



Università degli Studi dell’Insubria

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2018/2019
Laboratorio di Fisica II

Gruppo IX:

Martina Mozzanica Matteo Oñate Orozco Elisa Vallini

Esperimento della morte: Pendolo doppio

Sommario

Costruzione di un pendolo doppio, analisi del moto
in regime caotico e per le piccole oscillazioni.

Indice

1	Introduzione ai sistemi dinamici in generale e a un pendolo doppio in particolare	3
2	Obiettivi dell'esperimento	4
3	Costruzione del pendolo doppio	4
4	Acquisizione dati	7
5	Traiettoria	9
6	Hamiltoniana del pendolo doppio	12
7	Equazioni del moto delle piccole oscillazioni	17
7.1	Modi normali di oscillazione	19
8	Decrescita dell'energia	23
9	Spazio delle fasi	28
9.1	Traiettoria nello spazio delle fasi	28
9.2	Sezioni di Poincaré	37
9.3	Esponenti di Lyapunov	39
10	Conclusioni	45

1 Introduzione ai sistemi dinamici in generale e a un pendolo doppio in particolare

Le equazioni differenziali che descrivono il moto di un pendolo doppio (figura (1)) rappresentano un sistema dinamico cioè un modello matematico con un numero finito di gradi di libertà che evolve nel tempo secondo una legge deterministica. In particolare la legge che domina l'andamento del pendolo doppio è non lineare e non è integrabile analiticamente; lo studio che si fa di tali sistemi è quindi geometrico nei casi più semplici oppure numerico. Non si hanno le leggi orarie esplicite del moto di un pendolo doppio; nonostante il sistema sia deterministico e, a priori, data una condizione iniziale si possa sapere dove il sistema si trovi ad uno specifico tempo t , non è sempre possibile determinare esattamente la condizione iniziale e avere una previsione esatta dell'andamento.

Il concetto di determinismo e di predicitività, infatti, non sono coincidenti e questo lo si nota in quei sistemi che hanno sensibilità alle condizioni iniziali. Intuitivamente si penserebbe che per condizioni iniziali simili si abbiano moti simili, come suggeriscono le equazioni del moto esplicite che conosciamo e che quindi non sia determinante l'esattezza delle condizioni iniziali. Esistono, però, dei sistemi che sono detti "caotici", i quali sono estremamente sensibili alle condizioni iniziali e per piccole differenze in esse l'evoluzione temporale a lungo termine è del tutto diversa. In questo senso il moto dei sistemi caotici è impredicibile perché non si potranno mai avere le condizioni iniziali esatte di un sistema e anche se così fosse sarebbero solo per quel caso specifico e non darebbero un'analisi completa del sistema, non essendo nemmeno riproducibili. Lo studio dei sistemi caotici non può essere eseguito, quindi, nello stesso modo che per gli altri sistemi dinamici ed è qua che nasce la teoria del caos, sviluppatisi a partire dal 1963, quando Edward Lorenz pubblicò il suo articolo *Deterministic Nonperiodic Flow*, nel quale tratta del comportamento caotico di un sistema deterministico, con la formazione di un attrattore strano.

Prima di studiarli è importante saperli riconoscere e caratterizzarli: di questo ci occuperemo, costruendo un pendolo doppio e verificando la sua natura caotica. Per poter definire un sistema come caotico è necessario che presenti alcune caratteristiche:

- Le equazioni che esprimono il moto del sistema non sono lineari;
- Il sistema è estremamente sensibile al cambiamento delle condizioni iniziali ed è non predicibile per tempi lunghi;
- Il sistema deve presentare almeno 3 gradi di libertà;
- Le traiettorie nello spazio delle fasi non devono mai intersecarsi, né ripetersi, pur essendo contenute in un volume finito;
- Le traiettorie che partono da condizioni iniziali molto vicine divergono esponenzialmente; l'evoluzione della distanza nello spazio delle fasi può essere caratterizzata dagli esponenti di Lyapunov e almeno uno di questi deve essere positivo;

Presentiamo i nostri obiettivi.

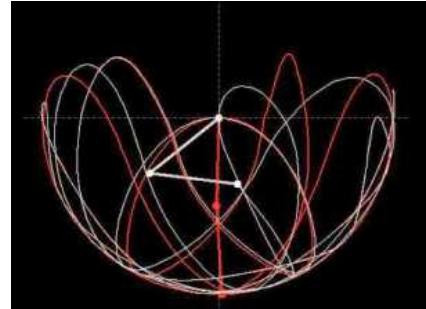


Figura 2: Traiettoria di due pendoli doppi aventi condizioni iniziali quasi identiche, ma per cui si nota la diversificazione del moto a tempi lunghi.

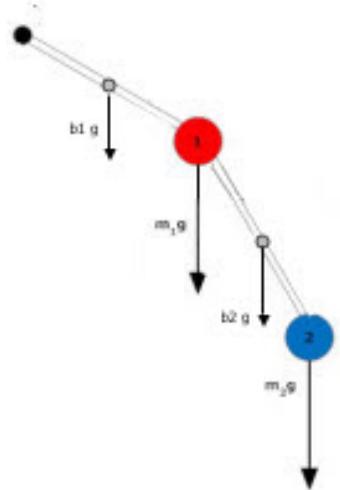


Figura 1: Il pendolo doppio è un sistema costituito da due bracci a cui sono collegate due masse, soggetto alla sola forza di gravità. Sperimentalmente, le masse dei bracci non sono trascurabili.

2 Obiettivi dell'esperimento

Innanzitutto ci occuperemo della costruzione di un pendolo doppio, avendo come materiale primo con cui realizzarlo alcuni *Fidget Spinner*. Dopo aver eseguito le opportune misure su esso e con esso, caratterizzeremo il moto di un pendolo doppio descrivendone l'andamento dei gradi di libertà e parallelamente verificheremo che il moto sia, in alcune condizioni, caotico e non lo sia, invece, per le piccole oscillazioni. In particolare eseguiremo in parallelo un'analisi riguardante il moto caotico e un'analisi per le piccole oscillazioni basata sui seguenti punti:

- * Sensibilità alle condizioni iniziali tramite la traiettoria nello spazio reale;
- * Hamiltoniana e decrescita dell'energia totale del sistema;
- Modi normali d'oscillazione per le piccole oscillazioni;
- * Traiettoria nello spazio delle fasi;
- * Sezioni di Poincaré e esponente di Lyapunov.

3 Costruzione del pendolo doppio

L'idea per costruire il nostro pendolo doppio è nata notando la particolare efficacia dei cuscinetti a sfera dei Fidget Spinner (figura (3)); questi sono funzionali poiché le sferette al loro interno toccano solo un'area molto ridotta durante il movimento, diminuendo decisamente l'attrito. In questo modo permettono ai Fidget Spinner di ruotare senza essere frenati, per un lasso di tempo lungo. L'utilizzo di questi come "articolazioni" per il nostro pendolo ci ha permesso di ottenere un pendolo doppio che risente poco dell'attrito.

Il materiale per costruirlo e gli strumenti per l'esperimento sono:



Figura 3: Esempio di Fidget Spinner.

- ⌚ 5 Fidget Spinner;
- ⌚ Due barre rigide di metallo lunghe 1 m, larghe pochi centimetri e spesse qualche millimetro;
- ⌚ Una sbarra filettata da 1 m;
- ⌚ Due dozzine di bulloni, dadi e ranelle da 6 mm di diametro;
- ⌚ Del nastro adesivo nero;
- ⌚ Dei pannelli neri;
- ⌚ Dei colori fosforescenti;
- ⌚ Un cellulare per filmare il moto, fissato su un cavalletto;
- ⌚ Un banco ottico su cui fissare il pendolo.

Abbiamo tagliato una parte dell'asta filettata di 30 cm; questa sarà il perno principale ed il centro di rotazione del primo braccio. Su di essa fissiamo due fidget spinner, distanti una decina di centimetri, con i dadi; per evitare che i dadi si muovano ne abbiamo stretti due, l'uno contro l'altro, a lato di ogni fidget spinner.

Abbiamo tagliato le barre di metallo in due sbarrette da 50 cm (l_1) e due sbarrette da 30 cm (l_2); la barretta da 20 cm avanzata sarà utilizzata successivamente.

Per costruire un singolo braccio del pendolo (dei due totali) abbiamo usato una coppia di aste di pari lunghezza; per il braccio più lungo abbiamo utilizzato le due sbarrette da 50 cm, fissando ciascuna ad uno dei due fidget spinner, in modo da avere lo spazio necessario, tra le due, per far ruotare internamente il secondo braccio. Per poter fissare le sbarrette ai fori laterali dei fidget spinner abbiamo eseguito dei fori di diametro 6 mm in modo da far passare le viti; i fori sono stati praticato grazie al trapano del Professore F. Ferri, il quale ci ha anche permesso di fare un lavoro molto preciso. Con quattro viti a testa larga e quattro bulloni abbiamo fissato le sbarrette ai fidget spinner; le viti a testa larga sono utili per la particolare conformazione dei fidget spinner: una volta rimossi i tre pesi circolari rimangono tre buchi concavi su cui fissare le viti.

Successivamente abbiamo tagliato una parte di sbarra filettata di 30 cm sulla quale abbiamo posto 3 fidget spinner: due di questi (quelli esterni, fissati dopo esserci assicurati che fossero allineati con i due sopra) sono collegati al braccio principale nel senso che le due sbarre che costituiscono il braccio sopra descritto sono state fissate, alle loro estremità libere, a questi due fidget spinner, allo stesso modo di prima. L'articolazione centrale è composta dall'asta filettata, da 3 fidget spinner e da sedici dadi; la massa totale di questa parte del pendolo è circa 307 g (m_1). L'ultimo fidget spinner, quello centrale, è stato fissato al secondo braccio. Il secondo braccio è costituito dalle due sbarrette di 30 cm fissate alle due parti opposte del fidget spinner. Alla fine di tale braccio abbiamo posto un piccolo peso di circa 19 g (m_2). Questo secondo braccio è in grado di ruotare completamente all'interno delle due sbarrette dell'altro braccio.

Approssimativamente, il peso del braccio più lungo è complessivamente 127 g (b_1), mentre quello del secondo braccio più corto è 74 g (b_2).

I sei parametri misurati $\{l_1, l_2, m_1, m_2, b_1, b_2\}$ servono per scrivere l'Hamiltoniana del sistema, sezione (6); riassumiamo i valori precisi di questi parametri in tabella (1). L'articolazione centrale e il peso finale sono, invece, i due punti che seguiremo durante il moto, come presentiamo nella sezione successiva.

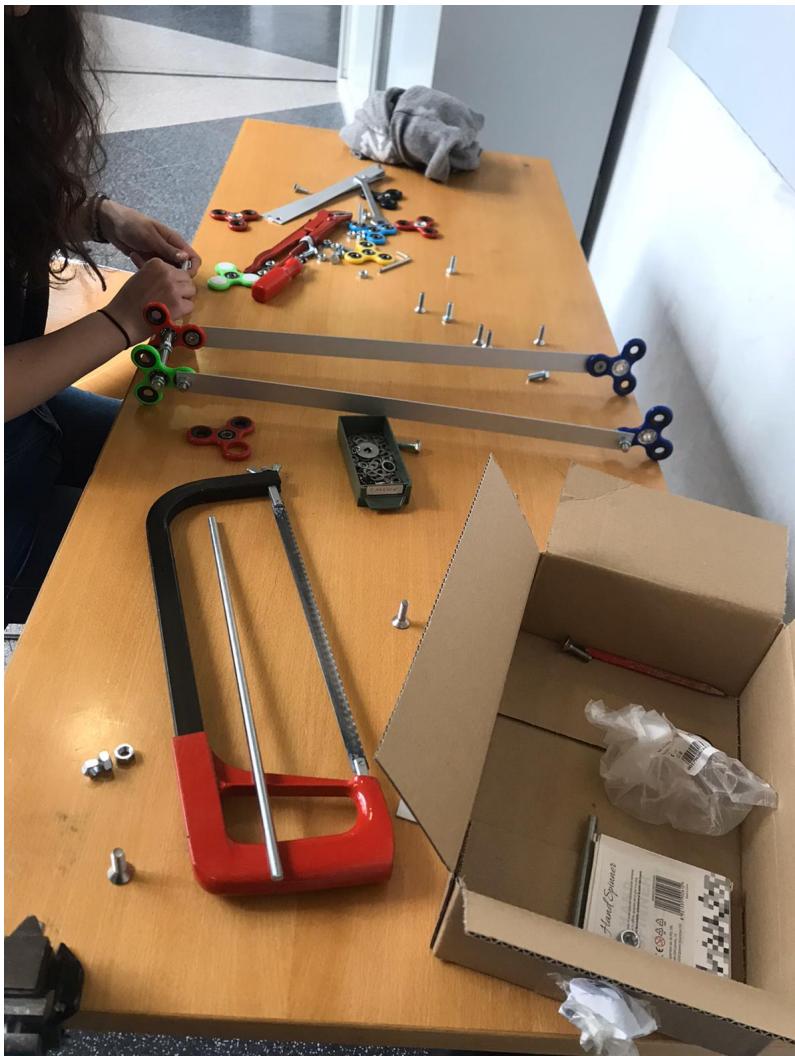


Figura 4: Materiale per la costruzione del pendolo doppio.

Parametro	Valore
m_1	$(307.37 \pm 0.1) \text{ g}$
m_2	$(18.91 \pm 0.01) \text{ g}$
b_1	$(126.68 \pm 0.01) \text{ g}$
b_2	$(74.25 \pm 0.01) \text{ g}$
l_1	$(50.00 \pm 0.1) \text{ cm}$
l_2	$(30.00 \pm 0.1) \text{ cm}$

Tabella 1: Tabella con le misure dei parametri. Le due masse vengono considerate senza una relativa estensione che realmente sarebbe data dai fidget spinner e dall'asta filettata, considerata trascurabile rispetto al sistema. Abbiamo utilizzato una bilancia per misurare le masse, con sensibilità 0.01 g, mentre per le misure di lunghezza è stato utilizzato un metro con sensibilità 1 mm. Gli errori indicati sono quelli strumentali.

4 Acquisizione dati

L'acquisizione dati consiste nel registrare dei video che riprendano il moto completo del pendolo doppio. Prima di iniziare a filmare ci siamo assicurati che il pendolo rientrasse nell'inquadratura durante tutto il suo moto e che le due masse fossero il più evidenti possibili ovvero ben distinguibili rispetto al resto dell'apparato in modo da poterle tracciare successivamente; per questo abbiamo fissato il pendolo ad un banco ottico e abbiamo posto dei pannelli neri in modo che coprissero tutto lo spazio che il pendolo occupava ruotando. Dopo aver ricoperto di nastro nero isolante le braccia del pendolo, abbiamo posto dei cerchi colorati con della tempera fosforescente nei punti da tracciare. In questa sezione chiameremo prima massa il punto rosso e seconda massa il punto giallo; successivamente faremo un'analisi completa dei valori delle masse per la determinazione dell'energia.

È poi necessario posizionare la fotocamera di fronte all'apparato, in un piano parallelo a quello di oscillazione del pendolo; errori nel posizionamento o errori di parallasse potrebbero causare sistematiche in tutta l'analisi.

Abbiamo registrato 5 video per il moto caotico e 3 per le piccole oscillazioni, filmando il moto del pendolo fino al suo termine; successivamente descriveremo le differenze tra le due riprese. Notiamo che, grazie ai fidget spinner, il pendolo è in grado di oscillare liberamente per qualche minuto. Per riuscire a tracciare le traiettorie desiderate le riprese sono state eseguite in slow motion e sono state utilizzati i primi secondi di ciascun video. I video registrati hanno un frame-rate di 240 fps e una risoluzione di 4608 x 2592 pixel.

La conversione dei dati dal video è stata eseguita tramite Tracker, programma in grado di tracciare la traiettoria di alcuni punti desiderati in un video; tutta l'analisi dati è stata eseguita in Matlab. In particolare, abbiamo ricavato il valore di alcune grandezze descriventi il moto delle due masse in funzione del tempo cioè abbiamo chiesto al programma di salvare il valore di tali grandezze ogni tre fotogrammi del video originale, in modo da avere 80 valori al secondo, numero accettabile essendo il moto del pendolo abbastanza repentino. Abbiamo deciso di analizzare i primi 1200 dati corrispondenti a circa 16 secondi; vedremo successivamente che tale durata ci consente di considerare l'energia all'incirca costante, prerequisito necessario per l'analisi nello spazio delle fasi.

Le grandezze salvate sono l'angolo di rotazione rispetto alla verticale della prima massa (quella rossa in figura (6)) e la velocità angolare di questa, rispetto all'asse delle ascisse del sistema di riferimento fisso centrato nell'apice dell'asta del pendolo; per la seconda massa (quella gialla in figura (6)), invece, abbiamo salvato in funzione del tempo l'angolo d'inclinazione e la rispettiva velocità angolare rispetto all'asse delle ascisse del sistema di riferimento variabile centrato nell'altra massa. Queste quattro grandezze appena descritte, in funzione del tempo (1200 valori ciascuna), per ognuno dei video eseguiti sono quelle che interesseranno l'analisi del sistema nello spazio delle fasi (sezione (9)):



Figura 5: Preparazione del materiale per le riprese video.

$$t \quad \theta_1(t) \quad \omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$$

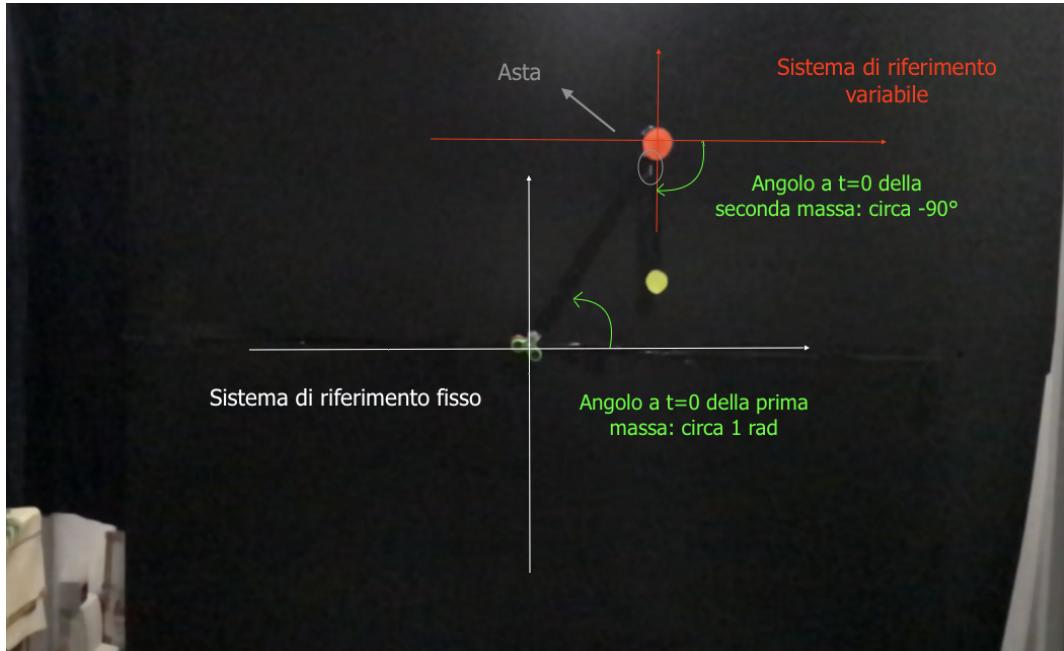


Figura 6: Inquadratura del sistema e rappresentazione degli assi cartesiani a $t = 0$ per l'analisi del moto caotico. Gli stessi assi sono stati utilizzati per lo studio delle piccole oscillazioni.

Abbiamo dovuto correggere i valori degli istanti di tempo e quindi di velocità forniti dal programma in quanto il tempo che Tracker restituiva non era quello reale, ma quello del video in slow motion. Perciò siamo risaliti al numero di fotogrammi per secondo che Tracker considerava per ciascun video inserito (c_i) e, conoscendo il numero di fotogrammi per secondo del video in slow motion (240 fps), abbiamo trovato il giusto fattore correttivo: $\frac{240 \text{ fps}}{c_i}$. Tale correzione è leggermente diversa per gli otto video in base a come Tracker lavora per ognuno ed è circa di 39.60 fps per i primi cinque video e di un valore più basso per gli altri tre. Abbiamo diviso tutti i valori di tempo per tale correzione e moltiplicato le velocità dello stesso fattore.

Inoltre abbiamo salvato anche le misure di $x(t)$ e $y(t)$ di entrambe le masse rispetto al sistema fisso, dopo aver impostato a Tracker la lunghezza della sbarra di 0.50 m; queste grandezze saranno le prime che utilizzeremo nella sezione successiva (sezione (7)).

Passiamo alla descrizione del moto del pendolo nel video e alla differenza nelle riprese dei video riguardanti il moto caotico e le piccole oscillazioni. Il primo si verifica per angoli di oscillazione grandi, mentre per piccole oscillazioni si intende il regime in cui il sistema del pendolo doppio può essere risolto analiticamente e non si presenta caos. Un elemento importante della presa dati è garantire che le condizioni iniziali di ogni misura siano sempre le stesse perché, come ripreso nell'introduzione (sezione (1)), una caratteristica fondamentale dei sistemi caotici, che noi abbiamo l'obiettivo di confermare o respingere, è la sensibilità alle condizioni iniziali. Per questo abbiamo fatto una fessura nel pannello attraverso cui possa passare la sbarretta di metallo da 20 cm avanzata; uno di noi a turno è andato dietro al pannello, ha infilato la sbarra nella fessura mentre un altro ha poggiato il pendolo sopra tale sbarra; una volta partita la registrazione del video, la sbarra veniva sfilata da dietro al pannello. L'istante di tempo $t = 0$ è quello per cui quest'asta viene sfilata e il pendolo diventa libero di oscillare.

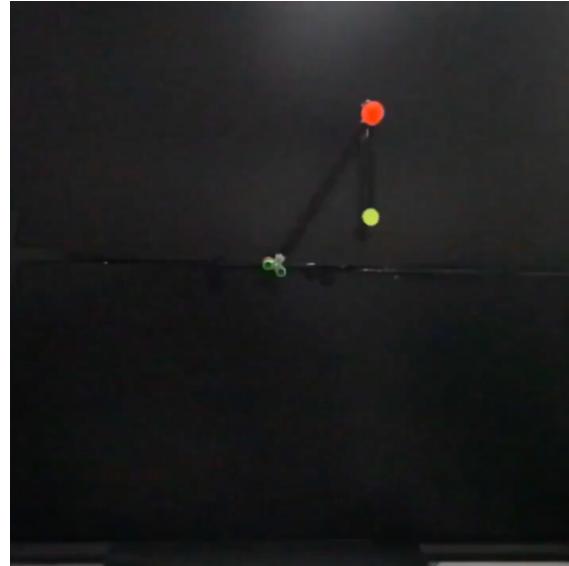
Per i 5 video del moto caotico l'angolo di partenza della prima massa del pendolo è stato scelto casualmente e si è visto poi dall'analisi essere circa $\theta_1(0) = 1$ rad; per la seconda massa, questa era lasciata libera in posizione verticale con un angolo circa $\theta_2(0) = -90^\circ$ rispetto al sistema di riferimento dell'altra massa. Per i tre video delle piccole oscillazioni abbiamo seguito la stessa procedura, ma ponendo l'asta ad un angolo più piccolo rispetto alla verticale verso il basso che si è rivelato poi essere circa $\theta_2(0) = -101^\circ$.

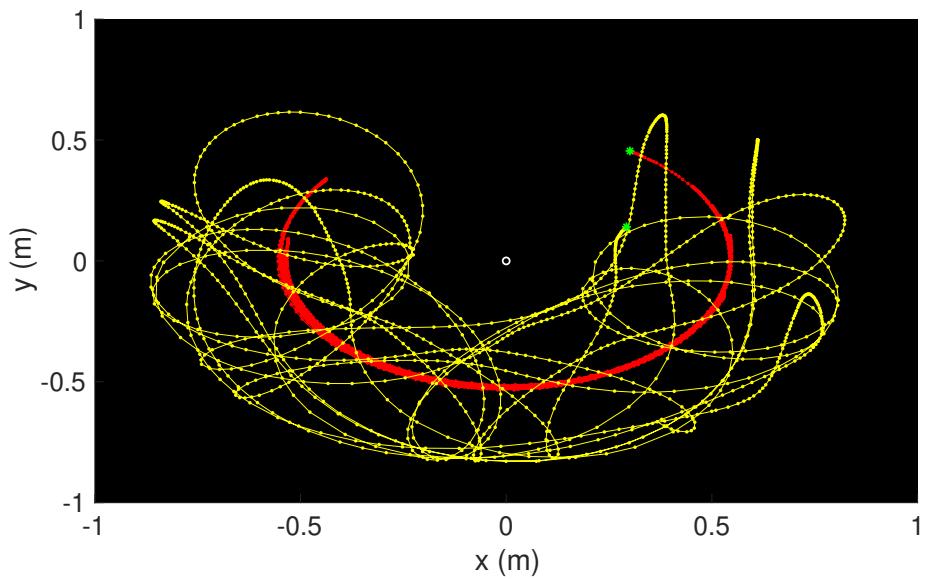
5 Traiettoria

Eseguiamo il plot delle traiettorie delle due masse per due misure generiche, una per il moto caotico e l'altra per le piccole oscillazioni. In figura (7) vengono rappresentati i punti della traiettoria $y(x)$ ottenuti a partire da $x(t)$ e $y(t)$; in questo modo abbiamo l'andamento, nel corso del tempo, delle posizioni assunte dalle due masse, cioè la traiettoria percorsa. Tale traiettoria è quella nello spazio in cui le misure sono state eseguite; si tratta di una curva descritta dalle due dimensioni del sistema: le ascisse danno la distanza dal centro di oscillazione fisso, orizzontalmente, mentre le ordinate danno la distanza dal centro di oscillazione fisso, verticalmente, avendo impostato come lunghezza della sbarra 0.50 m.

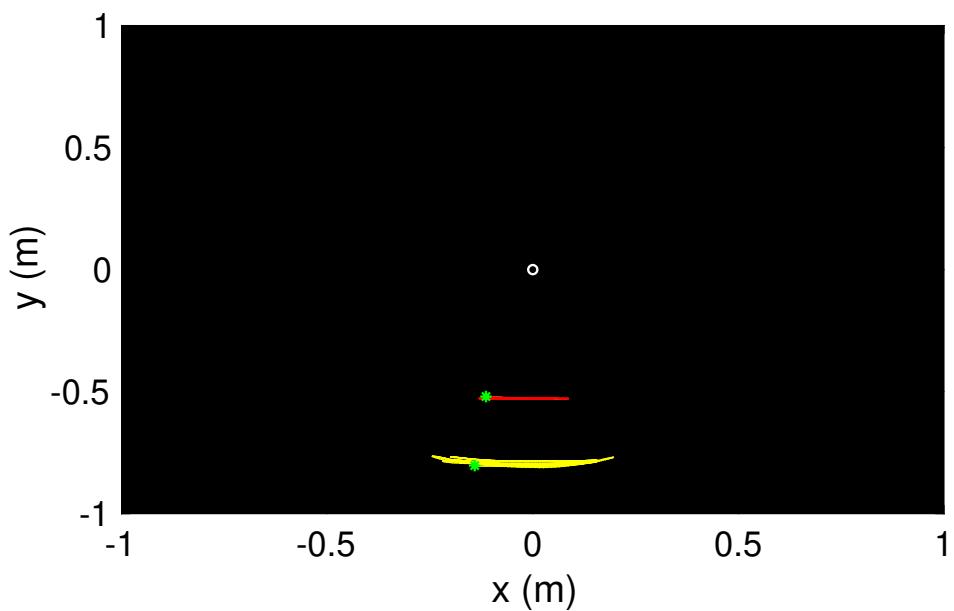
Per avere una prima idea della sensibilità alle condizioni iniziali rappresentiamo anche le traiettorie delle altre quattro misure per il moto caotico e delle altre due misure per le piccole oscillazioni in figura (8).

Visibilmente riportiamo un video creato a partire dalla sovrapposizione di due misure diverse. Si nota la diversificazione quasi immediata dei due moti, nonostante la riproduzione delle condizioni iniziali fosse quasi identica.



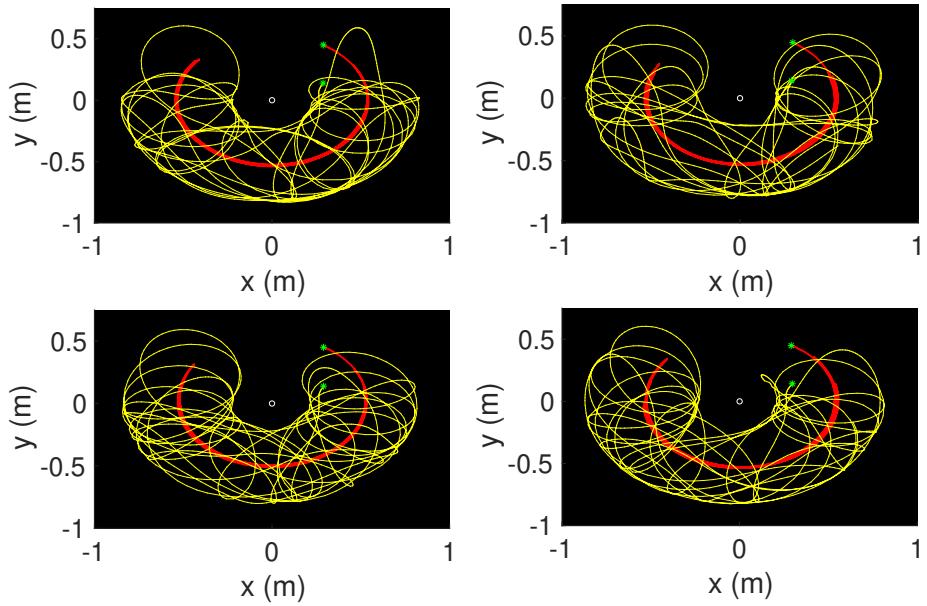


(a) *Traiettoria per il moto caotico. La massa rossa ha un andamento prevedibile e all'incirca regolare, mentre la massa gialla ha un moto del tutto non predicibile.*

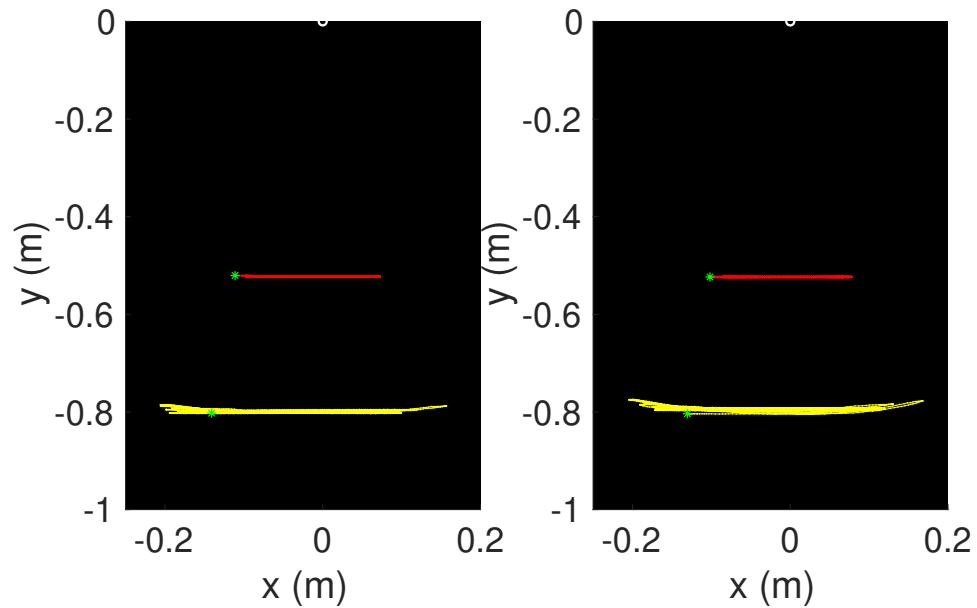


(b) *Traiettoria per le piccole oscillazioni. Entrambe le masse sembrano avere un moto più regolare.*

Figura 7: Traiettoria del pendolo in due dei video eseguiti. In rosso abbiamo la prima massa, mentre in giallo la seconda. I punti in verde sono le posizioni iniziali delle due masse.



(a) *Traiettoria per il moto caotico. Si nota visivamente la diversità delle traiettorie nelle 4 diverse misure e anche con la prima presentata precedentemente.*



(b) *Traiettoria per le piccole oscillazioni. La differenza tra le misure è impercettibile rispetto al caso caotico.*

Figura 8: Traiettorie del pendolo doppio per tutte le misure eseguite. I punti in verde sono le posizioni iniziali delle due masse.

6 Hamiltoniana del pendolo doppio

Per determinare l'Hamiltoniana del sistema è necessario tener conto dell'energia cinetica e potenziale di quattro masse: il primo braccio, l'articolazione centrale, la seconda sbarra e il peso posto all'estremità libera di tale braccio. Ci interessa esprimere l'hamiltoniana in funzione delle coordinate polari cioè dei due angoli e delle due velocità angolari, dati raccolti presentati nella sezione precedente, e dei sei parametri che sono:

1. m_1 : massa dell'articolazione, di colore giallo;
2. m_2 : massa del peso finale di colore rosso;
3. l_1 : lunghezza del braccio principale;
4. l_2 : lunghezza del braccio secondario;
5. b_1 : massa del braccio principale;
6. b_2 : massa del braccio secondario.

i cui valori sono riportati in tabella (1).

Tratteremo l'energia potenziale e quella cinetica separatamente.

L'energia potenziale che agisce sul sistema è quella gravitazionale, quindi per ogni corpo avente massa m , per trovare la sua energia potenziale gravitazionale, è necessario moltiplicare tale massa per l'accelerazione di gravità g e per l'altezza a cui si trova rispetto all'asse verticale di riferimento; per quanto riguarda i bracci si considererà l'altezza dal baricentro al punto zero: il primo braccio ha baricentro in $l_1/2$, mentre il secondo in $l_2/2$, essendo le sbarre omogenee. Il punto stabilito per rappresentare lo zero del nostro sistema di riferimento scelto è il punto dove si trova la massa m_2 se il pendolo è lasciato completamente steso e in equilibrio, ossia il punto più basso che può raggiungere la massa m_2 lungo l'asse verticale; in tal modo tutte le altezze risultano positive. Notiamo che questo punto corrisponde al punto in cui il sistema è in equilibrio stabile, come dimostreremo in seguito, nello studio delle piccole oscillazioni attorno a tale punto. Con queste considerazioni scriviamo l'energia potenziale per tutte e quattro le masse coinvolte nel sistema:

$$V = m_1gh_1 + gb_1h_{b_1} + m_2gh_2 + gb_2h_{b_2} \quad (1)$$

Ora ciò che ci interessa è esplicitare le altezze in funzione degli angoli θ_1 e θ_2 , poiché essi sono i due gradi di libertà che andremo a considerare. Teniamo conto del fatto che lo zero degli angoli θ_1 e θ_2 è lungo l'asse orizzontale, mentre il punto zero del sistema di riferimento scelto per calcolare l'energia potenziale gravitazionale si trova lungo l'asse verticale, ossia a $\frac{3}{2}\pi$. Per fare in modo che l'altezza si annulli in tale punto, per la prima massa l'altezza sarà uguale a $h_1 = l_1(1+\sin\theta_1) + l_2$ e allo stesso modo avremo per il primo braccio $h_{b_1} = \frac{l_1}{2}(1+\sin\theta_1) + \frac{3}{2}l_2$. Infatti l'altezza della massa m_1 dell'articolazione centrale e quella del baricentro della massa b_1 del primo braccio non potranno mai raggiungere lo zero; quando l'angolo θ_1 si trova a $\frac{3}{2}\pi$ l'altezza sarà l_2 per la prima massa e $\frac{3}{2}l_2$ per il braccio. Per la seconda massa, la quale è nulla per condizioni di equilibrio, si ha $h_2 = h_1 + l_2 \sin \theta_2$ e per il secondo braccio vale lo stesso ragionamento di prima per cui $h_{b_2} = h_1 + \frac{1}{2}l_2 \sin \theta_2$. Tutto ciò meglio si comprende riferendosi alla figura (9) e nel complesso si ha:

$$\begin{aligned} V = & m_1g(l_1(1 + \sin\theta_1) + l_2) + b_1g\left(\frac{l_1}{2}(1 + \sin\theta_1) + \frac{3}{2}l_2\right) + \\ & + m_2g(l_1(1 + \sin\theta_1) + l_2(1 + \sin\theta_2)) + b_2g\left(l_1(1 + \sin\theta_1) + \frac{l_2}{2}(2 + \sin\theta_2)\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Raccogliendo i termini che dipendono dallo stesso angolo si ottiene un'espressione dell'energia potenziale che sarà più utile in seguito.

$$V = \left(m_1 + \frac{b_1}{2} + m_2 + b_2 \right) g l_1 (1 + \sin \theta_1) + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) g l_2 (1 + \sin \theta_2) + \\ + m_1 g l_1 + b_1 g \frac{3}{2} l_2 + b_2 g \frac{l_2}{2} \quad (3)$$

Scrivendo l'energia in questa forma riusciamo a ottenere la dipendenza da due parametri indipendenti che sono i due angoli, e dai sei parametri fissi.

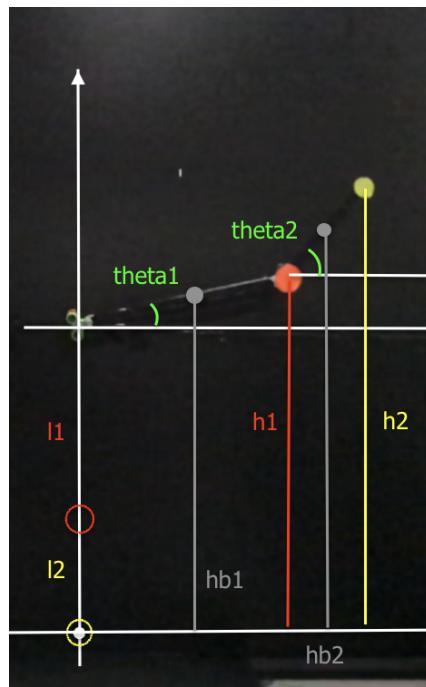


Figura 9: Rappresentazione degli assi cartesiani e delle altezze utilizzate per il calcolo dell'energia potenziale.

Scriviamo l'energia cinetica dei corpi di massa m_1 e b_1 .

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} b_1 v_{b_1}^2 + \frac{1}{2} I_{b_1} \omega_1^2 \quad (4)$$

È costituita da tre termini: il primo è l'energia cinetica dell'articolazione centrale, il secondo del centro di massa del primo braccio e il terzo è il contributo del momento d'inerzia del braccio. I_{b_1} corrisponde al momento di inerzia di una sbarra sottile di massa b_1 e lunghezza l_1 per cui l'asse di rotazione passa in uno dei suoi estremi, quindi $I_{b_1} = \frac{1}{3} b_1 l_1^2$. Per ottenere il modulo della velocità in funzione del quadrato della velocità angolare basta moltiplicare la velocità angolare per la distanza dal centro di rotazione. La massa m_1 e il braccio b_1 si muovono con la stessa velocità angolare; la differenza è che la prima si trova a distanza l_1 dal centro, mentre il centro di massa del secondo si trova a distanza $\frac{l_1}{2}$. Si ha, quindi:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} b_1 \left(\frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (5)$$

Raccogliendo notiamo che è possibile sommare alla massa m_1 due contributi che provengono rispettivamente dall'energia cinetica relativa al moto del centro di massa e dal momento d'inerzia del braccio:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{b_1}{4} + \frac{b_1}{3} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (6)$$

Scriviamo l'energia cinetica dei corpi di massa m_2 e b_2 .

Per la massa m_2 il conto è più complicato perché alla velocità \vec{v}_2 con cui essa si muove è necessario sommare vettorialmente la velocità \vec{v}_1 con cui si muove il punto attorno al quale essa ruota, che è la posizione dell'articolazione m_1 . Queste velocità sono quelle tangenziali quindi sono perpendicolari ai rispettivi bracci. Un ragionamento analogo vale per la massa b_2 con velocità \vec{v}_{b_2} parallela a \vec{v}_2 ; inoltre per quest'ultima, essendo il braccio un corpo rigido, è necessario anche tener conto del momento d'inerzia. Per il fatto che il secondo corpo ruota attorno a un punto in moto si ha la presenza di termini misti che contengono il prodotto di una velocità per l'altra.

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 + \frac{1}{2} b_2 (\vec{v}_1 + \vec{v}_{b_2})^2 + \frac{1}{2} I_{b_2} \omega_2^2 \quad (7)$$

Svolgendo i conti:

$$\begin{aligned} E_{k2} = & \frac{1}{2} (m_2 + b_2) v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} b_2 v_{b_2}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + b_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_{b_2} \end{aligned} \quad (8)$$

Come prima sfruttiamo il vantaggio che $v_2 = l_2 \dot{\theta}_2$ e $v_{b_2} = \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2$ per far comparire nell'espressione i gradi di libertà. Inoltre si ricorda che il prodotto scalare tra i due vettori velocità è uguale al prodotto dei moduli delle velocità per il coseno dell'angolo tra di essi, che in questo caso è $(\theta_1 - \theta_2)$, facendo semplici considerazioni goniometriche.

$$\begin{aligned} E_{k2} = & \frac{1}{2} (m_2 + b_2) (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} b_2 \left(\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + m_2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + b_2 v_1 l_1 \dot{\theta}_1 \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Raccogliendo i termini simili:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} (m_2 + b_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{b_2}{4} + \frac{b_2}{3} \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (10)$$

L'energia cinetica totale ottenuta come somma delle due precedenti è:

$$\begin{aligned} E_k = & \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{b_1}{4} + \frac{b_1}{3} + m_2 + b_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{b_2}{4} + \frac{b_2}{3} \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (11)$$

L'Hamiltoniana che nel nostro caso rappresenta l'energia, è data dalla somma di energia potenziale e energia cinetica:

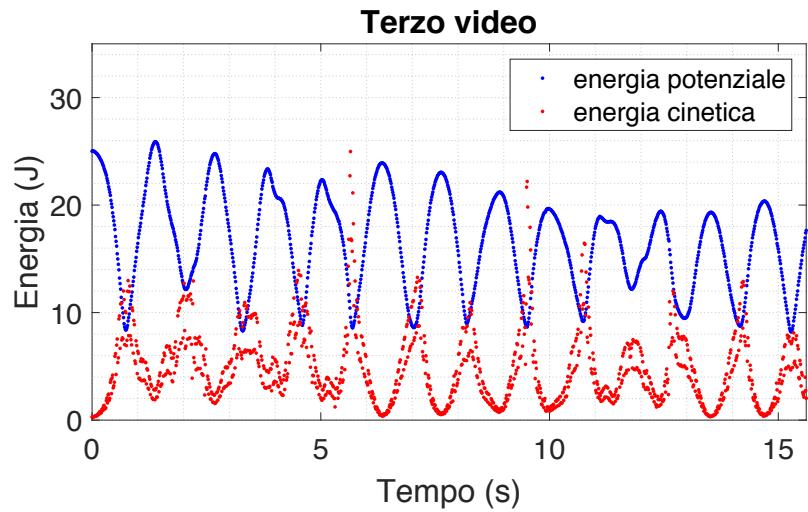
$$\begin{aligned} H = V + E_k = & \left(m_1 + \frac{1}{2}b_1 + m_2 + b_2 \right) gl_1(1 + \sin \theta_1) + \left(m_2 + \frac{1}{2}b_2 \right) gl_2(1 + \sin \theta_2) + \\ & + \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{7}{12}b_1 + m_2 + b_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{7}{12}b_2 \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (12)$$

Ora abbiamo ordinato i termini in modo che le dipendenze dagli angoli e dalle velocità angolari siano chiare; possiamo quindi rappresentarla per una delle misure effettuate.

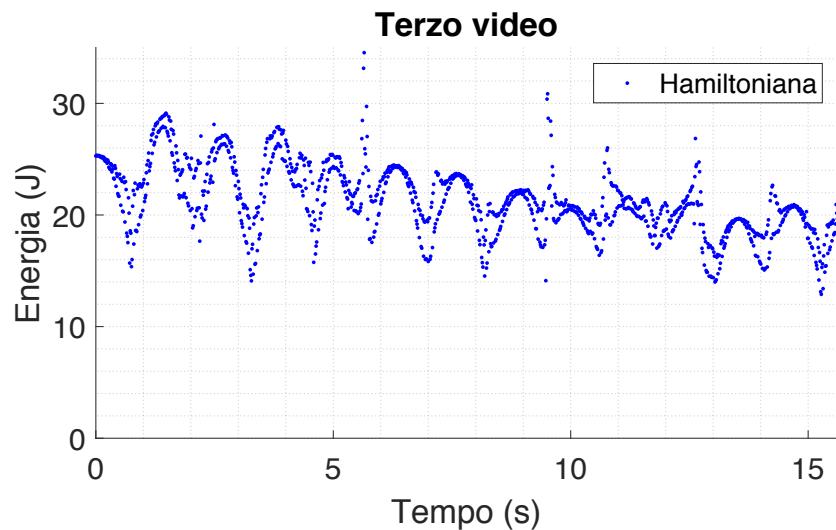
Mostriamo gli andamenti delle due energie separate e dell'energia totale in figura (10). Per trovarli abbiamo inserito i dati riguardanti i gradi di libertà nel tempo misurati e i valori delle costanti riportati in tabella (1).

Possiamo scrivere la Lagrangiana, definita da $E_k - V$; è con questa, avendo posizioni e velocità, che, tramite le equazioni di Lagrange, otteniamo le equazioni del moto. Siccome le equazioni si ottengono derivando la lagrangiana è chiaro che si tratta di equazioni non lineari, prerequisito fondamentale per la caoticità del moto.

$$\begin{aligned} L = E_k - V = & \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{7}{12}b_1 + m_2 + b_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{7}{12}b_2 \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \\ & - \left(m_1 + \frac{b_1}{2} + m_2 + b_2 \right) gl_1(1 + \sin \theta_1) + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) gl_2(1 + \sin \theta_2) + \\ & + m_1 gl_1 + b_1 g \frac{3}{2} l_2 + b_2 g \frac{l_2}{2} \end{aligned} \quad (13)$$



(a) *Energia potenziale e cinetica in funzione del tempo. Si nota come i picchi di una corrispondano alle valli dell'altra.*



(b) *Hamiltoniana del sistema; l'energia decresce.*

Figura 10: Andamento dell'energia per una delle misure effettuate. L'energia ottenuta non è perfettamente costante e decresce nel tempo.

7 Equazioni del moto delle piccole oscillazioni

L'hamiltoniana calcolata nella sezione precedente è valida anche per le piccole oscillazioni; in questo caso, però, può essere approssimata per piccoli angoli attorno al punto di equilibrio in modo che si abbia un'equazione lineare. Studiamo come cambia l'espressione dell'energia e in particolare ricaviamo i modi normali del moto.

Innanzitutto studiamo più approfonditamente l'equazione dell'energia potenziale (prima di approssimarla) come funzione dei due angoli θ_1 e θ_2 ; partendo dalla (3), la scriviamo in una forma più congeniale ai nostri scopi: sottraiamo i termini costanti, essendo l'energia potenziale definita a meno di una costante, e sostituiamo tutte le variabili che non dipendono dagli angoli con un singola costante.

$$\begin{aligned} V = & \left(m_1 + \frac{b_1}{2} + m_2 + b_2 \right) gl_1(1 + \sin \theta_1) + \left(m_2 + \frac{b_2}{2} \right) gl_2(1 + \sin \theta_2) + \\ & + m_1 gl_1 + b_1 g \frac{3}{2} l_2 + b_2 g \frac{l_2}{2} - m_1 gl_1 - b_1 g \frac{3}{2} l_2 - b_2 g \frac{l_2}{2} = \\ & = a(1 + \sin \theta_1) + b(1 + \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (14)$$

I valori delle costanti sono in tabella 2.

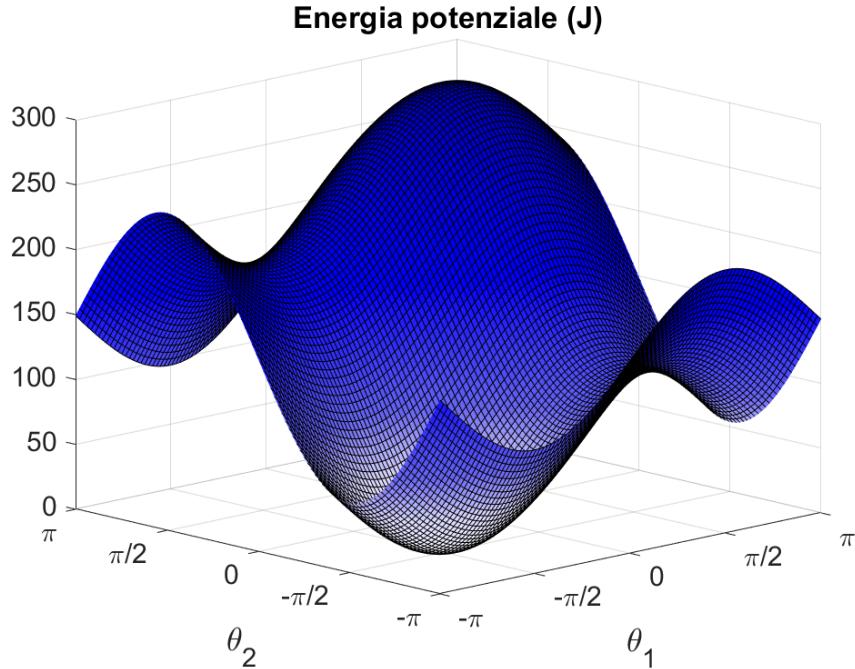


Figura 11: Energia potenziale in funzione dei due parametri angolari, si nota il minimo delineato dal colore più chiaro.

Rappresentiamo tale andamento nel grafico (11), avendo fatto variare i due angoli tra $-\pi$ e π . Come si può notare vi è un minimo dell'energia potenziale che corrisponde, per definizione, ad un punto di equilibrio stabile del sistema. Nel nostro caso tale punto si ha quando i bracci sono completamente stesi e puntano verso il terreno; infatti esso corrisponde al punto $(\theta_1, \theta_2) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, come ben si vede dal grafico. Un qualsiasi sistema, se si trova in un punto di equilibrio, quando viene perturbato compie delle piccole oscillazioni attorno a tale punto;

il moto analizzato per le piccole oscillazioni avviene esattamente attorno a questo punto, quindi abbiamo dimostrato che l'Hamiltoniana ottenuta è coerente al sistema analizzato.

Il potenziale in tale punto si annulla e può essere approssimato tramite un paraboloide grazie allo sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine. Approssimiamo al secondo ordine l'equazione (14):

$$V = a(1 + \sin \theta_1) + b(1 + \sin \theta_2) \simeq \frac{1}{2}a\theta_1^2 + \frac{1}{2}b\theta_2^2 \quad (15)$$

Allo stesso modo di prima cioè sostituendo i parametri con delle costanti riscriviamo la (11) ossia l'energia cinetica:

$$E_k = \frac{1}{2}c\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}d\dot{\theta}_2^2 + e\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2}c\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}d\dot{\theta}_2^2 + f(\theta_1, \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad (16)$$

I valori delle costanti sono in tabella 2.

L'energia cinetica non va approssimata, ma abbiamo un coefficiente che dipende dalle coordinate; questo va calcolato nel punto di equilibrio:

$$E_k = \frac{1}{2}c\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}d\dot{\theta}_2^2 + f\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2}c\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}d\dot{\theta}_2^2 + e\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad (17)$$

$a = (m_1 + \frac{b_1}{2} + m_2 + b_2)gl_1 = (2.27 \pm 0.05) \text{ Nm}$
$b = (m_2 + \frac{b_2}{2})gl_2 = (0.17 \pm 0.03) \text{ Nm}$
$c = (m_1 + \frac{b_1}{4} + \frac{b_1}{3} + m_2 + b_2)l_1^2 = (0.119 \pm 0.006) \text{ Nms}^2$
$d = (m_1 + \frac{b_1}{4} + \frac{b_1}{3})l_2^2 = (0.034 \pm 0.009) \text{ Nms}^2$
$e = (m_2 + \frac{b_2}{2})l_1 l_2 = (0.008 \pm 0.001) \text{ Nms}^2$

Tabella 2: Espressione e valore delle costanti in funzione dei parametri del sistema. Abbiamo riportato i relativi errori a partire da quelli che abbiamo su tutti i parametri misurati, (tabella (1)), ottenuti per propagazione degli errori.

L'hamiltoniana finale è:

$$H \simeq \frac{1}{2}c\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}d\dot{\theta}_2^2 + e\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}a\theta_1^2 + \frac{1}{2}b\theta_2^2 \quad (18)$$

mentre la lagrangiana:

$$L \simeq \frac{1}{2}c\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}d\dot{\theta}_2^2 + e\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}a\theta_1^2 - \frac{1}{2}b\theta_2^2 \quad (19)$$

dalla quale si hanno le leggi del moto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

cioè:

$$(21)$$

$$\begin{cases} a\theta_1 = -c\ddot{\theta}_1 - e\ddot{\theta}_2 \\ b\theta_2 = -d\ddot{\theta}_2 - e\ddot{\theta}_1 \end{cases}$$

Come si nota da queste espressioni le equazioni sono lineari quindi il sistema non presenta caoticità.

7.1 Modi normali di oscillazione

Esiste una trasformazione di coordinate canonica a partire da $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ che permette di ottenere $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ in modo che questi oscillino armonicamente con frequenze ν_1 e ν_2 . Infatti le coordinate iniziali non oscillano armonicamente e il loro andamento nel tempo è dato dalle (21), ma esiste tale trasformazione lineare di coordinate per cui altre coordinate hanno questo moto:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 - \nu_1^2 \alpha_1 = 0 \\ \ddot{\alpha}_2 - \nu_2^2 \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Tali traiettorie sono chiamati modi normali del sistema, oscillanti con le pulsazioni proprie del sistema.

Questo indica che la soluzione delle equazioni linearizzate stabilisce che il moto di un sistema meccanico conservativo con due coordinate generalizzate intorno alla posizione di equilibrio, nell'approssimazione di piccole perturbazioni, è composto da due moti armonici indipendenti l'uno dall'altro.

Procedura di lavoro Quello che vogliamo fare è trovare le due frequenze di oscillazione; è necessario ricavare il cambio di coordinate, cioè la matrice S per cui:

$$(\theta_1 \quad \theta_2) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \quad \alpha_2)$$

Questo ci permette di ricavare i due modi normali in funzione delle coordinate iniziali:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= S_{11} \cdot \theta_1(t) + S_{21} \cdot \theta_2(t) \\ \alpha_2(t) &= S_{12} \cdot \theta_1(t) + S_{22} \cdot \theta_2(t) \end{aligned} \tag{22}$$

Queste equazioni mostrano come le variabili angolari originali siano una combinazione lineare di due oscillatori armonici con le due frequenze proprie del sistema. Avendo le misure di $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ potremo fissare tali andamenti con la somma di due oscillatori armonici e vedere se le frequenze trovate corrispondono a quelle teoriche proprie del sistema.

Forma matriciale Per trovare la trasformazione di coordinate e le frequenze di oscillazione dobbiamo riscrivere in forma matriciale la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.

Per farlo serve innanzitutto riscrivere l'energia potenziale e quella cinetica tramite delle matrici che chiameremo T per l'energia cinetica e U per l'energia potenziale, le quali sono, a meno di un fattore $1/2$, le matrici associate alle due forme quadratiche definite positive delle energie, in questo modo:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\ V &= \frac{1}{2} (\theta_1 \quad \theta_2) \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dalla (15) e dalla (17) si hanno subito le componenti di tali matrici; le matrici sono simmetriche e per quanto riguarda U la matrice è già diagonale perché non compaiono termini misti:

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} c & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & d \end{pmatrix}$$

I valori delle costanti sono in tabella 2.

A questo punto si ha:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2) T \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\theta_1 \quad \theta_2) U \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Possiamo modificare le equazioni di Lagrange (equazione (20)) tramite l'espressione appena scritta, in modo da ottenere il loro equivalente in forma matriciale:

$$(\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2) T + (\theta_1 \quad \theta_2) U = 0 \quad (24)$$

Per ora, quindi, abbiamo semplicemente riscritto le equazioni trovate nel paragrafo precedente in forma matriciale; ora le modifichiamo per ottenere S. Moltiplicando per T^{-1} si ha:

$$(\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2) + (\theta_1 \quad \theta_2) (T^{-1} * U) = 0 \quad (25)$$

L'asterisco indica il prodotto tra matrici.

La matrice $(U * T^{-1})$ in generale non è diagonale, ma è diagonalizzabile, perciò esiste un matrice ortogonale S tale che:

$$S^T * (T^{-1} * U) * S = (T^{-1} * U)_{\text{diag.}} \quad (26)$$

Riarrangiando l'equazione (25) tramite moltiplicazioni per la matrice S e per S^T si ottiene:

$$(\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2) S + (\theta_1 \quad \theta_2) S * (T^{-1} * U)_{\text{diag.}} = 0$$

cioè

$$(\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} + (\theta_1 \quad \theta_2) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^2 & 0 \\ 0 & \nu_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

Abbiamo quindi trovato la matrice di cambio di base S che è la matrice che diagonalizza la matrice $(U * T^{-1})$ definita positiva e ν_1^2, ν_2^2 sono gli autovalori di quest'ultima. Sostituendo con le nuove coordinate come nell'equazione (22) si ottengono i modi normali; infatti dall'equazione precedente si hanno due oscillatori armonici:

(27)

$$(\ddot{\alpha}_1 \quad \ddot{\alpha}_2) + (\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} \nu_1^2 & 0 \\ 0 & \nu_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

Analisi dati Avendo trovato le matrici T e U in funzione dei parametri del sistema abbiamo calcolato la matrice $(U * T^{-1})$, l'abbiamo diagonalizzata ottenendo sia S che le due frequenze: $\nu_1 = (4.37 \pm 0.16)$ rad/s e $\nu_2 = (2.18 \pm 0.19)$ rad/s, il cui errore è stato calcolato per propagazione degli errori sulle costanti del sistema.

Possiamo quindi eseguire il fit degli andamenti di $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ tramite la somma di seni e verificare che le frequenze con cui oscillano siano compatibili con quelle trovate teoricamente.

L'andamento dei due angoli in funzione del tempo ottenuto dalle misure eseguite sarà descritto dettagliatamente nella sezione (9.1) e in particolare nelle figure (23) e (24); quello che si nota che è prevedibile a priori è che, per piccole oscillazioni, l'angolo θ_1 oscilla nel tempo abbastanza regolarmente risentendo poco del secondo braccio, mentre θ_2 è influenzato, seppur in modo leggero, dal primo braccio e ha oscillazioni più irregolari. Ci aspettiamo, quindi, che θ_1 oscilli con una delle due frequenze e risenta poco dell'altra e θ_2 sia una combinazione dei due modi di oscillazione con prevalenza di quella con cui oscilla anche l'altro angolo.

La funzione utilizzata per il fit di entrambe è:

$$A \sin(Bt + C) + D \sin(Et) + F \quad (28)$$

La nostra scelta è stata quella di lasciare libere le frequenze e vedere i valori restituiti dal fit. Riportiamo le frequenze ottenute per le tre misure eseguite in tabella (3); nella figura (12) è riportato un esempio di fit per una delle misure eseguite.

Parametro	Misura 1		Misura 2		Misura 3	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
A [rad]	0.152	0.241	0.147	0.295	0.159	0.252
B [rad/s]	2.89	2.91	2.95	2.98	2.99	2.93
D [rad]	0.00756	0.0659	0.000623	0.0157	0.000603	0.0137
E [rad/s]	4.08	4.07	4.01	4.09	4.14	4.03

Tabella 3: Valori dei parametri liberi restituiti dal fit. Gli errori non sono riportati in quanto non possediamo dei pesi per eseguire il fit. Si nota che per il primo angolo i valori di D sono quasi trascurabili, come previsto, ma anche quelli del secondo angolo sono comunque piccoli, rispetto ai valori di A .

Le misure eseguite sono state analizzate separatamente, ma siccome si tratta della stessa misura, essendo il moto del pendolo per piccoli angoli non caotico, possiamo eseguire la media dei valori di frequenze ottenuti, cioè la media dei sei valori di B delle tre misure per entrambi gli angoli. Le medie ottenute sono $\nu_1 = (4.08 \pm 0.04)$ rad/s e $\nu_2 = (2.94 \pm 0.03)$ rad/s. Avendo solo tre misure l'errore è piuttosto piccolo; i valori sembrano, però, affetti da una sistematica rispetto ai teorici. La sistematica può essere dovuta a errori nella stima dei parametri del sistema e tali errori potrebbero a loro volta aver causato imprecisioni nella stima dei parametri utilizzati per il calcolo teorico delle frequenze. La sistematica può anche essere dovuta all'effetto della perdita di energia, la quale potrebbe modificare la dinamica del sistema in maniera non prevista dai calcoli teorici.

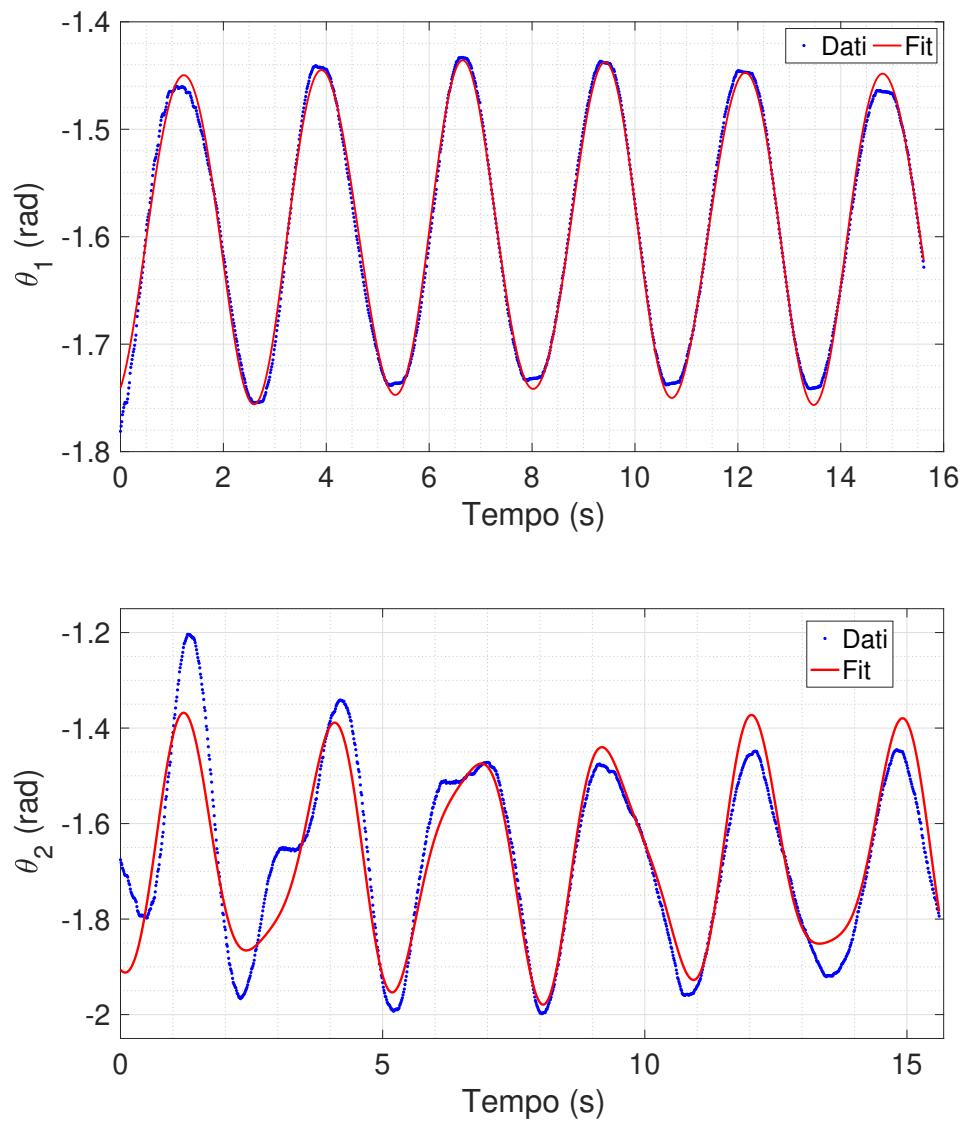


Figura 12: Fit degli angoli θ_1 e θ_2 in funzione del tempo tramite una combinazione lineare di due seni, per una delle misure eseguite.

8 Decrescita dell'energia

Avendo energia cinetica ed energia potenziale del pendolo doppio possiamo vedere come decresce l'energia nel tempo, non essendo perfettamente conservata, sia per le misure del moto caotico che per quelle delle piccole oscillazioni. In particolare abbiamo scelto di utilizzare solo l'energia potenziale in quanto aggiungendo quella cinetica l'andamento diventava troppo irregolare e risultava difficile distinguere i picchi.

In particolare il pendolo doppio perde velocità e quindi energia nel tempo e possiamo stimare la scala temporale in cui l'energia decresce supponendo un decadimento esponenziale dell'ampiezza di oscillazione nel tempo $\simeq e^{-t\lambda}$ con t variabile tempo e $\lambda = 1/\tau$ costante di decadimento. Per stimare τ abbiamo preso il logaritmo dell'energia potenziale per ogni misura eseguita e dall'equazione:

$$V \simeq e^{-t/\tau} \Rightarrow \log(V) \simeq -t/\tau \quad (29)$$

Con V si intende l'ampiezza del potenziale, quindi l'andamento dei picchi di energia nel tempo.

abbiamo eseguito un fit lineare dell'andamento dei picchi. Gli errori sulla costante τ sono stati ricavati dal fit. In particolare avendo il coefficiente angolare delle retta (m) dal fit abbiamo ricavato il suo errore con un livello di confidenza del 95%. Dall'equazione (29) otteniamo che $\tau = -1/m$, quindi utilizzando la propagazione degli errori si ottiene che

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_m}{m^2} \quad (30)$$

σ_{tau} =errore su τ ;

σ_m =errore sul coefficiente angolare;

m =coefficiente angolare.

Non possediamo errori sulle misure di energia proprio perché il moto caotico in sé è non riproducibile e non si può eseguire più volte la stessa misura; quindi non abbiamo errori sui dati e non si sono aggiunti i pesi nel fit. L'errore su τ trovato dal fit è indicativo della bontà del fit, nel caso di errori ragionevoli.

Riporteremo solo i grafici di una misura a titolo esemplificativo.

Moto caotico L'andamento dell'energia potenziale e dei relativi picchi è riportato in figura (13), mentre il fit lineare in figura (14). Dal fit ricaviamo i valori di τ , per ognuna delle cinque misure svolte, che sono riportati in tabella (4). Facendo una media pesata sulle costanti di decadimento otteniamo che $\tau = (43 \pm 9)$ s con l'errore sulla media pesata, calcolato tramite l'equazione:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N w_i}} \quad (31)$$

σ =errore sulla media pesata;

$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ =peso sulla misura i -esima;

N =numero di misure.

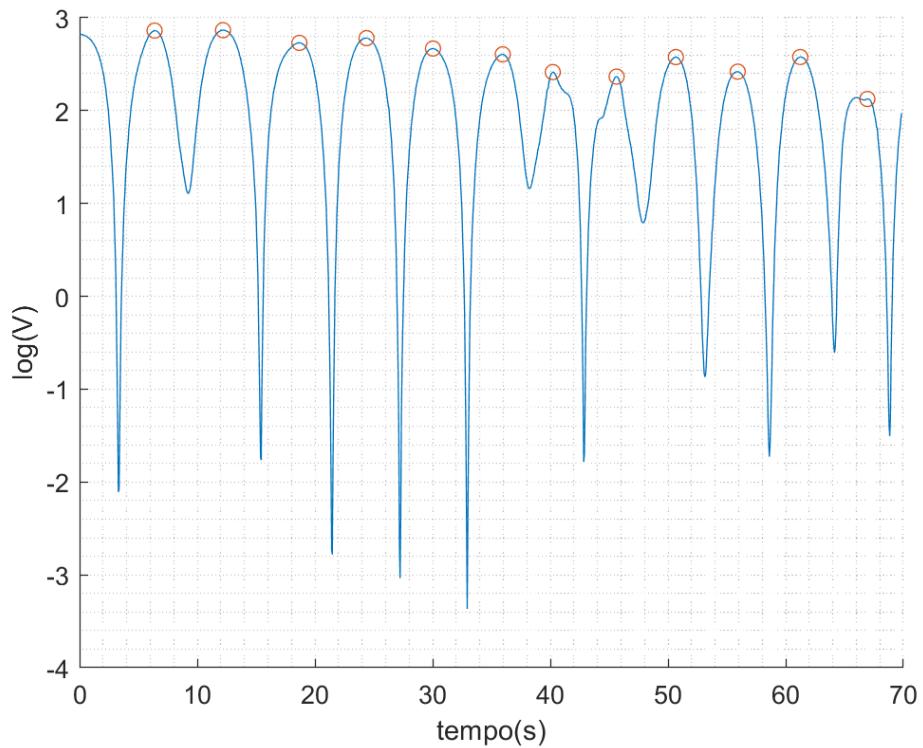


Figura 13: Picchi del logaritmo dell'energia potenziale in funzione del tempo.

Numero Misura	τ [s]
1	44 ± 26
2	45 ± 23
3	43 ± 18
4	44 ± 20
5	38 ± 18

Tabella 4: Tabella in cui vengono mostrati i valori ricavati della costante di decadimento τ .

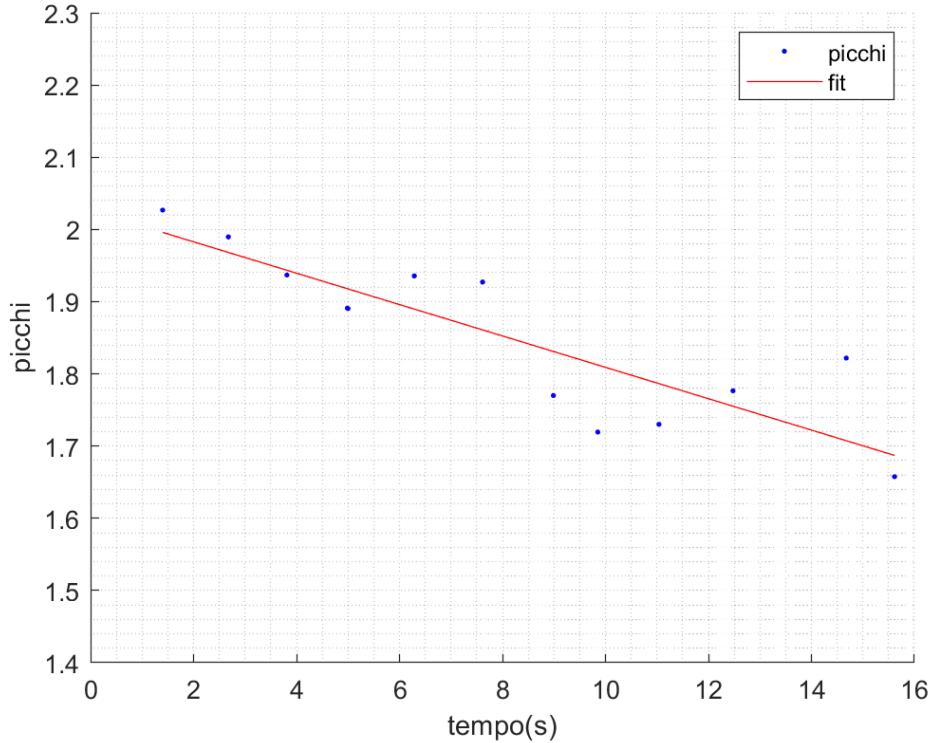


Figura 14: Fit lineare dei picchi del logaritmo dell’energia potenziale in funzione del tempo.

Piccole oscillazioni Per le piccole oscillazioni, invece, si è utilizzata l’energia potenziale approssimata, equazione (15). L’andamento dell’energia potenziale e dei relativi picchi è riportato in figura (15), mentre il fit lineare in figura (16). Dal fit ricaviamo i valori di τ che riportiamo in tabella (5). L’errore su τ è stato calcolato utilizzando l’equazione (30). Facendo una media sulle costanti di decadimento otteniamo che $\tau = (553 \pm 232)$ s, con l’errore sulla media calcolato con l’equazione (31).

Notiamo che nel caso delle piccole oscillazioni la scala temporale su cui l’energia decresce è molto più grande.

Numero Misura	τ [s]
1	1041 ± 684
2	205 ± 110
3	414 ± 68

Tabella 5: Tabella in cui vengono mostrati i valori ricavati della costante di decadimento τ per le piccole oscillazioni. I tre tempi si diversificano molto tra loro; una possibile spiegazione è la non precisione del fit lineare per i picchi, non essendo i dati dotati di pesi.

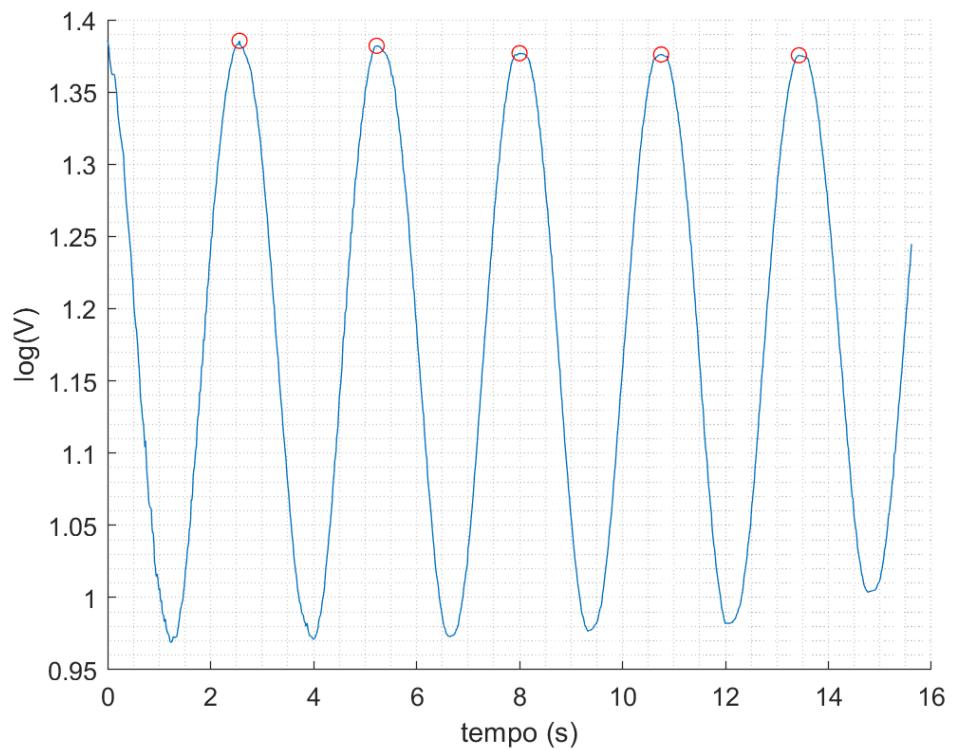


Figura 15: Picchi del logaritmo dell'energia potenziale in funzione del tempo per le piccole oscillazioni.

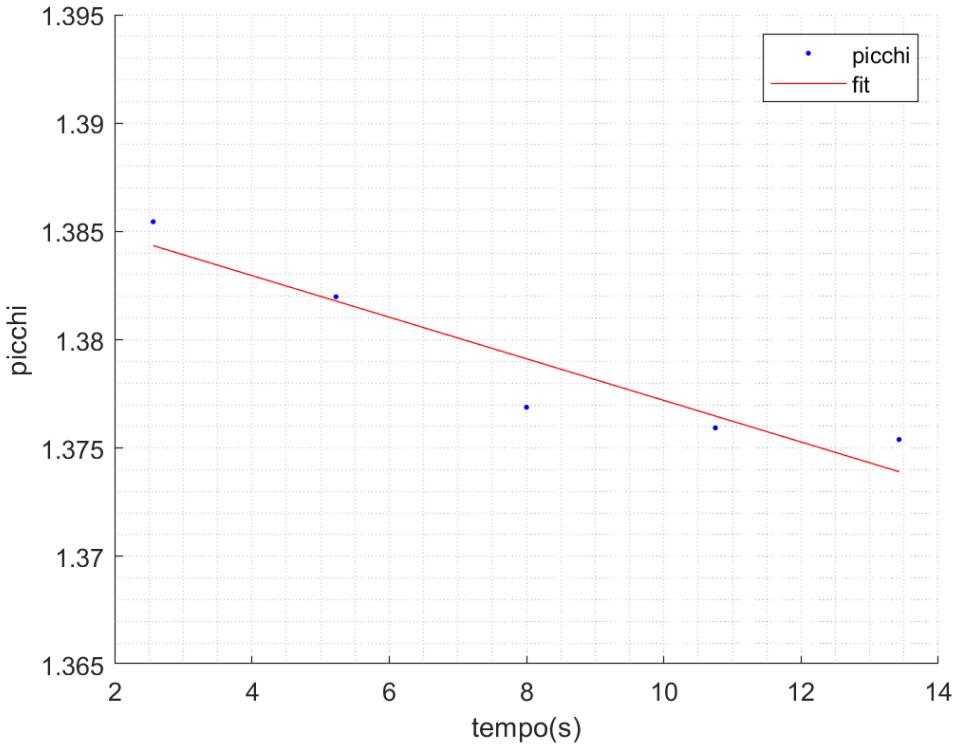


Figura 16: Fit lineare dei picchi del logaritmo dell'energia potenziale in funzione del tempo per le piccole oscillazioni.

Conclusioni Il fatto che, nelle piccole oscillazioni, la scala temporale in cui varia l'energia sia molto maggiore rispetto a quella del moto caotico risulta essere corretto in quanto per le piccole oscillazioni il pendolo si muove molto poco e quindi l'attrito può considerarsi trascurabile, al contrario del moto caotico in cui, invece, l'attrito risulta essere molto più importante.

In conclusione vogliamo poter fare delle misure in cui si possa considerare l'energia approssimativamente costante; perciò non è sufficiente fare semplicemente una media su tutti i valori di τ ad ogni istante, ma dobbiamo stimare un lasso di tempo, ovviamente sufficientemente piccolo, per cui possiamo affermare che l'energia è appunto costante.

Questo lasso di tempo deve essere minore della costante di decadimento. In più, dato che vogliamo confrontare le diverse misure, si è scelto lo stesso lasso temporale per tutte.

Noi abbiamo scelto di prendere una lasso di tempo di 16 s che risulta sicuramente minore della costante di decadimento tenendo conto del grande errore che l'accompagna nelle diverse misure. Il motivo della scelta riguarda anche la difficoltà nel tracciamento del pendolo per un tempo troppo lungo.

9 Spazio delle fasi

La nostra analisi si svolgerà quasi esclusivamente nello spazio delle fasi; una rappresentazione nello spazio delle fasi del sistema permette di dare una descrizione del sistema dinamico facendo particolare riferimento alle variabili di stato, le quali formano uno spazio vettoriale in cui esso viene rappresentato. I punti di questo spazio rappresentano univocamente tutti e soli i possibili stati del sistema; quindi, uno "stato" del sistema è un insieme dei valori di tutte quelle grandezze, dette variabili di stato, ad un certo istante temporale. La dimensione di tale spazio vettoriale è pari al doppio del numero di gradi di libertà del sistema e la scelta delle coordinate usate per generare lo spazio delle fasi risulta cruciale nella caratterizzazione del moto.

Nel nostro caso le variabili utilizzate sono quelle citate nella sezione introduttiva sull'acquisizione delle misure (par. (4)) e cioè θ_1 , θ_2 , ω_1 , ω_2 . Si tratta quindi di uno spazio delle fasi quadridimensionale, come ci si aspetterebbe sapendo che sono due i gradi di libertà. Bisogna poi considerare che il sistema è hamiltoniano e quindi si ha energia costante; il moto si svolge, quindi, in uno spazio tridimensionale a energia costante in modo che le variabili indipendenti siano tre. Questo è il numero minimo di grandezze indipendenti affinché si presenti il caos.

Presentazione del lavoro Inizialmente analizzeremo una sola misura come esempio di tutte: manterremo tutte e 4 le grandezze cercando di realizzare dei grafici quadridimensionali. Successivamente studieremo la caoticità del moto inizialmente tramite la rappresentazione di alcune sezioni di Poincaré e poi con l'analisi combinata delle diverse misure, in modo da calcolare gli esponenti di Lyapunov.

9.1 Traiettoria nello spazio delle fasi

L'altra traiettoria rappresentabile, oltre a quella nello spazio reale presentata nella sezione (7), è quella nello spazio delle fasi. Nello spazio delle fasi, l'evoluzione del pendolo doppio appare come una successione di punti, avendo sperimentalmente caratterizzato in maniera discreta il sistema dinamico.

Moto Caotico

Come si vede in figura (6) l'asse rispetto al quale vengono forniti gli angoli θ_1 e θ_2 è quello delle ascisse del rispettivo sistema di riferimento. Siccome è desiderabile avere come angolo nullo quello per cui il pendolo è disposto verticalmente, siccome abbiamo dimostrato che si tratta del punto di equilibrio, abbiamo riscalato i valori di angolo semplicemente sommando $\pi/2$ ai precedenti valori. Il cambiamento non riguarda le velocità le quali sono variazioni nel tempo dell'angolo e quindi non dipendono dalla traslazione eseguita.

I valori di velocità angolare risultano positivi dove l'angolo cresce e negativi dove l'angolo decresce; il segno è a priori indipendente dal verso di rotazione, ma ovviamente nel momento in cui il pendolo passa da un senso di rotazione all'altro avrà istantaneamente velocità nulla e successivamente la velocità aumenterà se il senso di rotazione passa da antiorario a orario o diminuirà se succede il contrario, quindi i massimi di velocità saranno positivi se il pendolo ruota in senso orario e negativi se il pendolo ruota in senso antiorario.

Eseguiamo prima un'analisi del moto delle due masse in funzione del tempo e successivamente analizziamo il sistema nella sua totalità, per una sola delle misure eseguite.

Prima massa Per quanto riguarda l' angolo θ_1 i valori assunti sono centrati in 0 e oscillano tra circa -2.60 rad e 2.60 rad; il valore iniziale è $\theta_1(0) = 2.55$ rad. I rispettivi valori di velocità sono, come ci si può aspettare, minimi per angoli massimi in valore assoluto, e massimi tutte le volte in cui il pendolo ripassa per $\theta_1 = 0$, quindi anche tale grandezza oscilla.

Riportiamo in figura (17) quello che è appena stato descritto.

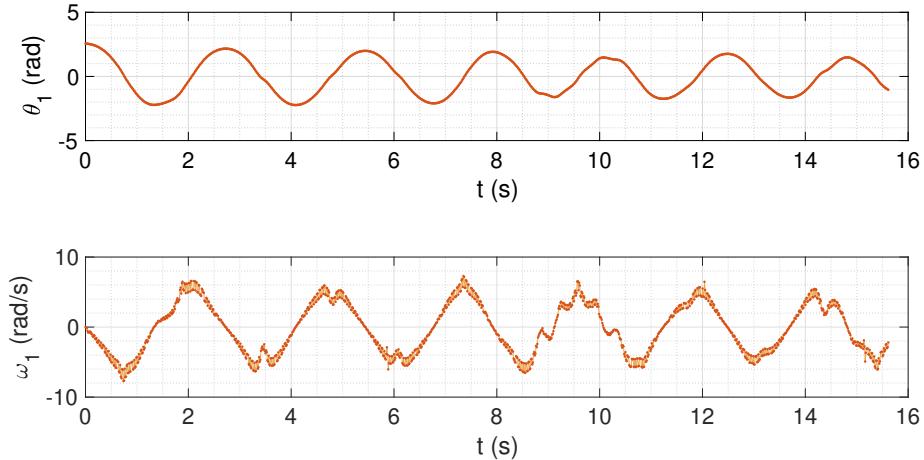


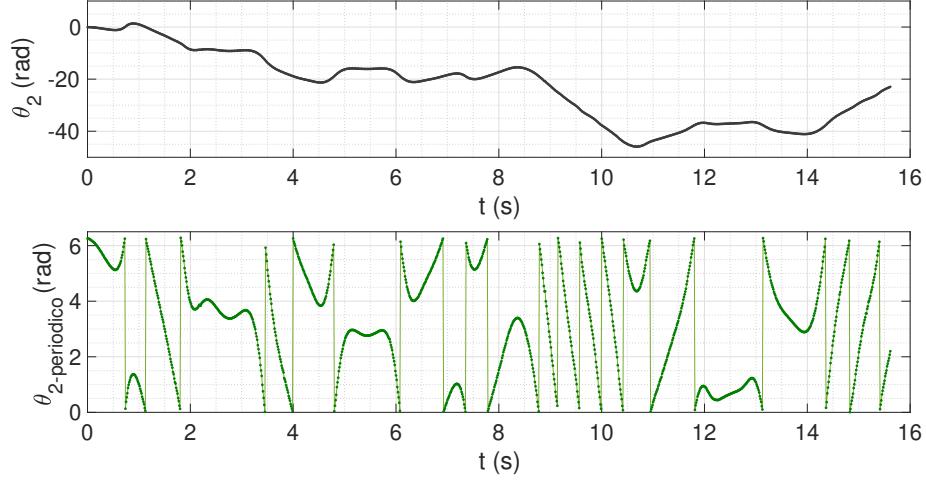
Figura 17: Angolo e velocità angolare in funzione del tempo per la prima massa. Si nota l'oscillazione attorno a $\theta_1 = 0$ e la leggera decrescenza nell'ampiezza dell'oscillazione dovuta all'attrito e alla conseguente perdita di energia. I massimi della velocità angolare, come detto si hanno per valori nulli dell'angolo e viceversa per valori massimi dell'angolo si ha velocità nulla. Dal secondo grafico si nota che la velocità sembra a istanti di tempo molto vicini oscillare leggermente.

Seconda massa La seconda massa, invece, ha valore iniziale circa nullo e ha un moto molto più denso e articolato, molto meno prevedibile; infatti la massa più piccola, pur in un tempo breve di poco più di 15 secondi, esegue parecchi giri completi attorno all'altra massa per cui l'angolo non oscilla semplicemente come il precedente, ma ha valori che vanno da -50 rad a 10 rad. Infatti, l'angolo passa velocemente e continuamente da $2\pi \approx 6.28$ rad a 0, compiendo giri completi, ma il software Tracker supera 2π continuando a aumentare il valore dell'angolo senza tornare a 0; il valore aumenta in valore assoluto se la massa continua a ruotare in quel verso e diminuisce in caso di cambio verso. Per periodizzare i valori e avere quindi θ_2 su un toro che varia da 0 a 2π basta considerare:

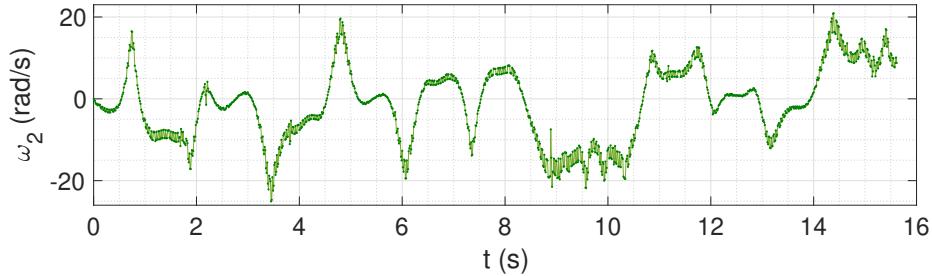
$$\theta_2^{\text{periodico}}(t) = \arg(e^{i \cdot \theta_2(t)}) \quad (32)$$

Per la massa precedente il problema non si presentava non compiendo mai un giro intero. Per chiarire il moto della seconda massa riportiamo in figura (18) l'andamento, in funzione del tempo, di θ_2 e $\theta_2^{\text{periodico}}$.

L'andamento della rispettiva velocità angolare è anch'esso rappresentato in figura (18).



(a) In entrambi i grafici si ha che dove la curva aumenta, cioè ha pendenza positiva, la rotazione sta avvenendo in senso orario, mentre se decresce sta avvenendo in senso antiorario. La differenza nei due grafici sta nella rappresentazioni delle rotazioni complete; nel primo queste sono una decrescita o una crescita prolungata, mentre nel secondo sono linee decrescenti o crescenti che passano tutti i valori di angolo da 0 a 2π . Il secondo grafico permette di apprezzare meglio il numero di giri. Ad esempio, per istanti vicini a $t = 10$ s abbiamo una decrescenza prolungata nel primo grafico seguita da una salita, indice, come si vede bene nel secondo grafico, del fatto che la massa abbia compiuto 5 rotazioni complete in senso antiorario attorno alla prima massa per poi cambiare verso e ricompiere un giro completo in senso orario.



(b) Riguardo alla velocità angolare possiamo dire che il valore è nullo tutte le volte in cui si passa da un senso di rotazione a quello opposto, come avviene per la prima massa quando arriva agli estremi dell'oscillazione e deve cambiare verso. Ad esempio, sempre intorno a $t = 0$ s, i valori di velocità sono all'incirca costanti attorno ad un valore di -15 rad/s indice del fatto che le 5 rotazioni avvengono circa a velocità costante (la pendenza della retta nel grafico precedente è all'incirca costante) e successivamente hanno una decrescita in valore assoluto che corrisponde al cambio verso della massa. Anche in questo caso i valori di velocità variano molto istante per istante.

Figura 18: Angolo e velocità angolare in funzione del tempo per la seconda massa. Per quanto riguarda l'angolo si riporta sia quello restituito dal programma che quello che varia su un toro.

Avendo analizzato separatamente i moti delle due masse in funzione del tempo e avendo collegato il comportamento degli angoli e delle velocità angolari possiamo rappresentarli complessivamente nello spazio delle fasi in figura (22); abbiamo scelto di rappresentare sui tre assi le variabili θ_1, θ_2 e ω_1 , utilizzando il colore per la variazione della quarta grandezza ω_2 . Inoltre rappresentiamo due piani dello spazio quadridimensionale che illustrano separatamente i due spazi delle fasi per la massa più piccola e per quella più grande, figure (19) e (21); la forma di tali grafici segue direttamente dalle considerazioni appena fatte sul comportamento delle velocità angolari in funzione del rispettivo angolo. L'ultimo piano rappresentato è quello in figura (20), il quale riguarda la variazione di un angolo in funzione

dell'altro.

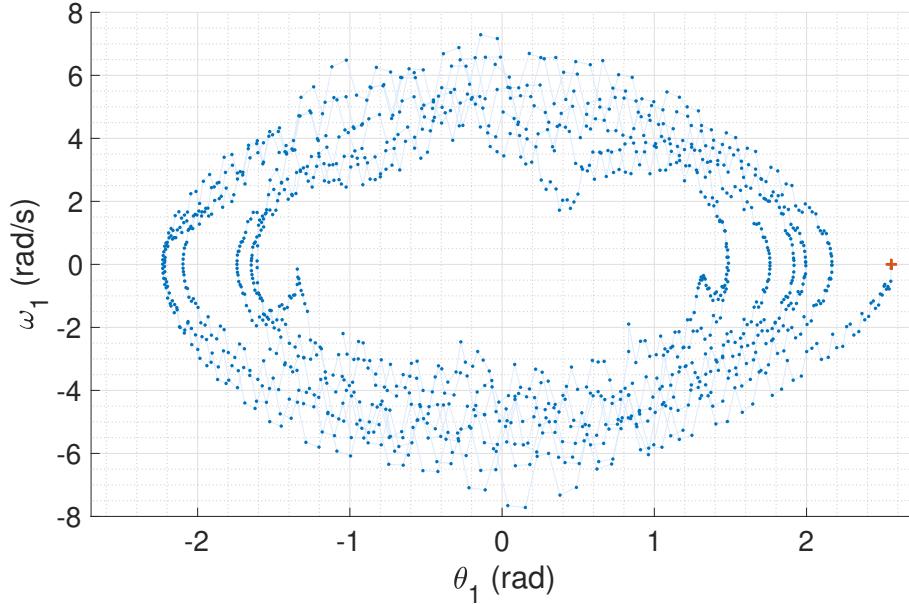


Figura 19: Piano $\theta_1\omega_1$. Come ci aspettiamo, per valori nulli dell'angolo si hanno valori massimi di velocità in positivo o in negativo in base al senso di rotazione del pendolo. Si notano le oscillazioni di velocità angolare sopra descritte e la perdita di energia. La croce rossa indica l'istante $t = 0$ s.

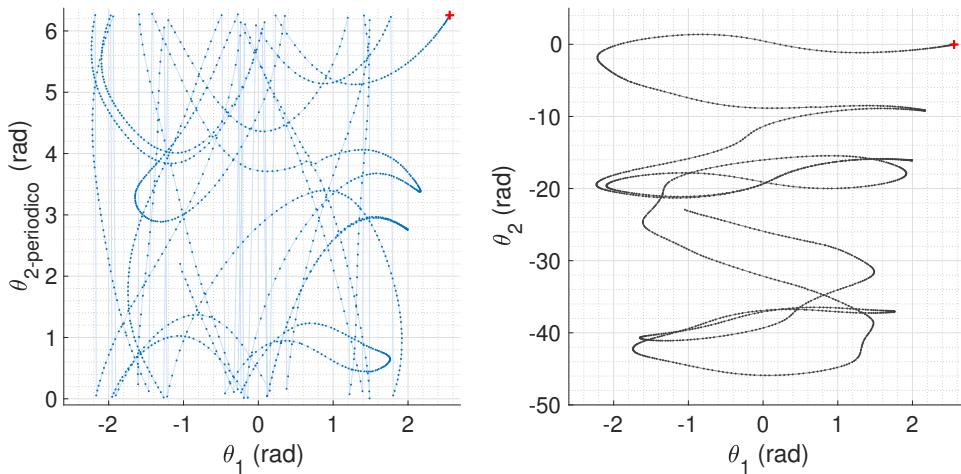


Figura 20: Piano $\theta_1\theta_2$. Si nota nuovamente in entrambi i grafici, la cui differenza sta nella periodicità dell'angolo sulle ordinate, che a una variazione più o meno regolare di θ_1 corrisponde una variazione di θ_2 più repentina e imprevedibile. La croce rossa indica l'istante $t = 0$ s.

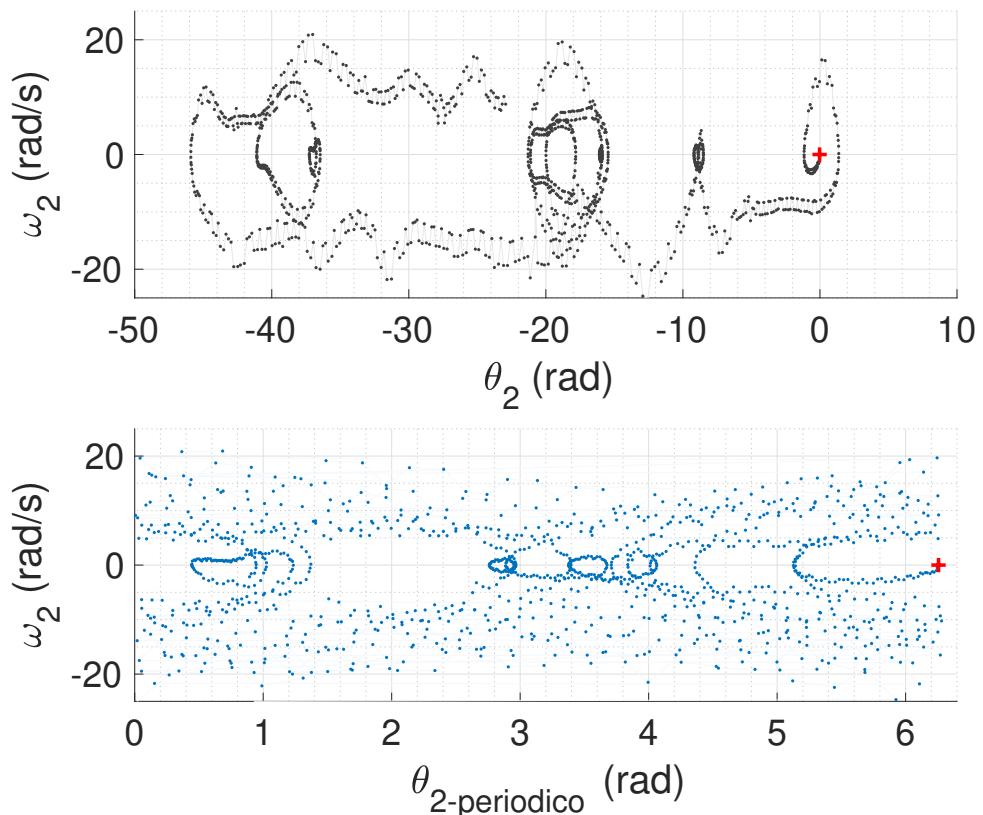
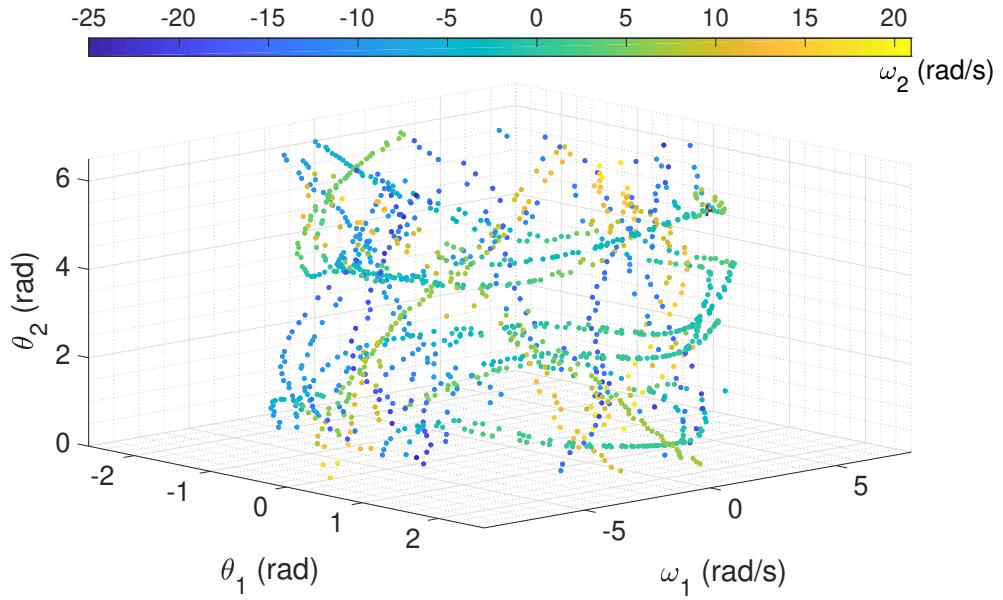
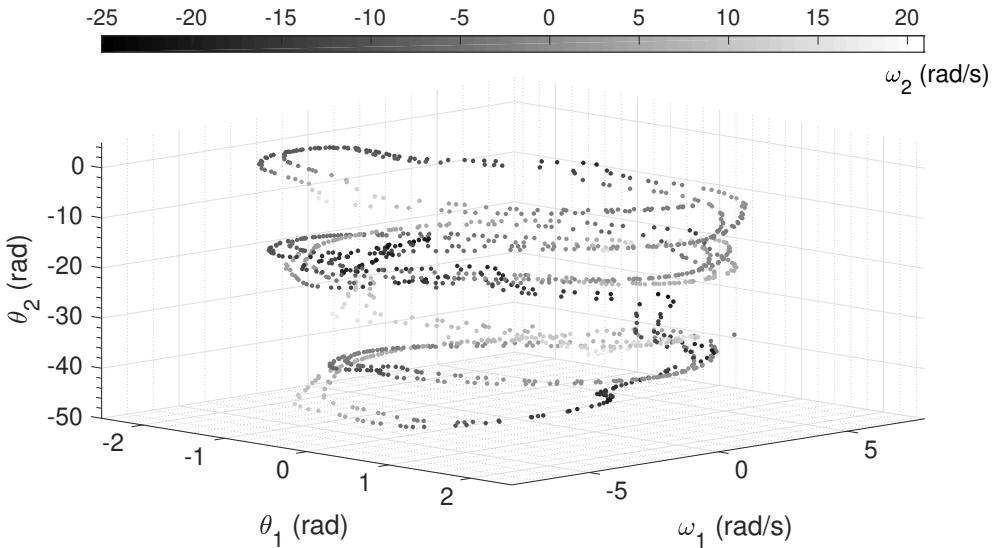


Figura 21: Piano $\theta_2\omega_2$. Il moto è meno prevedibile a causa delle continue rotazioni complete. La croce rossa indica l'istante $t = 0$ s.



(a) Abbiamo utilizzato condizioni periodiche al contorno per θ_2 .



(b) Non abbiamo utilizzato condizioni periodiche al contorno per θ_2 .

Figura 22: Traiettoria del sistema nello spazio delle fasi. Il colore indica la variazione della grandezza ω_2 .

Piccole Oscillazioni

Come nel caso precedente, gli angoli sono stati traslati di $\pi/2$ in modo che fossero centrati in zero, punto di equilibrio stabile del sistema attorno al quale oscilla. Il moto del pendolo è molto più regolare e la massa più piccola non compie mai giri completi, oscillando anch'essa attorno a $\theta_2 = 0$, come la prima massa; non vi è quindi la necessità di avere un moto su un toro. I valori iniziali sono: $\theta_2 = -0.1$ rad e $\theta_1 = -0.2$ rad; è presente, quindi, un angolo iniziale non trascurabile anche per la seconda massa, nonostante fosse lasciata libera

verticalmente. Questa sistematica potrebbe essere dovuta a problemi di posizionamento della ripresa, essendo presente in tutte le misure, ma comunque non influenza il moto analizzato.

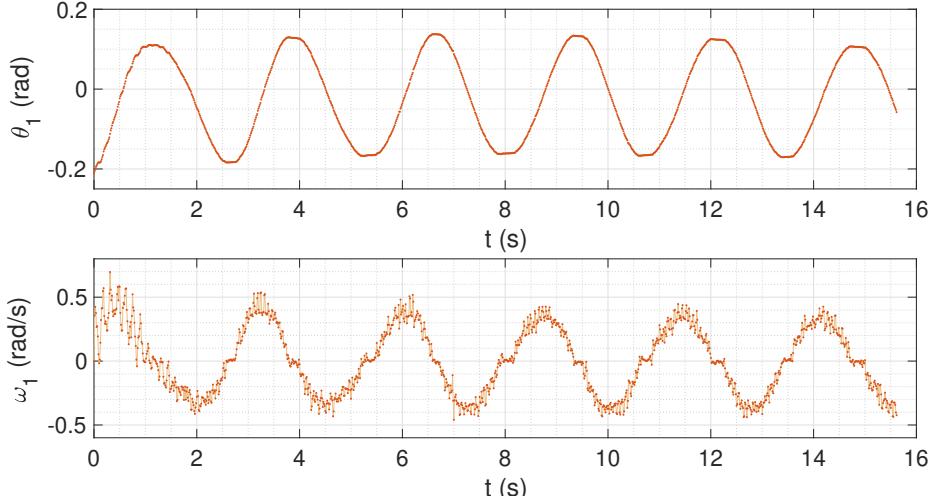


Figura 23: Angolo e velocità angolare in funzione del tempo per la prima massa. Si nota l'oscillazione attorno a $\theta_1 = 0$; la decrescenza nell'ampiezza dell'oscillazione dovuta all'attrito è minore che nel moto caotico. I massimi della velocità angolare, come detto si hanno per valori nulli dell'angolo e viceversa per valori massimi dell'angolo si ha velocità nulla. Dal secondo grafico si nota che la velocità sembra a istanti di tempo molto vicini oscillare leggermente.

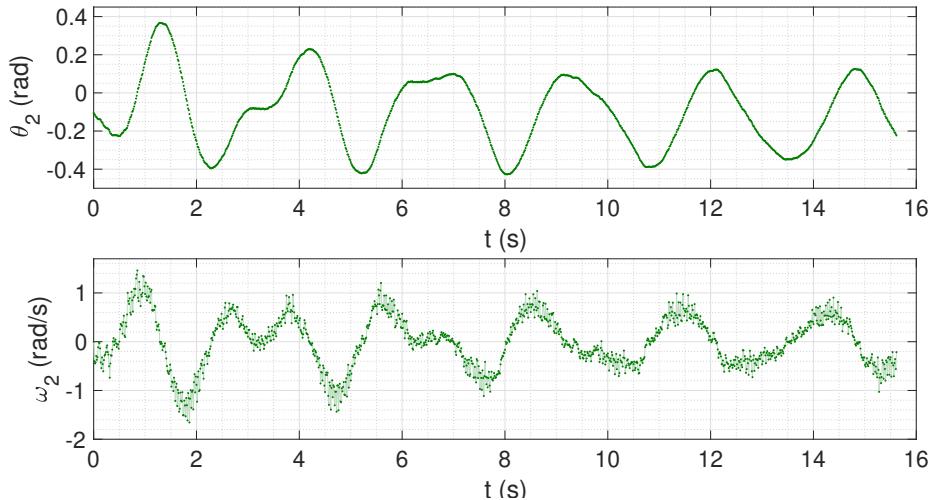


Figura 24: A differenza del caso precedente, anche il moto della seconda massa è all'incirca regolare e oscilla attorno a un valore più piccolo di $\theta_2 = 0$. Nuovamente i picchi dell'angolo corrispondono a velocità angolare nulla e viceversa. Le anomalie dovute al fatto che si tratta di un pendolo doppio riguardano la non perfetta oscillazione attorno allo zero; la seconda massa, essendo anche la minore, viene ad esempio 'trattenuta' per un tempo prolungato in un estremo del moto dell'altra massa rimanendo verticalmente sostenuta, come nei tratti orizzontali presenti a circa 0 radianti. Questo si riflette sui valori di velocità angolare.

Da queste due prime analisi il moto del pendolo è prevedibile e più simile al moto di due pendoli separati; si tratta, però, come notato dai grafici, di qualcosa di più, essendo le masse collegate tra loro. Le anomalie del moto potrebbero in parte essere dovute anche all'azionamento manuale del moto tramite l'asta che diventa rilevante nel caso di angoli piccoli, ma in generale la seconda massa in qualche modo è controllata dal moto della massa maggiore dal quale però cerca di allontanarsi leggermente riinfluenzando il primo.

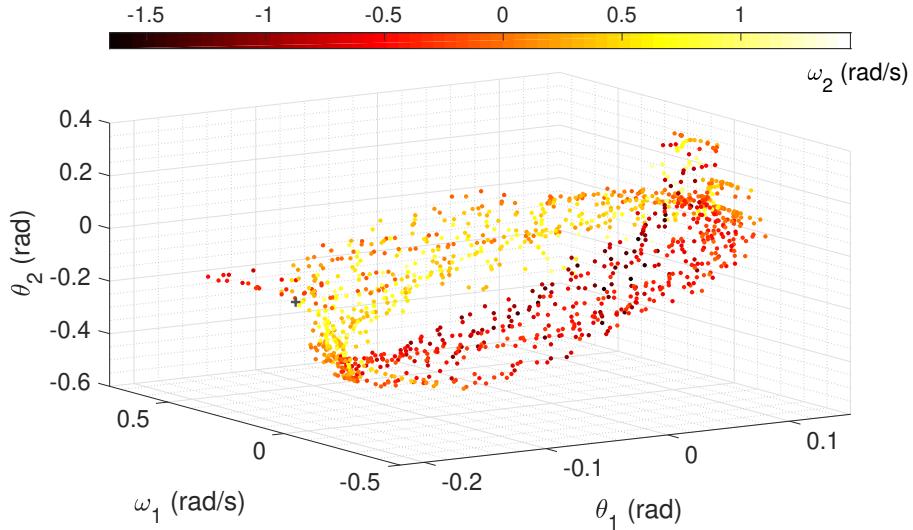


Figura 25: Traiettoria del sistema nello spazio delle fasi. Il colore indica la variazione della grandezza ω_2 .

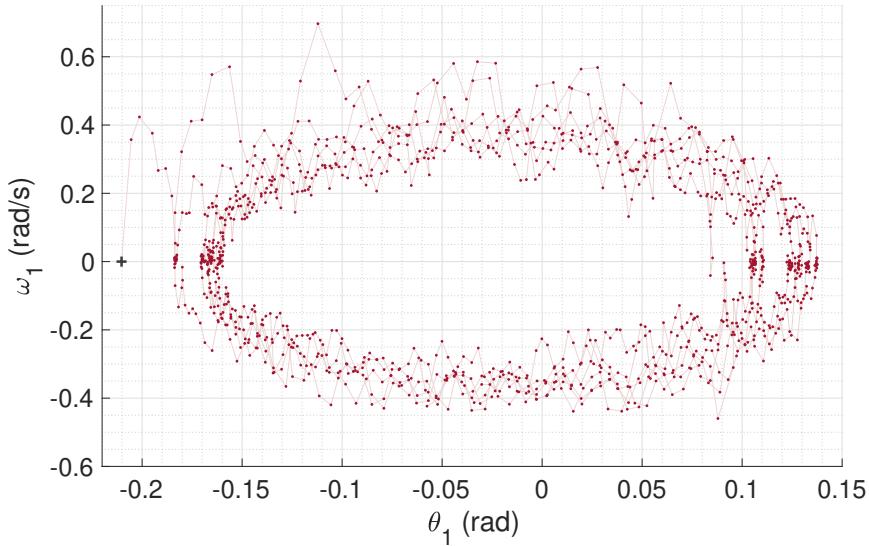


Figura 26: Piano $\theta_1\omega_1$. Come ci aspettiamo, per valori nulli dell'angolo si hanno valori massimi di velocità in positivo o in negativo in base al senso di rotazione del pendolo; la distribuzione dei punti è molto simile a quella della stessa massa per il moto caotico, figura (19). La croce grigia indica l'istante $t = 0$ s.

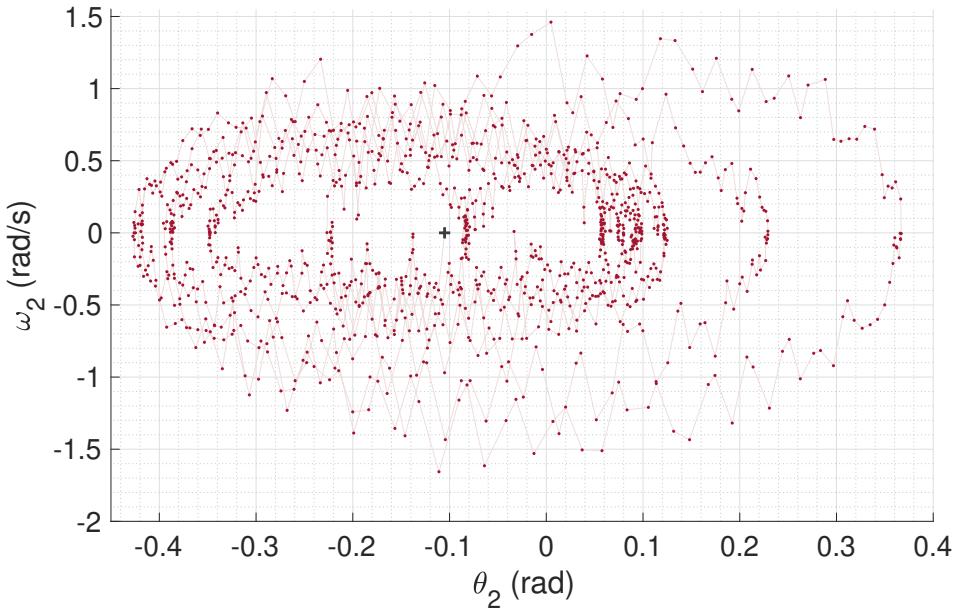


Figura 27: Piano $\theta_2\omega_2$. La distribuzione dei punti è simile a quella della massa precedente, con la differenza che alcune oscillazioni hanno delle ampiezze maggiori in positivo. La croce grigia indica l'istante $t = 0$ s.

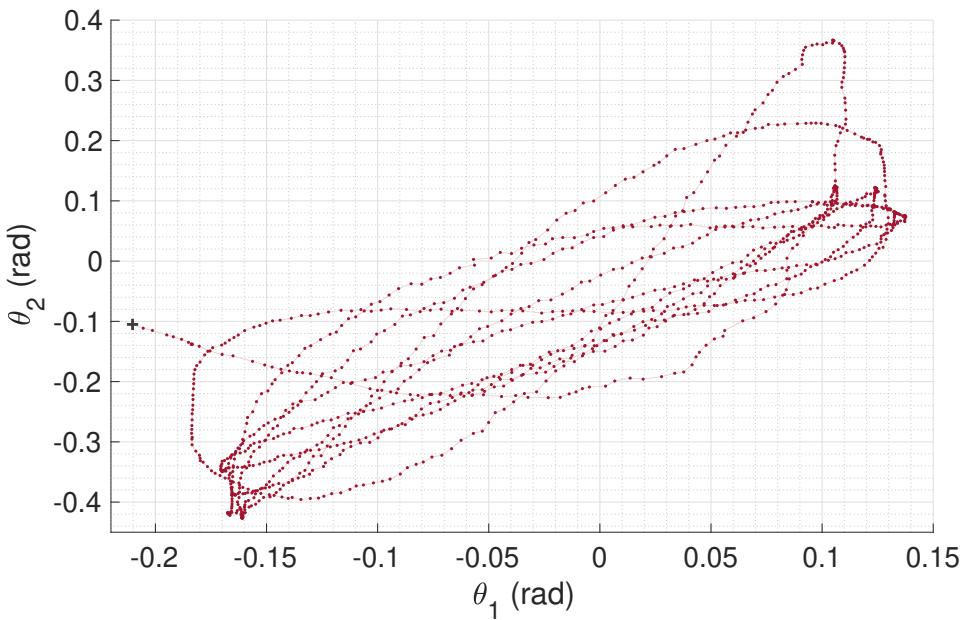


Figura 28: Piano $\theta_1\theta_2$. A differenza che nel caso di moto caotico, il moto è più chiaro: per valori negativi di θ_1 si hanno valori negativi di θ_2 dato che l'oscillazione è all'incirca sincrona. La croce grigia indica l'istante $t = 0$ s.

Conclusioni Per quanto riguarda il moto caotico, la non prevedibilità sta nel fatto che la seconda massa compie giri completi attorno alla prima in un numero e in istanti non prevedibili che variano da misura a misura. Inoltre il moto nello spazio delle fasi non si ripete mai e riempie tutto il volume finito disponibile (toro). Per le piccole oscillazioni, invece, il moto è prevedibile e si ripete all'incirca identico, a meno della dispersione di energia.

9.2 Sezioni di Poincaré

Introduzione teorica Nell'ambito dei sistemi dinamici, una mappa di Poincaré è l'intersezione di una traiettoria nello spazio delle fasi, per ogni tempo, di un sistema dinamico con un particolare sottospazio di minor dimensione, trasversale al flusso del sistema. Più precisamente si considera un sottospazio che interseca il flusso in un punto e si osserva quali sono gli altri punti nei quali l'orbita reinterseca la sezione, allo scorrere del tempo, come mostrato in figura (29). Inoltre, la mappa permette, in generale di trasformare un flusso continuo in un sistema discreto di una dimensione più piccola.

Se i punti della sezione sono diffusi su tutto lo spazio disponibile allora si dice che il moto è caotico; infatti questo significa che l'orbita non torna mai su se stessa e quindi la traiettoria non è periodica e non si hanno orbite chiuse. Se così fosse, infatti, i punti presenti sarebbero concentrati solo in una regione a riprova del fatto che la traiettoria assume sempre gli stessi valori.

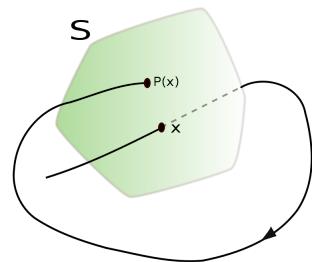


Figura 29: Illustrazione del metodo della sezione di Poincaré. L'orbita uscente da un punto in una certa direzione interseca successivamente la superficie, nella stessa direzione.

Pendolo doppio Sperimentalmente non possediamo un flusso, ma un insieme discreto di punti; il concetto è il medesimo, abbiamo già dei punti e bisognerà fare attenzione a come avviene l'intersezione tra sezione e traiettoria.

Le sezioni di Poincaré, nel nostro caso, sono dei volumi tridimensionali ottenuti fissando una delle variabili a un valore costante e vedendo in che modo le altre variabili sono presenti in tale volume. Proprio perchè non possediamo un flusso, ma un insieme discreto di punti non sarà possibile fissare esattamente un valore di una variabile e vedere come si comportano le altre in tale spazio, ma bisogna considerare un intervallo di valori in cui può variare la grandezza attorno al valore 'fissato'.

Nella valutazione della diffusione dei punti è importante considerare che l'energia non è perfettamente costante nei 16 secondi analizzati, perciò in ogni caso il moto, anche se periodico, non tornerebbe perfettamente su se stesso; a causa dell'attrito il sistema dinamico è dissipativo e restringe lo spazio delle fasi in cui evolve provocando un addensamento delle traiettorie. Abbiamo, però, stimato che la perdita di energia in questo lasso di tempo è molto piccola.

Se considerassimo i secondi per cui l'energia è approssimativamente costante potremmo riesprimere una variabile tramite le altre e considerarne solo 3 indipendenti; in tal caso le sezioni di Poincarè sarebbero delle superfici. Ciò non ci è possibile perchè i punti per i secondi in cui l'energia è costante, fissando una delle 3 variabili, sono troppo pochi per essere valutati.

Analisi dati Abbiamo deciso di fissare l'angolo più piccolo attorno a 0 rad: abbiamo considerato solo i punti, nello spazio delle fasi, che avessero $|\theta_2^{\text{periodico}}| \leq 0.7$ rad. Rappresentiamo la sezione ottenuta per 2 misure in figura (30). Pur considerando una fascia larga di variazione, i punti che abbiamo sono troppo pochi per poter dare una valutazione del moto.

Abbiamo, quindi, deciso di confrontarle con le stesse sezioni per le piccole oscillazioni, figura (31). Abbiamo, però, fissato il numero di punti a sezione come il precedente da cui abbiamo posto $|\theta_2^{\text{periodico}}| \leq 0.02$ rad; con la condizione precedente avremmo avuto tutti i punti nella sezione essendo piccole oscillazioni.

Quello che si osserva è che i punti per il moto caotico sono più diffusi e inoltre sono molto diversi per le due misure effettuate; per le piccole oscillazioni, invece, i punti sono concentrati in due zone a riprova del fatto che il moto è periodico siccome la traiettoria torna su se stessa e sono simili tra loro le sezioni delle due misure.

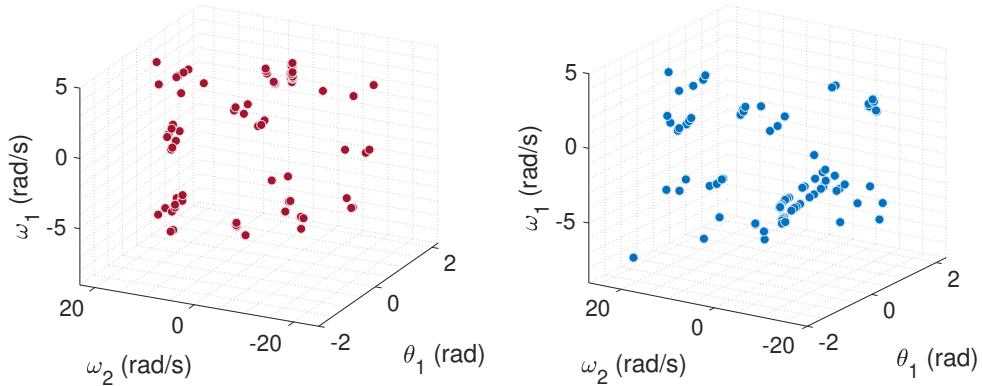


Figura 30: Sezioni di Poincarè per due misure diverse (moto caotico).

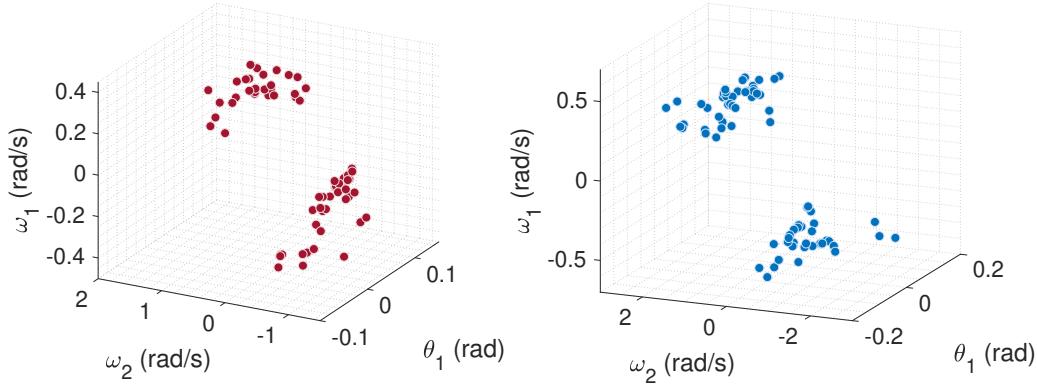


Figura 31: Sezioni di Poincarè per due misure diverse (piccole oscillazioni).

9.3 Esponenti di Lyapunov

Cenni teorici

Un sistema caotico, come il pendolo doppio, è un sistema sensibile alle condizioni iniziali; ciò significa che una minima variazione delle condizioni iniziali comporta grandi cambiamenti al crescere del tempo t . Di seguito mostreremo come si ricava che l'amplificazione della differenza delle condizioni iniziali è a crescita esponenziale nel tempo.

Supponiamo che il nostro sistema all'istante $t = t_0$ sia definito da un vettore X_1 nello spazio delle fasi che, nel caso del pendolo doppio, contiene i due angoli e le due velocità angolari. Ora prendiamo un altro pendolo doppio, identico al precedente, sempre all'istante t_0 , questo è definito da un altro vettore X_2 e chiamiamo ΔX la variazione delle condizioni iniziali dei due pendoli calcolata come distanza euclidea nello spazio delle fasi:

$$\Delta X = \|X_1 - X_2\| = \sqrt{\sum_i (X_1^i - X_2^i)^2} \quad (33)$$

i cicla sulle componenti del vettore;

1,2 indicano due diverse misure.

Possiamo fare questa operazione ad ogni istante di tempo t ; si può, quindi, scrivere l'equazione del moto per la distanza euclidea. Espandendola in potenze si ottiene:

$$\frac{d\Delta X}{dt} = A\Delta X + O(\|\Delta X\|^2) \quad (34)$$

A= generica matrice;

O($\|\Delta X\|^2$)= termini di ordine superiore al primo.

Supponendo di mettere i due pendoli circa nelle medesime condizioni iniziali si avrebbe $X_1 \simeq X_2$ per $t \rightarrow 0$ e ΔX che tende a zero. Tenendo solo i termini di ordine uno:

$$\frac{d\Delta X}{dt} = A\Delta X \quad (35)$$

Vogliamo calcolare gli autovettori a_i dell'equazione (35); in generale in uno spazio delle fasi n -dimensionale ci sono n esponenti di Lyapunov, noi siamo in uno spazio delle fasi 4-dimensionale perciò l'indice i va da 1 a 4.

$$a_i(t) = a_i(t_0)e^{\lambda_i t} \quad (36)$$

dove i λ_i vengono chiamati esponenti di Lyapunov.

Nel nostro caso la distanza euclidea ΔX è data da:

$$\Delta X = \sqrt{(\Delta\theta_1)^2 + (\Delta\dot{\theta}_1)^2 + (\Delta\theta_2)^2 + (\Delta\dot{\theta}_2)^2} \quad (37)$$

mentre le direzioni degli autovettori a_i sono le quattro singole direzioni di propagazione delle distanze per le 4 variabili del sistema. Ciascuno degli esponenti corrisponde all'evoluzione nel tempo della differenza di valori ad un tempo t fissato, per coppie di misure diverse, delle quattro variabili del sistema: $\theta_1, \theta_2, \omega_1$ e ω_2 .

È grazie agli esponenti che possiamo capire se il moto è caotico. Infatti si può notare che, in ciascuna direzione, se λ è positivo, le fluttuazioni dovute a piccole variazioni delle condizioni iniziali crescono rapidamente con l'aumentare del tempo. I due pendoli hanno un moto indipendente l'uno dall'altro e imprevedibile, appunto un moto caotico. Mentre se λ risulta negativo allora al crescere del tempo le fluttuazioni diventano sempre più trascurabili in quanto l'esponenziale tende a zero; siamo nel caso di un moto stabile (non caotico) e i due pendoli si sincronizzano. Questo tipo di moto risulta predicable. Quindi, un sistema è definito caotico quando $\lambda > 0$, mentre un sistema viene definito non caotico quando $\lambda < 0$. Si osserva un moto caotico se in almeno un a_i abbiamo l'autovalore $\lambda_i > 0$ in quanto, al passare del tempo, essendo un esponente positivo, dominerà sugli altri tre.

Vogliamo calcolare gli esponenti di Lyapunov per il pendolo doppio costruito e vogliamo ritrovare che per piccole oscillazioni il sistema risulta non caotico.

Analisi dati

Per calcolare l'esponente di Lyapunov utilizziamo l'inversa dell'equazione (36):

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{a_i(t)}{a_i(t_0)} \right) \quad (38)$$

Tuttavia per stimare λ non abbiamo utilizzato direttamente l'equazione (38), ma abbiamo usato un metodo analogo che risulta più consistente per l'analisi sperimentale di un sistema caotico. Infatti l'equazione (38) darebbe un risultato costante se i valori costituissero un'esponenziale senza troppe oscillazioni; ma come si nota dal grafico (32) l'andamento esponenziale della distanza euclidea non è regolare.

Abbiamo deciso di stimare l'esponente "passo a passo", cioè stabilendo un intervallo Δt e stimando una crescita esponenziale tra i due estremi dell'intervallo, a partire da un qualsiasi istante t di tempo e facendolo per ogni tempo t .

Quindi l'equazione utilizzata per stimare λ è la seguente:

$$a_i(t + \Delta t) = a_i(t) e^{\lambda_i \Delta t} \quad (39)$$

da cui invertendo otteniamo

$$\lambda_i^t = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{a_i(t + \Delta t)}{a_i(t)} \right)^1 \quad (40)$$

Tramite l'equazione (40) otteniamo, per ogni istante fissato t , un certo λ_i^t relativo all'intervallo $(t, t + \Delta t)$; per ottenere λ_i è necessario, poi, eseguire la media su tutti i tempi:

$$\lambda_i = \langle \lambda_i^t \rangle \quad (41)$$

¹Formula che ci è stata gentilmente suggerita dal Professore F. Ginelli.

Le equazioni (38) e (40) sono equivalenti e lo si vede calcolando esplicitamente il valor medio nel tempo degli esponenti di Lyapunov ottenuti al variare del tempo; il calcolo è eseguito per il singolo autovettore:

$$\langle \lambda^t \rangle = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_j}{N} = \sum_{j=1}^N \frac{\ln(a(j + \Delta j)) - \ln(a(j))}{N\Delta t} \quad (42)$$

N é il numero di dati raccolti cioè il numero di dati corrispondenti al numero totale di secondi; la media temporale, infatti, corrisponde a una media su tutti gli eventi. In questo modo l'intervallo di tempo Δt corrisponde ad un passo Δj di eventi.

e quindi notando che $N\Delta t = t$ si ha:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\ln(a(j + \Delta j)) - \ln(a(j))}{N\Delta t} = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{a(t)}{a(t_0)} \right) \quad (43)$$

I due approcci sono equivalenti. Inoltre l'esponente risulta indipendente dalla scelta del "passo" (Δj).

Come abbiamo osservato nella parte teorica c'è un autovettore dei quattro che domina sugli altri e quindi l'esponente finale sarà dato principalmente dall'esponente di questo autovettore. Risulta analogo quindi calcolare l'esponente per ogni autovettore e scegliere quello positivo o calcolarlo su ΔX . Per comodità lo abbiamo calcolato su ΔX in modo da avere direttamente un unico esponente per ogni tempo, dato dalla media temporale degli esponenti a t fissato, ottenuti dalla:

$$\lambda^t = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\Delta X(t + \Delta t)}{\Delta X(t)} \right) \quad (44)$$

Moto caotico Abbiamo calcolato la distanza euclidea (ΔX) tra le diverse misure effettuate nello spazio delle fasi. Tenendo conto di tutte le combinazioni possibili tra le cinque misure (ΔX_{12} , ΔX_{13} , ΔX_{14} , ..., ΔX_{45}) otteniamo 10 distanze di cui andremo a stimare l'esponente di Lyapunov. In figura (32) ne riportiamo alcune a titolo esemplificativo.

In figura (34) riportiamo i grafici di λ in funzione del tempo; inoltre riportiamo in figura (33) l'andamento di λ ottenuto tramite la formula meno conveniente.

Facendo una media sul tempo degli esponenti e relativa deviazione standard sulla media si ottiene il valore di λ per ogni misura; i risultati sono raccolti in tabella (6). Infine abbiamo fatto una media pesata con relativo errore su tutte le misure ottenendo $\lambda = (0.32 \pm 0.02) \text{ 1/s}$, complessivamente, un valore positivo, come dovrebbe essere per un sistema caotico.

Facendo l'inverso di λ abbiamo un tempo; tale valore indica in media il tempo necessario a due diverse misure, con condizioni iniziali simili, per allontanarsi nello spazio delle fasi di e (numero di Nepero). Abbiamo calcolato tale valore, con rispettivo errore ottenuto tramite la propagazione degli errori, ottenendo $(3.01 \pm 0.18) \text{ s}$.

distanza	λ	errore
12	0.36	± 0.07
13	0.28	± 0.06
14	0.35	± 0.05
15	0.24	± 0.06
23	0.41	± 0.05
24	0.28	± 0.06
25	0.32	± 0.05
34	0.37	± 0.06
35	0.21	± 0.07
45	0.36	± 0.05

Tabella 6: Tabella in cui vengono mostrati gli esponenti di Lyapunov con rispettivi errori.

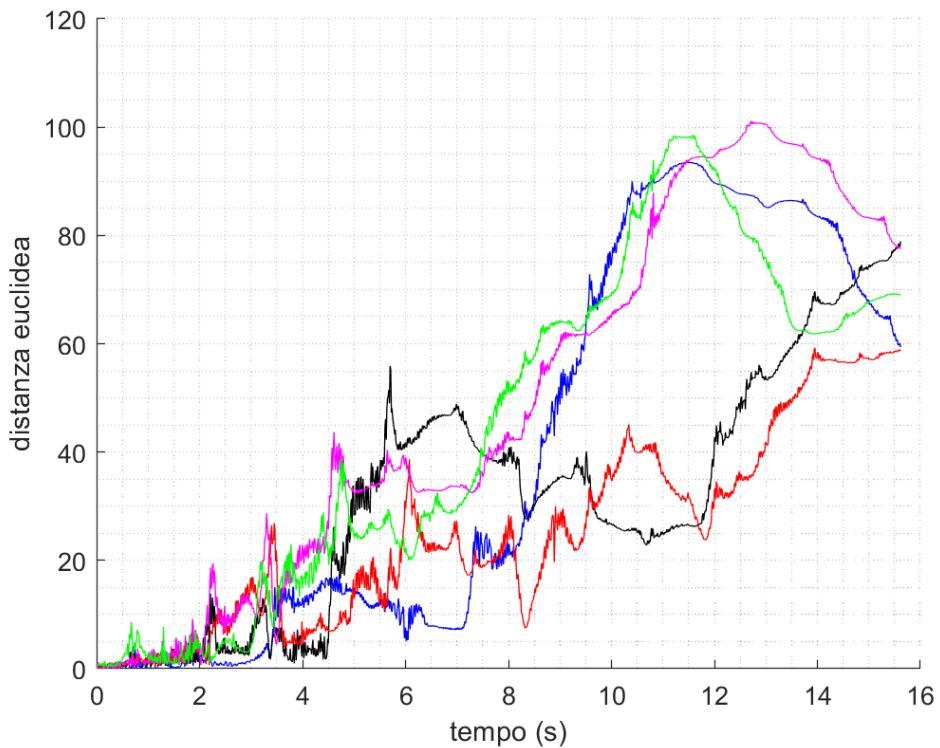


Figura 32: Distanza euclidea nello spazio delle fasi. I quattro plot sono riferiti alle distanze tra le misure: **1e2**, **3e4**, **1e4**, **2e5**, **3e5**. Si vede dal grafico che, per i primi istanti, le varie distanze nello spazio delle fasi hanno un comportamento simile, mentre per tempi successivi si può notare come ciò non risulti più vero a causa del moto caotico del pendolo doppio.

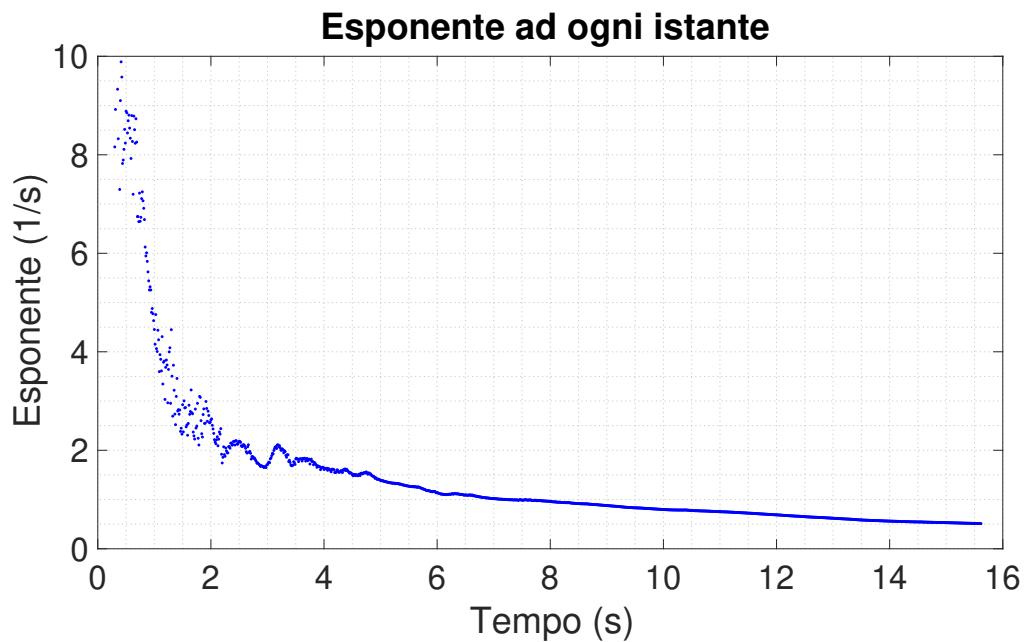


Figura 33: Esponenti di Lyapunov in funzione del tempo calcolati con l'equazione (38). Si nota che il valore non è costante a causa delle fluttuazioni dei dati, come descritto precedentemente.

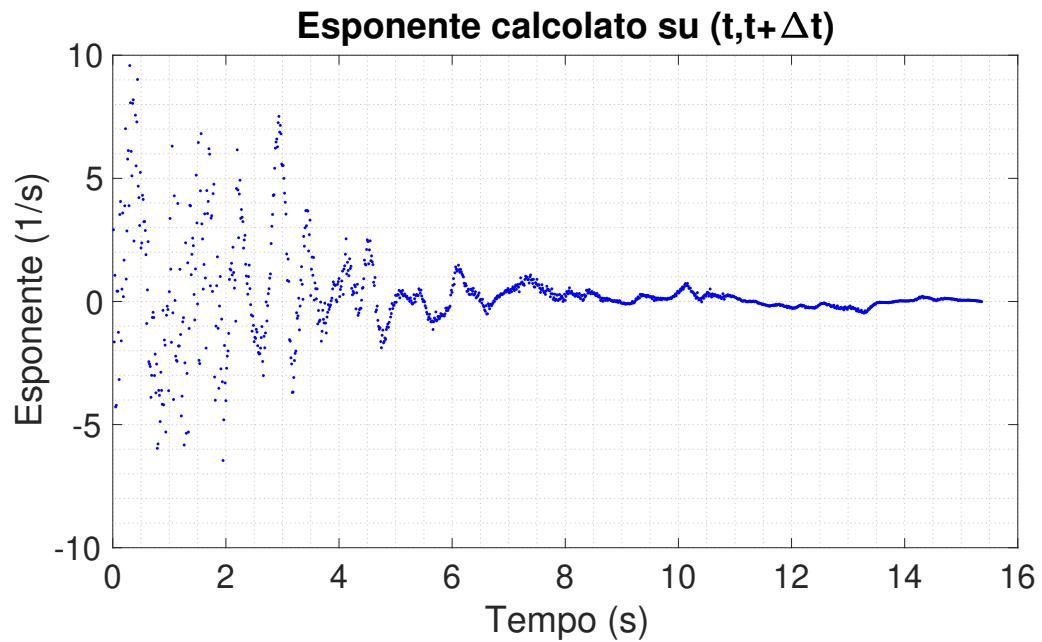


Figura 34: Esponenti di Lyapunov in funzione del tempo calcolati con l'equazione (44).

Piccole oscillazioni Per le piccole oscillazioni sono state svolte misure analoghe. In figura (35) vengono mostrate le distanze euclidee nello spazio delle fasi per le tre misure eseguite.

Successivamente abbiamo calcolato, tramite l'equazione (44) gli esponenti di Lyapunov e ne abbiamo fatto la media nel tempo. In tabella (7) vengono mostrati i risultati ottenuti. Infine abbiamo fatto una media pesata con relativo errore su tutte le misure ottenendo $\lambda = (0.077 \pm 0.043) \text{ 1/s}$.

Notiamo come gli esponenti di Lyapunov, tenendo conto dell'errore, possano essere negativi, tranne uno. In ogni caso si tratta di valori molto vicini a zero il che significa che le distanze euclidee nello spazio delle fasi vengono preservate e non allontanate esponenzialmente. Quindi possiamo dire che il sistema delle piccole oscillazioni non è caotico.

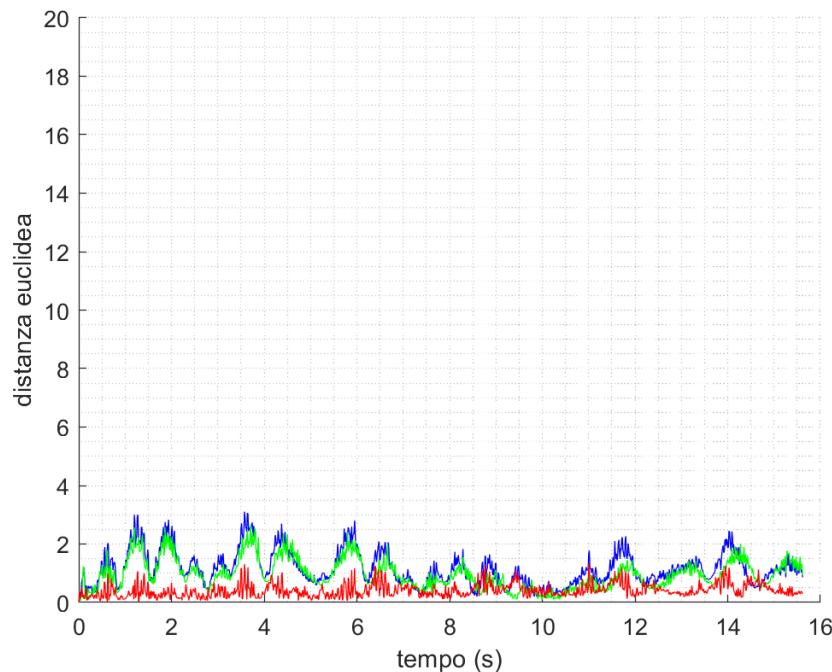


Figura 35: Distanza euclidea nello spazio delle fasi. I due plot sono riferiti alle distanze tra le misure: [1e2](#) e [1e3](#), [2e3](#). Si nota che rispetto al grafico (32) le distanze sono molto vicine a zero. Lo si vede osservando che la scala delle y è sei volte più piccola rispetto a quella precedente.

Distanza tra le misure	λ (1/s)
12	0.036 ± 0.067
13	0.085 ± 0.064
23	0.020 ± 0.072

Tabella 7: Tabella in cui vengono mostrati gli esponenti di Lyapunov per piccole oscillazioni con rispettivi errori.

10 Conclusioni

L'esperimento del pendolo doppio è stato impegnativo da eseguire. A livello pratico siamo riusciti a costruire un pendolo doppio partendo solamente dall'idea di utilizzare alcuni fidget spinner; da questa abbiamo disegnato un progetto e abbiamo realizzato l'apparato stesso dell'esperimento. Successivamente siamo riusciti a tracciare il moto del pendolo tramite il software Tracker, avendo dovuto trovare uno spazio adeguato su cui posizionare il pendolo in modo che fosse tracciabile.



Infine per l'analisi dati abbiamo chiesto dei consigli al Professore R. Artuso che ci ha gentilmente fornito degli articoli riguardanti l'esperimento; l'analisi è risultata comunque impegnativa perché spaziava tra teorie molto diverse tra di loro. Infatti, ad esempio, gli strumenti matematici utilizzati per l'analisi dei modi normali differiscono rispetto a quelli utilizzati per il calcolo dell'esponente di Lyapunov.

I risultati ottenuti sono coerenti con quelli che ci aspettavamo. Stimata la perdita di energia dovuta all'apparato sperimentale, abbiamo mostrato per il moto caotico tutte le sue caratteristiche; partendo dalla sensibilità alle condizioni iniziali, abbiamo poi mostrato la non linearità delle equazioni che dominano il moto e descritto la traiettoria nello spazio delle fasi, verificando la non predicitività del moto. Infine abbiamo mostrato la distribuzione dei punti delle sezioni di Poincaré e ottenuto un esponente di Lyapunov positivo. Per le piccole oscillazioni abbiamo eseguito un'analisi simile, descrivendo la traiettoria non caotica e approssimando le equazioni del moto in modo che fossero lineari; in più abbiamo trovato i modi normali di oscillazione e confrontato le sezioni di Poincaré e l'esponente di Lyapunov con i precedenti.

Siamo, quindi, soddisfatti del lavoro eseguito che ci ha permesso di apprendere nuovi concetti e di sviluppare nuove competenze.

Ringraziamo la Professoressa M. Bondani per averci dato l'idea iniziale dell'esperimento e per la sua disponibilità ad aiutarci nel realizzarlo.