

Università degli Studi dell'Insubria  
Corso di Laurea in Fisica  
Anno Accademico 2018/2019  
Laboratorio di Fisica II

**Gruppo IX:**

**Martina Mozzanica    Matteo Oñate Orozco    Elisa Vallini**

# **Esperienza di ottica: Interferometro di Michelson**

## **Sommario**

Fenomeni d'interferenza di luce monocromatica e di luce bianca.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Interferenza del laser</b>	<b>4</b>
2.1	Teoria . . . . .	4
2.2	Apparato sperimentale . . . . .	4
2.3	Dati sperimentali . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Indice di rifrazione dell'aria</b>	<b>7</b>
3.1	Teoria . . . . .	7
3.2	Apparato Sperimentale . . . . .	8
3.3	Dati Sperimentali . . . . .	8
<b>4</b>	<b>I limiti dell'ottica geometrica</b>	<b>9</b>
4.1	Teoria . . . . .	9
4.2	Apparato Sperimentale . . . . .	9
4.3	Dati Sperimentali . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Conclusione</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Appendice A</b>	<b>13</b>

# 1 Introduzione

In questo esperimento studieremo l'interferenza tra onde elettromagnetiche.

Un'onda è una perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga nello spazio e nel tempo trasportando energia ma non materia. Esse sono generate da una sorgente che ne caratterizza la natura e la forma. Possono propagarsi attraverso mezzi materiali grazie a vibrazioni delle molecole del mezzo considerato. Le onde sono di diversi tipi: onde del mare, onde su una corda, onde su una sbarra solida e sonore. La velocità di propagazione dipende dal mezzo in cui si trova.

Esiste un tipo particolare di onde, le onde elettromagnetiche, che si propongono anche nel vuoto alla velocità della luce. Sono state inizialmente ricavate dalle equazioni di Maxwell con campi variabili nel tempo. Si propagano grazie alla mutua interazione del campo elettrico e magnetico, i quali sono ortogonali tra di loro e perpendicolari alla direzione di propagazione.

Ogni onda è caratterizzata da una frequenza di oscillazione che viene distribuita su uno spettro. Ciò che chiamiamo luce fa parte di un intervallo molto ristretto dello spettro elettromagnetico. Ad ogni colore associamo una determinata frequenza. Ciò che misuriamo sono pacchetti d'onda, ossia un insieme di onde di diversi colori. Se un pacchetto contiene colori molto vari, noi vedremo luce bianca.

A occhio nudo è possibile vedere solamente l'intensità di un'onda elettromagnetica, ossia l'energia per unità di area che trasporta, che oscilla con la stessa frequenza dei campi ( $10^{14}$  Hz), con un'ampiezza che è proporzionale al quadrato del modulo del campo elettrico (o magnetico). Dato che questa frequenza di oscillazione è molto elevata, il nostro occhio vedrà la media sul periodo dell'intensità.

Un'onda si dice monocromatica se è caratterizzata da un'unica frequenza di oscillazione. Una tale onda non può esistere nella realtà perché dovrebbe avere estensione spaziale e temporale infinita, ma possiamo approssimarla con un laser da laboratorio, le specifiche di quello da noi usato saranno precise in seguito.

Quest'ultimo ha anche la proprietà di avere una buona coerenza spaziale, ossia mantiene una fase relativa costante tra i fasci di onde che lo compongono.

Dal punto di vista puramente matematico, un'onda è una funzione che soddisfa l'equazione di D'Alambert:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Nel caso l'onda si propaghi lungo l'asse  $\hat{x}$  sarà uguale a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Se le soluzioni a tale equazione sono del tipo:

$$f(x, t) = f(\Phi) = A \cos(kx - \omega t) \quad (3)$$

Allora l'onda viene detta 'monocromatica'. La grandezza  $\Phi$  si dice fase ed è l'argomento della funzione d'onda,  $k$  è il numero d'onda che si misura in radianti al metro, e  $\omega$  è la pulsazione misurata in radianti al secondo. La velocità di propagazione è  $v = \frac{\omega}{k}$ . Si definisce  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  la lunghezza d'onda, essa indica il periodo spaziale dell'oscillazione, ossia quanto spazio occupa un'intera oscillazione. Un'altra grandezza fondamentale è la frequenza  $\nu = 2\pi\omega$ , essa è l'inverso del periodo temporale  $T = \frac{1}{\nu}$ .

Se due onde monocromatiche con le stesse caratteristiche hanno una fase relativa costante, e vengono sovrapposte, si potrà osservare una modulazione dell'intensità che dipende dalla fase relativa. Tale fenomeno si chiama interferenza, può essere distruttiva o costruttiva. Nel primo caso l'intensità risultante dalla somma sarà molto smorzata, nel secondo invece verrà amplificata.

Di seguito la somma di due funzioni d'onda, con stessa ampiezza, stessa frequenza e fase differente per un fattore costante.

Le funzioni d'onda possono esser viste come parti reali di una funzione complessa oscillante.

$$\begin{aligned} f_1 &= Ae^{i\Phi} & I_1 &= A^2 \\ f_2 &= Ae^{i\Phi+i\varphi} & I_2 &= A^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Dove  $\Phi = kr - \omega t$  e  $\varphi$  è la differenza di fase.

$$f = f_1 + f_2 = Ae^{i\Phi} + Ae^{i\Phi+i\varphi} = A(1 + e^{i\varphi})e^{i\Phi} \quad (5)$$

Ora, di questa funzione complessa, noi possiamo vedere a occhio nudo solo il modulo al quadrato, che è proprio l'intensità della luce. Per trovarne il modulo quadro, uso il fatto che la funzione con esponente immaginario ha modulo 1. Inoltre il modulo di un numero complesso è uguale al prodotto dello stesso numero per il proprio complesso coniugato.

$$I(\varphi) = |f|^2 = A^2|1 + e^{i\varphi}|^2 = A^2(1 + e^{i\varphi})(1 + e^{-i\varphi}) = 2A^2(1 + \cos \varphi) = 4I \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (6)$$

Nel caso  $\varphi$  sia un multiplo di  $2\pi$  l'interferenza si dice costruttiva e l'ampiezza sarà il quadrato della somma, nel nostro caso quattro volte tanto l'intensità iniziale. Se invece  $\varphi$  differisce da  $\pi$  per un multiplo di  $2\pi$  l'interferenza si dice distruttiva.

## 2 Interferenza del laser

### 2.1 Teoria

Per esser sicuri di avere una fase relativa costante tra due onde elettromagnetiche è necessario usare la stessa fonte in modo che siano inizialmente in fase, dividerla in due fasci e farli incontrare nello stesso punto dopo che hanno percorso due distanze diverse. In questo caso i due fasci sovrapposti hanno esattamente la stessa lunghezza d'onda e ampiezza, ma una fase differente dovuta solamente alla differenza di percorso. L'interferometro di Michelson fa esattamente questo.

Usando la definizione di fase di (6), se le due onde hanno tracciato un percorso diverso, la loro differenza di fase sarà:

$$\varphi = \Phi_1 - \Phi_2 = kr_1 - \omega t - kr_2 + \omega t = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \quad (7)$$

In fin dei conti si ha interferenza costruttiva se:

$$r_1 - r_2 = m\lambda, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

e distruttiva se

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} + m\lambda, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

Nell'interferometro di Michelson la differenza tra le distanze dei due specchi è  $d$ , e dato  $\theta$ , l'angolo rispetto alla normale del piano di proiezione passante per il centro, la differenza dai due cammini è:  $r_1 - r_2 = 2d \cos \theta$  (vedi appendice A).

Al centro  $\theta = 0$  quindi  $\cos \theta = 1$ , cioè ho interferenza costruttiva se la differenza dei cammini ( $2d$ ) è un multiplo della lunghezza d'onda.

$$\begin{aligned} 2d \cos \theta &= m\lambda \\ 2d &= m\lambda \end{aligned} \quad (10)$$

Ciò che noi vediamo è la proiezione di un pattern tridimensionale di frange che in generale assume la forma di un ellissoide, per questo è importante allineare molto bene gli specchi.

Partendo da una distanza  $d_1$  avremo interferenza costruttiva o distruttiva al centro se  $d_1 = n_1 \lambda$ ; se noi facciamo variare la distanza del secondo specchio di  $\Delta x$  sino a riottenere un massimo, avremo di nuovo che  $d_2 = n_2 \lambda$ . Noi non possiamo sapere in modo assoluto a quante lunghezze d'onda siamo, ma possiamo trovare la variazione contando il numero di frange che passano per un punto abbastanza vicino al centro mentre modifichiamo la distanza tra gli specchi. In tale modo otterremo che:

$$|d_1 - d_2| = \Delta x = \Delta n \lambda = |n_1 - n_2| \lambda \quad (11)$$

### 2.2 Apparato sperimentale

Gli oggetti necessari sono:

1. Un Laser altamente monocromatico a Elio e Neon, con lunghezza d'onda 632.8 nm. Questo laser è spesso usato nei laboratori.

2. Il Beam Splitter è una piccola lastra di materiale vetroso la cui probabilità di trasmissione è 50% e quella di riflessione del 50%. Dato che il laser trasmesso viene diffratto per un breve tratto, ossia mentre attraversa il vetro, è necessario avere la possibilità di orientare il raggio laser in modo da far sovrapporre i due raggi laser;

3. Due specchi;

Dei due specchi, uno si può muovere con una speciale leva che permette di avere uno spostamento dell'ordine dei micron. Girando una rotellina, si sposta un perno con una sensibilità di 10 micron, il perno fa muovere attraverso una leva lo specchio con un fattore demoltiplicativo di 1 : 5, quindi noi possiamo misurare uno spostamento di 2 micron per quanto riguarda lo specchio. È importante capire che il raggio viene riflesso dallo specchio, quindi la variazione totale del cammino sarà il doppio. Il secondo specchio ha delle rotelline che permettono di regolare il suo orientamento e ruotarlo lungo l'asse verticale e orizzontale;

4. Una lente divergente;

La lente divergente è necessaria per espandere la figura di interferenza, che altrimenti sarebbe solo un punto;

Questi strumenti sono disposti in modo che il laser faccia un percorso "a croce". Il laser passa attraverso il primo Beam Splitter e un ramo viene trasmesso contro lo specchio movibile, mentre l'altro va contro quello orientabile. I due raggi tornando indietro verranno nuovamente trasmessi e riflessi su due piani uno è quello da cui proviene il laser e l'altro è sul muro disposto ad angolo retto rispetto al laser. Sul muro appaiono due punti, uno ha percorso uno spazio diverso dall'altro. Con lo specchio orientabile li facciamo coincidere, una volta fatto ciò basta porre la lente divergente orientata in modo da rendere chiara l'immagine e sarà possibile notare le frange di interferenza concentriche.

### 2.3 Dati sperimentali

Una volta allineato il laser, abbiamo contato quante frange scure passano per un punto fissato facendo variare la distanza dello specchio di un certo intervallo. È importante spostare molto delicatamente lo specchio, poiché il pattern di interferenza cambia molto anche per una differenza di pochi micron.

Abbiamo scelto di ruotare la rotellina di un numero fissato di tacche, e contare il numero di frange scure che passano per un punto del muro. La raccolta dati consiste in due blocchi, nel primo abbiamo ruotato il micrometro di cinque tacche, nel secondo di dieci. Per ogni tacca, la differenza di cammino ottico varia di 4 micron, quindi nel primo blocco la  $\Delta x = 20\mu m$ , e nel secondo blocco invece sarà  $\Delta x = 40\mu m$ . A turno, mentre una persona ruotava il micrometro, l'altra contava le tacche. Abbiamo fatto tre misure per ogni blocco, per un totale di sei misure. Riportiamo in Tabella 1 le misure eseguite.

$\Delta x(\mu m)$	$\Delta n$
20	29
20	30
20	32
40	61
40	62
40	64

Tabella 1: Abbiamo tenuto fissa la distanza e contato il numero di frange

Grazie alla formula (11):

$$\Delta x = \lambda \Delta n \quad (12)$$

Dove  $\Delta x$  è la differenza di cammino ottico, e  $\Delta n$  è il numero di frange che abbiamo contanto per ogni  $\Delta x$ .

Abbiamo trovato la lunghezza d'onda per ogni misura effettuata e poi effettuato la media e la deviazione standard, quest'ultima verrà utilizzata come errore. Dai nostri dati abbiamo trovato una stima per la lunghezza d'onda del laser. il nostro risultato è:

$$\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta n} = 651 \pm 25 nm \quad (13)$$

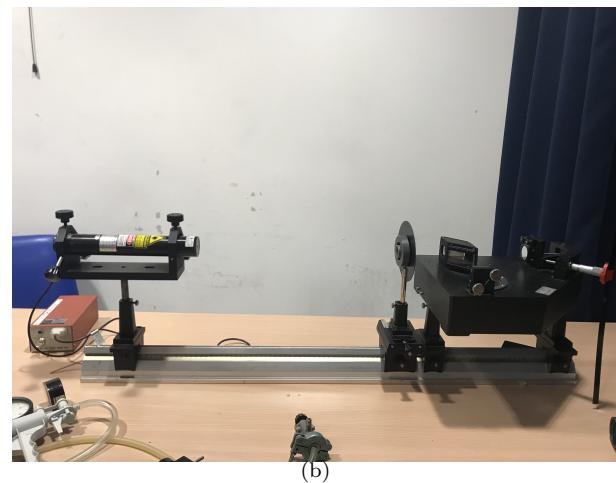
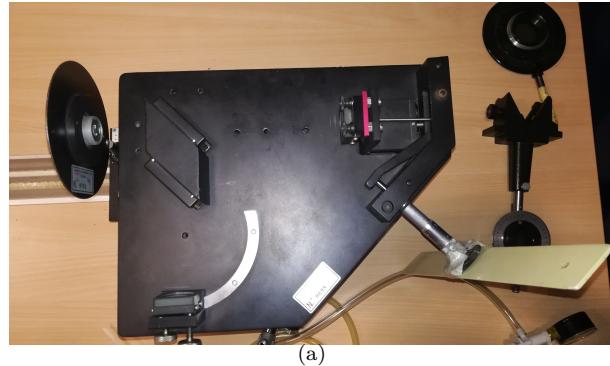


Figura 1: L'apparato strumentale da più punti di vista

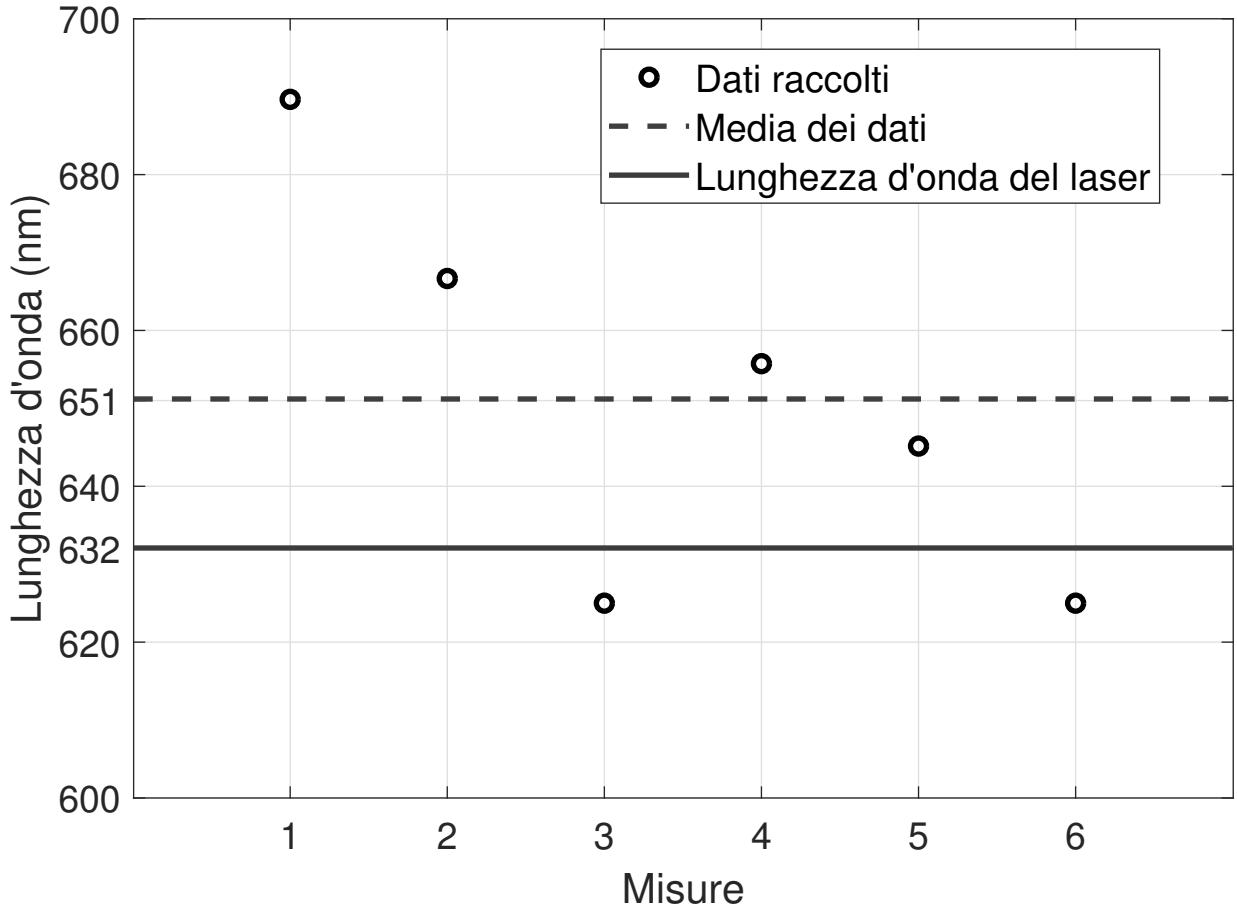


Figura 2: Questo grafico mostra le diverse lunghezza d'onda che abbiamo trovato grazie alle 6 misure, la loro media, e la lunghezza d'onda del laser

### 3 Indice di rifrazione dell'aria

#### 3.1 Teoria

Se poniamo una piccola scatola trasparente dove è presente il vuoto lungo uno dei due raggi laser, quest'ultimo percorrerà più velocemente lo spazio che occupa la scatola; di conseguenza la fase relativa dei raggi cambierà, rimanendo costante nel tempo, e varierà la figura d'interferenza. Sapendo la differenza del numero di frange prima e dopo aver svuotato la camera e usando la lunghezza d'onda calcolata precedentemente possiamo dedurre l'indice di rifrazione dell'aria.

Si definisce indice di rifrazione la grandezza  $n = \frac{c}{v}$  dove  $v$  è la velocità nel mezzo e  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Il numero d'onda, quando un'onda passa da un mezzo all'aria, viene scalato per l'indice di rifrazione. In aria  $k_a = n_a k_0$ , dove  $k_0$  è il numero d'onda nel vuoto.

La fase relativa varia svuotando la camera; vediamo nel dettaglio come. I simboli con pedice  $i$  si riferiscono alla camera vuota, mentre  $L$  indica la lunghezza della camera.

$$\begin{aligned}
 \varphi_i &= k_a(r_1 - 2L) + k_i 2L - k_a r_2 \\
 \varphi_f &= k_a r_1 - k_a r_2 \\
 \varphi_f - \varphi_i &= (k_a - k_i) 2L = \Delta m 2\pi \\
 (n_a - n_i) 2L &= \Delta m \frac{2\pi}{k_0} \\
 \Delta n &= \Delta m \frac{\lambda_0}{2L}
 \end{aligned} \tag{14}$$

È verificato che l'indice di rifrazione vari linearmente con la pressione, per pressioni abbastanza basse. Possiamo trovare la pendenza di tale retta dividendo  $\Delta n$  per  $\Delta P$ . Inoltre sappiamo che per  $P = 0$ , l'indice di rifrazione è

$\Delta P(\text{bar})$	$\Delta m$
0.9	41
0.9	41
0.9	39
0.9	41
0.9	39
0.9	40

Tabella 2: Abbiamo fatto in modo di mantenere sempre la stessa variazione di pressione.

uguale a 1. Così abbiamo un'equazione differenziale del primo ordine, con una condizione iniziale.

$$\begin{aligned} \frac{dn(P)}{dP} &= \frac{\Delta n}{\Delta P} \\ n(0) &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Questa si risolve in:

$$n(P) = 1 + \frac{\Delta n}{\Delta P} P \quad (16)$$

da cui possiamo trovare

$$n(P_{atm}) = n_0 + \frac{\Delta n}{\Delta P} P_{atm} = 1 + \Delta m \frac{2L}{\lambda_0 \Delta P} P_{atm} \quad (17)$$

### 3.2 Apparato Sperimentale

Oltre agli strumenti usati finora abbiamo aggiunto un contenitore trasparente all'interno del quale è possibile formare il vuoto grazie a una pompa. Essa ha un misuratore della pressione interna alla camera.

### 3.3 Dati Sperimentali

Il barometro non misura la pressione assoluta, ma la differenza di pressione rispetto a quella atmosferica, cioè se indica 0.7 bar, la pressione interna è 0.7 bar sotto quella atmosferica.

Innanzitutto abbiamo creato il vuoto all'interno della camera, una volta fatto ciò, abbiamo lasciato entrare molto lentamente l'aria attraverso l'apposita valvola. Ciò che si osserva sul muro su cui è proiettata la figura è che le frange d'interferenza si muovono. Abbiamo contato quante ne passano per un punto fisso mentre si lascia entrare nuovamente l'aria nella scatola. Infatti, per quanto detto nella teoria, al variare della pressione nella camera varia la velocità del laser e quindi le frange d'interferenza. Le misure eseguite sono riportate in Tabella 2.

Con questi dati possiamo ottenere una stima dell'indice di rifrazione dell'aria, supponendo uguale a 1 quello del vuoto, grazie alla formula (17) :

$$n_a = n_0 + \Delta m \frac{\lambda_0}{2d} \frac{P_{atm}}{\Delta P} = 1.00048 \pm 0.000062 \quad (18)$$

dove  $d$  è la lunghezza del contenitore e  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda del laser nel vuoto.

Con i nostri dati abbiamo potuto plottare il grafico dell'indice di rifrazione in funzione della pressione, Figura 3.

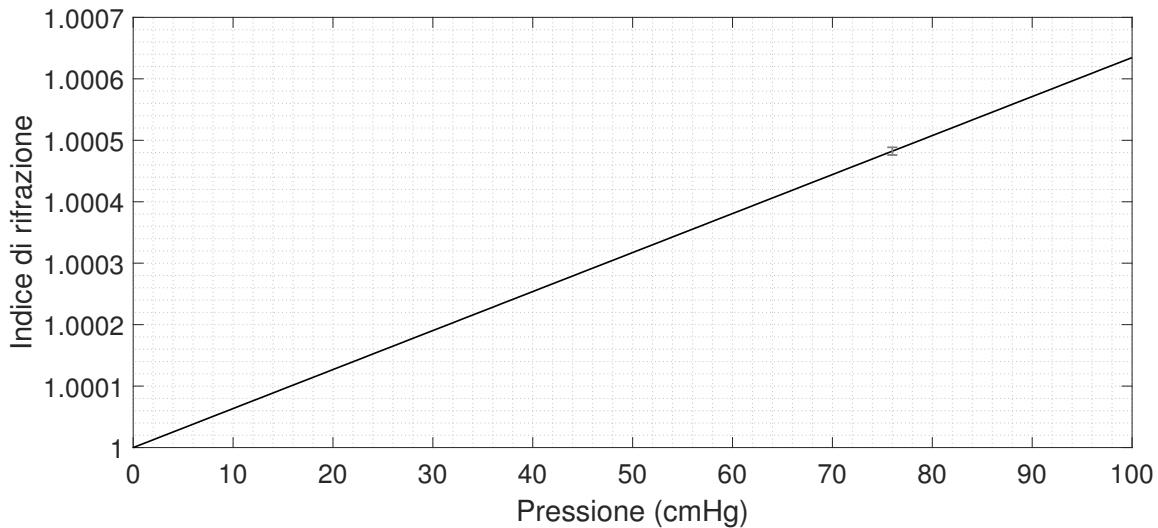


Figura 3: Questo grafico descrive l'andamento dell'indice di rifrazione per pressioni abbastanza basse.

## 4 I limiti dell'ottica geometrica

### 4.1 Teoria

Per definizione, un'onda piana monocromatica ha sempre e ovunque la stessa ampiezza e si estende a tutto lo spazio e il tempo. Non è possibile generare una tale onda negli esperimenti fisici: tutti i segnali hanno una estensione temporale e spaziale limitata, infatti un'onda monocromatica può esser considerata tale solo sotto alcune condizioni. Lo spettro di un laser reale è simile ad una gaussiana e, più tale funzione è stretta, più l'ipotesi che l'onda sia monocromatica sarà valida. La larghezza del picco è legata al tempo di coerenza tramite la formula:

$$\Delta\omega\Delta t_c \sim 1 \quad (19)$$

Inoltre dal tempo di coerenza è possibile ricavare lo spazio di coerenza.

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{c}{n}\Delta t \quad (20)$$

Grazie a questa formula possiamo trovare il tempo di coerenza sapendo l'intervallo spaziale di coerenza, che possiamo misurare. Si vede che tanto più un'onda è monocromatica, ossia  $\Delta\omega$  è stretto, tanto più lentamente varia la sua ampiezza in un dato punto dello spazio, questa relazione lega il tempo di coerenza allo spettro dell'onda monocromatica.

Noi proveremo a trovare l'interferenza della luce bianca, ossia un piccolo intervallo spaziale in cui la ampiezza di tutte le componenti monoscromatiche varia lentamente. Sarà un intervallo di lunghezza estremamente piccola, dato che lo spettro è molto ampio.

### 4.2 Apparato Sperimentale

Per questo esperimento avremo bisogno di usare una torcia e un insieme di filtri di diversi colori. Filtreremo ogni colore, e poi cercheremo per ognuno l'intervallo di spazio in cui esso fa interferenza, ossia sia approssimabile con un'onda monoscromatica. La torcia utilizzata da noi è una comune torcia, infatti questo esperimento funziona anche con una fonte diversa. I filtri invece sono fatti per far passare un range specifico di lunghezze d'onda, ossia uno specifico colore; è importante che faccia passare un solo colore, in tale modo possiamo vedere l'interferenza. Per ogni colore abbiamo misurato tre volte, una volta a testa, l'intervallo di coerenza spaziale.

### 4.3 Dati Sperimentali

Per prima cosa bisogna sempre allineare il laser, ossia fare in modo di avere il centro delle frange ben visibile con lo specchio orientabile. Lo specchio movibile invece bisogna spostarlo vicino al punto in cui i due cammini si egualano, più si è vicino a tale punto, più le frange d'interferenza saranno larghe. Quando vediamo una immagine in cui le frange di interferenza sono molto distanti tra di loro, abbiamo una buona probabilità di trovarci vicino al punto in cui ogni fascio di luce filtrato far

$\lambda(nm)$	$\Delta\lambda(nm)$	$\Delta x(\mu m)$
405	8	34
436.5	9.8	28
546.7	8.6	56
577	10	64
634	25	107

Tabella 3: Tabella delle specifiche dei filtri e del tempo di coerenza

$\lambda(nm)$	$\Delta t_c(fs)$	$\Delta t_c \Delta \nu$
405	113	1.65
436.5	93	1.44
546.7	186	1.61
577	213	1.92
634	356	6.65

Tabella 4: Tabella dello spazio di coerenza e delle specifiche dei filtri

'a interferenza, essendo i cammini quasi uguali. Ora spegniamo il laser e poniamo la torica. Notiamo che per la luce filtrata, la coerenza è molto più difficile da ottenere, infatti ci sono molto onde con diverse frequenze che entrano in gioco. Infatti ruotando la rotellina notiamo che una volta che si notano le frange, esse scompaiono entro poche decine micron, mentre per il laser esse sono sempre evidenti.

I filtri da noi utilizzati e gli intervalli di coerenza sono mostrati in tabella 3.

Un'altra osservazione sperimentale che abbiamo fatto è stata quella di cercare di vedere la interferenza della luce bianca, ossia della luce della torcia senza filtro. Questo fenomeno è estremamente difficile da trovare ed è possibile vederlo solo per pochissimo micron. Abbiamo notato che in tale intervallo ogni colore fa interferenza e la proiezione sul muro, al posto di essere bianca, risulta una miscela di colori. Dopo aver trovato tale fenomeno tre volte, ne abbiamo misurato il tempo di coerenza.

$$\begin{aligned} \Delta t_c &= \Delta x \frac{n_a}{c} \\ \Delta t_c &= (60.00 \pm 11.35) fs \\ \Delta t_c &= \text{tempo di coerenza} \end{aligned} \tag{21}$$

Abbiamo utilizzato dei filtri colorati per verificare la validità di quanto detto nella teoria e cioè che il tempo di coerenza aumenta più la larghezza del picco dello spettro della onda diminuisce.

Da questi è possibile calcolare il tempo di coerenza e la larghezza dello spettro delle frequenze per verificare che

$$\Delta t_c \Delta \nu \sim 1 \tag{22}$$

come riportato in Tabella 4.

Infatti usando la teoria della propagazione degli errori otteniamo che:

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{n} = \lambda \nu \\ \nu &= \frac{c}{n \lambda} \\ \Delta \nu &= \left| \frac{c}{n \lambda^2} \right| \Delta \lambda \end{aligned} \tag{23}$$



Figura 4: Foto dell'interferenza della luce bianca, putroppo la poca luce non ha ci ha permesso di fare una foto di alta qualità.

## 5 Conclusione

Abbiamo stimato con successo la lunghezza d'onda del laser, nel nostro caso essa è venuta più alta di quella indicata sullo strumento, ma pur sempre entro l'errore sperimentale. La parte più complicata è stata quella di allineare l'apparato strumentale poichè è molto sensibile.

L'indice di rifrazione dell'aria è venuto anch'esso coerente con i valori empirici, una volta allineato il sistema non è molto difficile compiere questa parte di esperimento.

Per trovare l'interferenza della luce bianca, a volte è stato necessario svolgere diversi tentativi, non sempre andati a buon fine, controllare più volte se il laser è ben allineato e al centro. Nonostante ciò questa parte dell'esperimento è molto interessante e formativa. Come si vede dalla tabella, il prodotto del tempo di coerenza per l'incertezza sulla frequenza è dell'ordine dell'unità.

## 6 Appendice A

Dati due raggi qualsiasi ad una distanza  $r$  dal centro della proiezione che compiono rispettivamente un percorso  $r_1$  e  $r_2$ , si definisce

1. D percorso che compie il del raggio che viene inizialmente riflesso dal beam splitter passante per il centro
2. d la differenza di posizione dello specchio movibile rispetto a quello fisso. Nota  $d \ll D$ .
3.  $D + 2d$  percorso che compie il del raggio che viene inizialmente trasmesso dal beam splitter passante per il centro.
4.  $\theta$  l'angolo tra  $r_1$  e D, che è lo stesso tra  $r_2$  e  $D + 2d$

Usando il teorema di Pitagora ottengo:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{D^2 + r^2} \\ r_2 &= \sqrt{(D + 2d)^2 + r^2} = \sqrt{D^2 + r^2 + 4dD + 4d^2} \cong \sqrt{D^2 + r^2 + 4dD} \\ r_2 - r_1 &= \sqrt{D^2 + r^2 + 4dD} - \sqrt{D^2 + r^2} = \\ &= \sqrt{D^2 + r^2} \left[ \left( 1 + \frac{4dD}{D^2 + r^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = \end{aligned}$$

Usando Taylor al primo ordine

$$\begin{aligned} &= \sqrt{D^2 + r^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{4dD}{D^2 + r^2} - 1 \right] = \\ &= \sqrt{D^2 + r^2} \frac{2dD}{D^2 + r^2} = 2d \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} \\ \cos \theta &= \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} \\ &= 2d \cos \theta \end{aligned} \tag{24}$$