Università degli studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza e Alta Tecnologia

Laboratorio di Fisica III

Le Linee di Trasmissione

Mozzanica Martina, Quaini Alessandro, Savorgnano Sofia

Docente
Prof. Valerio Mascagna

Data
19 febbraio 2020

Contents

1 Introduzione

Quando si costruisce un esperimento, è necessario far viaggiare segnali elettrici anche su distanze molto lunghe. I segnali possono essere di due tipi, analogici (ad es., la televisione a cavo) o digitali. Due sono le situazioni tipiche:

- nel caso di applicazioni a bassa velocità e su distanze corte, si può considerare la trasmissione istantaneae quindi la tensione a un capo del cavo è identica a quella all'altro capo
- tenendo conto che i segnali non possono propagarsi a velocità superiori a quella della luce, a frequenze di GHz anche gli esperimenti di laboratorio possono avere problemi. Il segnale richiede tempo per propagarsi e le tensioni ai due capi del cavo non sono uguali.

La linea di trasmissione più comune è il cavo coassiale rappresentato in fig. 1 che dal punto di vista circuitale equivale alla configurazione mostrata in fig. 2 dove R è la resistenza serie, C la capacità, G la conduttanza parallela, L l'induttanza, tutte espresse per unità di lunghezza. A basse frequenze la corrente fluisce nel conduttore centrale e

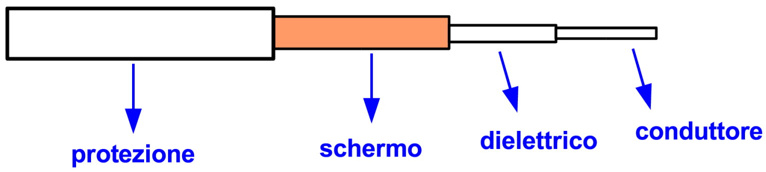

Figure 1: Il cavo coassiale.

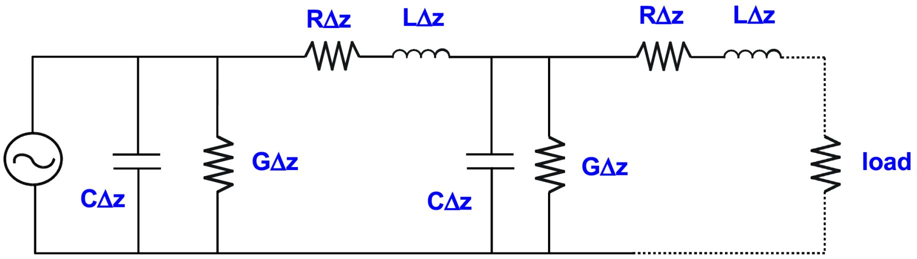

Figure 2: Il cavo coassiale: circuito

ritorna attraverso il conduttore esterno, per cui gli unici parametri da considerare sono resistenza e capacità. Ad alte frequenze, diventa importante anche l'induttanza.
Per un cavo coassiale ideale, R e G sono trascurabili (cioè la resistenza serie è piccola e la resistenza tra il cavo in ingresso e in uscita dal carico è infinita). Considerando

quindi una sezione piccola di un cavo infinitamente esteso, si ha che:

$$V = \frac{q\Delta z}{C\Delta z} = \frac{q}{C}$$

con V tensione fra i due conduttori, q carica per unità di lunghezza e C capacità per unità di lunghezza. Da cui, per la conservazione della carica:

$$\Delta I = -\frac{\partial(q\Delta z)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -C\frac{\partial V}{\partial t}$$

con ΔI differenza di corrente ai capi di una sezione Δz di filo. La presenza di L provoca una caduta di tensione pari a:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L\frac{\partial I}{\partial t}$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

che è l'equazione delle onde. In un cavo coassiale ideale i segnali si propagano sottoforma di onde con velocità:

$$v_{pr} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Per i cavi reali, in cui R e G non sono trascurabili, la trasmissione del segnale è descritta dalla seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + (LG + RC)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV$$

con soluzione generale:

$$V(z,t) = V_1 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + kz)} + V_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)}$$

$$\alpha = Re(\gamma)$$

$$k = Im(\gamma)$$

Da questa soluzione si evince come il segnale venga attenuato esponenzialmente percorrendo il cavo. con un coefficiente di attenuazione che dipende dalla frequenza.

A differenza di un cavo ideale, un cavo reale presenta delle perdite di segnale dovute a diversi motivi:

- skin effect: la corrente si confina in strati sempre più sottili alla superficie del conduttore all'aumentare della frequenza riducendo la sezione attiva del cavo e aumentandone come conseguenza la sua resistenza
- il leakage attraverso il dielettrico: è il fenomeno dominante ad alte frequenze, quando G non è più trascurabile e dipende dalla frequenza stessa.

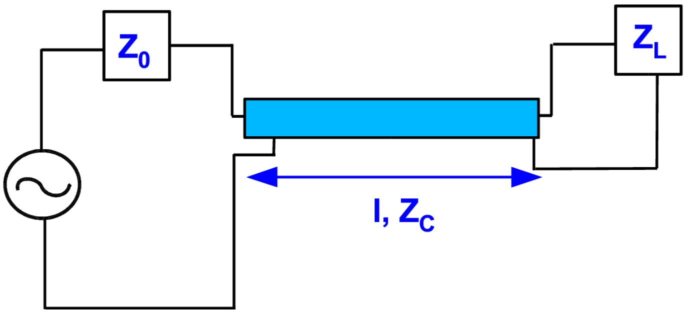

Figure 3: Circuito per lo studio della riflessione.

Un ulteriore problema dei cavi reali è il fenomeno della riflessione (fig. 3). Quando il cavo non è infinito, alla sua estremità si generano onde riflesse, cioè una parte del segnale viene riflessa e ritorna indietro sul cavo stesso combinandosi con il segnale di ingresso. Le riflessioni avvengono ogni volta che c'è un cambio di impedenza del cavo. Alla fine del cavo, cioè sul carico, si ha:

$$Z_L = \frac{V(l,t)}{I(l,t)} = Z_c \frac{V_1 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + kl)} + V_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t - kl)}}{V_1 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + kl)} - V_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t - kl)}}$$

da cui si ricava il coefficiente di riflessione:

$$\rho = \frac{V_{riflesso}(l,t)}{V_{incidente}(l,t)} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \tag{1}$$

Tre sono i casi che si possono presentare:

- per $Z_L = Z_c$ (terminazione corretta), $\rho = 0$
- per $Z_L =$ infinita (cavo aperto all'estremità), $\rho = 1$
- per $Z_L = 0$ (cavo in corto all'estremità), $\rho = -1$

Le misure in laboratorio sono state le seguenti:

- misura della velocità di propagazione di un segnale sinusoidale attraverso cavi di lunghezza crescente a diverse frequenze
- misura dell'impedenza caratteristica del cavo

- misura della capacità per unità di lunghezza e, utilizzando le informazioni ottenute sulla velocità di propagazione e sull'impedenza caratteristica, ricavare l'induttanza per unità di lunghezza
- misura dell'attenuazione del segnale

2 Velocità di trasmissione

Per misurare la velocità di trasmissione, sono stati utilizzati un oscilloscopio e un generatore di funzioni con il quale si è inviato in ingresso al cavo di lunghezza l=28.46 m, un segnale sinusoidale di ampiezza 5 V a frequenza 20 MHz. Sono state quindi acquisite le forme d'onda in ingresso e uscita, mostrate in figura 4 che sono poi state fittate con la funzione:

$$f(t) = A \sin(2\pi\nu t + \phi) \tag{2}$$

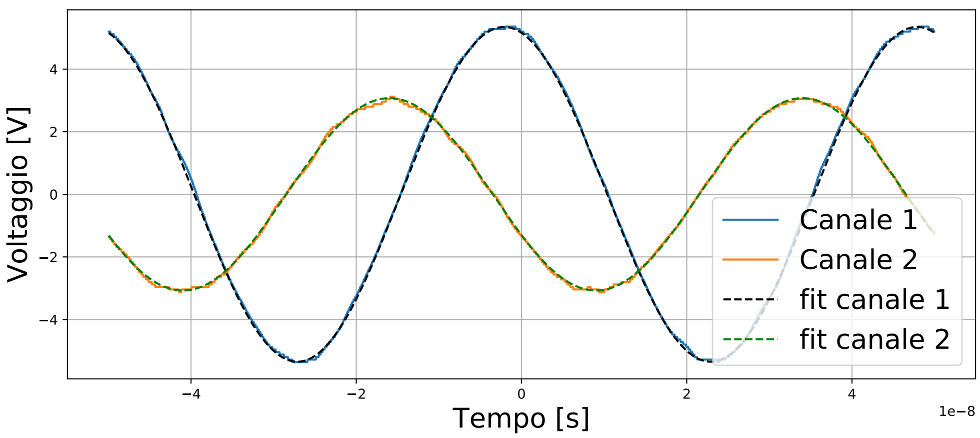

Figure 4: Fit del segnale in ingresso (Canale 1) e del segnale in uscita (Canale 2).

Per calcolare la velocità di propagazione si è ricavato prima il ritardo che il segnale ha accumulato durante il tragitto come distanza tra due massimi consecutivi dei segnali riportati in figura 4. Si è trovato quindi un ritardo parti a $\Delta\tau = 3.56 \cdot 10^{-8}$ s.

Assumendo ora che il tempo impiegato realmente dal segnale per percorrere interamente il cavo sia t', esso deve essere legato al ritardo calcolato $\Delta\tau$ tramite la relazione:

$$t' = \Delta\tau + nT \tag{3}$$

dove T è il periodo dell'onda e vale 50 ns mentre n un numero intero. Infatti il ritardo è definito a meno di multipli interi del periodo in quanto dopo ogni periodo il segnale si ripete uguale.

Conoscendo la lunghezza del cavo e il tempo che il segnale impiega a percorrere questa distanza è possibile calcolare la velocità del segnale come:

$$v = \frac{l}{\Delta\tau + nT}. \tag{4}$$

Sapendo che il valore atteso della velocità di propagazione è di $\approx$ 0.66c, si sostituiscono diversi valori di n per ottenere il numero di periodi che compie il segnale attraversando il cavo.

n	v [m/s]
1	$3.3 \cdot 10^8$
2	$2.1 \cdot 10^8$
3	$1.5 \cdot 10^8$

Table 1: Risultati della velocità relativi a 2 e 3 periodi.

Si riportano in tabella 1 i valori associati ai casi in cui il segnale compia rispettivamente 1, 2 e 3 periodi all'interno del cavo. Si conclude che il valore della velocità che si avvicina di più al valore atteso di $\approx$ 0.66c=$1.98 \cdot 10^8$ m/s, lo si trova per un numero di periodi $n = 2$ e vale $v = 2.1 \cdot 10^8$ m/s.

3 Impedenza caratteristica

Il setup consiste in un cavo su cui viene inviata un'onda quadra. L'estremità del cavo è stata terminata in 3 modi diversi: aperta, in corto circuito (0 Ω) e con una impedenza di 50 Ω. Tramite l'oscilloscopio, è stata osservata la forma del segnale in uscita dal cavo e sono state acquisite le forme d'onda (figure 5, 6, 7). L'impedenza caratteristica è la resistenza che annulla gli effetti di riflessione.
Dall'equazione 1 possiamo notare come, chiamando ρ il coefficiente di riflessione e Z l'impedenza del cavo:

- $Z = 0\ \Omega\ \rightarrow\ \rho = -1$
- $Z = 50\ \Omega\ \rightarrow\ \rho = 0$
- $Z = infinita\ \rightarrow\ \rho = +1$

Infatti si nota come nella figura 6 a 50 Ω non si ha alcun fenomeno di riflessione. Questa è la nostra impedenza caratteristica cercata.
Con resistenze di 0 Ω e infinita si ha riflessione massima, cioè di modulo 1. Notiamo come dalle figure 5 e 7 ci siano sempre delle onde quadre che però producono un risultato di interferenza tra l'onda incidente e onda riflessa.

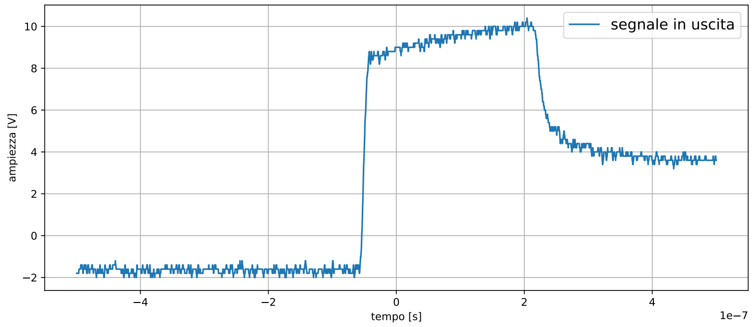

Figure 5: Segnale d'uscita dal cavo con un'impedenza di 0 Ω.

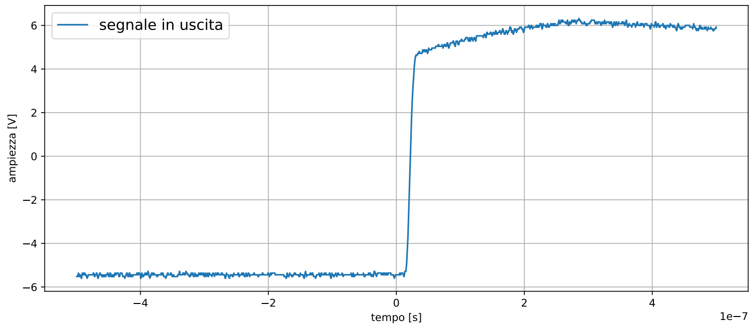

Figure 6: Segnale d'uscita dal cavo con un'impedenza di 50 Ω.

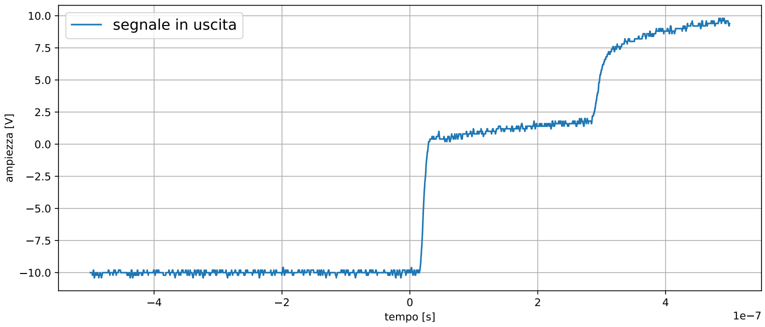

Figure 7: Segnale d'uscita dal cavo con un'impedenza infinita.

4 Capacità e induttanza per unità di lunghezza

La risposta a un transiente di un cavo non terminato collegato a un generatore con una resistenza in serie $R >> Z_0$ con Z_0 impedenza del cavo, è quella di un circuito RC.

A tale scopo è stato sostituito il cavo tra il generatore e l'oscilloscopio con un cavo caratterizzato da una resistenza in serie R di 10 kΩ. Dopo aver tolto la terminazione sul cavo lungo, è stata inviata un'onda quadra a frequenza 1 kHz in modo da poter fittare la costante di tempo del circuito τ = (R+Z_c)C, dove Z_c è l'impedenza caratteristica e C la capacità che si vuole stimare
Abbiamo ottenuto la curva che rappresenta il tempo di carica del condensatore del circuito RC che viene mostrata in figura 8.

Quindi abbiamo fittato una parte della curva con un esponenziale, di cui viene riportata l'equazione:

$$a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}+c} \tag{5}$$

dove a e c sono costanti, t è il tempo e τ è la costante che è uguale a RC. Il fit viene mostrato in figura 9.

Dal parametro restituito dal fit, $\tau = 2.99 \cdot 10^{-5}$, è stato possibile calcolare il valore della capacità C del segmento di linea, conoscendo i valori di resistenza R e impedenza caratteristica Z_c. Si ottiene un valore per la capacità di $2.98 \cdot 10^{-9}$ F, cosicché la capacità per unità di lunghezza è data dalla formula 6.

$$C_L = \frac{C}{L} \tag{6}$$

Si ricorda che L è la lunghezza del cavo, di 28.46 m.
Perciò C_L risulta valere $1.04 \cdot 10^{-10}$, ovvero 104 pF/m in ottimo accordo con il valore

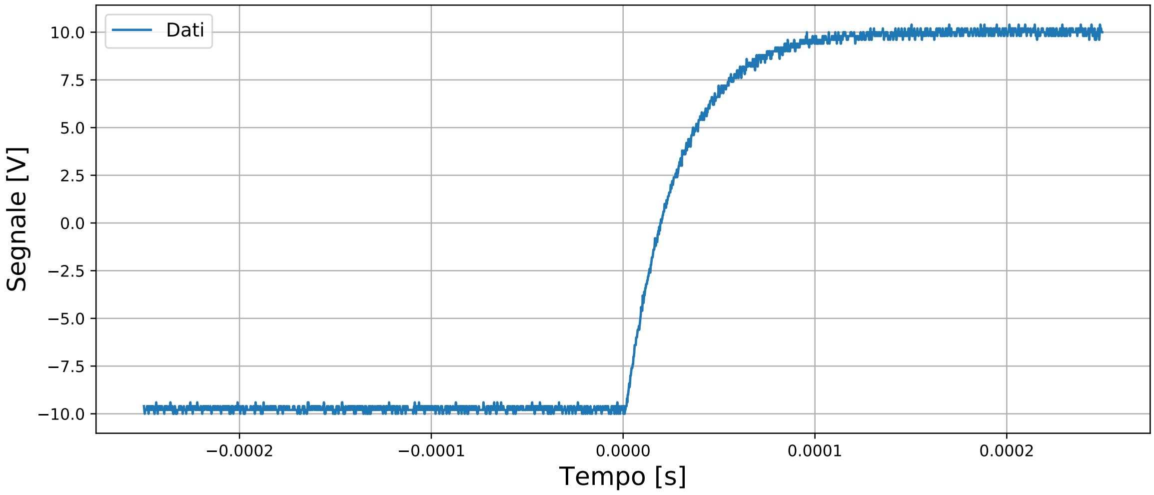

Figure 8: Grafico dell'andamento del segnale in funzione del tempo con relativo fit.

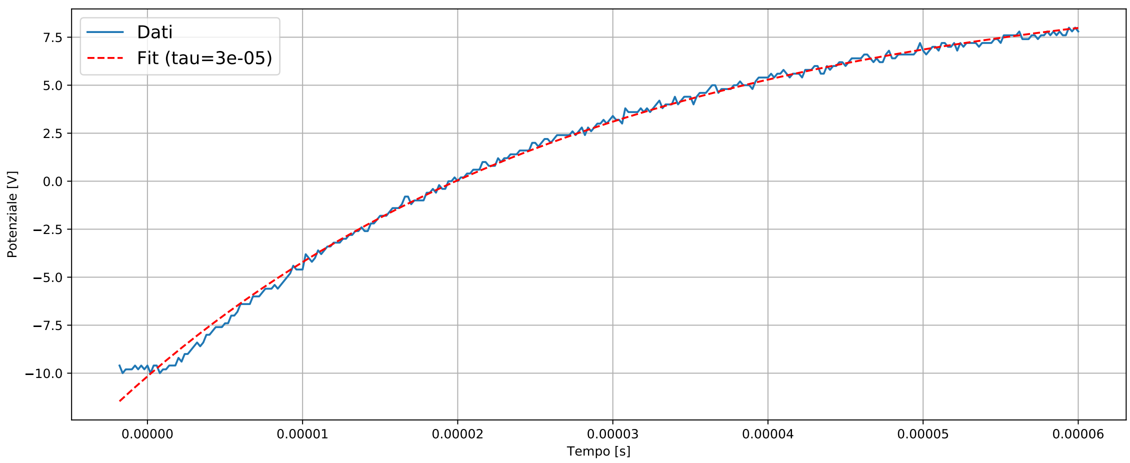

Figure 9: Grafico dell'andamento del segnale in funzione del tempo con relativo fit.

atteso di 106 pF/m.

Infine, dal valore della capacità per unità di lunghezza C_L e dal valore dell'impedenza caratteristica del cavo Z_c è possibile calcolare l'induttanza per unità di lunghezza L_L in base alla formula 7.

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}} \tag{7}$$

Si ottiene quindi un valore di $L_L = 2.62 \cdot 10^{-7}$ H.