

Università degli Studi dell’Insubria  
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018/2019  
Laboratorio di Fisica II

**Gruppo IX:**

**Martina Mozzanica    Matteo Oñate Orozco  
Elisa Vallini**

# **Esperienza di ottica: Spettrometro**

## **Sommario**

Studio dell’andamento dell’indice di rifrazione di un prisma in funzione della lunghezza d’onda, tramite l’angolo di deviazione minima nella rifrazione di luce proveniente da tubi di Plücker.

## **Indice**

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Apparato sperimentale</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Dati sperimentali</b>	<b>11</b>
3.1	Angolo di apertura del prisma . . . . .	11
3.2	Misura dell'indice di rifrazione . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Conclusione</b>	<b>17</b>

# 1 Introduzione

In questo esperimento studiamo l'andamento dell'indice di rifrazione del materiale di cui è costruito il prisma in funzione della lunghezza d'onda utilizzando il fenomeno della rifrazione delle onde elettromagnetiche.

Con il termine rifrazione si intende la deviazione subita da un'onda che ha luogo quando questa passa da un mezzo ad un altro, con indice di rifrazione diverso dal primo, nel quale la sua velocità di propagazione cambia. Passando da un mezzo all'altro si può notare che, oltre alla velocità, cambia anche la lunghezza d'onda della radiazione.

Una grandezza che ci interessa e che riguarda questo fenomeno è l'indice di rifrazione. Esso è una grandezza adimensionale che quantifica la diminuzione della velocità di propagazione della radiazione elettromagnetica quando questa attraversa un materiale. Precisamente, è il rapporto tra la velocità dell'onda nel mezzo da cui esce e la velocità dell'onda nel mezzo in cui entra.

$$n = \frac{v_1}{v_2} \quad (1)$$

*n = indice di rifrazione*

*v<sub>1</sub> = mezzo da cui esce*

*v<sub>2</sub> = mezzo in cui entra*

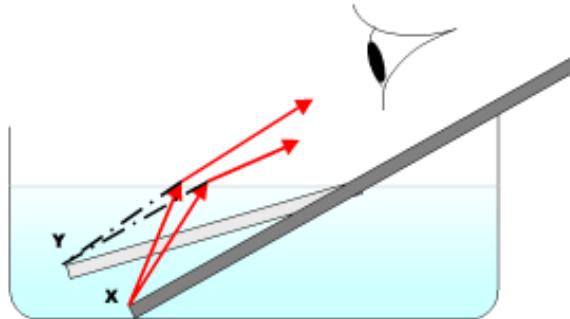


Figura 1: Fenomeno della rifrazione

La misura dell'indice di rifrazione può essere usata per identificare la natura del materiale in cui si propaga la radiazione.

La diminuzione della velocità di propagazione viene accompagnata dalla variazione della sua direzione; in particolare se la lunghezza d'onda diminuisce allora anche la velocità diminuisce mentre se la lunghezza d'onda aumenta allora anche la velocità aumenta. La velocità e la direzione di propagazione sono in relazione tramite la legge di Snell :

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (2)$$

$n_1$ =indice di rifrazione del primo mezzo  
 $\theta_1$ =angolo di incidenza  
 $n_2$ = indice di rifrazione del secondo mezzo  
 $\theta_2$ =angolo di rifrazione

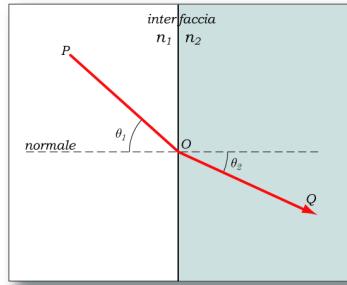


Figura 2: Legge di Snell

Per questo esperimento utilizzeremo, per la sua geometria, un prisma. Se puntiamo un fascio di luce bianca su una faccia del prisma notiamo che, dato che la luce bianca contiene tutte le lunghezze d'onda dello spettro visibile, questa si scomponete in una serie di raggi colorati. Questo accade perché i vari colori all'interno del fascio di luce bianca hanno lunghezze d'onda diverse e quindi diverse velocità e direzioni di propagazione.

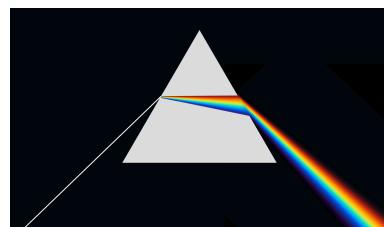


Figura 3: Prisma

Ciò che interessa a noi è calcolare l'indice di rifrazione utilizzando, appunto, la capacità del prisma di separare i vari colori della luce bianca.

Per calcolare l'indice di rifrazione dobbiamo determinare l'angolo di deviazione minima del raggio rifratto dal prisma rispetto a quello incidente in funzione della lunghezza d'onda. Infatti, quando un raggio di luce passa da un materiale ad un altro si rifrange in accordo con la legge di Snell (eq. 2); un raggio di luce, però, attraversando un prisma si rifrange due volte: una quando entra ed una quando esce. La somma di questi due angoli di deflessione viene chiamata angolo di deviazione.

Esiste un angolo d'incidenza per cui la somma dei due angoli di deflessione è minima. L'angolo di deviazione in questo punto viene chiamato angolo di deviazione minima.

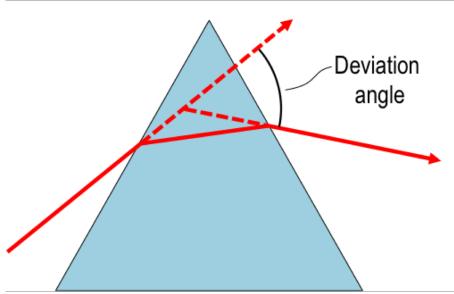


Figura 4: Angolo di deviazione

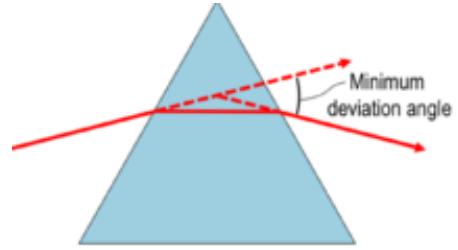


Figura 5: Angolo di deviazione minima

Avendo l'angolo di deviazione minima,  $\delta_{min}$ , e l'angolo di apertura del prisma che chiameremo più in generale  $\alpha$ , troviamo la relazione per determinare l'indice di rifrazione,  $n$ .

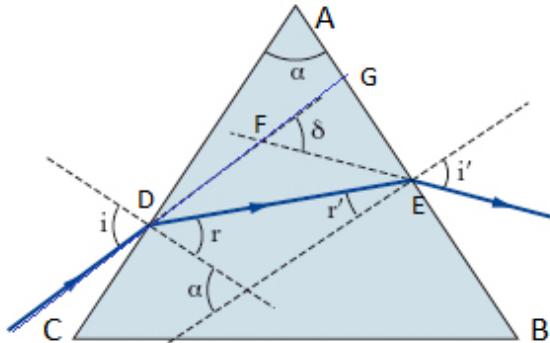


Figura 6: Geometria del prisma

Riprendiamo in considerazione un raggio incidente con angolo  $i$  sulla superficie di un prisma di apertura  $\alpha$ , come riportato in Figura 6. Ci proponiamo di calcolare le condizioni per avere deviazione minima del raggio uscente dal prisma rispetto alla direzione di incidenza.

Usiamo la legge di Snell (eq. 2) considerando l'indice di rifrazione dell'aria, primo mezzo, uguale a 1; questa approssimazione è ragionevole poiché ci aspettiamo che  $n$  sia circa 1,5.

$$\sin(i) = n \sin(r) \quad \text{e} \quad \sin(i') = n \sin(r') \quad (3)$$

$n$ =indice di rifrazione del materiale del prisma

Considerando il triangolo DAE e considerando il triangolo FDE, per considera-

zioni goniometriche elementari otteniamo che:

$$\begin{aligned}\alpha &= r + r' \\ \delta_{min} &= i + i' - \alpha\end{aligned}\tag{4}$$

Possiamo ricavare la condizione di deviazione minima notando che, in condizioni di minimo, l'angolo di deviazione  $\delta_{min}$  deve avere derivata nulla rispetto ad  $i$ :

$$\frac{d\delta_{min}}{di} = 0\tag{5}$$

Utilizzando le relazioni appena scritte e la legge di Snell si ottengono le relazioni tra gli angoli di incidenza e gli angoli di rifrazione in condizione di angolo limite. Si nota che l'angolo di deviazione assume valore minimo in condizioni di simmetria rispetto alle facce del prisma; è per tale geometria che si utilizza il prisma.

$$i' = i \quad \text{e} \quad r' = r\tag{6}$$

Utilizzando la (3) e (4) e ponendo la condizione appena dedotta otteniamo:

$$\begin{cases} \sin(i) = n \sin(r) \Rightarrow n = \frac{\sin(i)}{\sin(r)} \\ \alpha = r + r' \Rightarrow r = \frac{\alpha}{2} \\ \delta_{min} = i + i' - \alpha \Rightarrow i = \frac{\delta_{min} + \alpha}{2} \end{cases}\tag{7}$$

Unendo quest'ultime tre equazioni si ha l'indice di rifrazione in funzione di  $\alpha$  e di  $\delta_{min}$ :

$$n = \frac{\sin(\frac{\delta_{min} + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\tag{8}$$

Grazie a questa formula, facendo incidere un raggio di luce su una faccia del prisma e misurando l'angolo di deviazione minima per una certa lunghezza d'onda, possiamo ricavare l'indice di rifrazione.

Ovviamente il  $\delta_{min}$  dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ , perciò, dopo aver calcolato l'indice di rifrazione ( $n$ ) al variare di  $\lambda$  abbiamo verificato la correttezza delle equazioni di Sellmeier e di Cauchy.

Le nostre deduzioni si basano sul modello dell'atomo che, nonostante sia erroneo, offre dei risultati coerenti con le osservazioni sperimentali. Abbiamo che l'elettrone, di massa  $m$  e di carica  $e$ , orbita attorno al nucleo ed è da esso attratto da una forza di richiamo elastica. Se un'onda elettromagnetica investe

l'elettrone, questo subisce una forza dovuta al campo dell'onda che oscilla con una frequenza  $\omega$ . Questa risulta essere l'equazione del moto dell'elettrone:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + m\omega_0^2 r = -eE \quad \text{con} \quad E = E_0 \sin(\omega t) \quad (9)$$

Questo moto descrive quello di un oscillatore armonico, di frequenza propria  $\omega_0$  forzato con una frequenza  $\omega$ .

In questa espressione è trascurata la forza dovuta all'interazione dell'elettrone con il campo magnetico della radiazione, in quanto si considerano elettroni non relativistici.

Per un dielettrico, come è il materiale di cui il prisma è composto (vetro), vale  $\omega \ll \omega_0$  in quanto l'elettrone è ben legato al nucleo. Inoltre, essendo lo stesso materiale diamagnetico, possiamo considerare  $\mu_r \simeq 1$  e quindi  $n \simeq \sqrt{\epsilon_r}$ . Possiamo quindi scrivere  $\chi = \epsilon_r - 1$  e lavorare con la suscettività elettrica.

L'elettrone in moto, alla luce della teoria sull'interazione luce-materia, può essere approssimato con un dipolo oscillante emettente, avente momento di dipolo

$$d = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (10)$$

Definendo  $N$  come il numero di dipoli presenti nel mezzo per unità di volume possiamo definire una polarizzazione macroscopica ed, essendo il vetro lineare e isotropo, questa sarà direttamente proporzionale al campo incidente stesso

$$P = N d = \epsilon_0 \chi E \quad (11)$$

Da questa equazione ricaviamo la suscettività elettrica e sostituiamo il momento di dipolo per il singolo elettrone; otteniamo

$$\chi = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (12)$$

avendo definito  $\omega_p$  con le dimensioni di una frequenza, detta *frequenza di plasma*.

Ritornando a  $n$ , approssimiamo al primo ordine, essendo  $\omega \ll \omega_0$

$$n \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 \omega_0^2} \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^4} \frac{4\pi^2 c}{\lambda^2} \quad (13)$$

la quale può essere vista come

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} \quad (14)$$

Questa è l'equazione di Cauchy, relazione tra l'indice di rifrazione e la lunghezza d'onda della luce per un particolare materiale trasparente.

La teoria sull’interazione luce-materia su cui Cauchy basa questa equazione fu poi scoperta non essere corretta. In particolare l’equazione è valida solo per le regioni di dispersione normale nella regione di lunghezze d’onda visibili. Nell’infrarosso l’equazione diventa imprecisa e non può rappresentare le regioni di dispersione anomala. Nonostante questo, la sua semplicità matematica la rende utile in alcune applicazioni.

## 2 Apparato sperimentale

Le apparecchiature necessarie sono:

- **Tubi di Plücker.** I tubi di Plücker sono sorgenti luminose adatte all’analisi spettroscopica. Sono composti da due bulbi allungati, connessi da una cannula di sezione sottile, nella quale si forma una striscia luminosa intensa che viene analizzata attraverso uno spettroscopio. La luce è prodotta da una scarica elettrica tra due elettrodi, posti alle estremità opposte dei bulbi, generata da una tensione di 5000 V attraverso un gas alla pressione di alcuni torr. All’interno di questi tubi si inseriscono gas rarefatti. Le molecole o atomi dei gas eccitati non irradiano su tutte le lunghezze d’onda, come avviene per la luce solare, ma lo spettro di emissione è discreto. Attraversando lo spettroscopio la luce viene dispersa in righe, ed ogni riga di colore diverso dalle altre corrisponde a una diversa lunghezza d’onda. Abbiamo utilizzato diversi tubi di plücker, ovvero con diversi tipi di gas all’interno: noi abbiamo utilizzato mercurio, elio, idrogeno e neon.



- **Spettrometro.** Lo spettrometro viene usato per osservare lo spettro del determinato materiale contenuto nel tubo di plücker. Esso è costituito da diverse componenti:

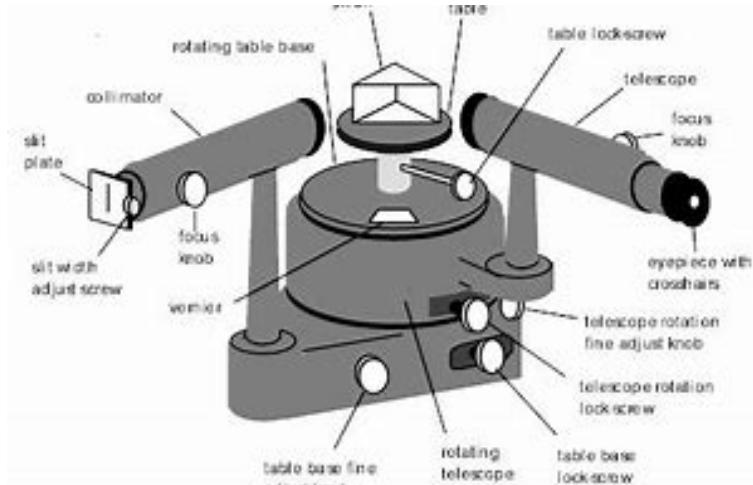


Figura 7: Schema spettrometro

- **Collimatore e cannocchiale.** Il collimatore è una fessura regolabile attraverso cui passano i raggi di luce prodotti da una sorgente in modo che si osservino delle linee verticali. Il cannocchiale fornisce un’immagine della fenditura con ingrandimento poco discosto dall’unità. Sia il collimatore che il cannocchiale hanno 178mm di lunghezza focale, obiettivi acromatici e aperture chiare con diametro di 32 mm. Il telescopio ha un oculare Ramsden 15X ed è dotato di una fessura di 6 mm di larghezza regolabile.
- **Prisma.** Il prisma, come già detto in precedenza, è in vetro ed è l’oggetto che permette di separare i vari colori, lunghezze d’onda, presenti all’interno della luce bianca.
- **Basi rotanti.** Il cannocchiale e il piano su cui è appoggiato il prisma sono montati su due basi diverse. Perciò sia il prisma che la restante parte dello spettrometro possono essere ruotati in maniera indipendente. Inoltre anche lo stesso piano può essere rimosso dalla sua base d’appoggio. Le posizioni di ogni base possono essere misurate con una scala graduata posta attorno al piano rotante: il nonio (fig. 11). Il nonio ha una sensibilità di 30 secondi.



Figura 8: Spettrometro



Figura 9: Luce del mercurio



Figura 10: Lampada



Figura 11: Scala nonio

## 3 Dati sperimentali

### 3.1 Angolo di apertura del prisma

In questo esperimento come prima cosa abbiamo verificato l'angolo di apertura del prisma.

L'angolo di apertura viene determinato mettendo il prisma in una posizione  $\theta_1$  e facendo incidere un raggio luminoso su una faccia del prisma. Quando il riflesso del raggio esce dal prisma, bisogna fissare l'oculare, l'oggetto con cui si osservano i raggi che fuoriescono dal prisma, in quella determinata posizione e si misura l'angolo. Mantendo fisso l'oculare si proietta il raggio luminoso su un'altra faccia del prisma e si misura l'angolo  $\theta_2$ . Ora per trovare l'angolo di apertura del prisma basta scrivere la seguente formula:

$$\alpha = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2} \quad (15)$$

$\alpha$ =angolo di apertura del prisma

$\theta_1$ = angolo sulla prima faccia del prisma

$\theta_2$ = angolo sulla seconda faccia del prisma

Con questo procedimento l'angolo che abbiamo trovato è:  $\alpha = 59.9833^\circ \pm 0.0083^\circ$ . Per la stima dell'errore abbiamo utilizzato l'errore sperimentale, ovvero la sensibilità del nonio, di  $30''$  ( $0.0083^\circ$ ).

### 3.2 Misura dell'indice di rifrazione

In questa seconda parte dell'esperimento abbiamo usato i quattro tubi di plücker ognuno con un diverso tipo di gas all'interno: neon, mercurio, idrogeno ed elio. Per prima cosa abbiamo preso la lampada al neon e l'abbiamo posta davanti al collimatore, poi, tenendo fisso il prisma, abbiamo cercato con il canocchiale dove la luce veniva rifratta dal prisma. Dopo aver focalizzato il canocchiale abbiamo cercato l'angolo in cui al ruotare del prisma si nota che il fascio di luce "torna indietro", chiameremo quest'angolo  $\beta$  e mostreremo che questo è in relazione con l'angolo di deviazione minima.  $\beta$  è l'angolo che abbiamo misurato, per ogni colore dello spettro della lampada.

In seguito abbiamo osservato gli spettri di emissione e per ogni riga di colore diverso, spostando il canocchiale, abbiamo misurato l'angolo in cui si trovavano. Il collimatore è importante perché ci permette di distinguere i diversi colori della luce. Infatti nell'attraversare il prisma le differenti componenti monocromatiche presenti nello spettro della luce subiscono deviazioni diverse, tuttavia in emergenza dal prisma i raggi luminosi appartenenti alla stessa componente monocromatica si mantengono distinti tra loro. Per noi è necessaria questa distinzione perché la differenza tra gli angoli di deviazione di colori diversi è dell'ordine dei primi.

Abbiamo fatto ciò per ognuna delle quattro lampade, per tutte le lunghezze d'onda distinguibili osservate.

L'errore usato è di 30 secondi ( $0.0083^\circ$ ), ovvero la sensibilità del nonio.

Togliendo il prisma la luce non viene deviata; misuriamo l'angolo  $\alpha_0$  dove la luce arriva in linea retta.

Usiamo  $\alpha_0$  come se fosse il nostro angolo di riferimento e da qui possiamo calcolare l'angolo di deviazione minima  $\delta_{min}$  nel modo seguente:

$$\delta_{min} = \beta - \alpha_0 \quad (16)$$

$\delta_{min}$ = angolo di deviazione minima

$\beta$ = angolo in cui si trovano i vari colori degli spettri di ognuno dei quattro gas  
 $\alpha_0$ =l'angolo in cui, togliendo il prisma, la luce arriva direttamente al canocchiale

Avendo l'angolo di deviazione minima e l'angolo di apertura del prisma , grazie alla formula illustrata nell'introduzione (eq. 8) possiamo calcolare l'indice di rifrazione.

L'errore sull'indice di rifrazione è stato calcolato con la propagazione degli errori, considerando per tutte le misure l'errore strumentale e usando l'equazione:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \quad (17)$$

$\sigma$ =errore

$f$ =funzione di cui si vuole calcolare l'errore

$x_i$ =variabili da cui dipende la funzione  $f$

$\Delta x_i$ = errore delle variabili  $x_i$ .

In figura 12 sono riportati i grafici di ognuno dei quattro gas in cui mostriamo l'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda. Per il fit abbiamo usato l'equazione di Cauchy vista nell'introduzione (eq. 14):

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} \quad (18)$$

$n$ =indice di rifrazione

$a,b$ =parametri del fit

$\lambda$ =lunghezza d'onda

I parametri a e b si possono identificare, ricordando l'eq 13, con:

$$a = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \quad e \quad b = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^4} 4\pi^2 c \quad (19)$$

Riportiamo nella tabella (1) i valori ottenuti dei parametri del fit per ogni tubo di plücker.

elemento	a	b
neon	$1.505 \pm 0.050$	$5410 \pm 1273$
mercurio	$1.510 \pm 0.006$	$4036 \pm 1674$
idrogeno	$1.510 \pm 0.003$	$3979 \pm 826$
elio	$1.504 \pm 0.001$	$4859 \pm 314$

Tabella 1: Valori dei parametri di fit  $a$  e  $b$  per ognuno dei quattro tubi di plücker.

Possiamo verificare la qualità del nostro fit attraverso il test del  $\chi^2$ . Esso viene definito come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad (20)$$

$o_i$  = frequenza con cui osservo l'evento  $i$ -esimo

$e_i$  = frequenza teorica dell'evento  $i$ -esimo

Se le frequenze osservate coincidono esattamente con quelle teoriche, allora  $\chi^2 = 0$ , mentre se esse differiscono,  $\chi^2 > 0$ . Più grande è il valore di  $\chi^2$ , più grande è la discrepanza tra le frequenze osservate e quelle teoriche. Estraendo i valori del  $\chi^2$  dal nostro fit otteniamo:

gas	$\chi^2$
neon	0.0072
mercurio	0.0067
idrogeno	0.0054
elio	0.0084

Tabella 2: Valori di  $\chi^2$  ottenuto per ognuno dei quattro tubi di plücker.

Notiamo in tabella 2 come i nostri valori di  $\chi^2$  sono molto vicini a 0. Quindi il fit svolto è molto vicino a ciò che ci si aspetterebbe teoricamente e perciò è da considerarsi buono.

Inoltre possiamo anche rappresentare i vari spettri su un unico grafico (figura 13) in quanto la relazione di Cauchy dipende solamente dalle lunghezze d'onda e non da come queste sono ottenute.

Le lunghezze d'onda (espresse in nm) e gli indici di rifrazione per ogni colore di ogni lampada sono riportati nelle tabelle 3. L'indice di rifrazione è stato calcolato tramite l'equazione 8.

L'errore per gli indici di rifrazione è stato calcolato con la propagazione degli errori, tramite l'equazione 17. Avendo usato, come errore degli angoli misurati, l'errore sperimentale ( $0.0083^\circ$ ) quello per gli indici di rifrazione risulta essere uguale per tutti, cioè  $0.0140^\circ$ .

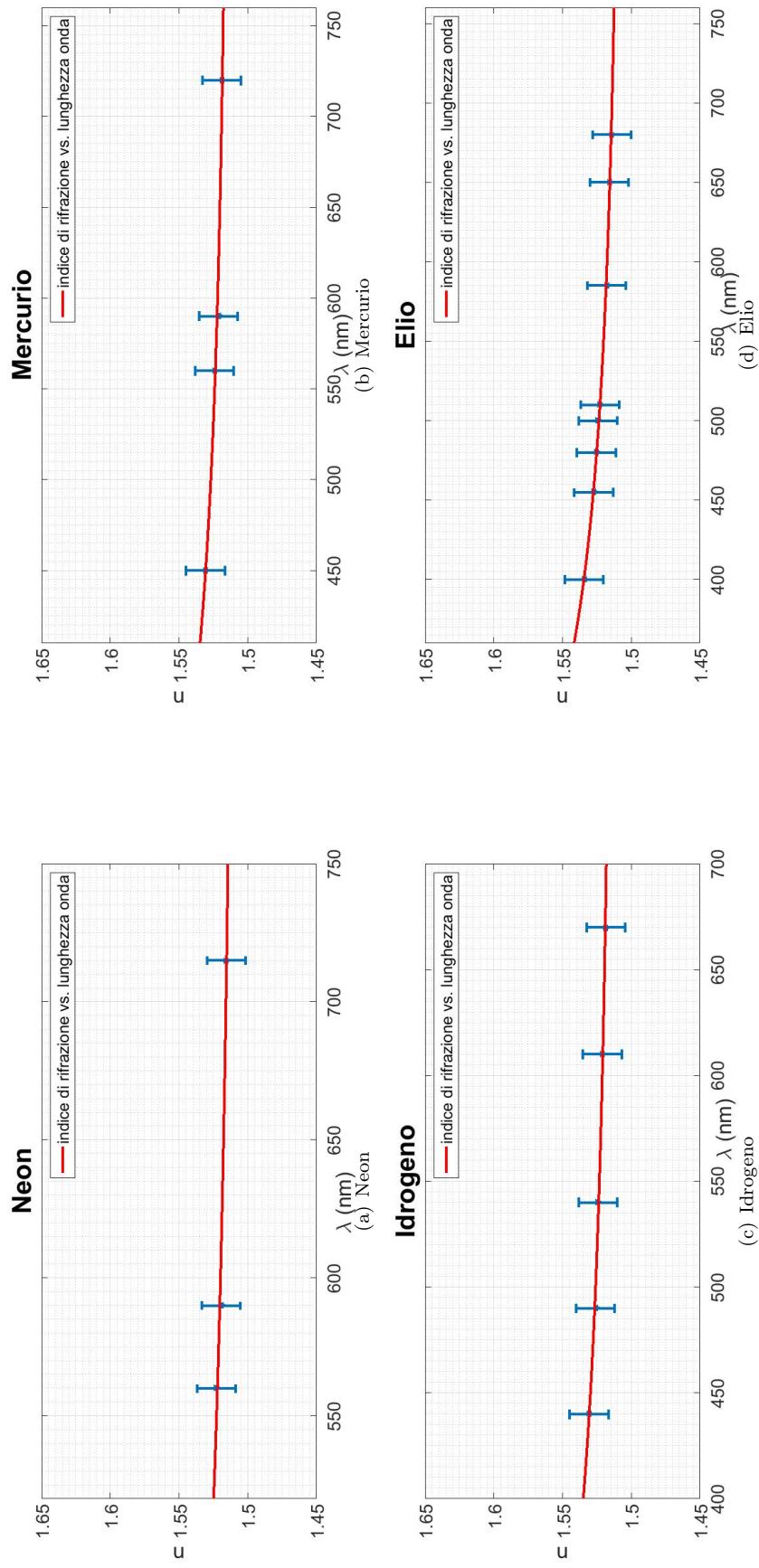


Figura 12: In figura sono rappresentate quattro diverse lampade che emettono diverse lunghezze d'onda dello spettro eletromagnetico. Nei grafici abbiamo l'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda con i rispettivi errori.

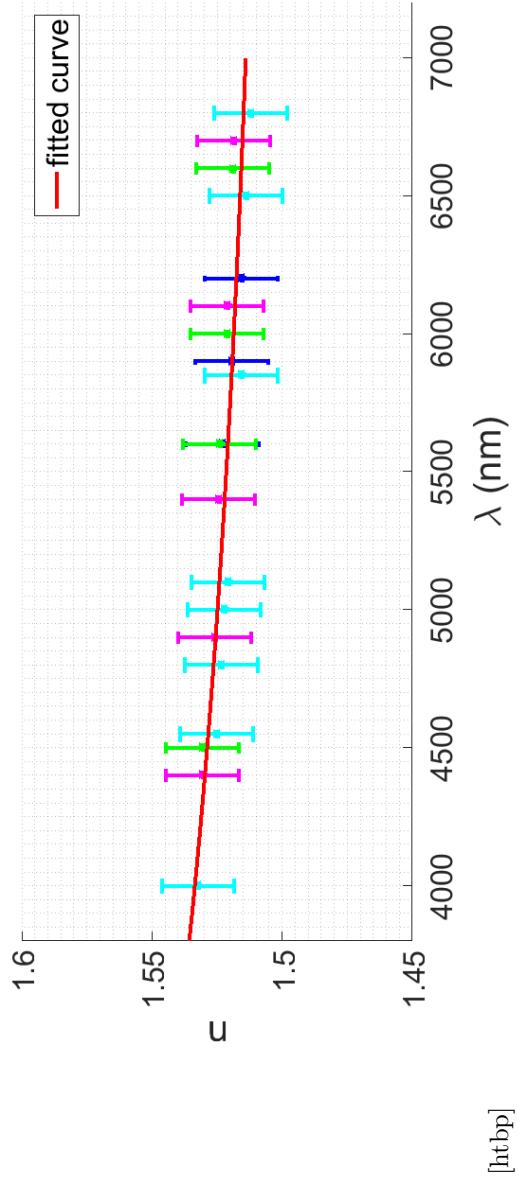


Figura 13: *neon*, *mercurio*, *idrogeno*, *elio*  
Nel grafico è riportato l'indice di rifrazione  $n$  in funzione delle lunghezze d'onda degli spettri delle quattro lampade. Per il fit viene utilizzata l'equazione 18.

NEON				
<i>colori</i>	verde	arancione	rosso	
$\lambda$	5600	5900	7150	
$n$	1.5229	1.5192	1.5156	

MERCURIO				
<i>colori</i>	viola	verde	giallo	rosso
$\lambda$	4500	5600	5900	7200
$n$	1.5307	1.5241	1.5213	1.5188

IDROGENO					
<i>colori</i>	viola	blu	verde	giallo	rosso
$\lambda$	4400	4900	5400	6100	6700
$n$	1.5307	1.5260	1.5243	1.5211	1.5185

ELIO								
<i>colori</i>	viola	blu	azzurro	verde	verde chiaro	giallo	arancione	rosso
$\lambda$	4000	4550	4800	5000	5100	5850	6500	6800
$n$	1.5343	1.5273	1.5254	1.5243	1.5228	1.5179	1.5160	1.5142

Tabella 3: Sono riportati i quattro gas presenti nei tubi di plücker con i rispettivi spettri osservati. Per ogni colore vi è la rispettiva lunghezza d'onda espressa in nm e gli indici di rifrazione calcolati grazie all'equazione 8.

Estraendo il valore del  $\chi^2$  dal fit in figura 13, esso risulta essere 0.2721. Notiamo che è vicino a 0, ciò sta ad indicare un buon fit. Però notiamo che non risulta vicino a 0 tanto quanto i  $\chi^2$  ottenuti dai singoli fit (tabella 2).

## 4 Conclusione

L'angolo di apertura del prisma trovato,  $\alpha = 59.9833 \pm 0.0083$ , è coerente con quello teorico ( $60^\circ$ ). Per quanto riguarda gli indici di rifrazione, noi sappiamo che l'indice di rifrazione del vetro è 1.5, perciò abbiamo anche in questo caso coerenza con i risultati sperimentali che abbiamo ottenuto.

L'andamento degli indici in funzione della lunghezza d'onda rispetta la previsione teorica, dato che i valori del  $\chi^2$  ridotto sono ragionevoli e corrispondono ad un buon fit dei risultati.