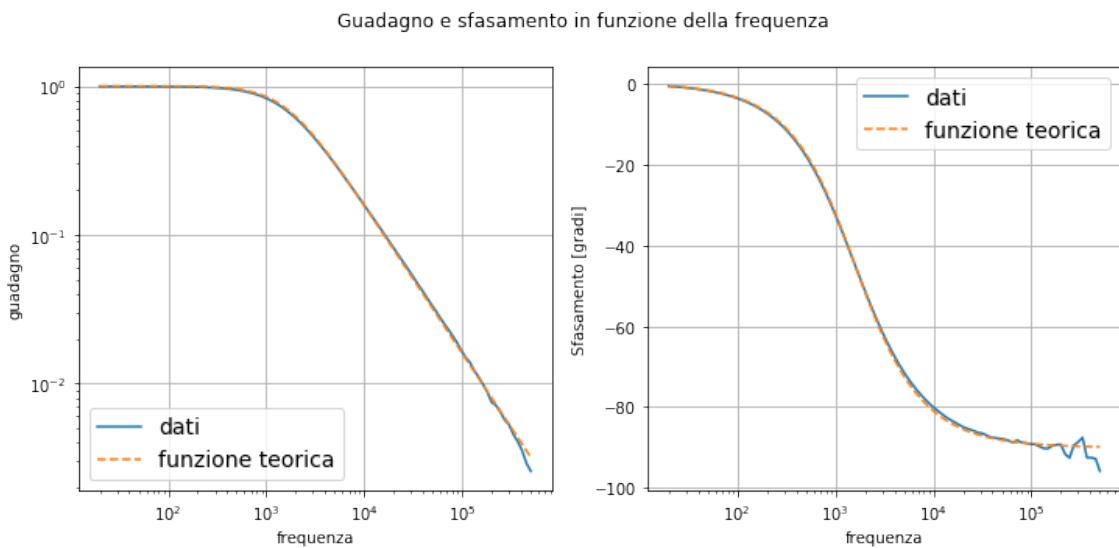


Figure 21: Grafico del guadagno e dello sfasamento in funzione della frequenza per il filtro Passa Basso.

Si nota come i valori di 104.0 nF e 99.3 nF ricavati dalle curve di guadagno e sfasamento in funzione della frequenza, siano compatibili con il valore vero di 100.0 nF, infatti considerando le tolleranze associate ai componenti del circuito (equazioni 7 e 8), si può affermare che i risultati ottenuti sono accettabili.

Guadagno e sfasamento in funzione della frequenza (filtro RC passa alto)

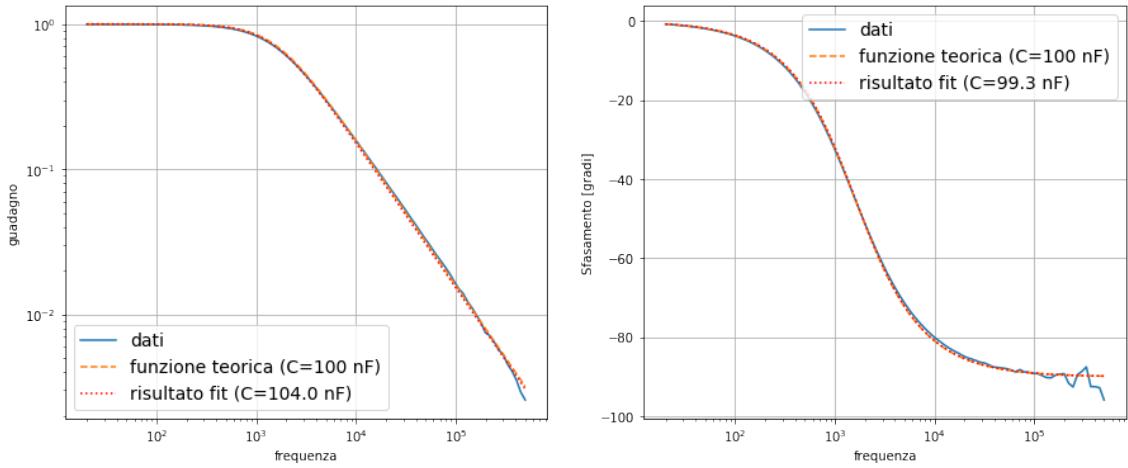


Figure 22: Fit di guadagno e sfasamento per il filtro Passa Basso.

4.2 Integratore

In condizioni di tensione in uscita molto minore della tensione in ingresso, cioè, nel dominio della frequenza, ben al di sopra del limite a 3dB, il filtro passa-basso funziona da integratore. Facendo riferimento all'equazione 14, se il prodotto R C è mantenuto sufficientemente elevato possiamo dire che:

$$\frac{dV_i}{dt} \ll \frac{dV}{dt} \quad (22)$$

Approssimando l'equazione 14 otteniamo:

$$C \frac{dV}{dt} \approx \frac{V_i}{R} \quad (23)$$

e quindi

$$V(t) = \frac{1}{RC} \int V_{in}(t) dt + cost \quad (24)$$

cioè la tensione in uscita è l'integrale di quella in entrata moltiplicata per $\frac{1}{RC}$. In particolare è stato verificato questo comportamento avendo come input un'onda triangolare.

In particolare è stato verificato questo comportamento inviando una volta un'onda triangolare, una volta un'onda quadrata.

Inviando al circuito onde triangolari con le frequenze riportate in tabella 2 si osserva che all'aumentare della frequenza il comportamento del filtro come integratore si manifesta come previsto. Infatti si può osservare in modo esplicito che il fit dell'onda in uscita per la frequenza più alta (figure 25 e 26) rispecchi un'onda quadrata, che è effettivamente la derivata di un segnale triangolare.

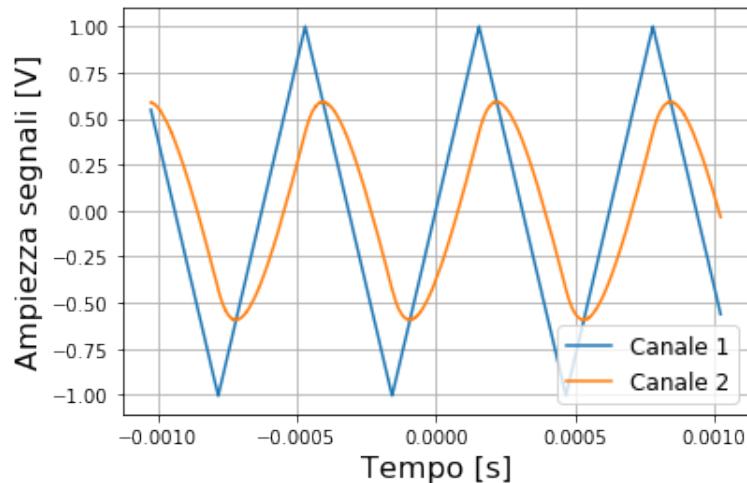


Figure 23: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza $f=3$ dB.

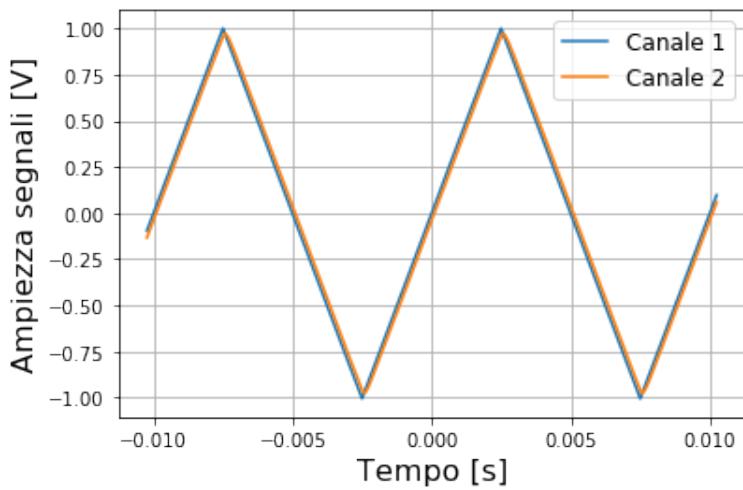


Figure 24: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza $f=160$ Hz.

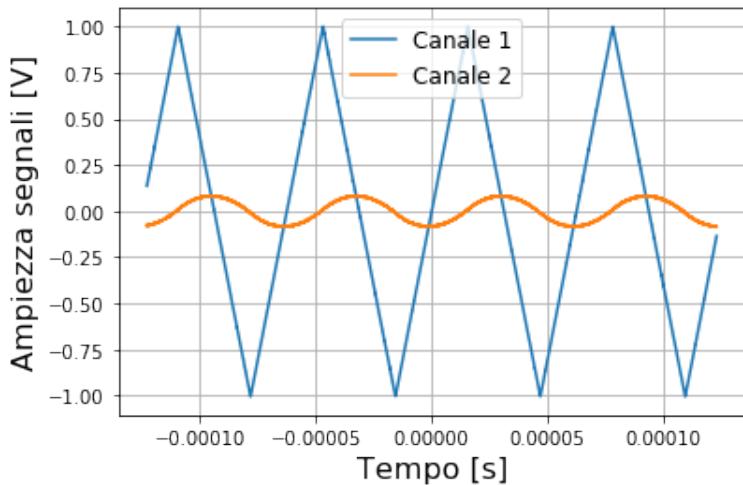


Figure 25: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza $f=16$ kHz.

Analogamente si effettua un'analisi inviando come input un'onda quadrata.

Anche per l'onda quadrata si nota che all'aumentare della frequenza il comportamento del filtro passa basso come integratore si manifesta come previsto. Infatti per basse frequenze l'output non differisce dall'input, mentre per alte frequenze l'output assume una forma assimilabile all'integrale del segnale in input. È stato realizzato il fit dell'onda in uscita a frequenza 16 kHz (figura 30).

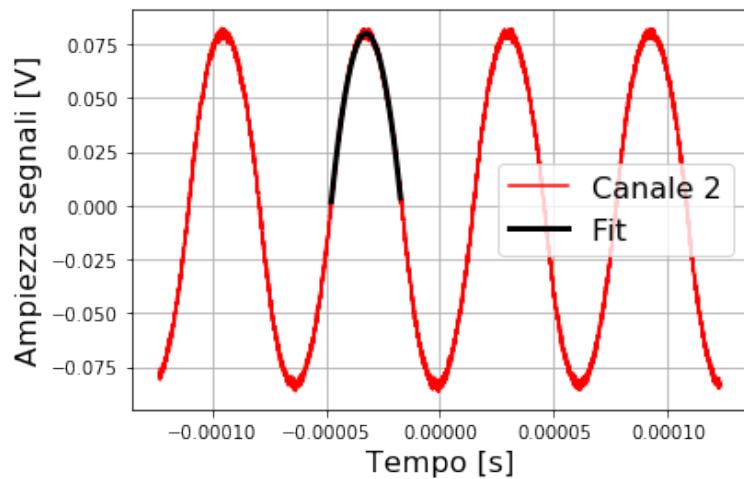


Figure 26: Fit dell'integratore di onda triangolare.

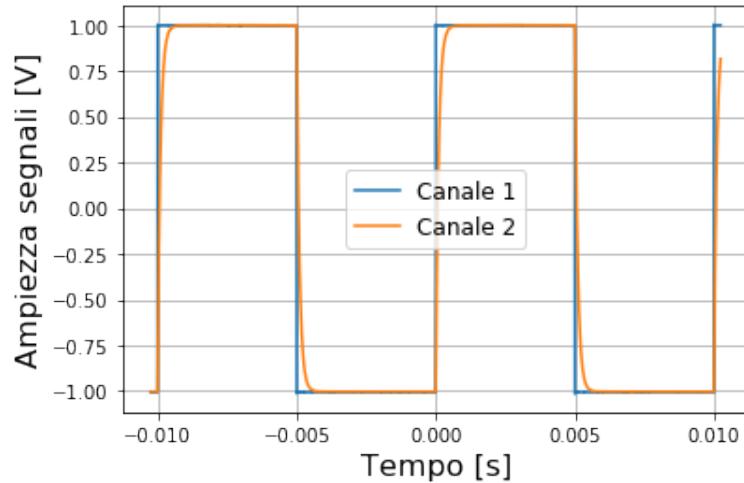


Figure 27: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza $f=160$ Hz.

Dal fit è stato ricavato il parametro $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = 10439 \frac{1}{s}$ che rappresenta l'inverso del tempo di decadimento. Avendo utilizzato una resistenza da $1 k\Omega$ e una capacità da $10^5 pF$ notiamo che il prodotto risultante dal fit è coerente con quello teorico.

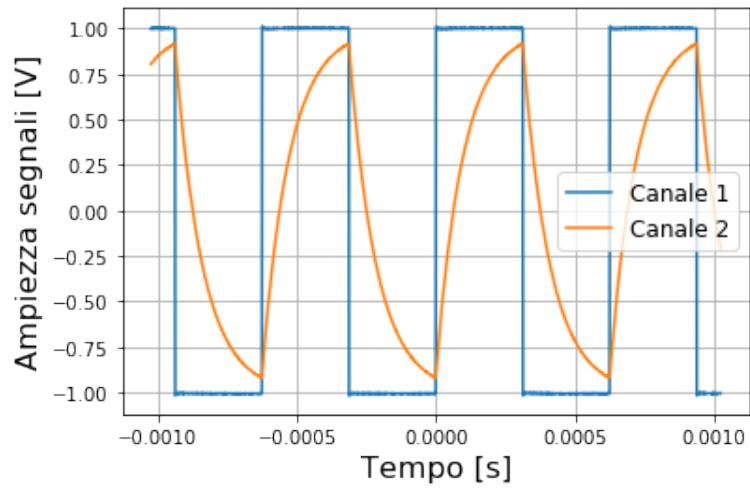


Figure 28: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza $f=3$ dB (1.6 kHz).

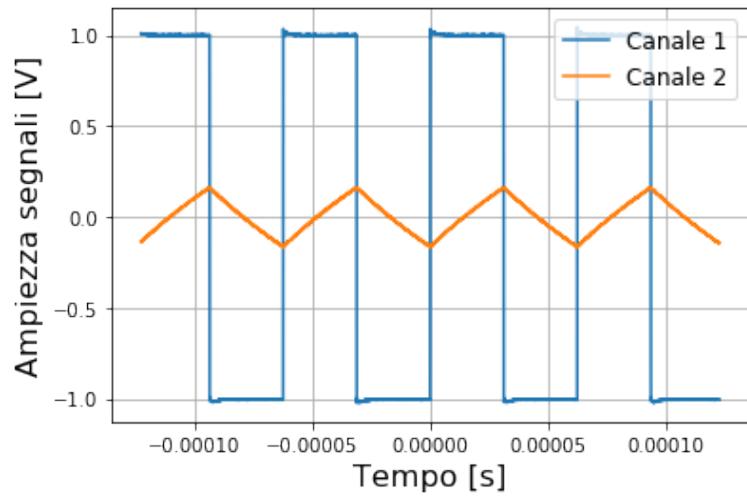


Figure 29: Grafico del segnale in ingresso (canale 1) e in uscita (canale 2) a frequenza $f=16$ Hz.

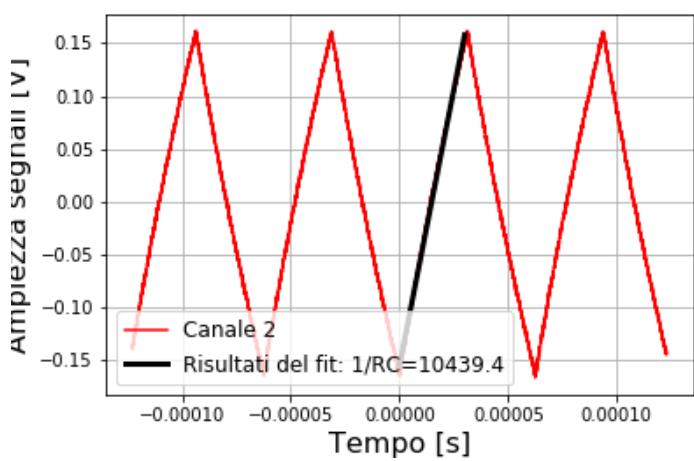


Figure 30: Fit del segnale in uscita.

5 Introduzione Filtri Passa Banda

Un filtro passa banda è un circuito RLC che permette il passaggio di una determinata fascia di frequenze, smorzando invece segnali di frequenze al di fuori di questa banda. Distinguiamo questi filtri in base alle rispettive disposizioni in cui vengono poste l'induttanza L e la capacità C all'interno del circuito.

Questi circuiti sono caratterizzati dal fatto di essere risonanti: esiste infatti una determinata frequenza, detta frequenza di risonanza f_0 , in corrispondenza della quale il guadagno è massimo.

Come prima cosa abbiamo calcolato due tipi di frequenze:

- **frequenza di risonanza** f_0 : frequenza a cui l'impedenza reattiva si annulla, cioè la reattanza induttiva e la reattanza capacitiva si egualano in modulo.

Per entrambi i filtri si ha:

$$Z_L = j\omega L \quad e \quad Z_C = -\frac{j}{\omega C} \quad (25)$$

Z_L e Z_C = impedenze relative rispettivamente all'induttanza e alla capacità

ω =pulsazione

j =unità immaginaria

Uguagliando i moduli otteniamo ω_0 , e quindi f_0 :

$$j\omega_0 L = \frac{j}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (26)$$

- **frequenze di taglio** (f_{3dB}): in questo caso non abbiamo solo una frequenza di taglio, ma ne troviamo due. Esse delimitano la banda di frequenze della quale il filtro permette il passaggio.

Successivamente è stato calcolato il **fattore di qualità Q**, ovvero una grandezza adimensionale che permette di capire quanto il circuito si avvicina ad un circuito ideale (ovvero senza dissipazione di energia). Più Q tende ad essere grande più il nostro circuito si avvicina al circuito ideale. Esso misura la "nitidezza" della risonanza, ovvero la larghezza della banda relativa al picco di risonanza e viene definito come:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{3dB}} \quad (27)$$

f_0 =frequenza di risonanza

Δf_{3dB} =differenza delle frequenze di taglio

Dopo aver montato i circuiti, per ognuno di essi, utilizzando il programma "Wave-Forms" sono state inviate delle onde sinusoidali in input ed è stato visualizzato graficamente come variano **guadagno** e **sfasamento** in funzione della frequenza. In seguito è stato ricavato teoricamente guadagno e sfasamento a partire dall'impedenza in due diversi casi, trascurando o tenendo conto della resistenza e della capacità parassita presente all'interno dell'induttanza L. Sapendo che l'impedenza totale, che in generale è un numero complesso, è data da:

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (28)$$

Z_1 = impedenza di un qualsiasi circuito che precede il V_{out}

Z_2 = impedenza di un qualsiasi circuito che segue il V_{out}

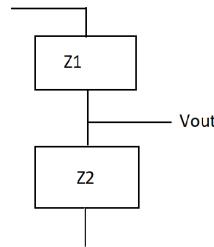


Figure 31: impedenza Z_1 e Z_2

Possiamo calcolare le equazioni che esplicitano le relazioni di guadagno e sfasamento in funzione delle impedenze.

Relazione tra guadagno G e impedenza:

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (29)$$

Relazione tra sfasamento ϕ e impedenza:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \right) \quad (30)$$

Sono state utilizzate le equazioni teoriche (equazioni 29 e 30) per fissare i dati sperimentali.

Mantenendo costante la capacità ($C=100$ nF), si sono eseguite diverse misure:

1. trascurando capacità e resistenza parassite: si sono utilizzate due tipi di resistenze;

da 100Ω e da $1 k\Omega$, e due induttanze, entrambe da $L=4.7 \text{ mH}$, ma con componenti interne differenti che distingueremo con L_1 e L_2 .

2. considerando capacità e resistenza parassite, utilizzando le stesse resistenze e induttanze descritte nel punto precedente (L_1 e L_2), ma considerando quindi i valori delle resistenze parassite di 2Ω e 12Ω .

Per ciascuna configurazione del filtro sono state effettuate quattro differenti misure, i cui parametri di resistenza sono mostrati in tabella 3.

Filtro	Resistenza	Resistenza parassita
1°	100Ω	12Ω
2°	$1 k\Omega$	12Ω
3°	100Ω	2Ω
4°	$1 k\Omega$	2Ω

Table 3: Tabella con le misure svolte nel caso in cui si considerano le componenti parassite.

6 Filtro Passa Banda in Serie

Il circuito passa banda in serie presenta tutte le sue componenti (R , L e C) in serie tra loro, come mostrato nella figura 32.

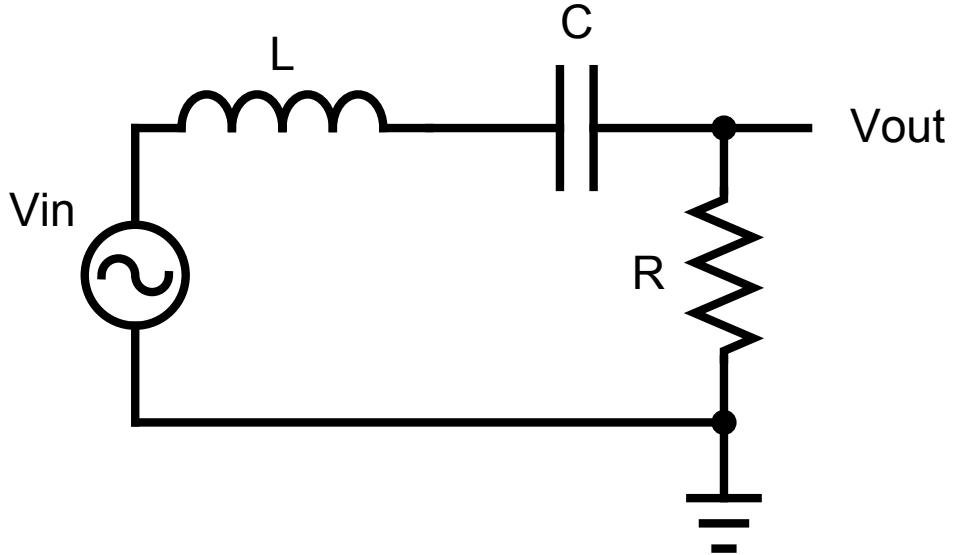


Figure 32: Filtro passa banda in serie: schema del circuito senza resistenza e capacità parassite.

Nel primo set di misure per il filtro passa banda in serie vengono trascurate resistenza e capacità parassite.

Si è inizialmente calcolata l'impedenza totale del circuito come:

$$Z = Z_R + Z_{LC} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}, \quad (31)$$

da cui sostituendo i valori dell'impedenza nell'equazione (29) otteniamo l'espressione per il guadagno:

$$G = \frac{Z_R}{Z_R + Z_{LC}} = \frac{R}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}. \quad (32)$$

Sostituendo invece i valori dell'impedenza nell'equazione (30) otteniamo l'espressione per lo sfasamento:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (33)$$

Utilizzando le equazioni 1 e 32 si può trovare la $\Delta\omega$ come la differenza delle soluzioni dell'equazione:

$$\frac{R}{|R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (34)$$

nota la $\Delta\omega$ si calcola la $\Delta f_{3\text{dB}}$:

$$\Delta f_{3\text{dB}} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \quad (35)$$

Si è calcolato inoltre il fattore di qualità dalle equazioni 27, 26 e 35:

$$Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}. \quad (36)$$

Nel secondo set di misure per il filtro passa banda in serie vengono considerate anche resistenza e capacità parassite che verranno indicate rispettivamente con R_p e C_p . Lo schema del circuito che comprende le componenti parassite differisce di poco da quello riportato nella figura (32) e viene mostrato in figura (33).

Per questo circuito sono state calcolate nuovamente le equazioni del guadagno e dello sfasamento. Per trovare l'impedenza totale del circuito calcoliamo prima Z_l , cioè l'impedenza che caratterizza la parte del circuito con componenti L , R_p e C_p :

$$Z_l = \frac{1}{\frac{1}{Z_L + Z_{R_p}} + \frac{1}{Z_{C_p}}} \quad (37)$$

Quindi l'impedenza totale è:

$$Z = Z_l + Z_R + Z_C = \frac{j\omega L + R_p}{1 - LCp\omega^2 + jCpR_p\omega} - \frac{j}{\omega C} + R \quad (38)$$

e dunque il guadagno sfruttando l'equazione 29 risulta:

$$G = \frac{Z_R}{Z} = \frac{R}{\frac{j\omega L + R_p}{1 - LCp\omega^2 + jCpR_p\omega} - \frac{j}{\omega C} + R}. \quad (39)$$

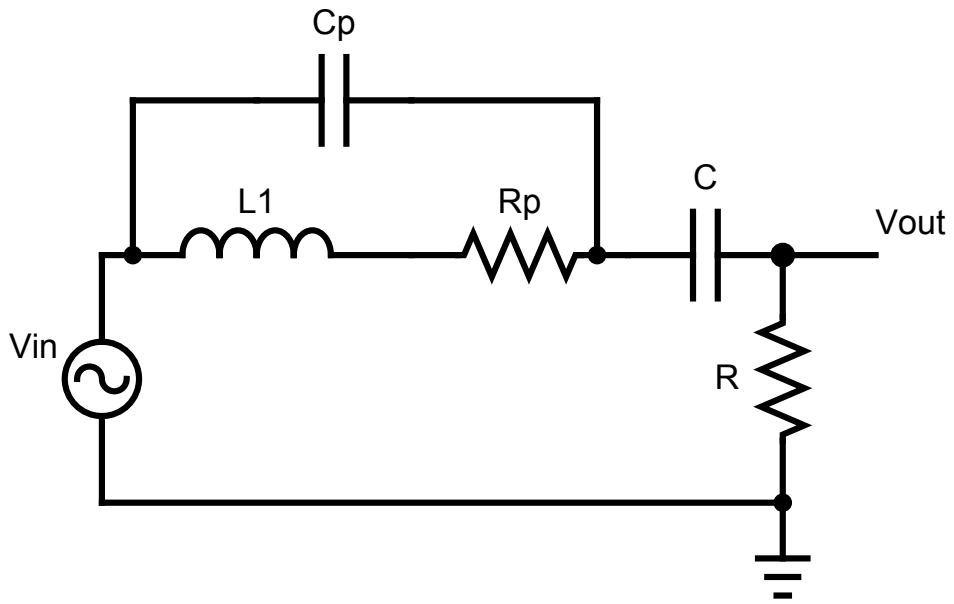


Figure 33: Filtro passa banda in serie: schema del circuito considerando resistenza e capacità parassite.

Infine chiamando γ e β i seguenti fattori:

$$\beta = \omega(L - CpRp^2) - L^2Cp\omega^3 \quad \gamma = (1 - LCp\omega^2)^2 + Rp^2Cp^2\omega^2, \quad (40)$$

si ottiene l'espressione dello sfasamento:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\beta - \frac{\gamma}{\omega C}}{\gamma R + Rp} \right). \quad (41)$$

Trascurando le componenti parassite sono state effettuate le misure descritte in tabella 3, acquisendo per ogni misura i grafici relativi al guadagno e allo sfasamento in funzione della frequenza, e fittandoli rispettivamente con le equazioni 32 e 33. Si riportano i grafici nelle figure 34, 35, 36 e 37.

Dai fit si è ricavato il valore della capacità inserita nel circuito.

I risultati riportati in tabella 4 sono coerenti con il dato noto della capacità di 100 nF.

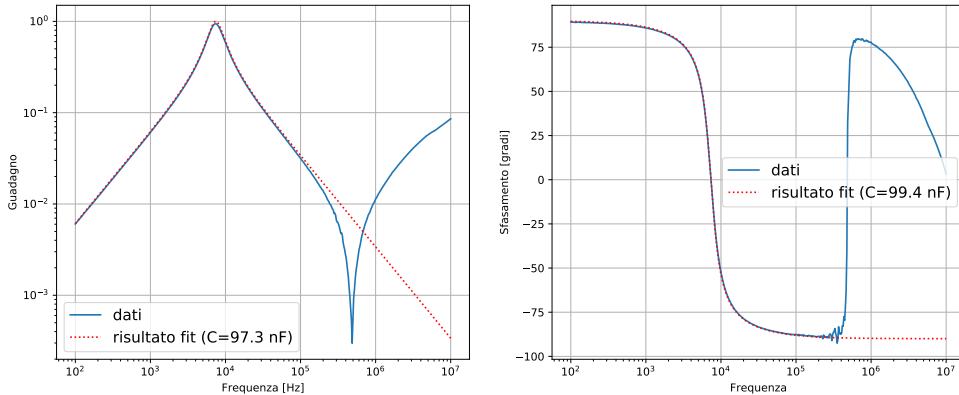


Figure 34: Resistenza 100Ω e induttanza L_1 .

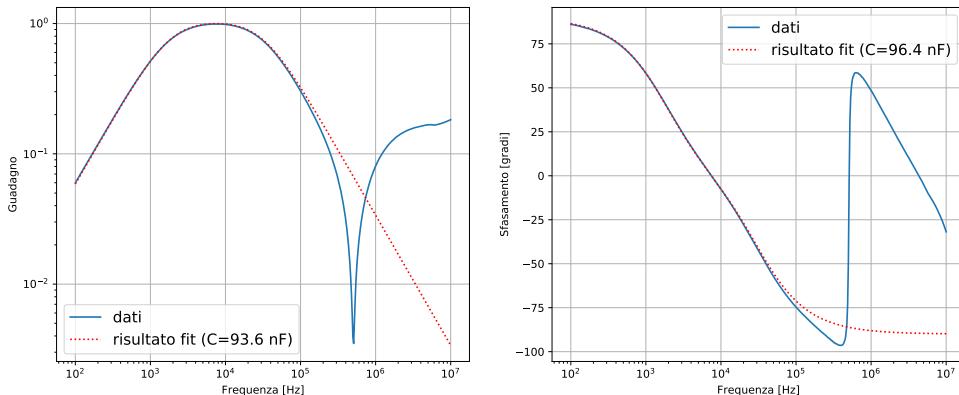


Figure 35: Resistenza $1 k\Omega$ e induttanza L_1 .

Figura	Capacità [nF] da G	Capacità [nF] da Φ
34	97.3	99.4
35	93.6	96.4
36	90.0	93.1
37	92.3	95.1

Table 4: Valori della capacità ricavati dai fit.

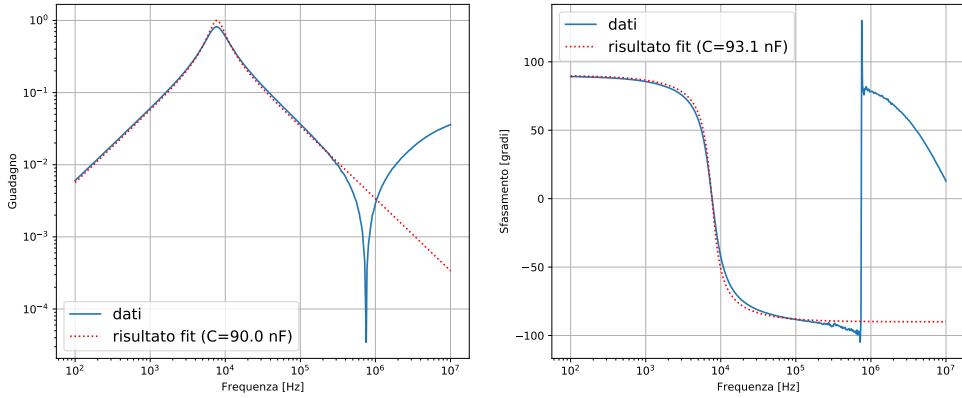


Figure 36: Resistenza 100Ω e induttanza L_2 .

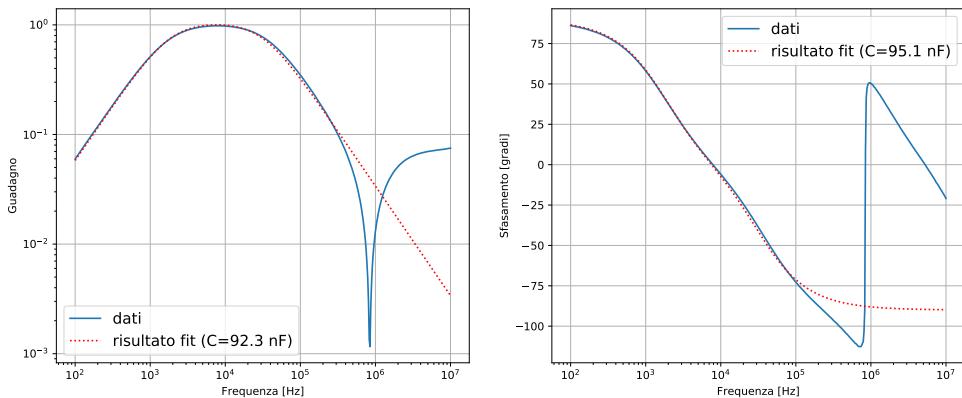


Figure 37: Resistenza $1 k\Omega$ e induttanza L_2 .

Considerando poi le componenti parassite sono state effettuate le stesse misure, descritte in tabella 3, acquisendo per ogni misura i grafici relativi al guadagno e allo sfasamento in funzione della frequenza, e fittandoli rispettivamente con le equazioni 39 e 41. Si riportano i grafici nelle figure 38, 39, 40 e 41.

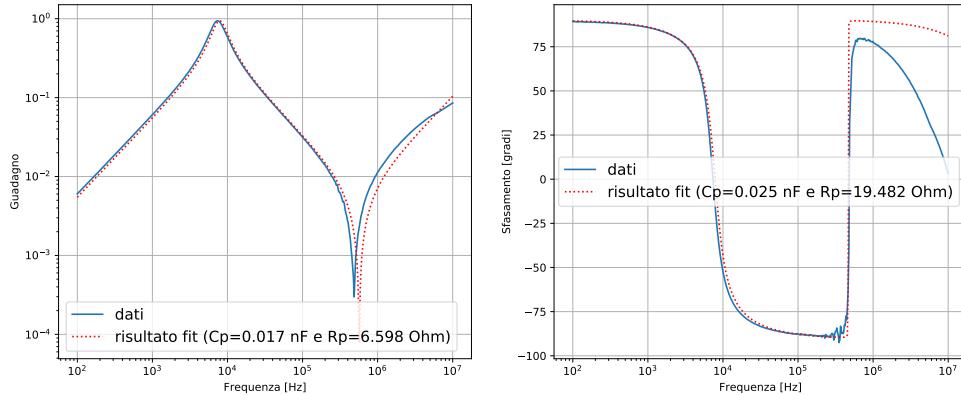


Figure 38: Resistenza 100Ω e induttanza L_1 .

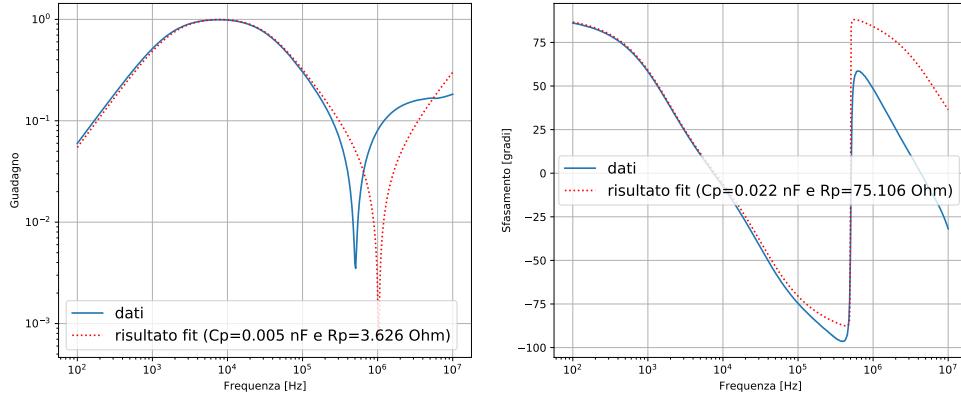


Figure 39: Resistenza $1 k\Omega$ e induttanza L_1 .

Dalle funzioni di fit sono stati ricavati i valori delle resistenze e delle capacità parassite per le due induttanze. Si riportano in tabella 5 i risultati. Si ricorda inoltre che i primi due filtri sono stati realizzati utilizzando l'induttanza con resistenza parassita piccola, mentre gli ultimi due utilizzando l'induttanza avente resistenza parassita grande.

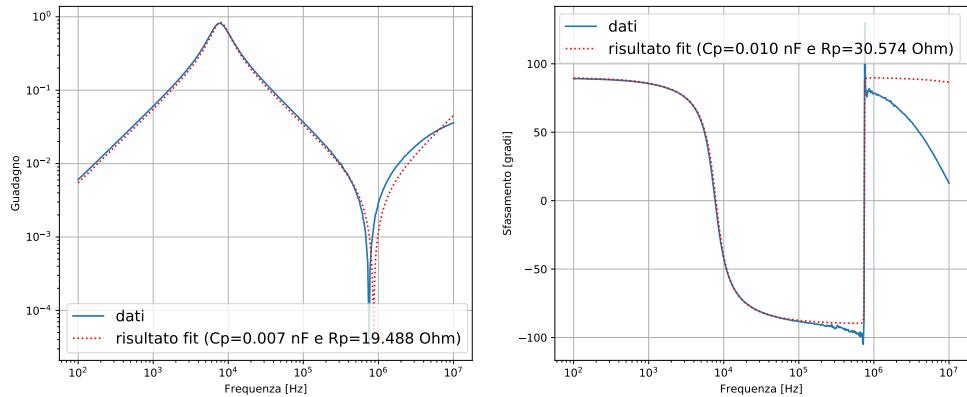


Figure 40: Resistenza 100Ω e induttanza L_2 .

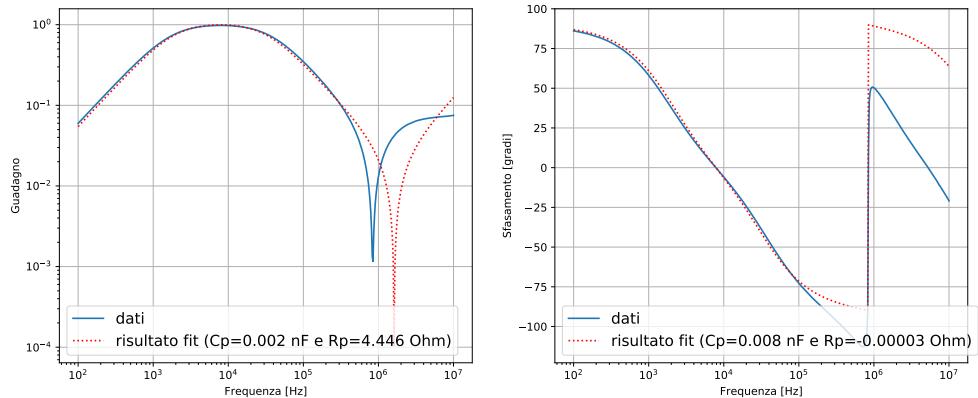


Figure 41: Resistenza $1 k\Omega$ e induttanza L_2 .

filtro	Cp [nF] da G	Cp [nF] da Φ	Rp [Ω] da G	Rp [Ω] da Φ
38	0.017	0.02	6.60	19.48
39	0.05	0.02	3.62	75.1
40	0.01	0.01	19.48	30.57
41	0.002	0.008	4.44	-0.00003

Table 5: Valori di Rp e Cp dai fit di guadagno e sfasamento.

7 Filtro Passa Banda in Parallello

Nel circuito passa banda in parallelo, a differenza di quello in serie, le componenti di induttanza e capacità vengono messe in parallelo come mostra la figura 42.

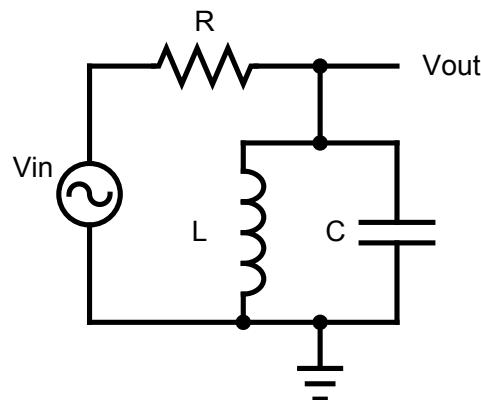


Figure 42: Filtro passa banda in parallelo: schema del circuito senza resistenza e capacità parassite.

Nel primo set di misure per il filtro passa banda in parallelo vengono trascurate resistenza e capacità parassite.

Per calcolare l'impedenza totale del circuito si è inizialmente calcolata l'impedenza del tratto in parallelo Z_{LC} :

$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \quad \Rightarrow \quad Z_{LC} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}, \quad (42)$$

con cui si ricava che l'impedenza totale del circuito risulta:

$$Z = Z_R + Z_{LC} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}. \quad (43)$$

Usando l'equazione 29 si ottiene il guadagno:

$$G = \frac{Z_{LC}}{Z_R + Z_{LC}} = \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}, \quad (44)$$

usando invece l'equazione 30 si ottiene lo sfasamento:

$$\phi = \arctan \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \frac{1}{R} \right). \quad (45)$$

Utilizzando le equazioni 1 e 44 si trova che:

$$\left| \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (46)$$

da cui si ottiene:

$$\Delta f_{3dB} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (47)$$

Si è inoltre calcolato dalle equazioni 27, 26 e 47 il fattore di qualità:

$$Q = \frac{RC}{\sqrt{LC}}. \quad (48)$$

Nel secondo set di misure per il filtro passa banda in parallelo vengono considerate anche resistenza e capacità parassite che verranno indicate rispettivamente con R_p e C_p .

Per questo circuito sono state calcolate nuovamente le equazioni del guadagno e dello sfasamento. Tenendo conto dell'equazione 37, l'impedenza totale del circuito è data da:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_l} + \frac{1}{Z_C}} + Z_R, \quad (49)$$

Da cui sfruttando l'equazione 29 si ricava l'espressione per il guadagno:

$$G = \frac{1}{\frac{1}{Z_l} + \frac{1}{Z_C}} \frac{1}{Z}. \quad (50)$$

Utilizzando invece l'equazione 30 si ricava l'espressione dello sfasamento:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \right). \quad (51)$$

Trascurando le componenti parassite sono state effettuate le misure descritte in tabella 3, acquisendo per ogni misura i grafici relativi al guadagno e allo sfasamento in funzione della frequenza, e fattandoli rispettivamente con le equazioni 44 e 45. Si riportano i grafici nelle figure 43, 44, 45 e 46.

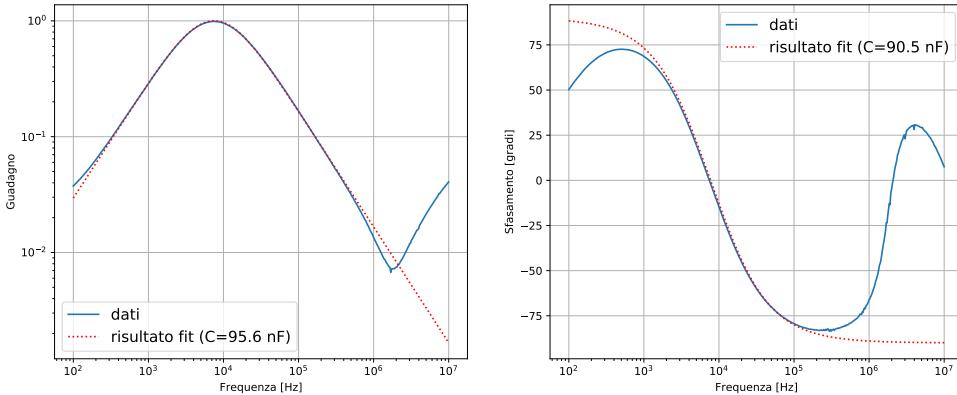


Figure 43: Resistenza 100Ω e induttanza L_1 .

Dai fit si è ricavato il valore della capacità inserita nel circuito.

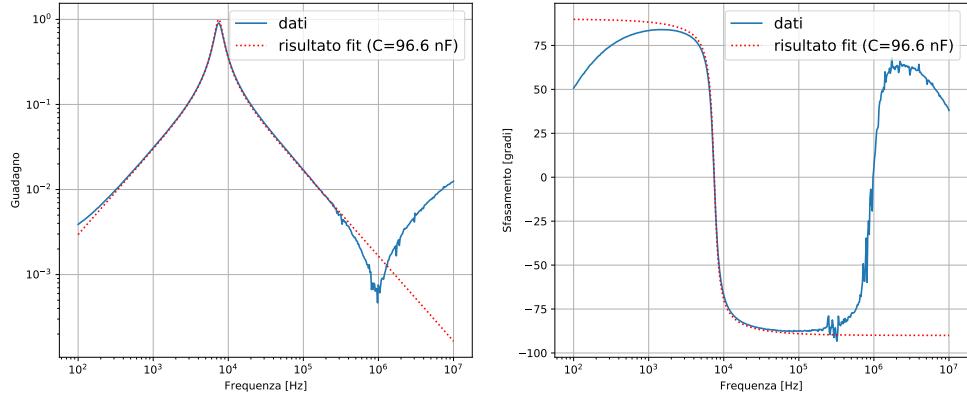


Figure 44: Resistenza $1 \text{ k}\Omega$ e induttanza L_1 .

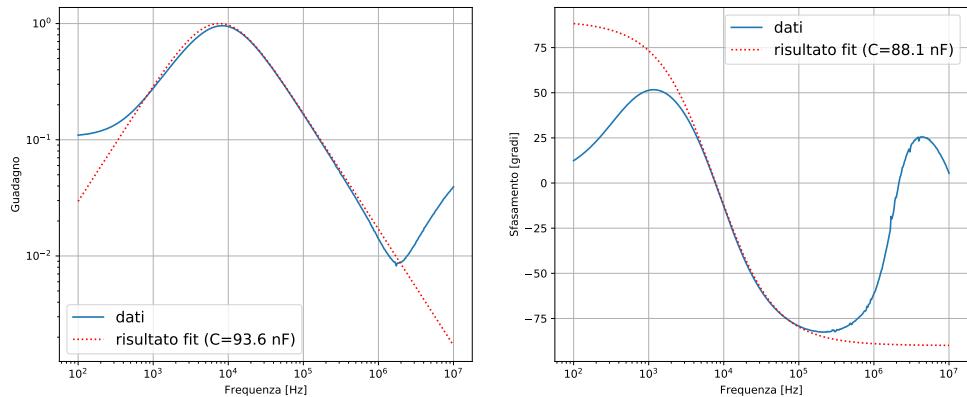


Figure 45: Resistenza 100Ω e induttanza L_2 .

Figura	Capacità [nF] da G	Capacità [nF] da Φ
43	95.6	90.5
44	96.6	96.6
45	93.6	88.1
46	88.9	89.2

Table 6: Valori della capacità ricavati dai fit.

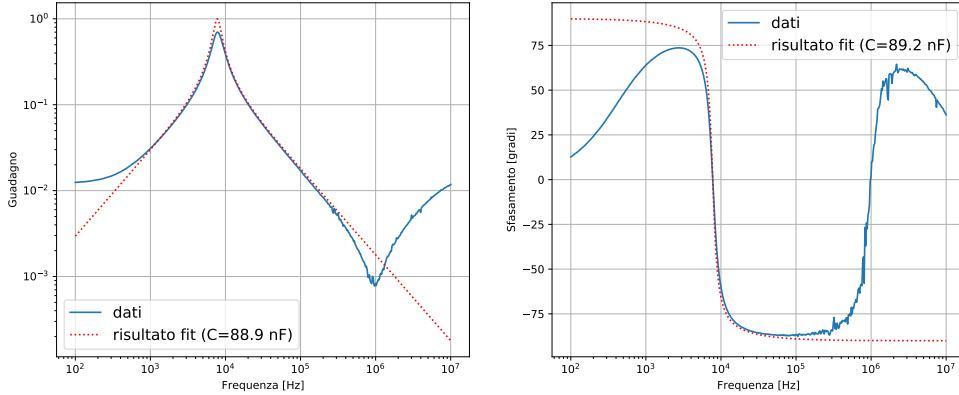


Figure 46: Resistenza $1 \text{ k}\Omega$ e induttanza L_2 .

I risultati riportati in tabella 6 sono coerenti con il dato noto della capacità di 100 nF .

Considerando le componenti parassite sono state effettuate le misure stesse misure, descritte in tabella 3, acquisendo per ogni misura i grafici relativi al guadagno e allo sfasamento in funzione della frequenza, e fittandoli rispettivamente con le equazioni 50 e 51. Si riportano i grafici nelle figure 47, 48, 49 e 50.

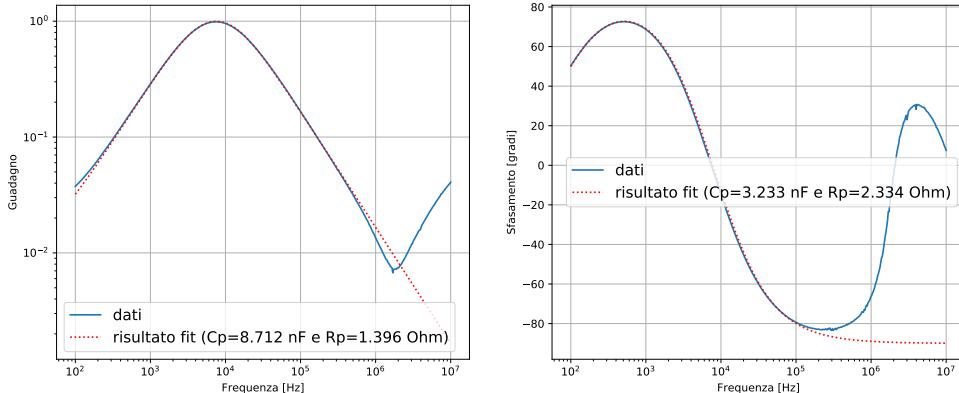


Figure 47: Resistenza 100Ω e induttanza L_1 .

Dalle funzioni di fit sono stati ricavati i valori delle resistenze e delle capacità parassite per le due induttanze. Si riportano in tabella 5 i risultati. Si ricorda inoltre che i primi due filtri sono stati realizzati utilizzando l'induttanza con resistenza parassita piccola, mentre gli ultimi due utilizzando l'induttanza avente resistenza parassita grande.

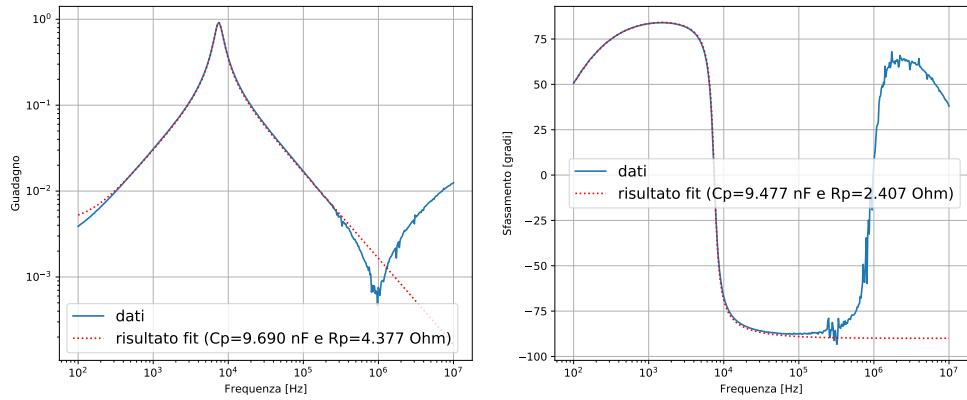


Figure 48: Resistenza $1 \text{ k}\Omega$ e induttanza L_1 .

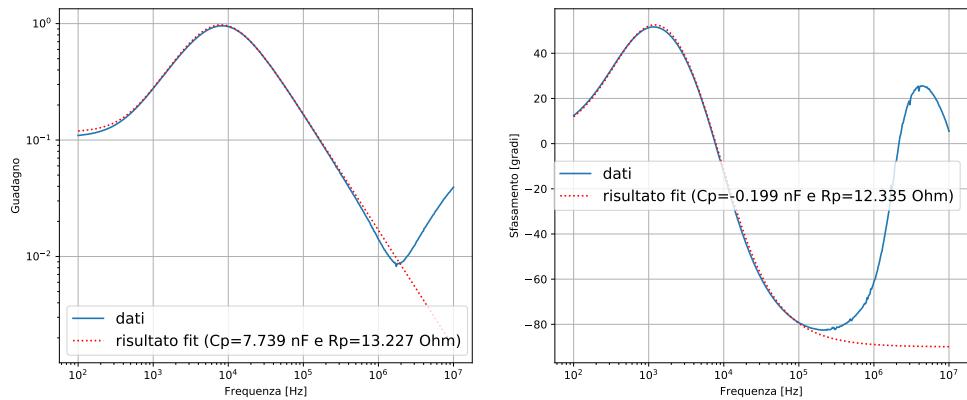


Figure 49: Resistenza 100Ω e induttanza L_2 .

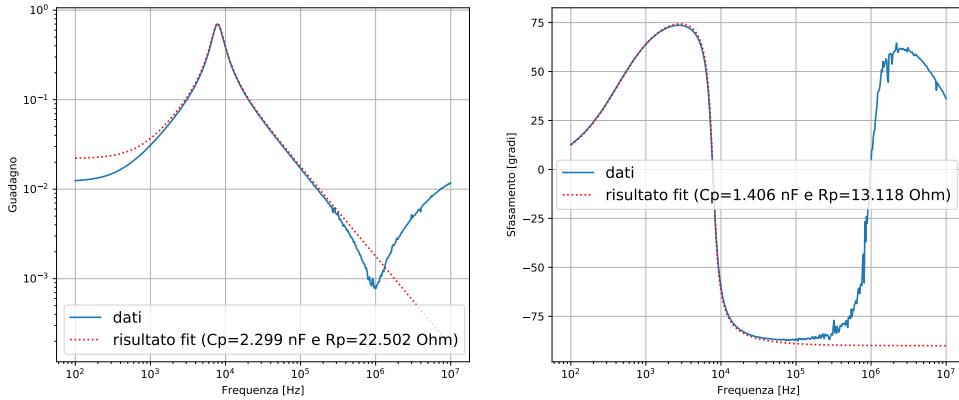


Figure 50: Resistenza $1 \text{ k}\Omega$ e induttanza L_2 .

Figura	$C_p [\text{nF}]$ da G	$C_p [\text{nF}]$ da Φ	$R_p [\Omega]$ da G	$R_p [\Omega]$ da Φ
47	8.71	3.23	1.40	2.33
48	9.69	9.48	4.38	2.41
49	7.79	-0.20	13.23	12.33
50	2.30	1.41	22.50	13.12

Table 7: Valori di R_p e C_p dai fit di guadagno e sfasamento.

8 Filtro Elimina Banda in Serie

Il filtro elimina banda permette di eliminare una banda di frequenze ed è rappresentato dal punto di vista circuitale in figura 51.

A differenza del filtro passa banda, è stato creato un solo circuito in base alla configurazione delle componenti, ovvero esse sono state inserite solamente in serie. Invece analogamente al circuito passa banda, esistono delle resistenze e delle capacità "parassite", poiché il loro effetto non è sempre determinante nell'analisi, ma non può essere del tutto trascurato.

Nel primo set di misure per il filtro elimina banda in serie vengono trascurate resistenza e capacità parassite.

Si è inizialmente calcolata l'impedenza totale del circuito come:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \quad (52)$$

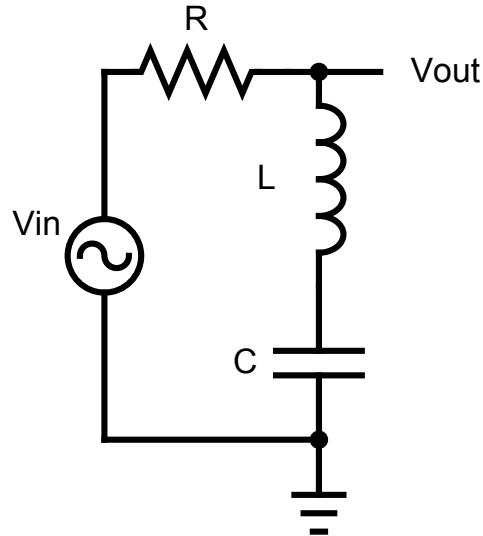


Figure 51: Filtro elimina banda in serie: schema del circuito senza resistenza e capacità parasite.

Utilizzando l'equazione 29 si ottiene l'espressione del guadagno:

$$G = \frac{Z_L + Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{j\omega L - \frac{j}{\omega C}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}, \quad (53)$$

mentre utilizzando l'equazione 30 si ottiene l'espressione dello sfasamento:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} \right). \quad (54)$$

Si fa riferimento alle quattro tipologie di filtro utilizzate anche per il passa banda. Sono stati acquisiti i grafici del guadagno e dello sfasamento per ognuno dei quattro filtri, dapprima escludendo resistenze e capacità parassite, come mostrato nelle figure 52, 53, 54 e 55.

Dai fit si è ricavato il valore della capacità inserita nel circuito.

Si può notare che i risultati riportati in tabella 8 sono in buon accordo tra loro, nonché coerenti con il valore della capacità utilizzata nel circuito data dal costruttore, di 100 nF. Tuttavia risulta evidente anche da un punto di vista qualitativo che il fit non in tutti i casi rispecchia perfettamente l'andamento della curva.

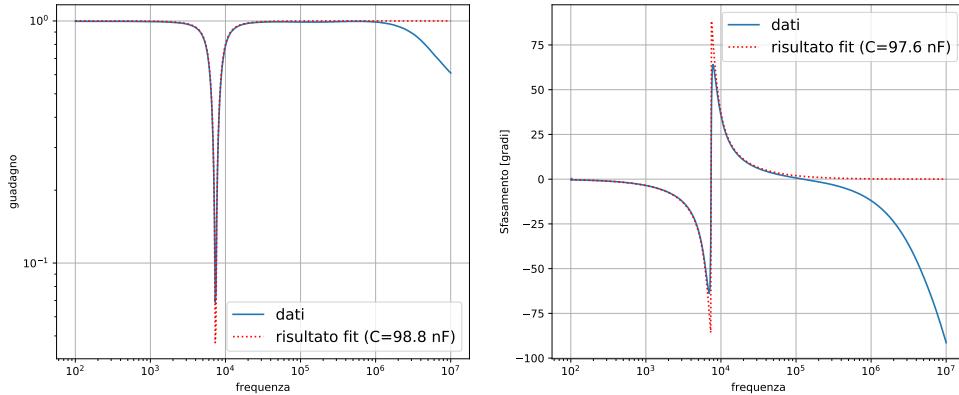


Figure 52: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il primo filtro elimina banda senza considerare le resistenze e le capacità parassite.

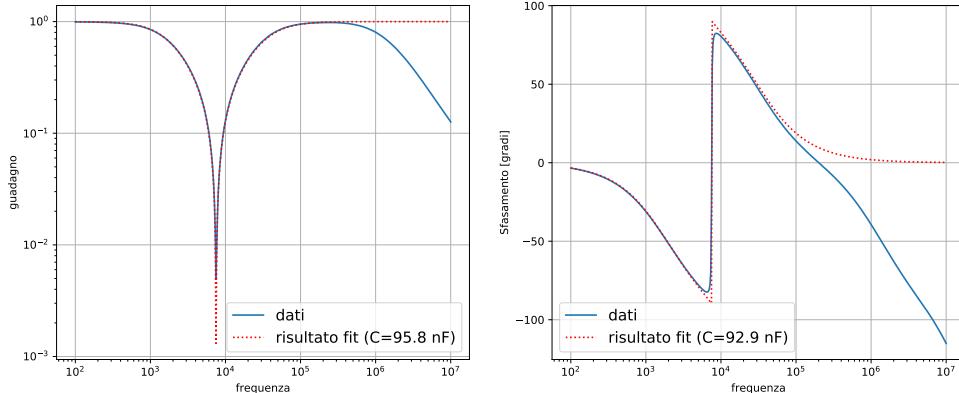


Figure 53: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il secondo filtro elimina banda senza considerare le resistenze e le capacità parassite.

Per questo motivo si è introdotta una sorta di "correzione" all'interno dell'espressione analitica utilizzata per fissare i dati. Nel secondo set di misure per il filtro elimina banda in serie vengono infatti considerate anche resistenze e capacità parassite. Esse vengono lasciate come parametri liberi nel fit, perciò si ottiene una stima sui loro valori. Verranno indicate rispettivamente come R_p e C_p .

Sono stati ricalcolati con tali correzioni i valori di impedenza, guadagno e sfasamento considerando esplicitamente nel calcolo le resistenze e le capacità parassite.

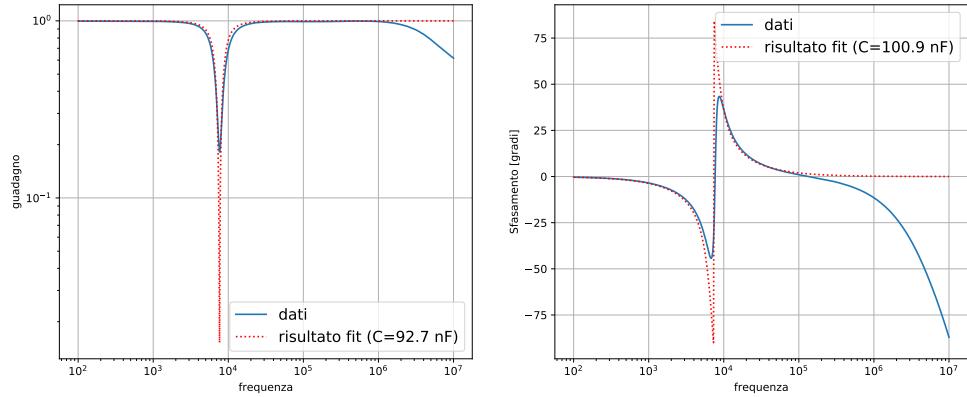


Figure 54: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il terzo filtro elimina banda senza considerare le resistenze e le capacità parassite.

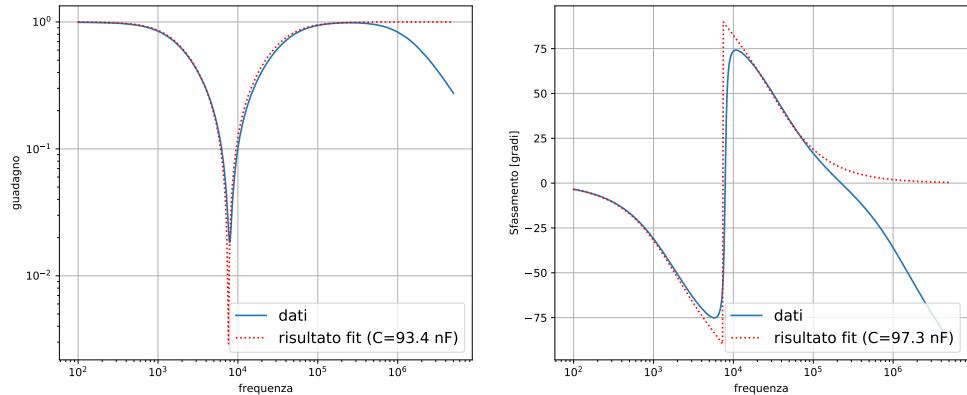


Figure 55: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il quarto filtro elimina banda senza considerare le resistenze e le capacità parassite.

L'impedenza totale del circuito risulta essere:

$$Z = Z_R + Z_{LP} + Z_C = R + \frac{1}{\frac{1}{Z_L + Z_{rp}} + \frac{1}{Z_{cp}}} - \frac{j}{\omega C} = R + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L + rp} - \frac{j}{\omega C}} - \frac{j}{\omega C}. \quad (55)$$

Figura	Capacità [nF] da G	Capacità [nF] da Φ
52	98.8	97.6
53	95.8	92.9
54	92.7	100.9
55	93.4	97.3

Table 8: Valori della capacità ricavati dai fit.

Utilizzando l'equazione 29 si ottiene l'espressione del guadagno:

$$G = \frac{Z_{LP} + Z_C}{Z_R + Z_{LP} + Z_C} = \frac{\frac{1}{\overline{Z}_L + Z_{rp}} + Z_C}{Z_R + \frac{1}{\overline{Z}_L + Z_{rp}} + Z_C}, \quad (56)$$

mentre utilizzando l'equazione 30 si ottiene l'espressione dello sfasamento:

$$\phi = \arctan \left(\frac{Im(Z)}{Re(Z)} \right). \quad (57)$$

Sono stati acquisiti i grafici di guadagno e sfasamento per ciascuno dei quattro filtri. Successivamente è stato effettuato un fit, come mostrato nelle figure 56, 57, 58 e 59.

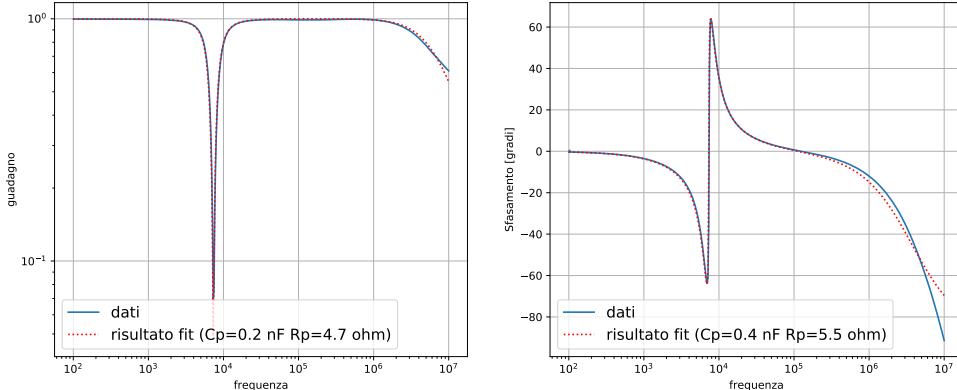


Figure 56: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il primo filtro elimina banda considerando le resistenze e le capacità parassite.

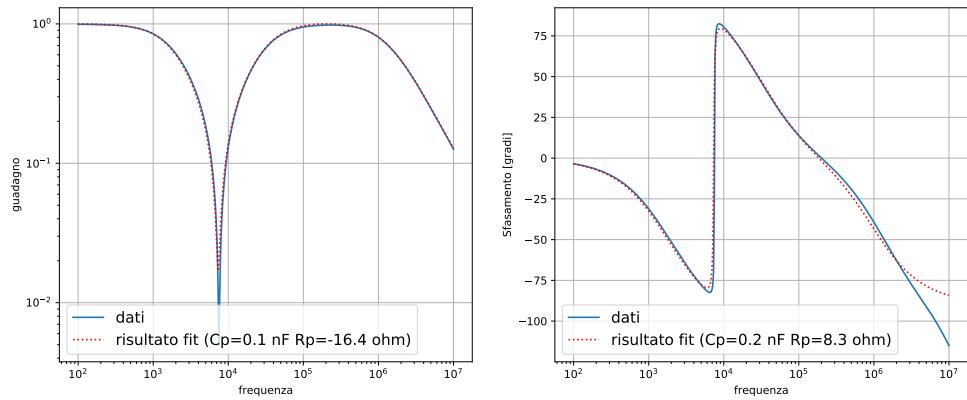


Figure 57: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il secondo filtro elimina banda considerando le resistenze e le capacità parassite.

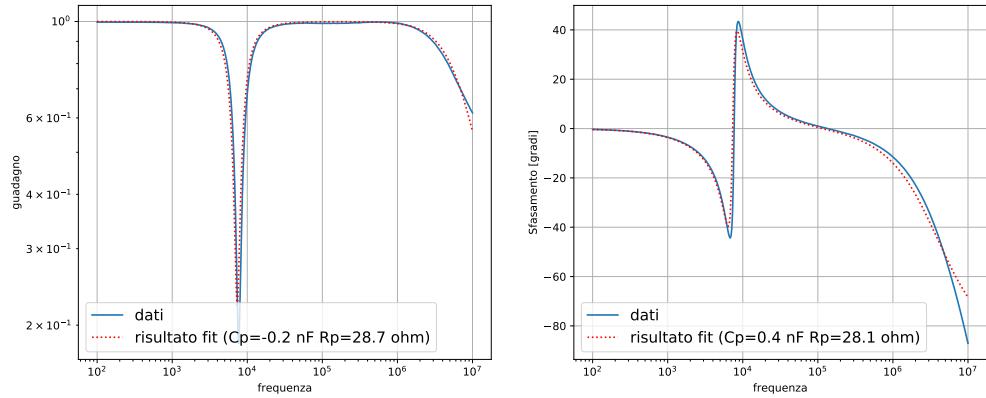


Figure 58: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il terzo filtro elimina banda considerando le resistenze e le capacità parassite.

Dalle funzioni di fit sono stati ricavati i valori delle resistenze e delle capacità parassite per le due induttanze. Si riportano in tabella 9 i risultati. Si ricorda inoltre che i primi due filtri sono stati realizzati utilizzando l'induttanza con resistenza parassita piccola, mentre gli ultimi due utilizzando l'induttanza avente resistenza parassita grande.

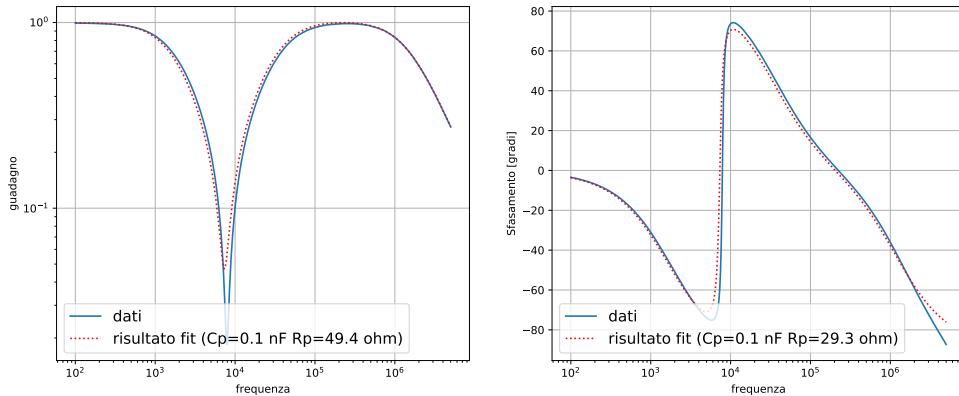


Figure 59: Grafico e fit di guadagno e sfasamento per il quarto filtro elimina banda considerando le resistenze e le capacità parassite.

Figura	Cp [nF] da G	Cp [nF] da Φ	Rp [Ω] da G	Rp [Ω] da Φ
56	0.2	0.4	4.7	5.5
57	0.1	0.2	-16.4	8.3
58	-0.2	0.4	28.7	28.1
59	0.1	0.1	49.4	29.3

Table 9: Valori di Rp e Cp dai fit di guadagno e sfasamento.