



Università degli Studi dell'Insubria

DIPARTIMENTO DI SCIENZA E ALTA TECNOLOGIA

Corso di Laurea triennale in Fisica

RELAZIONI DI LABORATORIO

Laboratorio di Fisica I

Autori:

Mossi Daniele
Mozzanica Martina
Vallini Elisa

Professore:

Caccia Massimo Luigi Maria

Supervisori:

Antonello Massimiliano
Lomazzi Samuela
Malinverno Luca

Sommario

Vengono presentate in questa relazione le misure e le analisi dei dati relative alle cinque esperienze di laboratorio effettuate. I primi due esperimenti erano di tipo numerico mentre i restanti tre sono stati eseguiti da noi nel laboratorio dell'Università.

- **Rivelatori di Radon:** ci siamo occupati della calibrazione di 5 rivelatori di Radon diversi.
- **Segnale del MIMOTERA:** abbiamo individuato la sorgente di particelle α all'interno di una matrice tridimensionale di dati.
- **SiPM:** abbiamo caratterizzato un SiPM e analizzato statisticamente la natura poissoniana del rumore e della luce LED.
- **Oscillatore armonico:** abbiamo studiato il moto di un'oscillatore armonico nelle tre condizioni di oscillazioni libere, forzate e forzate-smorzate.
- **Rotaia a cuscino d'aria:** abbiamo studiato il moto di un corpo lungo un piano in (quasi) totale assenza di attrito, per varie condizioni della rotaia.

In tutti gli esperimenti le analisi dati sono accompagnate dalla valutazione della correttezza dei dati sperimentali rispetto ai modelli teorici.

Tutte le formule base dell'analisi statistica sono state riportare nell'appendice, alla fine del documento e sono state utilizzate all'interno di quest'ultimo specializzate ai vari casi, senza ulteriore richiamo alle forme generali.

Indice

1	Esperimento numerico: rivelatori di Radon	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Strumentazione per la rilevazione del Radon	4
1.3	Finalità dell'esperimento	5
1.4	Compatibilità degli strumenti	5
1.5	Calibrazione degli strumenti	11
2	Esperimento numerico: segnale del MIMOTERA	23
2.1	Introduzione e apparato strumentale	23
2.2	Obiettivi	24
2.3	Mappa d'intensità	24
2.4	Mappa di conteggio	30
2.5	Quantum Imaging	34
3	Caratterizzazione del SiPM	48
3.1	Introduzione al SiPM	48
3.2	Strumentazione	54
3.3	Obiettivi dell'esperienza	55
3.4	Sensore al buio	56
3.5	Sensore alla luce	60
3.6	Statistica sul numero di fotoni	70
4	Oscillatore armonico	77
4.1	Apparato strumentale	77
4.2	Moto Armonico Semplice	77
4.3	Moto Armonico Smorzato	80
4.4	Moto Armonico Smorzato Forzato	88
5	Rotaia a cuscino d'aria	93
5.1	Apparato strumentale	93
5.2	Cenni teorici: relazione tra accelerazione, coefficiente d'attrito e angolo d'inclinazione in un piano inclinato	94
5.3	Coefficiente d'attrito e angolo d'inclinazione	96
5.4	Orizzontalità della rotaia	103
5.5	Anelasticità dell'urto	104
1	Appendice	106

1 Esperimento numerico: rivelatori di Radon

1.1 Introduzione

Il Radon è un gas nobile inodore, insapore, quindi impercettibile ai nostri sensi. La pericolosità di questo, per l'uomo, è dovuta alle sue peculiarità chimico-fisiche, in particolare alla sua radioattività.

Pericolosità del Radon

Questo gas si forma dal decadimento del radioisotopo Ra-226 originato, per decadimenti successivi, dall'uranio U-238 diffusamente presente nelle rocce della crosta terrestre e nel sottosuolo. Una volta formatosi, come tutti i gas, tende a volatilizzarsi ed essere respirato da chi ne viene a contatto; data la sua instabilità, una volta giunto all'interno dell'apparato respiratorio può andare incontro al processo di decadimento radioattivo. Possono essere respirate anche le cosiddette *progenie del Radon*, atomi radioattivi che si generano in seguito al decadimento del Radon direttamente nell'aria aperta. Il Radon è quindi un gas che può facilmente penetrare all'interno dei polmoni e qui esplicare la sua azione degenerativa.

Nei polmoni il Radon non si deposita, ma viene rapidamente espulso; i suoi effetti dannosi sono prodotti dai suoi figli radioattivi α -emettitori solidi $Po - 218$ e $Po - 214$ che si depositano nell'epitelio bronchiale rilasciandovi dosi significative di energia di radiazione α .

Queste possono avere effetti dannosi poichè riescono a danneggiare il DNA e l'RNA delle cellule, quindi vi è la possibilità che portino alla formazione di un tumore ai polmoni. Al momento non si ritiene possibile l'insorgenza di tumore in altri organi del corpo in quanto le radiazioni α percorrono delle distanze relativamente brevi e quindi insufficienti a raggiungere altre zone corporee.

L'Organizzazione Mondiale della Sanità lo ha inserito, insieme al fumo di sigaretta e l'amianto, tra le cause maggiori di cancro. In Italia il gas Radon è considerato la seconda causa di morte per cancro ai polmoni.

Molte organizzazioni internazionali scientifiche hanno fissato dei livelli di riferimento per le abitazioni e per gli ambienti di lavoro al di sotto dei quali si ritiene che sussista un basso rischio di contrarre questa malattia. In Europa, il limite di concentrazione media annua nelle abitazioni costruite prima del 1990 è fissato a 400 Bq/m^3 ; e a 200 Bq/m^3 per quelle posteriori. L'esposizione a 500 Bq/m^3 per 2000 ore in un anno realizza una probabilità di tumore pari a 2.5×10^{-4} .

Il becquerel (simbolo Bq) è l'unità di misura del Sistema internazionale dell'attività di un radionuclide ed è definita come l'attività di un radionuclide che ha un decadimento al secondo. 1 Bq equivale a 1 disintegrazione al secondo.

Nella figura 1 possiamo vedere la distribuzione del Radon in Italia.

Dove è presente il gas Radon

Il gas Radon emergente dal suolo si diffonde rapidamente nell'atmosfera, venendo a produrre concentrazioni molto basse all'aria aperta, mediamente pari a 8 Bq/m^3 , nelle aree continentali, con valori massimi di 50 Bq/m^3 . Diversa è la situazione dei luoghi chiusi o sotterranei (grotte, caverne) dove possono formarsi concentrazioni anche molto elevate, in particolare nei locali interrati degli edifici, che costituiscono la via

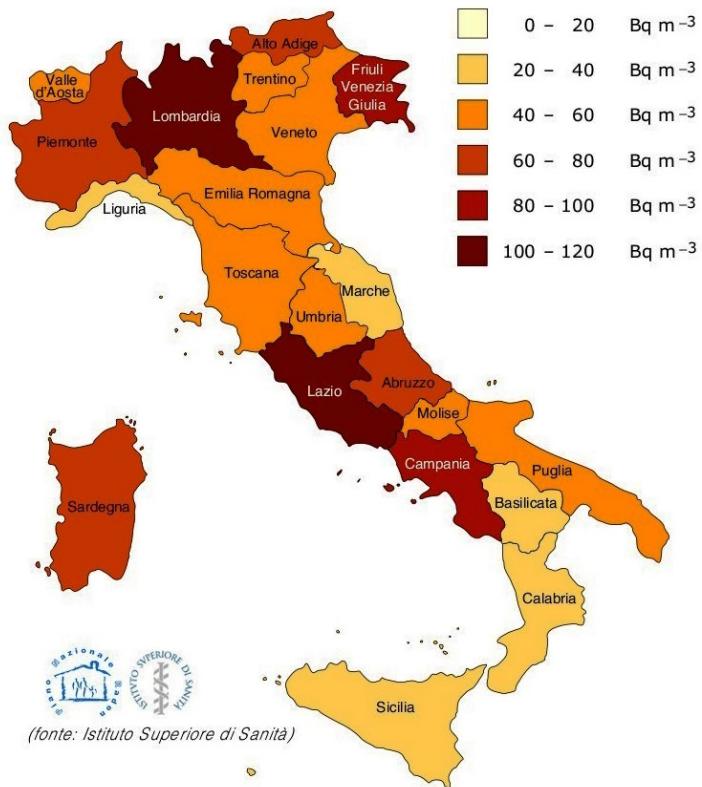


Figura 1: Distribuzione del Radon in Italia

più diretta di penetrazione del Radon emergente dal suolo e sono generalmente anche i locali meno aerati. Anche i materiali usati nelle costruzioni possono contribuire in maniera significativa alla concentrazione di tale gas.

La concentrazione del Radon (e/o dei suoi discendenti) nell'aria dei diversi luoghi chiusi, dipende da molteplici fattori come la temperatura, l'umidità o la pressione atmosferica e assume valori non prevedibili a priori ed assai variabili da luogo a luogo anche di uno stesso edificio. Le misure vanno, pertanto, effettuate per lunghi tempi. E' richiesto il controllo ed il contenimento della concentrazione del Radon nei luoghi con un'esposizione maggiore a sorgenti naturali, come:

- Tunnel, sotovie, catacombe, grotte, locali sotterranei o interrati;
- Ogni altro ambiente di lavoro seminterrato situato in zone individuate come esposte ad alta attività di Radon;
- Stabilimenti termali.

E' necessario, quindi, anche in vista della scelta del tipo di intervento, che vengano eseguite misure molto accurate tramite strumenti specifici.

1.2 Strumentazione per la rilevazione del Radon

Gli strumenti di misura possono essere di tipo attivo o passivo.

I misuratori attivi permettono di campionare e di misurare, in breve tempo, la concentrazione del gas Radon nell'ambiente; avendo un riscontro in tempo quasi reale, si possono utilizzare per sperimentare diverse condizioni di misura (sistema di riscaldamento spento ed acceso, ventilazione accesa o spenta, ecc). Offrono però dei risultati approssimativi che sono di tipo puntuale, validi per le condizioni di quell'ora in quel giorno. Per tale ragione sono consigliabili solo per ottenere un'indicazione di massima sulle concentrazioni.

I misuratori passivi sono dei piccoli dosimetri (circa 8 x 8 x 6 cm), che non richiedono corrente elettrica e che vengono posizionati in punti strategici dell'edificio per alcuni mesi, dai 3 ai 6, per poi essere prelevati e analizzati. Hanno il vantaggio di avere un'elevatissima precisione nella misura. I dosimetri non sono nocivi e possono essere maneggiati facilmente senza alcun pericolo.

Mostriamo ora gli strumenti più impiegati.

Strumenti attivi

- *Rivelatori a stato solido*, strumenti costituiti da una camera nella quale è collocato un rivelatore a stato solido ad esempio a barriera di silicio sensibile alle particelle, dove l'aria ambiente accede per diffusione spontanea attraverso un filtro;
- *Camere a ionizzazione*, misuratori in continuo del gas Radon a risposta rapida, all'interno del quale l'aria ambiente accede per diffusione spontanea attraverso un filtro.

Strumenti passivi

- *Film a tracce*, costituiti da pellicole fotografiche. Il Radon entra nel rivelatore, quindi le particelle α decadono creando dei *crateri* sulle pellicole. Queste, una volta sviluppate, consentono di osservare al microscopio le tracce prodotte dalle particelle e di constatarne la densità, dalla quale si risale alla concentrazione del gas. Sono necessari lunghi tempi di esposizione per collezionare un numero significativo di tracce;
- Anche i vetri negli edifici possono essere utilizzati come rivelatori passivi, poiché possono misurare l'attività del 'figlio' $Pb - 210$ che si infilza nel vetro e vi permane.

1.3 Finalità dell'esperimento

Il nostro compito era quello di analizzare delle misure effettuate da 5 diversi rivelatori di Radon, tutti attivi, così identificati: C5, C8, C11, C12 e C53. Tutti questi sono stati posti in un luogo per misurare le concentrazioni di Radon. Sapendo che lo strumento C53 era calibrato abbiamo controllato la compatibilità delle misure degli altri strumenti con quelle di quello di riferimento e in seguito ricalibrato gli eventuali strumenti non calibrati.

Strumento di riferimento: C53 Radim 5B (*SSM J.Pch Eng._PRAGUE*): misuratore in continuo della concentrazione di gas Radon dotato di un rivelatore a stato solido a barriera di Si sensibile ai due 'figli' α - emettitori a vita breve del Radon. Esso lavora per 60 minuti alla volta ed è dotato di un data-logger interno per memorizzare fino a 60.000 misure.

1.4 Compatibilità degli strumenti

In questa prima parte dell'esperimento il nostro scopo è quello di verificare la compatibilità degli strumenti con lo strumento C53, tramite le misure effettuate dai vari strumenti. Ci sono state fornite 812 misure per ogni strumento; ciascuna di queste indica il numero di conteggi di particelle di gas che sono stati recepiti dallo strumento in un'ora. Abbiamo quindi misure di conteggio per 812 ore, per ogni strumento.

Primo metodo

Assumendo il C53 come strumento di riferimento verifichiamo se le misure di ciascuno degli altri strumenti corrispondono statisticamente alle misure effettuate da quello calibrato, cioè se gli strumenti hanno effettivamente misurato la stessa cosa; se ciò accade gli strumenti sono calibrati.

Per fare ciò abbiamo calcolato la mediana per il set di misure di ogni strumento; abbiamo utilizzato le mediane anziché le medie perché il valore della mediana risultava più stabile rispetto alla media, in base ai dati di partenza. Quindi abbiamo calcolato, tramite le standard deviazioni di ogni set di dati, le standard deviazioni sulle medie e successivamente sulle mediane:

$$\sigma_{mediana-i} = \sigma_{media-i} \frac{(2n + 1) \pi}{4n} \quad \forall i = 1 \dots 4 \quad (1)$$

$$\sigma_{media-i} = \sigma_i / \sqrt{N}$$

σ_i = std delle misure dello strumento i -esimo

$$n = (N - 1)/2$$

N = numero delle misure (812)

Tramite queste calcoliamo il pull per ogni strumento rispetto a quello di riferimento, formula (3);

$$pull_i = \frac{|X_i - X|}{\sqrt{(\sigma_i^2 + \sigma^2)}}; \quad \forall i = 1 \dots 4 \quad (2)$$

X_i = mediana delle misure dello strumento i -esimo

X = mediana delle misure di C53

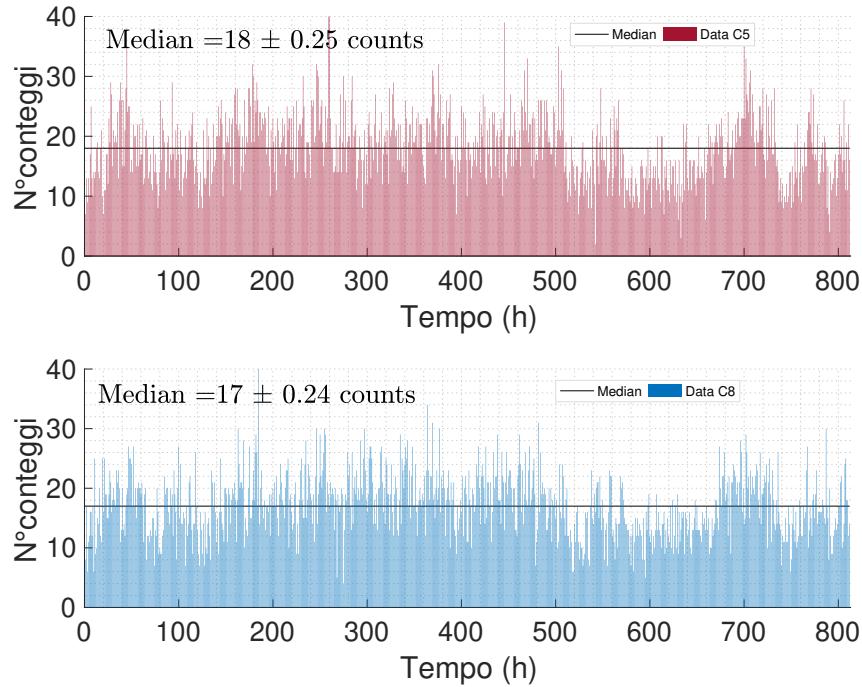
σ_i^2 = varianza della mediana delle misure dello strumento i -esimo

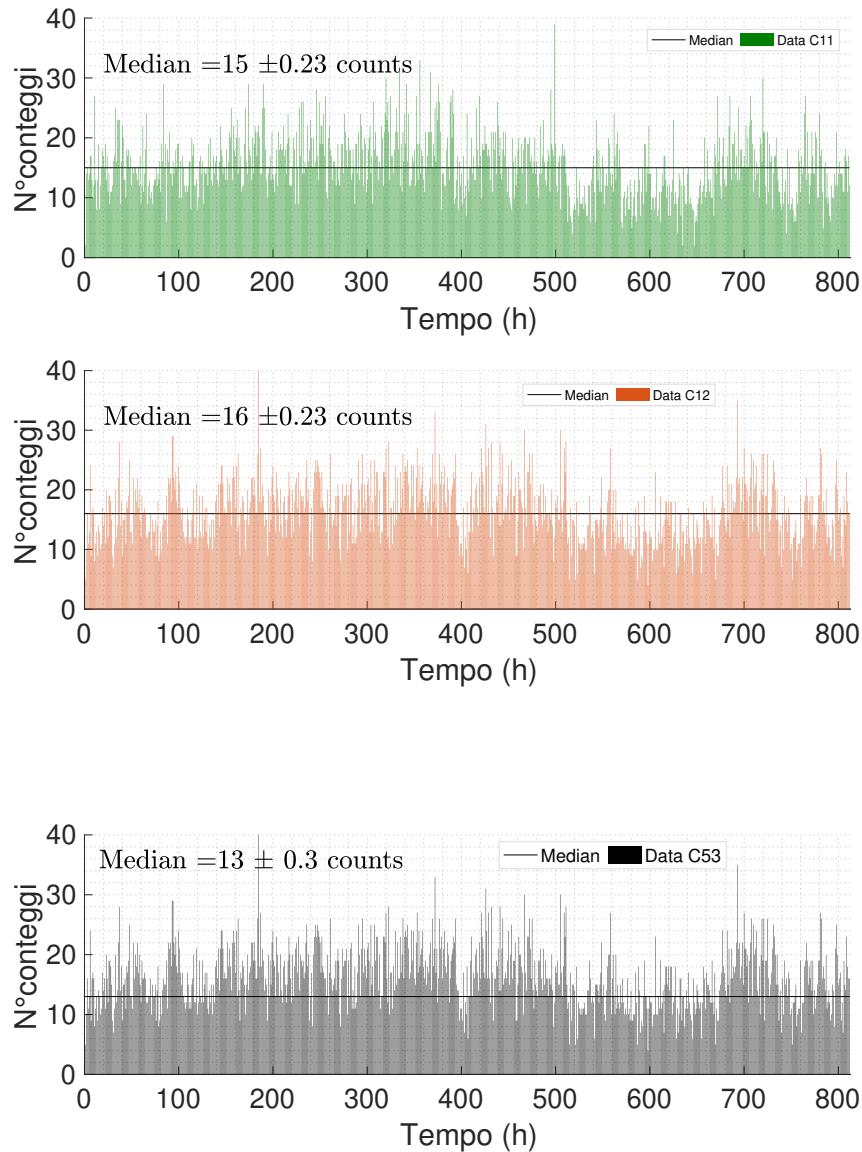
σ^2 = varianza della mediana delle misure di C53

Definendo σ dello strumento C53 come *sigma*, il pull indica la distanza, in *sigma*, della mediana X_i degli strumenti dalla mediana X di quello di riferimento.

Abbiamo visto che il pull di ogni strumento era maggiore di otto *sigma* cioè le misure dei vari strumenti distavano più di otto *sigma* dalle misure dello strumento calibrato. Per questo abbiamo immediatamente scartato l'ipotesi di compatibilità; infatti due misurazione vengono definite statisticamente *le stesse* se distano al più tre *sigma*.

Nel grafico seguente sono riportati i conteggi dei vari set di dati con le rispettive mediane e i valori di *pull* per ogni strumento. Dal grafico 2 è possibile verificare che i valori di *pull* sono molto maggiori del valore di standard deviazione sulla mediana dello strumento C53, visibile nell'istogramma 'nero'.





Pull_i

Pull C5: 30.47

Pull C8: 21.97

Pull C11: 10.09

Pull C12: 15.25

Figura 2: Istogramma dei conteggi per ogni strumento per un tempo di 812 ore, con rispettivo valore mediano.

Tabella 1: Medie delle medie dei blocchi giornalieri

	C5	C8	C 11	C12	C53
\bar{x} (counts)	17.36	16.50	14.52	15.68	12.30
σ (counts)	0.57	0.66	0.65	0.58	0.59

Secondo metodo

Oltre al primo metodo ne abbiamo utilizzato un secondo per verificare la compatibilità degli strumenti; questo si basa sul raggruppare i set di dati in blocchi ed è un metodo più preciso rispetto al precedente poichè, per il teorema del limite centrale, lavorando su dati raggruppati ci sono meno fluttuazioni statistiche.

Per ciascuno dei cinque strumenti abbiamo diviso il vettore del set di dati in blocchi giornalieri tali per cui ogni blocco contenesse 24 misure e, dopo aver calcolato la media per ognuno di questi blocchi, abbiamo trovato la media delle medie, calcolata con relativa incertezza; quindi abbiamo utilizzato tali medie per ricalcolare il pull tra ciascuno strumento e il calibrato C53:

$$pull_i = \frac{|\bar{x}_i - \bar{x}|}{\sqrt{(\sigma_i^2 + \sigma^2)}}, \quad \forall i = 1 \dots 4 \quad (3)$$

\bar{x}_i = media delle medie dei blocchi dello strumento i -esimo

\bar{x} = media delle medie dei blocchi di C53

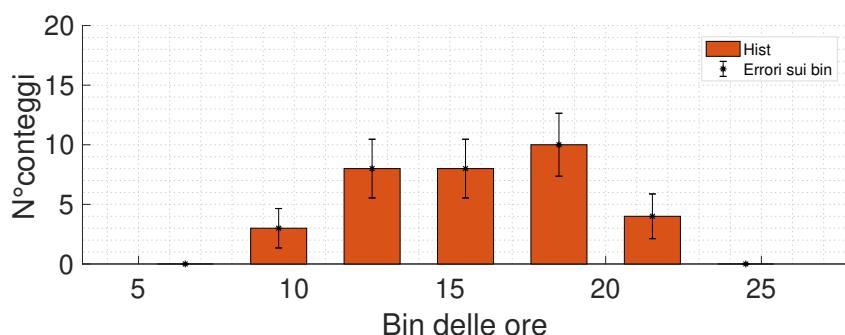
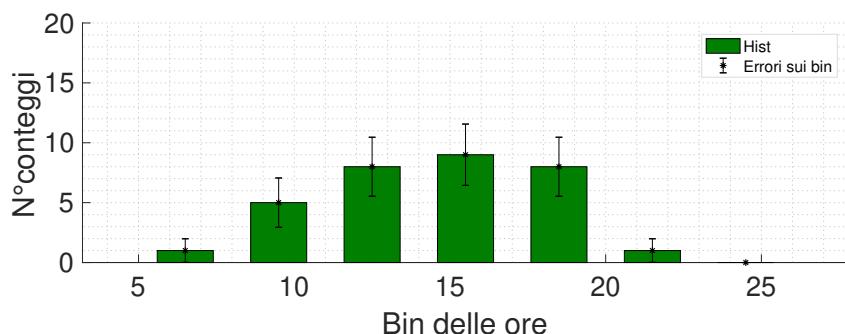
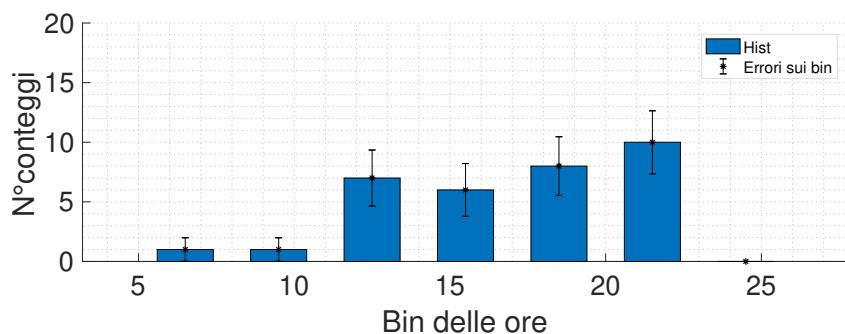
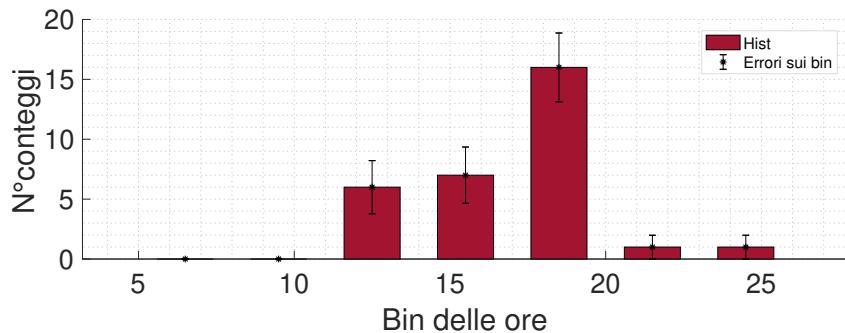
σ_i^2 = varianza sulle medie delle medie dei blocchi dello strumento i -esimo

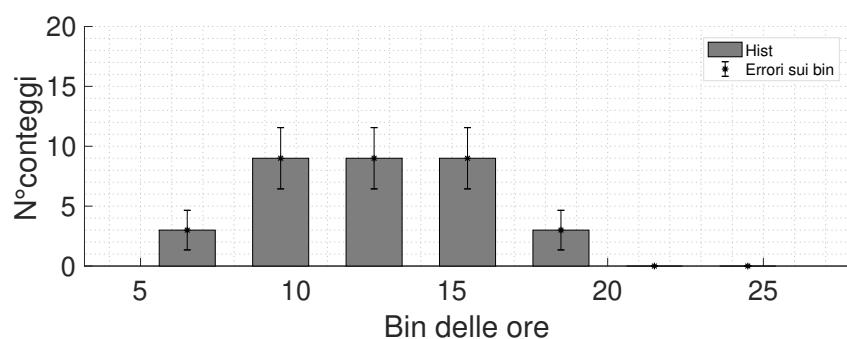
σ^2 = varianza sulle medie delle medie di C53

Mostriamo nella tabella 1 i valori delle medie delle medie dei blocchi con i rispettivi errori per poterli confrontare;

Abbiamo poi costruito l'istogramma di frequenza con i valori delle medie giornaliere. Per ogni strumento abbiamo contato quanti valori di medie giornaliere stavano all'interno di un range di valori preliminarmente scelto, creando le colonne dell'istogramma con il relativo errore. Nel grafico 3 sono riportati anche i valori di *pull* per ogni strumento; è possibile verificare che i valori di *pull* sono molto maggiori del valore di standard deviazione dello strumento C53 messo in evidenza nella tabella 1.

I quattro rivelatori, di cui dovevamo stabilire la compatibilità con il rivelatore C53, distano dal rilevatore di riferimento più di 3σ ; le misure dei quattro strumenti C5, C8, C11, C12 non sono compatibili con quelle dello strumento calibrato C53.





Pull_i

Pull C5: 6.19

Pull C8: 4.74

Pull C11: 2.54

Pull C12: 4.12

Figura 3: Istogramma delle medie giornaliere

Tabella 2: Confronto dati degli strumenti con quello di riferimento

	Strumento C5	Strumento C8	Strumento C11	Strumento C12
Numero di successi	650	609	522	592

1.5 Calibrazione degli strumenti

Primo metodo

Dopo aver verificato che i vari rivelatori non sono calibrati fra di loro abbiamo proceduto a calibrarli con quello di riferimento. Calibrare uno strumento significa trovare un coefficiente tale per cui i dati, riadattati con tale coefficiente, risultano corrispondere con quelli di uno strumento calibrato. Si tratta quindi di fare un confronto tra i set di dati di ogni strumento, moltiplicati per certi coefficienti, e trovare il valore per cui i set di dati si avvicinano di più a quello del C53.

Per scegliere il miglior coefficiente di calibrazione abbiamo usato il 'sign test'. Questo metodo è molto simile alla 't' di Student', ma si avvale della distribuzione binomiale che risulta ben approssimata alla distribuzione normale nel caso di grandi numeri.

Come primo passo abbiamo confrontato ciascun valore di ognuno dei set di dati con il corrispettivo dato di quello di riferimento, contando un successo ogniqualvolta che il valore di un set di dati era maggiore del rispettivo nel set di riferimento. In tabella 2 è riportato il conteggio dei successi per ogni strumento.

Successivamente abbiamo formulato l'ipotesi nulla, ovvero, abbiamo assunto che ciascuno degli strumenti fosse calibrato con quello di riferimento. Questo avviene quando il numero di successi è approssimativamente uguale a quello degli insuccessi, con differenze imputabili alla sola casualità. Chiamato con N il numero totale di dati acquisiti da ogni strumento, se fosse vera l'ipotesi nulla il numero di successi non dovrebbe discostarsi troppo da $\frac{N}{2}$ (corrispondente a 406). Come si nota in tabella 2 il numero di successi si discosta dal valore di 406. Per confermare la distanza dei valori abbiamo stimato la probabilità di avere il numero di successi realmente ottenuto nella distribuzione, mediante l'utilizzo della binomiale:

$$B = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r} \quad (4)$$

N =numero totale eventi (812) r =numero successi p =probabilità nel singolo evento

Avendo assunto vera l'ipotesi nulla, la probabilità nel singolo tentativo è $\frac{1}{2}$ poichè si ha la stessa probabilità di avere un successo o un fallimento, confrontando ciascun dato con il suo corrispettivo nel set di riferimento; in tale distribuzione binomiale, il massimo si ottiene per $r = 406$ ($\frac{N}{2}$), valore a cui corrisponde una probabilità di 0.0280. Stimiamo quindi la probabilità di avere i valori di successi r riportati in tabella 2 e riportiamo i risultati in tabella 3.

Tabella 3: Probabilità di trovare il numero di successi posseduto

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Probabilitá	2.1×10^{-70}	2.4×10^{-48}	7.4×10^{-17}	1.2×10^{-40}

Da ciò che abbiamo ottenuto si nota che, se fosse vera l’ipotesi nulla, si avrebbero le probabilità riportate in tabella 3 di trovare, per sola fluttuazione statistica, un numero di successi uguale a quello ottenuto. Siccome si tratta di probabilità estremamente piccole abbiamo rifiutato l’ipotesi nulla a riconferma che, come già avevamo concluso, gli strumenti non sono calibrati.

Ci occupiamo ora della vera e propria calibrazione; per risolvere il problema abbiamo moltiplicato ciascun set di dati per un coefficiente di calibrazione, facendolo partire da 0, incrementandolo gradualmente, con un passo di 0.01, fino ad arrivare al valore di 1. Per ogni coefficiente abbiamo ricalcolato il numero di successi, come fatto in precedenza. In questo modo abbiamo ottenuto il numero di successi in funzione del valore del coefficiente; mostriamo l’andamento per i vari strumenti nella figura 4.

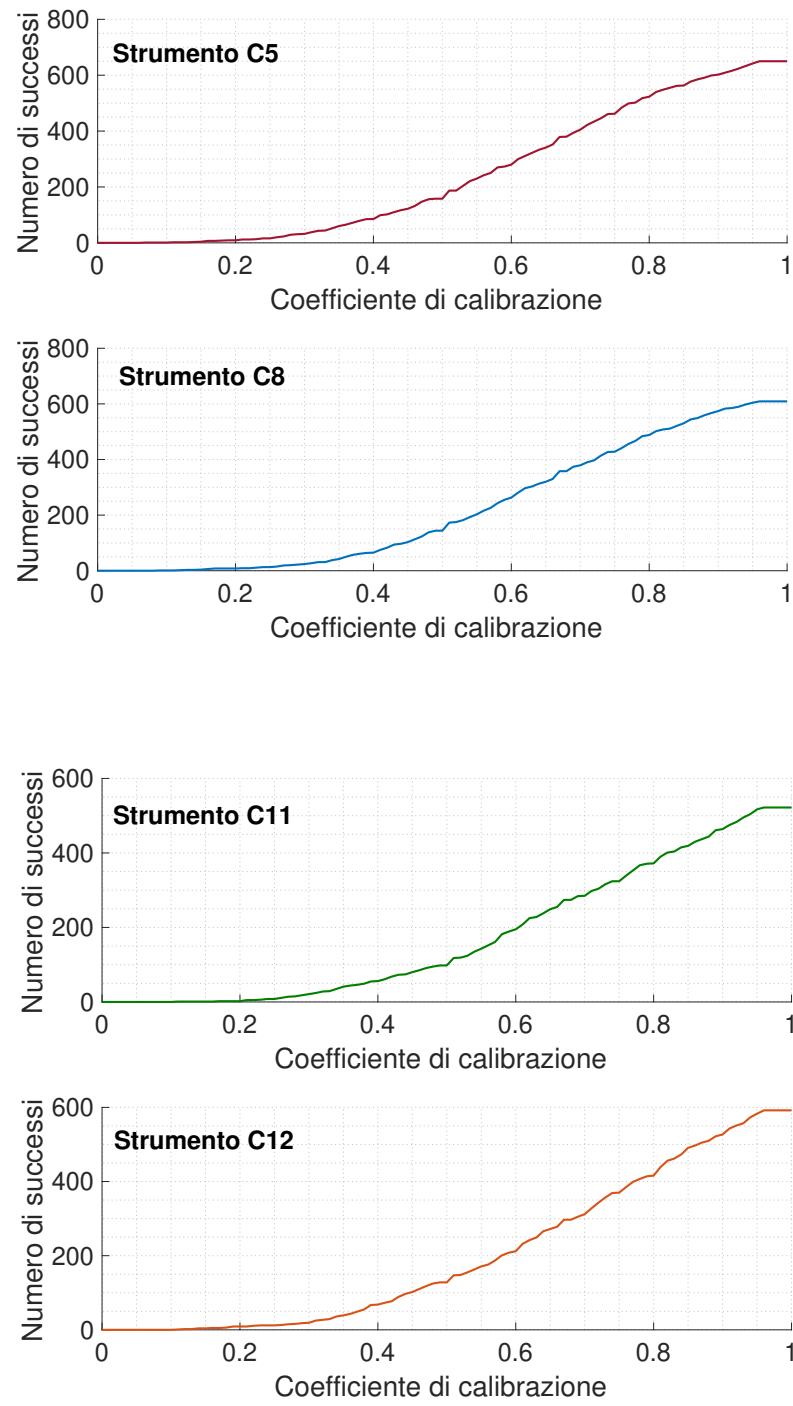


Figura 4: Andamento del numero di successi in funzione del coefficiente di calibrazione

Tabella 4: Numero di successi per il coefficiente ideale

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Valore coefficiente	0.70	0.73	0.83	0.78
Numero successi	405	414	404	407

Determinata tale curva, come miglior coefficiente di calibrazione abbiamo scelto quello che rende minima la differenza fra il valore teorico di successi, 406. Definiamo, per ogni strumento, il vettore:

$$\text{Diff} = 406 - \text{succ} \quad (5)$$

avendo considerato *succ* come il vettore contenente il numero di successi al variare del coefficiente di calibrazione. Nella figura 5 rappresentiamo tali punti per notare come varia tale differenza, in funzione dei diversi valori dei coefficienti; questa decresce fino al valore minimo ottimale e quindi se ne discosta nuovamente. Il valore minimo corrisponde al coefficiente cercato; mostriamo in tabella 4 il valore dei coefficienti ideali così ottenuti e il relativo numero di successi.

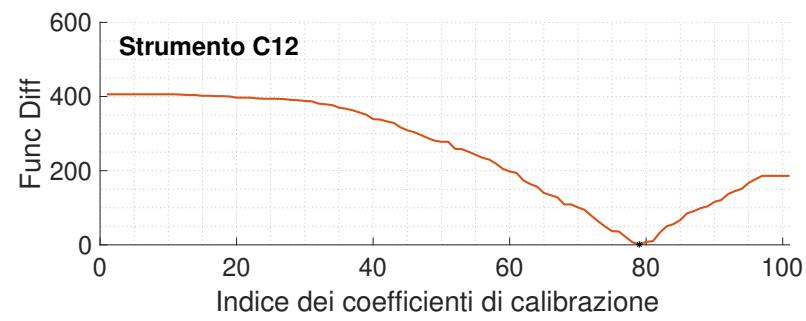
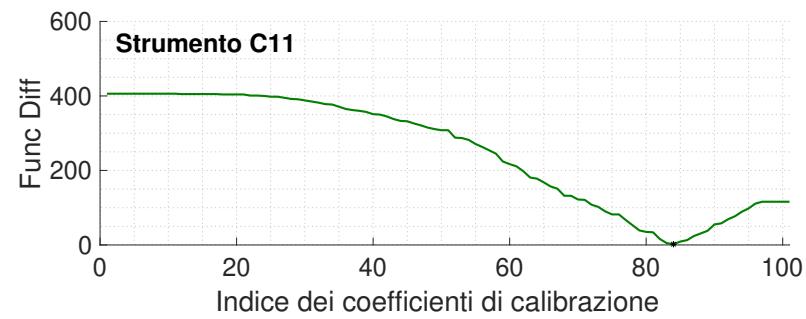
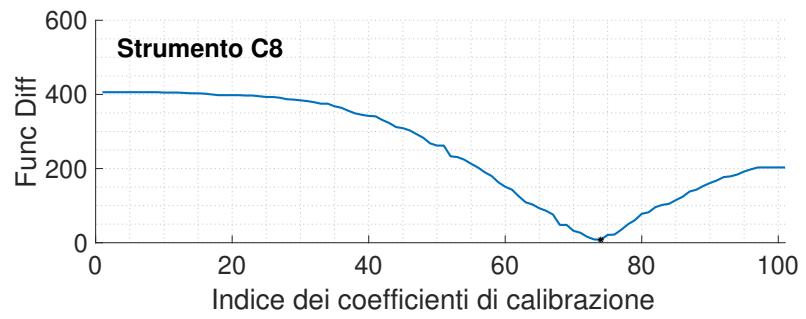
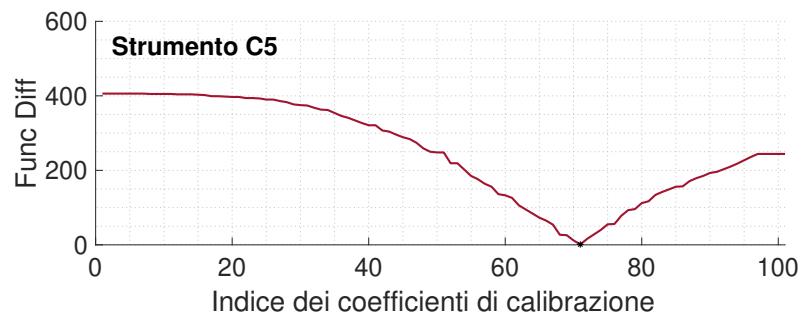


Figura 5: Andamento della differenza di successi da 406

Tabella 5: Valore dei coefficienti di calibrazione ottimali

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Valore coefficiente	0.70 ± 0.01	0.73 ± 0.01	0.83 ± 0.01	0.78 ± 0.01

Tabella 6: Probabilità dei successi dei coefficienti di calibrazione ottimali

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Numero successi	405	414	404	407
Probabilità	0.0279	0.0239	0.0277	0.0279

Dopo aver trovato il valore ideale del coefficiente di calibrazione ne abbiamo calcolato il relativo errore nel seguente modo: abbiamo fatto la media del numero di successi calcolato per i dati moltiplicati per il coefficiente e poi abbiamo calcolato la standard deviazione sulla media; questa è l'incertezza sulla media del numero di successi per ogni strumento. Ci siamo discostati da ogni valore del numero di successi di $+ \sigma$. Con lo stesso metodo di prima abbiamo calcolato il valore del coefficiente di calibrazione corrispondente al minimo della differenza tra valore teorico di successi (406) e valore di successi a *più* una standard deviazione. Abbiamo ottenuto il valore del coefficiente di calibrazione che dista dal coefficiente ottimale trovato prima, dell'errore che stavamo cercando. Abbiamo ripetuto lo stesso procedimento discostandoci di *meno* una standard deviazione da ogni valore del numero di successi, quindi, abbiamo scelto il massimo dei due valori ottenuti per ricavarne l'errore, semplicemente sottraendo il valore ottimale trovato prima.

Riportiamo i valori del coefficiente di calibrazione ottenuti con relativo errore in tabella 5; dato che il coefficiente di calibrazione assume valori discreti distanziati di 0.01 l'errore non poteva essere minore di quello strumentale. Infatti i valori del numero di successi relativi a *più* o *meno* una sigma corrispondono allo stesso valore di coefficiente di calibrazione che è ancora quello ottimale, essendo entro la distanza di ± 0.01 . Quindi, l'errore risulta nullo, a meno di quello strumentale.

Abbiamo ricalcolato, mediante l'utilizzo della distribuzione binomiale, formula (4), la probabilità di avere il numero di successi ottenuti con il coefficiente di calibrazione ottimale, tabella 6. Questa si avvicina alla probabilità massima che si ottiene per $r = 406$, l'ipotesi nulla non viene scartata e gli strumenti risultano essere calibrati.

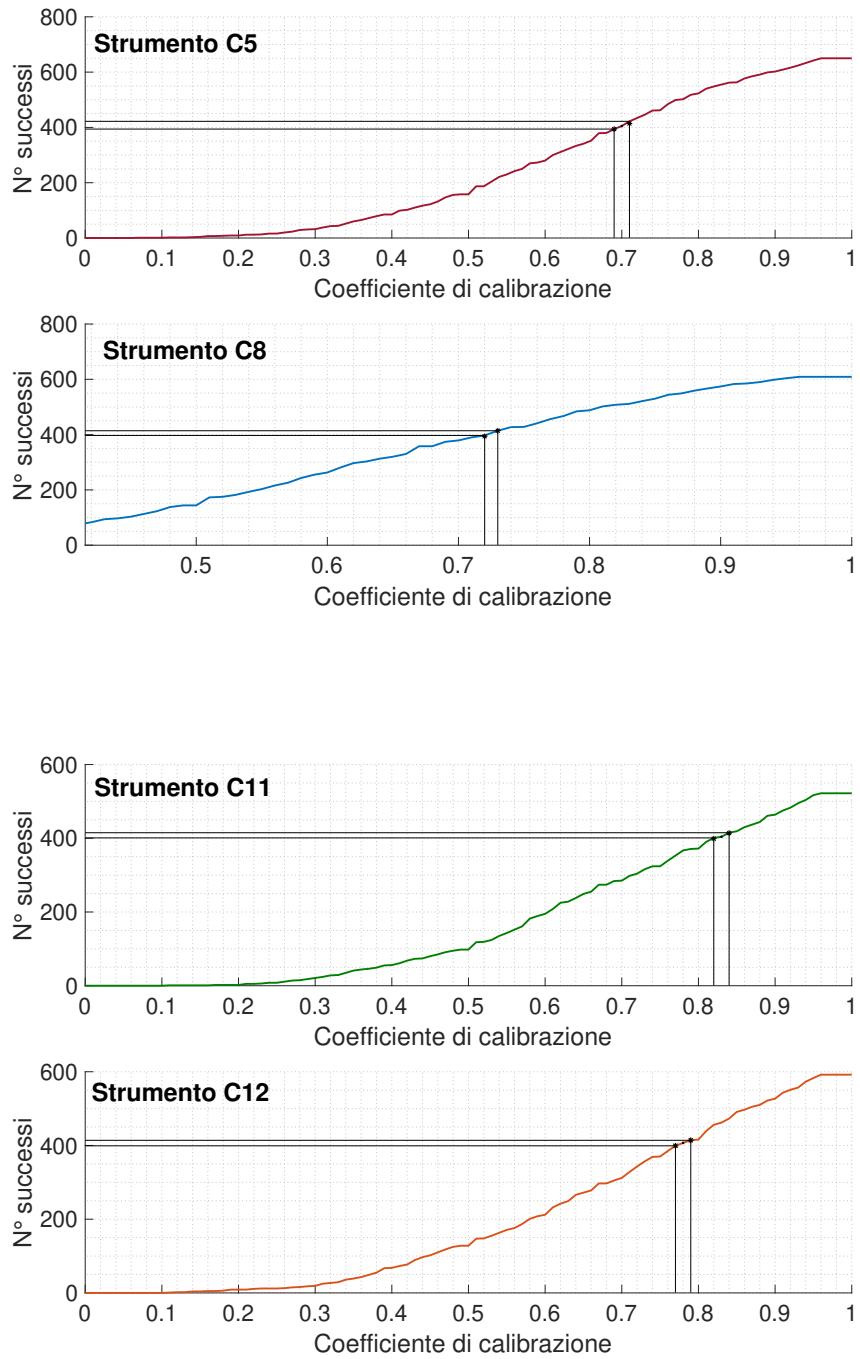


Figura 6: Errori a \pm una standard deviazioni sul numero di successi con corrispondente errore sul coefficiente di calibrazione ideale.

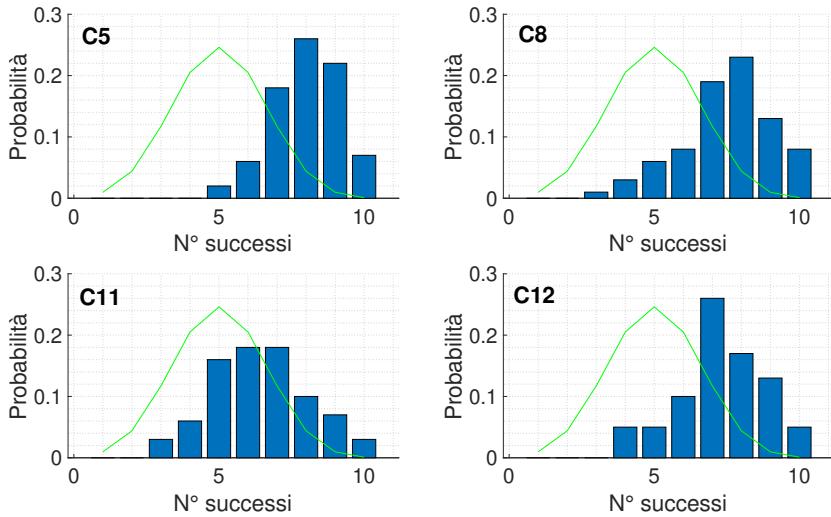


Figura 7: Istogramma del numero di successi confrontato con la curva binomiale teorica.

Tabella 7: Valori di Chi-quadro ridotto per gli strumenti non calibrati.

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Chi-quadro ridotto	45.5299	44.1298	10.6767	23.4470

Secondo metodo

L’altro metodo che abbiamo utilizzato per calibrare gli strumenti è stato quello di dividere i set di dati in gruppi da 10. Abbiamo proceduto a contare i successi e gli insuccessi come nel metodo sopra descritto stavolta gruppo per gruppo, ottenendo per ogni gruppo da 10 il numero di successi. Quindi abbiamo potuto costruire l’istogramma del numero di successi per ogni set di dati, in blu nella figura 7.

Abbiamo poi confrontato tale distribuzione con la binomiale teorica descritta nel metodo precedente (formula (4)), nella figura 7 indicata in verde; infatti la distribuzione del numero di successi in ogni gruppo è di questo tipo essendoci una probabilità 1/2 di avere un successo o un insuccesso. Se i rivelatori fossero stati calibrati con lo strumento di riferimento questa curva avrebbe dovuto rispecchiare i dati ottenuti. Si nota come l’istogramma risulta, però, traslato rispetto alla curva teorica.

Una misura di quanto la curva teorica si discosti dal set di dati si ottiene calcolando il *Chi-quadro ridotto*. I valori ottenuti sono presentati nella tabella 7.

Come si può notare questi valori si discostano molto da 1; quindi abbiamo rifiutato l’ipotesi nulla di calibrazione degli strumenti.

Tabella 8: Valori minimi di Chi-quadro ridotto e coefficienti di calibrazione ideali.

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Chi-quadro ridotto	3,4681	1,9677	1,8436	1,9171
Coefficiente	0.670	0.720	0.840	0.800

Per ricalibrare gli strumenti, abbiamo moltiplicato, esattamente come nel metodo precedente, ciascun set di 10 dati per un coefficiente di calibrazione, facendolo partire da 0.2 e incrementandolo gradualmente, con un passo di 0.01, fino ad arrivare al valore di 1. Per ogni valore del coefficiente abbiamo diviso i set in gruppi da 10, contato i successi e ricalcolato il *Chi-quadro ridotto*, come fatto in precedenza. Abbiamo calcolato tali valori di *Chi-quadro ridotto* minimo, mostrati in tabella 8, e ricavato il relativo coefficiente di calibrazione.

Questo rappresenta il migliore dei coefficienti, cioè quello per cui l'istogramma dei dati moltiplicati per tale coefficiente si avvicina maggiormente alla curva binomiale teorica. Infatti, dopo aver effettuato la calibrazione, cioè, dopo aver rappresentato l'istogramma del numero di successi ottenuto per il miglior valore del coefficiente di calibrazione, è facilmente visibile che, la curva teorica binomiale, nella figura 9 indicata in verde, è conforme all'andamento dei singoli rivelatori.

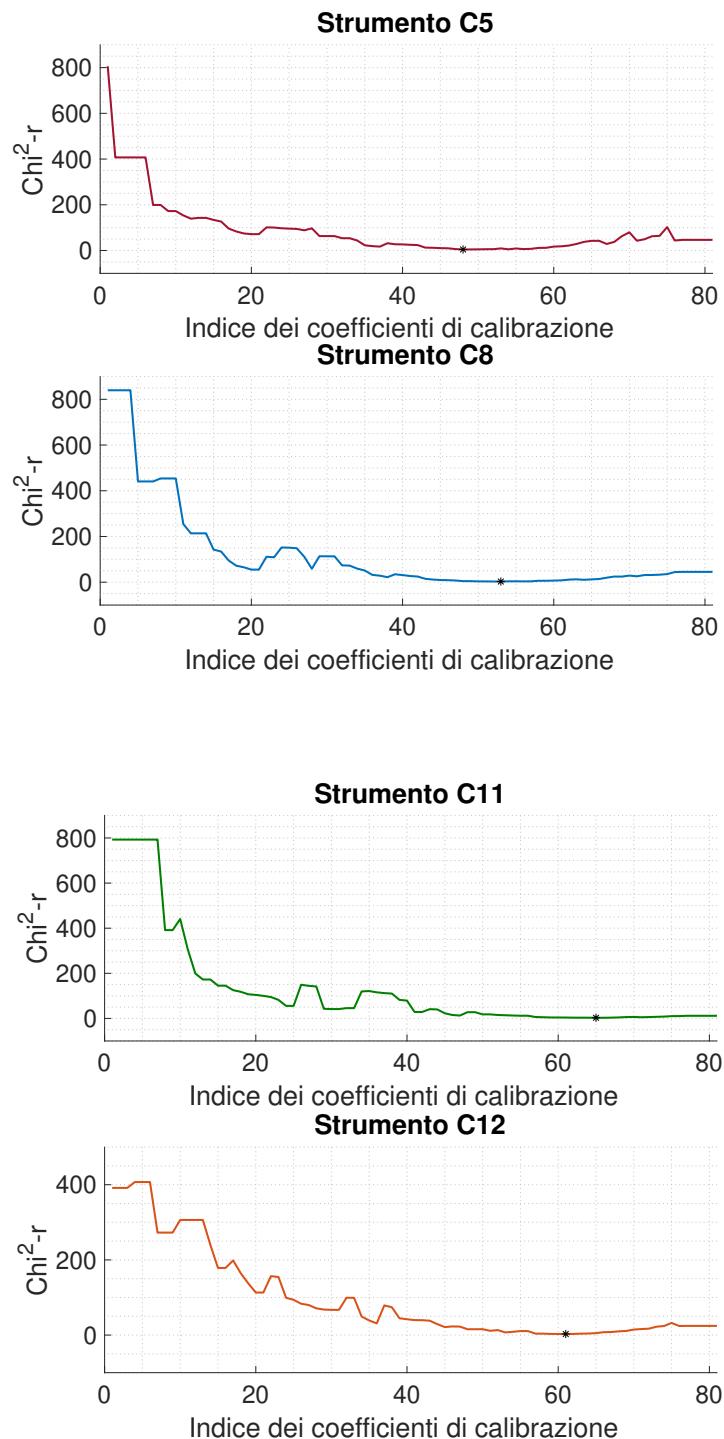


Figura 8: Viene mostrata la variazione del chi quadro ridotto in funzione del coefficiente di calibrazione. La curva ha un andamento confrontabile con quello di una parabola, il cui minimo si ha per il valore di chi quadro ridotto più basso.

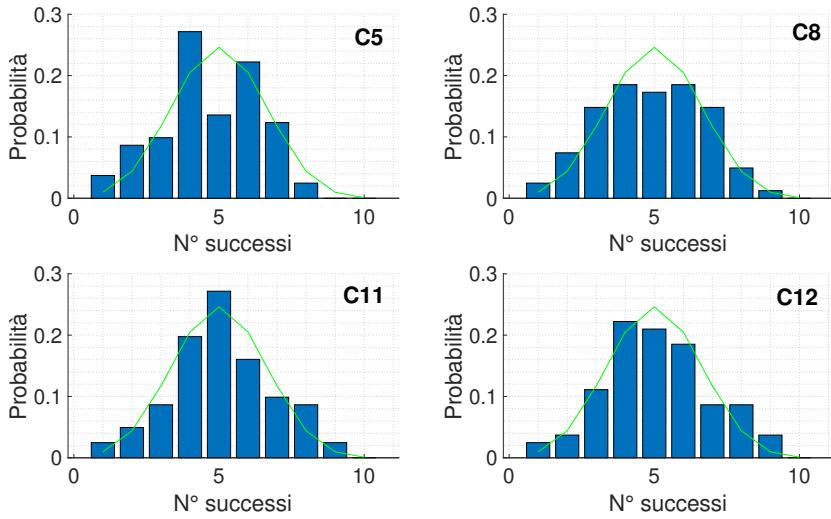


Figura 9: Istogramma del numero di successi confrontato con la curva binomiale teorica, dopo la calibrazione.

Tabella 9: Valori dei coefficienti di calibrazione ottimali.

	Strumento 5	Strumento 8	Strumento 11	Strumento 12
Coefficiente	0.67 ± 0.01	0.72 ± 0.01	0.84 ± 0.01	0.80 ± 0.01

Dopo aver trovato il valore ideale del coefficiente di calibrazione ne abbiamo calcolato il relativo errore nel seguente modo: abbiamo fatto la media dei valori di chi-quadro e poi calcolato la standard deviazione sulla media. Ci siamo discostati da ogni valore di $+ \sigma$. Con lo stesso metodo di prima abbiamo calcolato il valore del coefficiente di calibrazione che dista dal coefficiente ottimale trovato prima, dell'errore che stavamo cercando. Abbiamo ripetuto lo stesso procedimento discostandoci di *meno* una standard deviazione da ogni valore di *Chi-quadro ridotto*, quindi, abbiamo scelto il massimo dei due valori ottenuti di coefficiente per ricavarne l'errore, semplicemente sottraendo il valore ottimale trovato prima. E' riportata una tabella riassuntiva con i valori finali riferiti al coefficiente di calibrazione ottimale, tabella 24.

Osservando le tabelle 5 e 24 possiamo notare la compatibilità dei risultati ottenuti con i due metodi descritti.

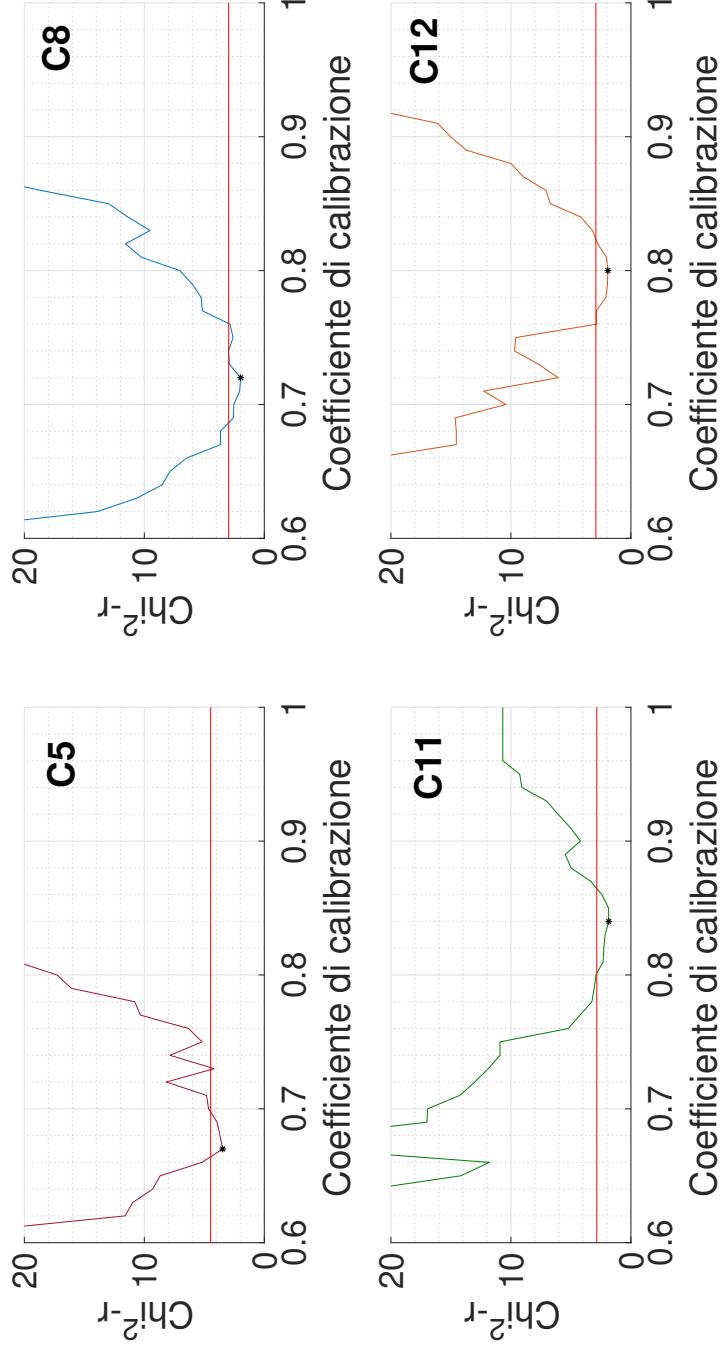


Figura 10: Si può notare lo *zoom* dell’andamento dei valori di *Chi-quadro ridotto*, sul minimo della curva; la linea rossa, rappresenta la retta del valore di *Chi-quadro ridotto a meno* una sigma dal valore ottimale; abbiamo scelto questa essendo l’andamento approssimativamente simmetrico. Questa interseca la curva in due punti, le cui ascisse distano meno di 0.01 dal valore di coefficiente ottimale; l’errore risulterà quindi quello di granularità nella scelta dei coefficienti di calibrazione.

2 Esperimento numerico: segnale del MIMOTERA

2.1 Introduzione e apparato strumentale

Per eseguire questo esperimento è stato utilizzato un rivelatore di particelle, il 'MIMOTERA', acronimo di *Minimum Ionizing Monolithic active pixel Sensor for TERA foundation*, un sensore monolitico a pixel attivi, ad alta frequenza di fotogrammi. Si tratta di un dispositivo tecnologicamente avanzato, caratterizzato da un substrato di silicio e utilizzato nell'ambito della fisica ad alte energie; è stato infatti concepito per la rilevazione di raggi- γ e adroni. Grazie alla sua flessibilità è anche in grado di rilevare particelle- α , funzionalità sfruttata per ricevere i dati su cui lavoreremo. Inoltre per la capacità di analizzare i dati in tempo reale e quindi avere un continuo controllo della sorgente, è molto utilizzato nell'ambito della fisica medica.

Funzionamento del MIMOTERA

Una sorgente emette particelle- α che vengono indirizzate, attraverso un collimatore, sul MIMOTERA. Esse, impattando sullo strato di silicio, rilasciano una carica elettrica proporzionale al numero di particelle che hanno interagito con esso. È così possibile *contare* la radiazione emessa dalla sorgente in base all'intensità acquisita dal sensore. Il risultato sarà una matrice sparsificata in cui la maggior parte dei pixel sono vuoti, tranne alcuni, i quali rappresentano i punti d'impatto delle particelle subatomiche.

Il dispositivo da noi utilizzato acquisisce il segnale in modo alternato, grazie a due circuiti, 'A' e 'B'. Mentre il circuito A integra la carica depositata, il circuito B si occupa della lettura e al termine della lettura di ogni frame i ruoli dei due circuiti si invertono. In questo modo il sensore non ha un effettivo tempo morto.

I dati delle due matrici A e B sono presi in maniera differenziale, ovvero come differenza di due fotogrammi successivi. Siccome si tratta di una differenza, i valori presenti nelle matrici possono essere sia positivi che negativi.

Caratteristiche tecniche

- **Sorgente:** è stata utilizzata una sorgente di Am²⁴¹, un materiale metallico radioattivo sintetico che rilascia particelle di He4 altamente ionizzato (2 protoni + 2 neutroni).
- **Dimensioni:** il rivelatore ha un'area sensibile di 17 x 17 mm², suddivisa in 112 x 112 pixel (153 μ m ciascuno).
- **Capacità:** il sensore ha una capacità complessiva di deposito energetico fino a 30 MeV /pixel.

Il MIMOTERA, grazie alle sue caratteristiche quali ampia area attiva di misura, ampio range dinamico, alto frame rate e capacità di non saturarsi durante la misura, garantisce l'assenza di tempi morti e la possibilità di analizzare grandi fluttuazioni d'intensità.

2.2 Obiettivi

Ci sono stati forniti tutti i dati necessari all'analisi sotto forma di due matrici tridimensionali 'A' e 'B', di dimensioni $112 \times 112 \times 20500$, in cui le prime due dimensioni sono le coordinate dei pixel, corrispondenti alle intensità di energia (ADC) registrate dai circuiti, mentre la terza corrisponde all'evoluzione temporale della misura. Inoltre le matrici dei due circuiti sono divise in quattro elettroniche, 28×112 pixel ciascuna, che vengono lette in parallelo.

Il nostro scopo è quello di riuscire ad ottenere un'immagine definita della sorgente e determinarne la posizione; sono stati eseguiti vari passaggi sulla matrice A per arrivare al risultato: la mappa d'intensità, la mappa dei conteggi e la quantum imaging, in una scala crescente di precisione.

2.3 Mappa d'intensità

Per visualizzare al meglio il segnale emesso dalla sorgente abbiamo innanzitutto ricavato la mappa d'intensità, ovvero un'immagine del sensore, dove è presente la sorgente, sotto forma d'intensità di energia, con colori tanto più accesi quanto più il segnale è intenso.

Per ottenerla sommiamo in modulo ogni frame della matrice dei segnali lungo la dimensione maggiore, cioè 'lungo' il tempo, ottenendo una matrice 112×112 . Infatti, proprio sommando sul periodo temporale abbiamo l'intensità del rumore acquisito e, come detto precedentemente, si hanno sia valori positivi che negativi nei vari fotogrammi. Così facendo abbiamo ottenuto una prima immagine della sorgente nella quale in ogni pixel è indicata l'energia che esso ha immagazzinato durante l'intera misura, figura 11.

Per questo primo metodo lavoreremo esclusivamente con la matrice bidimensionale 112×112 ottenuta come somma lungo la terza dimensione.

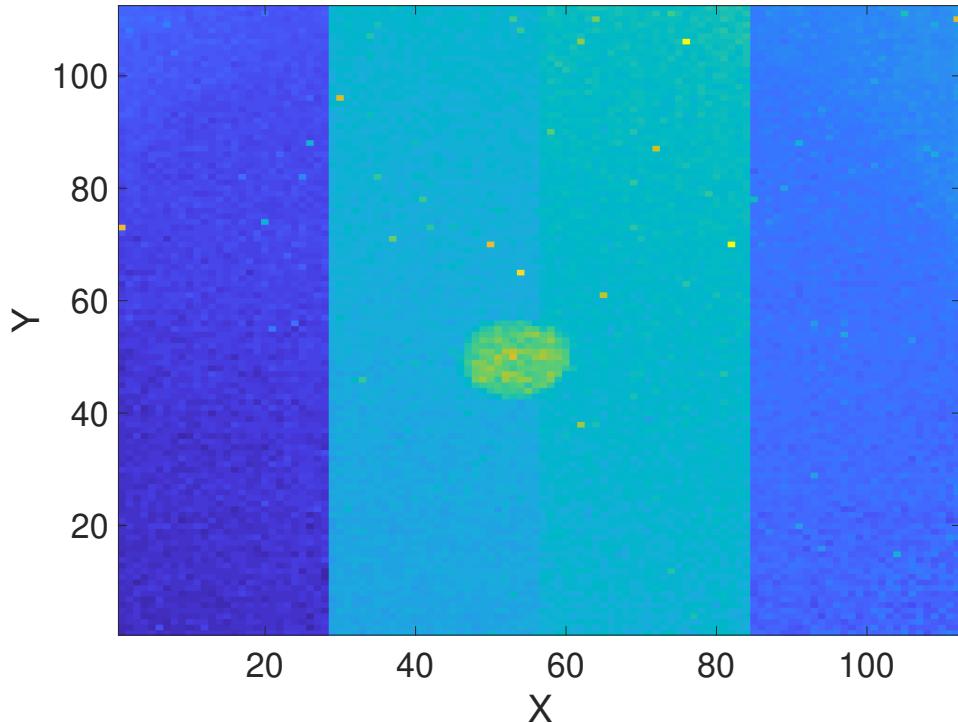


Figura 11: Matrice con l'intensità del segnale registrato dal sensore.

Eliminazione del rumore

Com'è facilmente visibile, nella figura ci sono 4 barre di colore diverso; questo è dovuto al fatto che sono presenti altrettante elettroniche differenti e che ognuna di esse produce un proprio rumore. Per ovviare a questo problema creiamo le matrici di ciascuna delle quattro elettroniche, di dimensioni 112×28 ciascuna, e calcoliamo il rumore separatamente in ognuna di esse.

Per fare questo, come prima cosa, consideriamo una matrice qualsiasi 28×28 all'interno di ogni elettronica e facciamo la media della media della matrice, in modo da ottenere un numero. Consideriamo tali medie come i valori medi di rumore di ciascuna elettronica. Successivamente sottraiamo ad ogni pixel di ogni elettronica il corrispettivo rumore, ottenendo così l'immagine ripulita, figura 12.

Per completare l'eliminazione del rumore abbiamo proiettato la matrice sia lungo l'asse X che lungo l'asse Y , sommando i segnali lungo le rispettive direzioni e ottenendo dei grafici dell'intensità in funzione della posizione, figura 14 per le X e figura 15 per le Y . Nella figura 15 abbiamo notato che vi è un aumento lungo Y del rumore in una stessa elettronica, a differenza che nella figura 14 dove il rumore è più o meno costante all'interno di una stessa elettronica.

Per ovviare a questo problema, calcoliamo il rumore strumentale a blocchi all'interno di ogni elettronica: prendiamo un rettangolo di 7×28 , facciamo la media come precedentemente già visto e la sottraiamo all'interno dello stesso rettangolo e non più in tutta l'elettronica.

Così facendo si risolve il problema dell'incremento di rumore all'interno della medesima elettronica, com'è possibile vedere nelle figure finali ?? e ?? e si ottiene un'immagine migliorata della sorgente α , in figura 13.

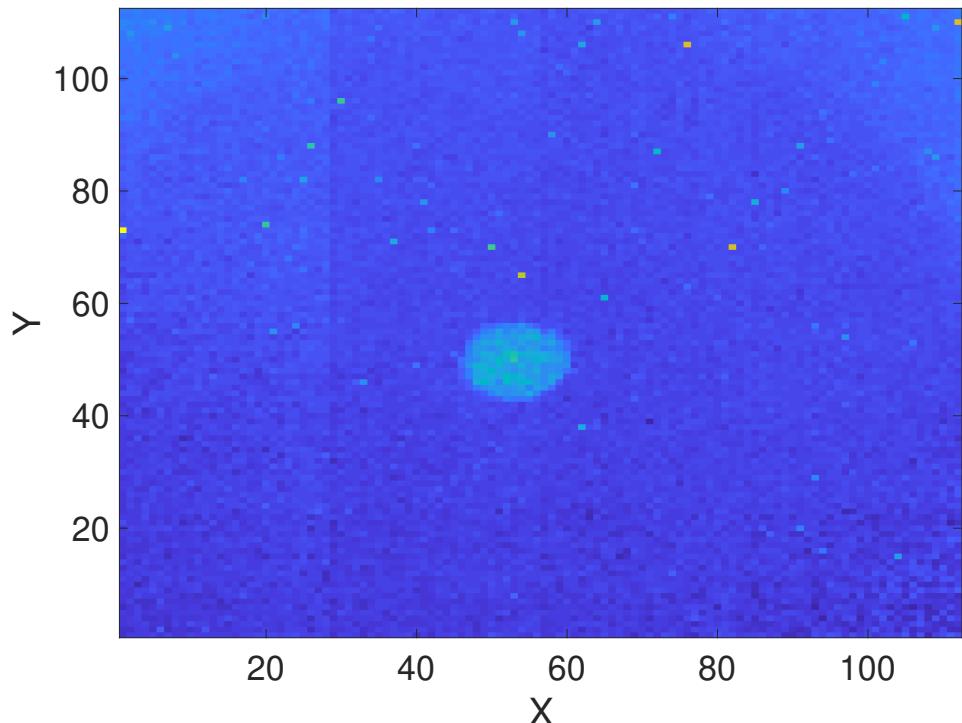


Figura 12: Matrice con l'intensità del segnale dopo la prima eliminazione del rumore, elettronica per elettronica.

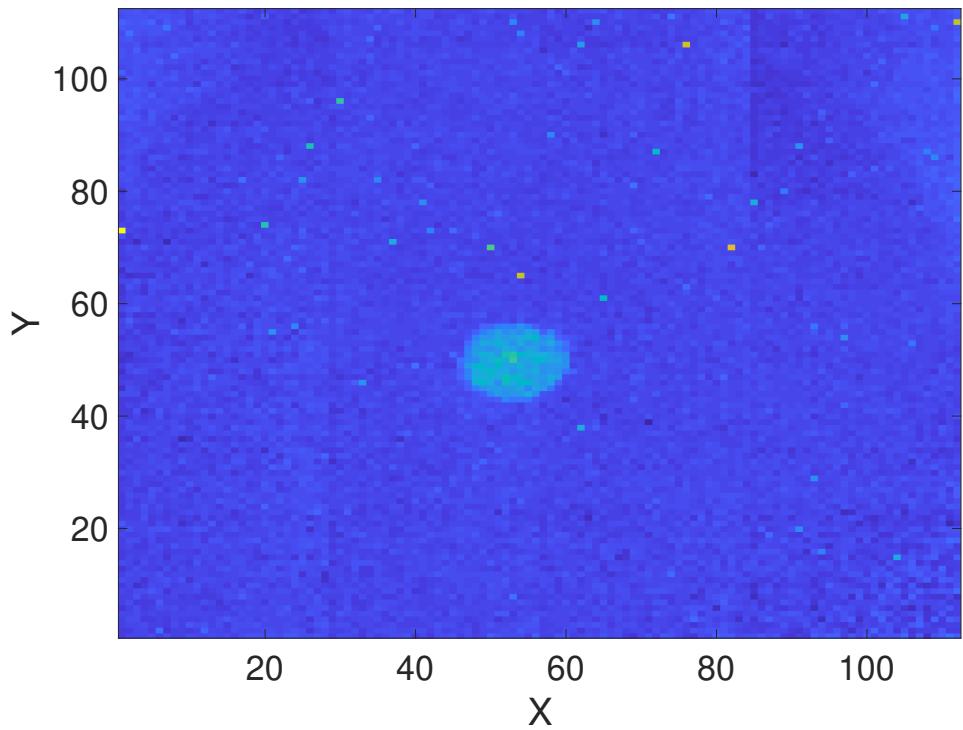


Figura 13: Immagine della sorgente α dopo l'eliminazione del rumore elettronica per elettronica e lungo ogni elettronica.

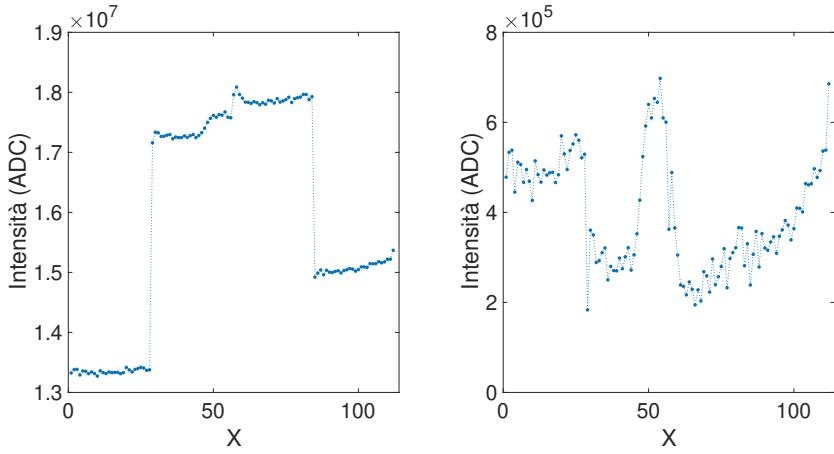


Figura 14: Plot lungo l'asse X . A sinistra non è stato sottratto il rumore; la figura di destra, invece, è dopo la prima sottrazione del rumore: si ottiene una figura in cui questo è circa costante per ogni elettronica e il picco indica la sorgente.

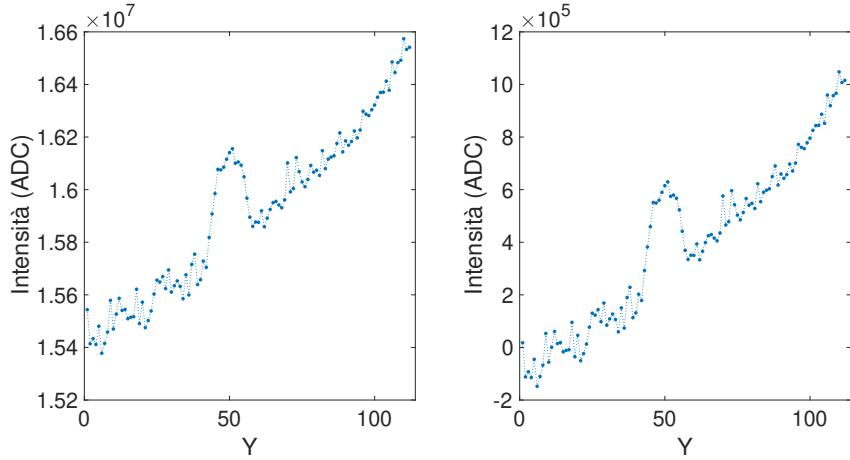


Figura 15: Plot lungo l'asse Y . A sinistra non è stato sottratto il rumore; la figura di destra è dopo la prima sottrazione del rumore: questo aumenta lungo l'asse Y cioè non è costante in una stessa elettronica. Il picco indica la sorgente.

Dimensione della sorgente

Da quest'ultimi grafici, in figura 16 è possibile individuare il centro della nostra sorgente. Questo è dato dalla posizione centrale dei picchi nei due grafici, in quanto in questi punti il segnale è più intenso. Dopo aver individuato il centro della sorgente di raggi- α , è possibile fare una stima della dimensione, data dalla larghezza dei due picchi, sulle X e sulle Y . Abbiamo considerato come larghezza quella massima, alla base del picco.

$$(x_s, y_s) \simeq (55, 49)$$

$$x_s \in [42, 60] \quad y_s \in [43, 57]$$

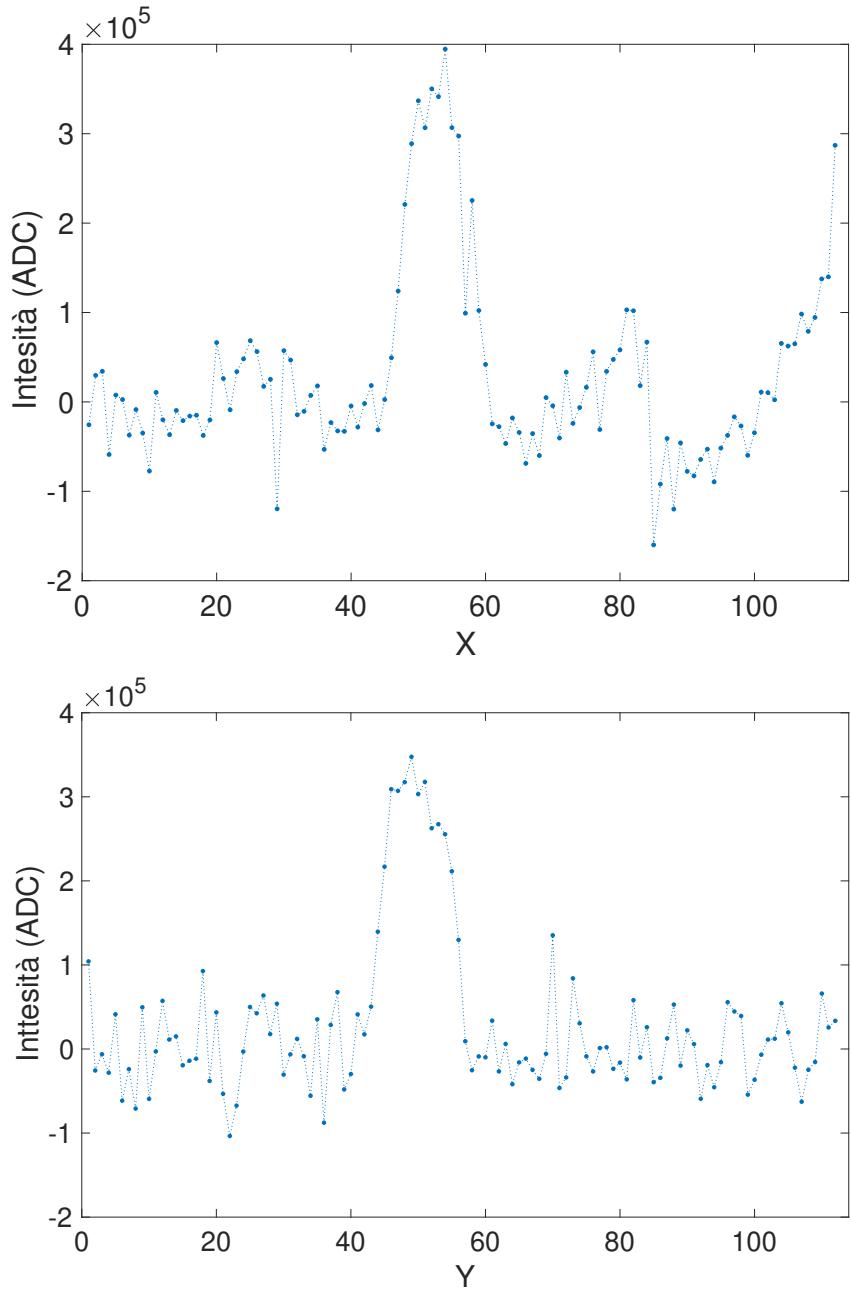


Figura 16: Plot finale lungo l'asse X e Y . Si nota come in tali grafici sia, però, ancora presente una distinzione tra il rumore delle varie elettroniche, problema che verrà superato con il prossimo metodo.

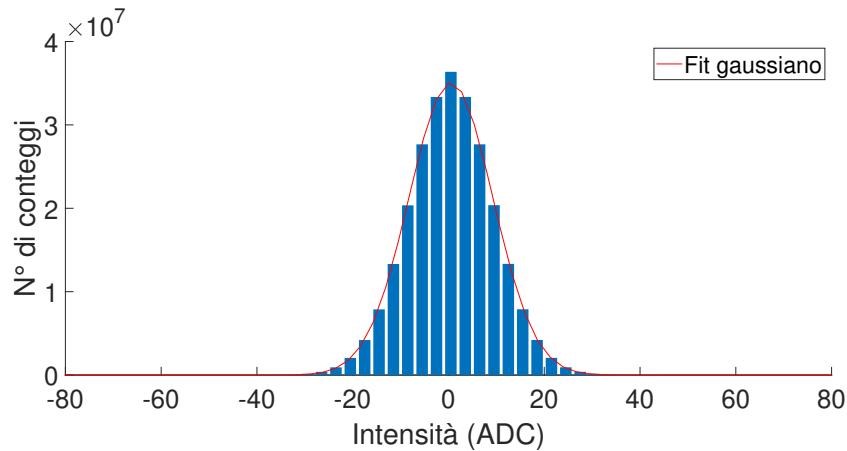


Figura 17: Istogramma del vettore contenente tutti i valori d'intensità della matrice a eccezione di quelli della sorgente.

2.4 Mappa di conteggio

Il nostro obiettivo, ora, è quello di migliorare ulteriormente l'immagine precedente della sorgente, in modo tale da ottenerne una in cui sarà presente solo la sorgente senza alcun tipo di rumore.

Eliminazione del rumore

Uno strumento efficace per questo tipo di situazione è la mappa di conteggio, ovvero il creare una matrice all'interno della quale siano presenti solo 0 e 1 che corrispondono rispettivamente all'assenza e alla presenza di segnale. Lavoriamo con tutta la matrice tridimensionale. L'obiettivo è di trovare una soglia che discerna gli 0 dagli 1; il nostro metodo sarà basato su una doppia soglia di selezione.

Per farlo abbiamo prima verificato la natura gaussiana del rumore. Innanzitutto abbiamo *eliminato* la sorgente stessa, grazie alle dimensioni trovate con il metodo precedente. Abbiamo preso tutti i valori all'interno della matrice, per ogni frame, e li abbiamo disposti su un unico vettore e ne abbiamo fatto un istogramma; successivamente abbiamo utilizzato un fit gaussiano su quest'ultimo, figura 17. Avendo ottenuto un χ^2 di 1.47, valore estratto dal fit di MATLAB, abbiamo confermato la natura gaussiana del segnale. Ci è stato quindi possibile individuare una soglia di rumore per la quale i valori che superano tale soglia indicano dei pixel da considerarsi accesi.

Tornando alla matrice completa iniziale, abbiamo calcolato per ogni pixel la media e la deviazione standard dei valori d'intensità ottenuti in quel pixel durante tutto il periodo di acquisizione, cioè, abbiamo mediato sulla terza dimensione. Poi abbiamo calcolato e valutato la distanza in sigma di ciascun valore del pixel dalla media del pixel stesso, per ogni pixel. Riassumendo, abbiamo effettuato un *test d'ipotesi* su ogni pixel della matrice 112 x 112 utilizzando la formula:

$$t_i = \frac{|x_i - \bar{x}_i|}{\sigma} \quad (6)$$

x_i =valore dell'intensità del pixel i -esimo;
 \bar{x}_i =valore medio dell'intensità del pixel i -esimo rispetto alla terza dimensione;
 σ =deviazione standard associata.

Eseguendo il calcolo per ogni i , cioè per ogni pixel e per ogni fotogramma, abbiamo la distanza in sigma per ogni pixel dal suo valore medio.

Per ottenere un'immagine della sorgente il più definita possibile abbiamo scelto d'imporre la soglia pari a 5σ , corrispondente ad un livello di confidenza del 99.99%. Se t_i supera le 5 sigma il valore del pixel i -esimo è da considerarsi vero e proprio segnale; questi pixel vengono, per ora, *eliminati* dalla matrice iniziale. Abbiamo, quindi, una matrice contenente esclusivamente pixel aventi t_i inferiore a 5.

Questa prima soglia ci ha permesso di selezionare i pixel di rumore con i quali poi eseguire un'ulteriore scrematura di tutti i pixel; questa sarà più precisa perché il valore medio d'intensità di ogni pixel sarà eseguito senza la sorgente, e si stabilirà una seconda soglia di selezione del segnale.

Ripetiamo lo stesso procedimento di selezione del segnale su questa matrice, cioè mediando le intensità dei pixel rimasti sulla terza dimensione e rieseguiamo il test d'ipotesi per tutti pixel della matrice tridimensionale iniziale, con una seconda soglia di 5 sigma. Abbiamo azzerato il valore dei pixel che avevano t_i minore a 5, cioè di quelli che erano statisticamente compatibili con il rumore, mentre abbiamo posto il valore uguale a 1 se t era maggiore o uguale a 5, ovvero quelli corrispondenti al segnale. Anche i pixel precedentemente *eliminati* vengono considerati segnale e, cioè, come 1.

Otteniamo così una matrice di 0 e 1. Avendo eseguito tale procedimento per ogni pixel, per ogni fotogramma, abbiamo 20500 matrici, cioè tutte quelle lungo la terza dimensione, di 0 e 1.

Sommendo tutte le matrici così ottenute lungo la terza dimensione si forma un'immagine senza rumore, figura 18, in cui la sorgente è ben visibile e ben definita.

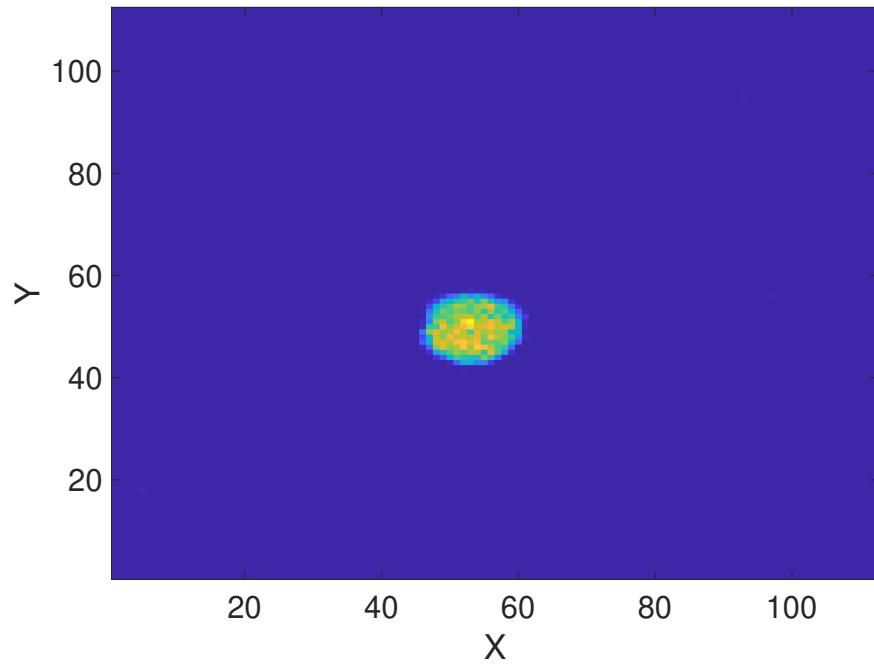


Figura 18: Immagine finale della sorgente

Dimensioni della sorgente

Dopo aver ottenuto l'immagine sopra citata è possibile ripetere il procedimento del punto precedente per stimare meglio la posizione e la grandezza della sorgente, a partire dalla figura 19, proiettando i valori sulle X e sulle Y . Il centro, in questo modo, risulta essere posto in (52,50) mentre le larghezze risultano essere x : [46,61] e y : [42,57]. Questi risultati sono più affidabili poiché ci è stato possibile scegliere un livello di confidenza uniforme per tutti i pixel, risolvendo il problema della mappa d'intensità, cioè la scelta particolare del livello del rumore all'interno di ogni elettronica.

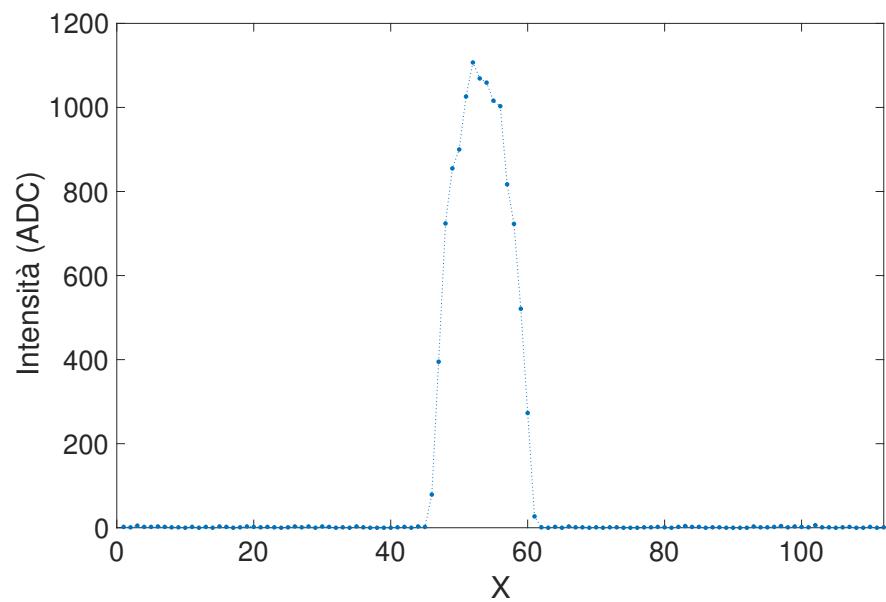
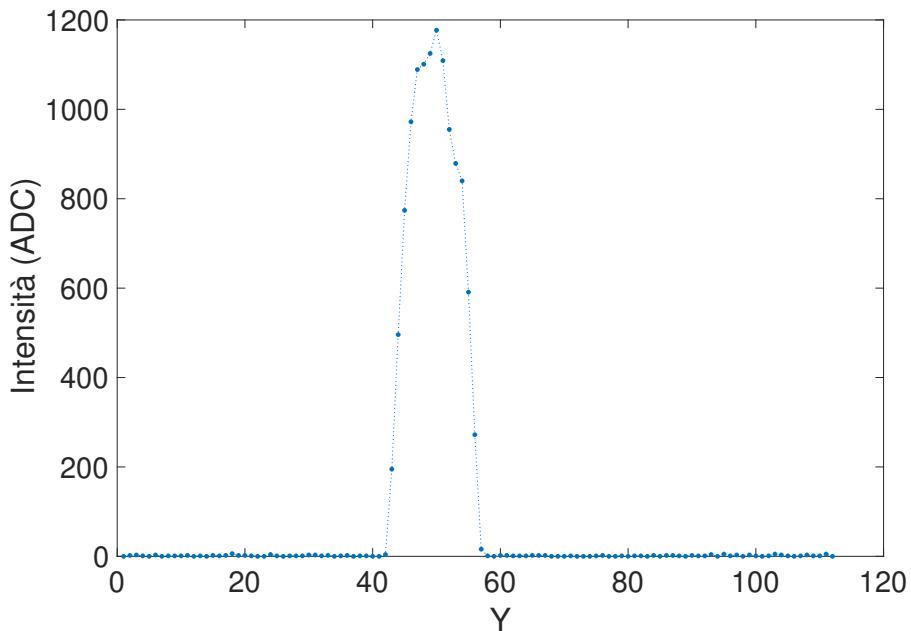


Figura 19: Plot finale lungo l'asse X e Y . Si nota come tali grafici siano molto più precisi rispetto a quelli ottenuti tramite il metodo precedente, proprio per la scelta di una soglia che non si limitava alle singole elettroniche.

2.5 Quantum Imaging

In quest'ultima parte dell'esperimento vogliamo individuare nel modo più preciso possibile i pixel della sorgente e in particolare l'intensità di radiazione che è stata registrata dai vari pixel durante tutto il periodo d'acquisizione. Per fare questo è necessario analizzare fotogramma per fotogramma la matrice, per un totale di 20500 frame e individuare in ognuno la posizione dei pixel accesi, per poi 'sommare' su tutti i fotogrammi cioè capire quante volte ciascun pixel è stato acceso durante tutta la durata della ricezione del segnale; in questo modo si ha un'indicazione dell'intensità del segnale rivelato e in quali punti questo è avvenuto. Per quanto riguarda i singoli pixel accesi siamo in grado di farlo immediatamente; il nostro scopo diventa, quindi, individuare i cluster presenti in ogni frame, ovvero i raggruppamenti di due o più pixel accesi vicini fra di loro. In particolare vogliamo individuare una *posizione media* per tali raggruppamenti e associarla al pixel più vicino, il quale può essere considerato il vero punto d'impatto della radiazione.

Per trovare tutti i cluster abbiamo creato un programma specifico in MATLAB per poi utilizzarlo sulle matrici di 0 e 1 prodotte nella fase precedente.

Codice di ricerca dei cluster

Per ricercare le posizioni dei cluster all'interno delle matrici con il segnale abbiamo creato uno script di ricerca, il quale lavora su matrici generiche, da noi create. Abbiamo utilizzato una matrice quadrata di prova, di dimensione 112 x 112, contenente numeri compresi fra 0 e 1: chiameremo tale matrice *Segnale*; un esempio è quella di figura 20). Di seguito è riportato il funzionamento dello script, con le relative immagini per ogni passaggio.

- Creiamo una nuova matrice con soli 0 e 1, che chiameremo *Binaria*, considerando 1 i numeri maggiori di 0.9 nella matrice *Segnale* e 0 quelli minori. In questo modo abbiamo una matrice composta al 10% di 1, come si può vedere in figura 21.
- Mediante la funzione *find* di MATLAB troviamo le posizioni degli 1 all'interno della matrice. Questa funzione restituisce per ogni 1 l'indice della sua riga e della sua colonna, a partire dalla posizione (1,1), procedendo colonna per colonna. Eseguiamo lo stesso procedimento sulla matrice trasposta, in questo modo l'ordine delle coordinate degli 1 sarà invertito e i pixel accesi verranno individuati riga per riga, sempre partendo dalla posizione (1,1). Otteniamo due matrici di dimensione *numero di pixel accesi* x 2, che chiameremo *post* e *Post*. Queste contengono le stesse posizioni, ma la prima colonna di *post* corrisponde alla seconda colonna di *Post* e i valori sono gli stessi, ma in ordine diverso. Per rendere più chiaro il contenuto delle matrici ne mostriamo le prime righe in figura 22.
- Selezioniamo tra tutte le posizioni trovate esclusivamente i pixel accesi vicini in colonna (uno sotto l'altro) o vicini in riga (uno di fianco all'altro); per trovare i vicini in colonna utilizziamo la matrice *post*, cercando i pixel per cui la colonna era la stessa (seconda colonna di *post*) e la riga era successiva (prima colonna di *post*). Lo stesso facciamo per *Post* selezionando i pixel per cui la riga era la stessa (seconda colonna di *Post*) e la colonna era successiva (prima colonna di *Post*). Otteniamo due matrici, *post1* e *post2*, il cui inizio è in figura 23. In particolare per costruire *post2* abbiamo scambiato l'ordine delle colonne in modo da avere sempre la prima colonna indicante la coordinata riga e la seconda quella colonna dei pixel accesi.

Quello che abbiamo fatto, quindi, è stato selezionare solo i cluster: non consideriamo tra i cluster i singoli pixel isolati accesi. Infatti questi hanno posizione ben definita e il nostro interesse per i cluster riguarda l'identificare una posizione intermedia alle coordinate dei singoli pixel, data l'accensione di pixel vicini a intensità diversa. Questi 'punti' verranno recuperati alla fine del codice.

- Ora vogliamo salvare le posizioni degli 1 in un unico numero, che esprima sia la coordinata *riga* che la coordinata *colonna*. Tale numero n da noi definito è: $n = 1000 \cdot \text{riga} + \text{colonna}$. (Esempio: per il pixel (19,4) della matrice avremo il valore 19004). A partire dalle due matrici di prima, *post1* e *post2* otteniamo due vettori, *p1* e *p2*. Nel primo vettore i valori successivi di n distano almeno 1000 perché si tratta di pixel individuati colonna per colonna; nel secondo i valori successivi di n distano almeno 1 perché disposti riga per riga. Proseguendo con tale logica l'inizio dei vettori ottenuti è in figura 24.

Dal primo selezioniamo i valori contigui distanti esattamente 1000 e li posizioniamo in una riga di una nuova matrice. Ogni riga di tale matrice avrà, quindi, le posizioni, in termine di n , dei pixel accesi vicini in colonna e cioè cluster verticali di due o più pixel. Lo stesso facciamo per il secondo vettore nel quale i valori saranno distanti 1, ottenendo un'altra matrice nelle cui singole righe sono presenti i cluster orizzontali. Chiamiamo queste due matrici *clus1* e *clus2*, in figura 25.

Siccome ci servirà successivamente, creiamo un matrice che chiameremo *Posizioni*, la quale è come la matrice *Binaria*, ma ha al posto degli 1 ha il valore di n corrispondente a quel pixel e solo per i cluster (escludiamo i pixel isolati); la rappresentiamo in figura 26.

- Troviamo i valori di n presenti in entrambi i vettori delle posizioni, in modo da individuare tutti i pixel accesi aventi pixel vicini accesi sia sopra/sotto che a destra/sinistra. Salviamo tali valori di n in un nuovo vettore.

Individuiamo, uno per uno, i valori di n del vettore appena creato all'interno di entrambe le matrici, *clus1* e *clus2*; prendiamo tutta la riga di tali matrici dove è stato individuato n e affianchiamo questi due *segmenti* in una riga di una nuova matrice che chiameremo *Cluster*. Otteniamo, in ogni riga di tale matrice, un cluster completo, avendo sia le posizioni di pixel sopra/sotto che quelle di pixel a destra/sinistra di uno stesso pixel acceso; la lunghezza di ogni riga indica il numero di pixel di quel cluster.

Eliminiamo i *segmenti* inseriti nella matrice *Cluster* da *clus1* e *clus2*, in modo tale che in quest'ultime rimangano solo i cluster o esclusivamente verticali o esclusivamente orizzontali. Infine, inseriamo anche questi tipi di cluster nella matrice *Cluster*, in figura 27. Ovviamente in caso non ci fossero cluster aventi sia segmenti verticali che orizzontali verrà eseguito solo questo passaggio.

Abbiamo ottenuto le posizioni, in termine di n , dei singoli pixel di ogni cluster; vogliamo, ora, trovare una posizione *media* del cluster all'interno della matrice iniziale. Tale posizione verrà chiamata *baricentro*.

- Creiamo una nuova matrice *ClusterS*, identica alla matrice *Cluster*, ma avente, anziché il numero n , l'intensità del segnale in quel pixel; Tale valore è stato trovato a partire dalla matrice *Segnale*, risalendo alla posizione del pixel grazie al numero n .

- Risalendo all'indice di riga e a quello di colonna di ogni pixel acceso, grazie al numero n , creiamo due matrici, identiche alla matrice *Cluster*, ma una con tutte le coordinate di riga (matrice *Riga*) e l'altra con tutte le coordinate di colonna (matrice *Colonna*).
- Troviamo riga e colonna del baricentro di ogni cluster facendo la media delle coordinate di tutti i pixel di un cluster, pesata con l'intensità del segnale in quei pixel. Più precisamente, facciamo la media pesata tramite la matrice *ClusterS* di ciascuna riga delle matrici *Colonna* e *Riga* in modo da mediare per le righe e per le colonne dei pixel di ciascun cluster; otteniamo due colonne mediate che contengono la coordinata riga e la coordinata colonna del baricentro, per ogni cluster, cioè per ogni riga della matrice *Cluster*. Abbiamo, quindi, una matrice avente dimensioni *numero di cluster* x 2.
- All'interno di tale matrice mancano i singoli pixel accesi. A partire dalla matrice *Posizioni* sostituiamo con 1 i valori di n ; sottraiamo questa alla matrice *Binaria* e otteniamo una matrice avente 1 esclusivamente nei pixel accesi isolati. Troviamo, con la funzione *find*, le coordinate di questi, le quali coincidono con il loro baricentro. Quindi inseriamo anche queste nella matrice. Infine approssimiamo le due coordinate ottenute ai numeri interi più vicini, per quanto riguarda i cluster, in modo da associare ogni cluster ad un solo pixel acceso, ottenendo la matrice *Baricentri*, in figura 28. In figura 29 si nota l'approssimazione.

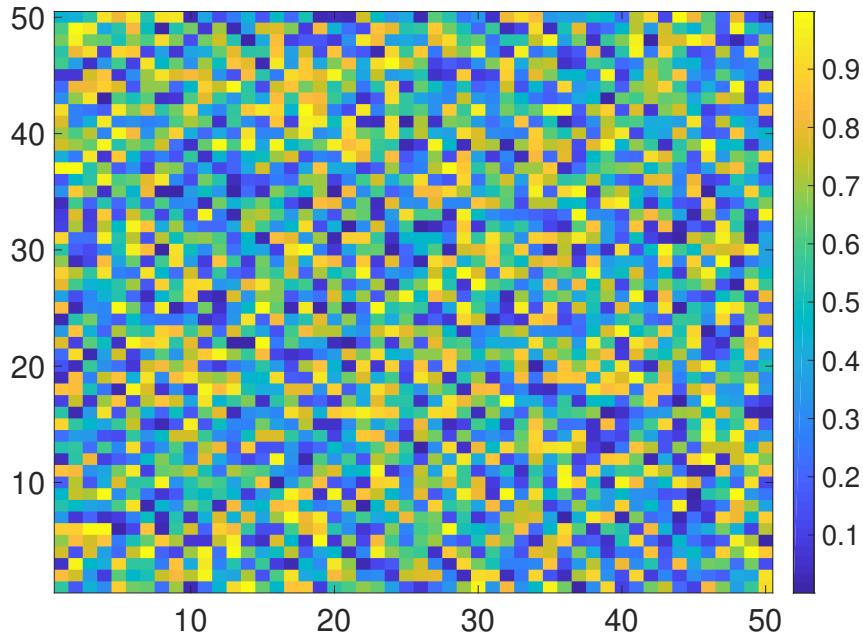


Figura 20: Matrice *Segnale* di prova. In tali immagini utilizzeremo matrici 50×50 semplicemente per rendere più efficace il lavoro effettuato dal codice. Infatti esso è programmato per lavorare su matrici di qualunque dimensione, valore che può essere arbitrariamente scelto dall'utente.

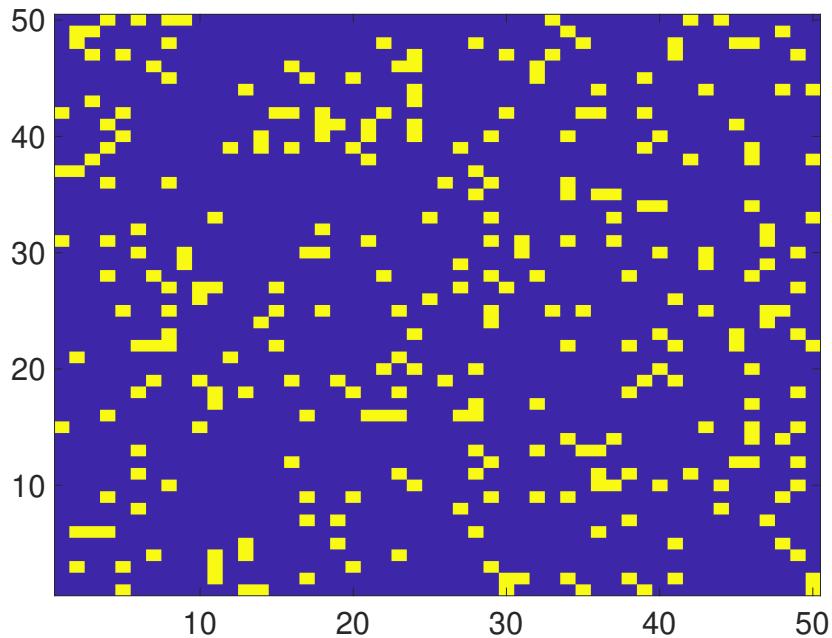


Figura 21: Matrice *Binaria* di prova. Il codice funziona per qualunque percentuale di pixel accesi si scelga di considerare come segnale; noi abbiamo impostato al 10% tale valore per avere una quantità sufficiente di cluster e pixel isolati accesi, ma non eccessiva, in modo da poterli ben distinguere. Inoltre le matrici con il segnale dal MIMOTERA su cui il codice lavorerà non presentano un numero eccessivo di cluster.

post Post

282x2 double

	1	2	3
1	15	1	
2	31	1	
3	37	1	
4	42	1	
5	3	2	
6	6	2	
7	21	2	
8	37	2	
9	48	2	
10	49	2	
11	6	3	
12	38	3	
13	43	3	
14	47	3	
--	--	--	--

(a) La prima colonna indica coordinate di riga, la seconda coordinate di colonna, degli 1 presenti nella matrice in figura 21, procedendo per colonne.

post Post

282x2 double

	1	2	3
1	5	1	
2	13	1	
3	14	1	
4	30	1	
5	35	1	
6	39	1	
7	50	1	
8	11	2	
9	17	2	
10	30	2	
11	31	2	
12	34	2	
13	38	2	
14	41	2	
--	--	--	--

(b) La prima colonna indica coordinate di colonna, la seconda coordinate di riga, degli 1 presenti nella matrice in figura 21, procedendo per righe.

Figura 22: Matrici *post* e *Post* con le posizioni dei pixel accesi nella matrice *Binaria*.

post1 post2

60x2 double

	1	2	3
1	48	2	
2	49	2	
3	22	8	
4	23	8	
5	29	9	
6	30	9	
7	26	10	
8	27	10	
9	2	11	
10	3	11	
11	3	11	
12	4	11	
13	17	11	
14	18	11	
...

post1 post2

50x2 double

	1	2	3
1	1	13	
2	1	14	
3	2	30	
4	2	31	
5	6	2	
6	6	3	
7	6	3	
8	6	4	
9	10	36	
10	10	37	
11	12	45	
12	12	46	
13	13	35	
14	13	36	
...

(a) La prima colonna indica coordinate di riga, la seconda coordinate di colonna, degli 1 vicini in colonna presenti nella matrice in figura 21, procedendo per colonne.

(b) La prima colonna indica coordinate di riga, la seconda coordinate di colonna, degli 1 vicini in riga presenti nella matrice in figura 21, procedendo per righe.

Figura 23: Matrici *post1* e *post2* con le posizioni dei pixel vicini in riga o in colonna. La decisione di guardare sia la matrice iniziale che la sua trasposta ha proprio questo vantaggio, di avere i pixel vicini in colonna separati da quelli vicini in riga.

p1 p2

1x58 double

1	48002	49002	22008	23008	29009	30009	26010	27010	2011	3011	4011	17011	18011	4013
2														
3														
4														
5														
6														

(a) Vettore di n derivante dalla matrice *post1*. I pixel vicini in colonna distano di 1000.

p1 p2

1x47 double

1	1013	1014	2030	2031	6002	6003	6004	10036	10037	12045	12046	13035	13036	16021
2														
3														
4														
5														
6														

(b) Vettore di n derivante dalla matrice *post2*. I pixel vicini in riga distano 1.

Figura 24: Vettori aventi le posizioni dei pixel vicini in riga o in colonna, in termini di n . Esprimere le due coordinate con un unico numero ci permette di gestire più facilmente il singolo pixel acceso. Rispetto alla figura precedente sono stati eliminati gli eventuali pixel ripetuti, cioè riordinati due volte.

	1	2	3	4
1	48002	49002	0	
2	22008	23008	0	
3	29009	30009	0	
4	26010	27010	0	
5	2011	3011	4011	
6	17011	18011	0	
7	4013	5013	0	
8	39014	40014	0	
9	40018	41018	42018	
10	40021	41021	0	
11	40024	41024	0	
12	43024	44024	0	
13	46024	47024	0	
14	16028	17028	0	
15	24029	25029	0	
16	1030	2030	0	
17	30031	31031	0	
18	45032	46032	0	
19	35034	36034	0	
20	10036	11036	0	
21	47041	48041	0	
22	29043	30043	0	
23	22045	23045	0	
24	14046	15046	0	
25	38046	39046	0	
26	24047	25047	0	
27	31047	32047	0	
28	1050	2050	0	
29				

	1	2	3	4
1	1013	1014	0	
2	2030	2031	0	
3	6002	6003	0	
4	10036	10037	0	
5	12045	12046	0	
6	13035	13036	0	
7	16021	16022	16023	
8	16028	0	0	
9	22006	22007	22008	
10	25047	0	0	
11	27010	27011	0	
12	30017	30018	0	
13	34039	34040	0	
14	35036	35037	0	
15	37001	37002	0	
16	41018	41019	0	
17	42015	42016	0	
18	42035	42036	0	
19	46023	46024	0	
20	48045	48046	0	
21	49002	49003	0	
22	50008	50009	0	
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				

(a) Cluster esclusivamente verticali di pixel vicini in colonna.

(b) Cluster esclusivamente orizzontali di pixel vicini in riga.

Figura 25: Matrici contenenti in ogni riga un cluster parziale.

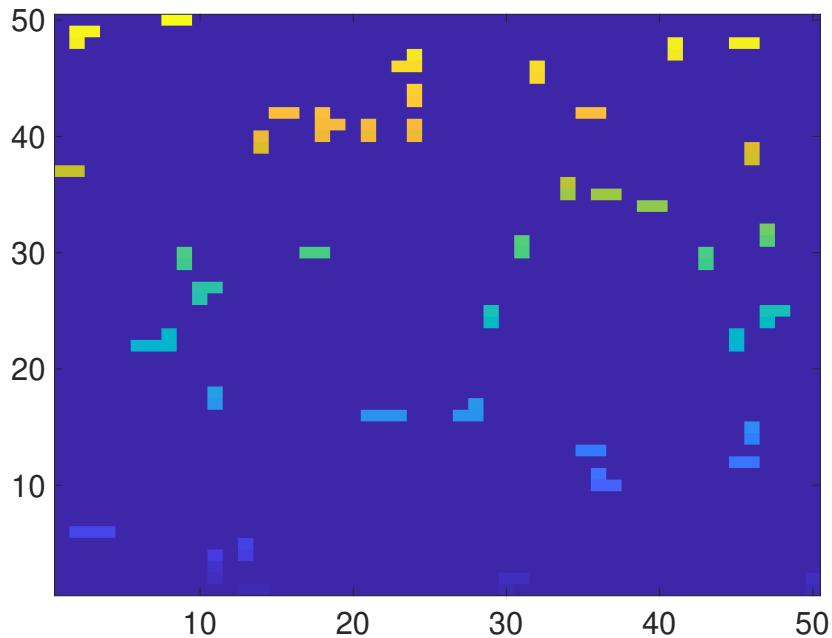


Figura 26: Matrice rappresentante tutti i cluster individuati. I colori diversi sono dovuti al fatto che in ogni pixel acceso della matrice si ha il valore di n . Maggiore è la riga e maggiore è la colonna, maggiore è il valore di n .

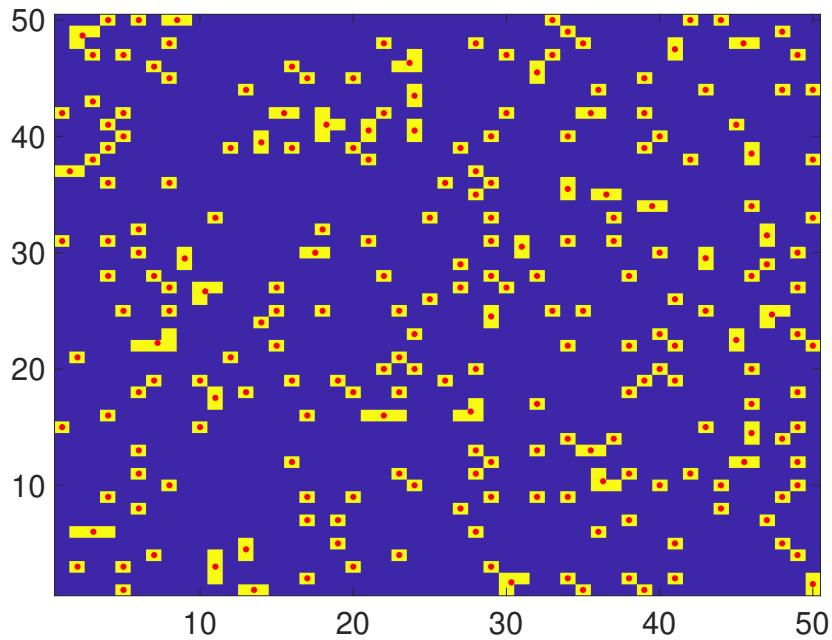
Cluster					
41x4 double					
	1	2	3	4	5
1	48002	49002	49003	0	
2	22008	23008	22006	22007	
3	26010	27010	27011	0	
4	40018	41018	42018	41019	
5	46024	47024	46023	0	
6	16028	17028	16027	0	
7	1030	2030	2031	0	
8	10036	11036	10037	0	
9	24047	25047	25048	0	
10	29009	30009	0	0	
11	2011	3011	4011	0	
12	17011	18011	0	0	
13	4013	5013	0	0	
14	39014	40014	0	0	
15	40021	41021	0	0	
16	40024	41024	0	0	
17	43024	44024	0	0	
18	24029	25029	0	0	
19	30031	31031	0	0	
20	45032	46032	0	0	
21	35034	36034	0	0	

Cluster					
41x4 double					
	1	2	3	4	5
21	35034	36034	0	0	
22	47041	48041	0	0	
23	29043	30043	0	0	
24	22045	23045	0	0	
25	14046	15046	0	0	
26	38046	39046	0	0	
27	31047	32047	0	0	
28	1050	2050	0	0	
29	1013	1014	0	0	
30	6002	6003	6004	0	
31	12045	12046	0	0	
32	13035	13036	0	0	
33	16021	16022	16023	0	
34	30017	30018	0	0	
35	34039	34040	0	0	
36	35036	35037	0	0	
37	37001	37002	0	0	
38	42015	42016	0	0	
39	42035	42036	0	0	
40	48045	48046	0	0	
41	50008	50009	0	0	

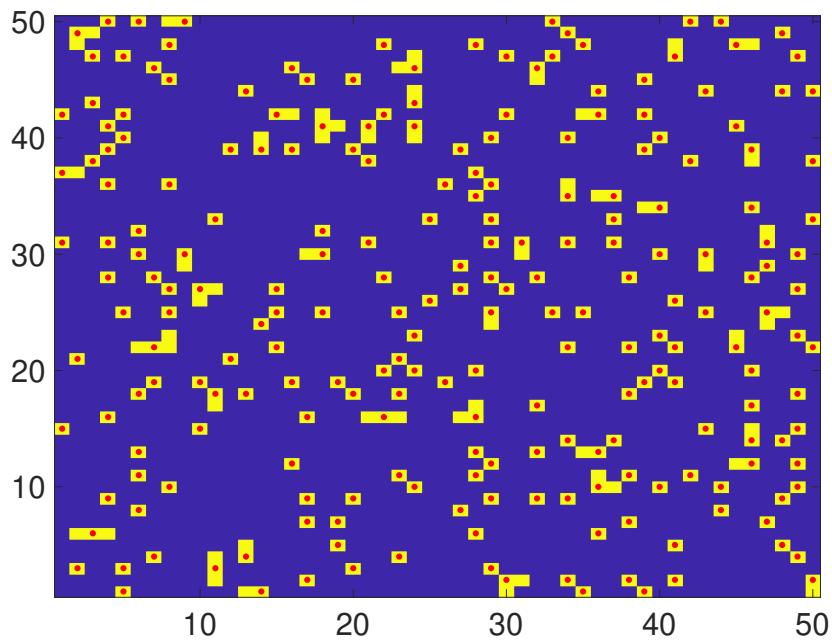
Figura 27: Matrice *Cluster* contenente in ogni riga un cluster completo. Fino alla riga 9 si tratta di cluster sia orizzontali che verticali. Infatti distano o di 1000 o di 1. Successivamente sono incollati solo i verticali, distanti 1000 fino alla riga 29, e poi solo gli orizzontali, distanti 1.

	1	2	3
1	48.6695	2.3269	
2	22.2421	7.2263	
3	26.6727	10.3396	
4	41.0106	18.2458	
5	46.3175	23.6728	
6	16.3387	27.6678	
7	1.6504	30.3214	
8	10.3435	36.3112	
9	24.6794	47.3302	
10	29.5043	9	
11	3.0008	11	
12	17.5150	11	
13	4.4922	13	
14	39.4873	14	
15	40.5116	21	
16	40.5014	24	
17	43.4954	24.0000	
18	24.5169	29.0000	
19	30.5126	31	
20	45.5031	32	
21	35.4851	34.0000	
22	47.4966	41	
23	29.5252	43	
24	22.4935	45	
25	14.4920	46	
26	38.5220	46	
27	31.4905	47	
28	1.5024	50.0000	
29	1	13.5240	
30	6.0000	3.0360	
31	12.0000	45.5241	
32	13	35.5063	
33	16	21.9938	
34	30	17.5167	
35	34	39.5116	
36	35	36.5222	
37	37	1.4964	
38	42	15.4876	
39	42.0000	35.5042	
40	48.0000	45.4741	
41	50.0000	8.5049	
42	15	1	
43	31	1	
44	42	1	
45	3	2	
46	21	2	
47	38	3	
48	43	3	
49	47	3	
50	9	4	
51	16	4	
52	28	4	
53	31	4	
54	36	4	
55	39	4	
56	41	4	
57	50	4	
58	1	5	
59	3	5	
60	25	5	
61	40	5	
62	42	5	
63	47	5	
64	8	6	
65	11	6	
66	13	6	
67	18	6	
68	30	6	

Figura 28: Matrice *Baricentri* contenente in ogni riga la coordinata riga e la coordinata colonna di un singolo cluster, a partire dalla matrice *Cluster*, ma con anche i pixel singoli dalla riga 42 in poi.



(a) Baricentri esatti



(b) Baricentri approssimati

Figura 29: Matrice *Binaria* con, in rosso, il baricentro di ogni agglomerato di pixel. L'approssimazione è necessaria per registrare esattamente il pixel d'impatto della radiazione.

Ricerca dei cluster nella matrice con il segnale

Abbiamo utilizzato la funzione creata a partire dal codice sopra descritto per ogni frame della matrice con il segnale, cioè per ogni matrice bidimensionale ad un certo istante di tempo.

Nei nostri fotogrammi erano presenti pochi cluster; alcuni frame avevano solo pixel isolati accesi quindi, per questi, abbiamo saltato tutto il procedimento di ricerca dei cluster, salvando solo le posizioni in riga e colonna dei singoli pixel accesi nella matrice finale dei baricentri.

Abbiamo salvato la matrice dei baricentri per il primo frame; singolarmente per ogni frame successivo abbiamo ottenuto lo stesso tipo di matrice, ma anziché salvarla separatamente l'abbiamo 'incolonnata' a quella del frame precedente. Iterando questo procedimento per un frame dopo l'altro, otteniamo la matrice totale dei baricentri degli agglomerati ad ogni tempo.

Ci saranno posizioni ripetute nella matrice ottenuta; queste saranno di pixel uguali accesi in frame diversi, cioè accesi più volte durante tutto il periodo. Contiamo le ripetizioni e creiamo una matrice di dimensione come quella iniziale, avente, in ogni pixel, il numero di volte per cui quel pixel è stato acceso, in tutti i 20500 fotogrammi. Questo valore è indice dell'intensità del segnale in quel determinato pixel.

Mostriamo in figura 30 esclusivamente tutte le posizioni di pixel accese in un qualche frame. Com'è possibile vedere, vi è un agglomerato di cluster al centro, il quale corrisponde alla nostra sorgente, e vari cluster sparsi per il resto dell'immagine. Successivamente, rappresentiamo la matrice finale in figura 31, contenente il numero di volte che quel pixel è stato acceso, per ogni pixel.

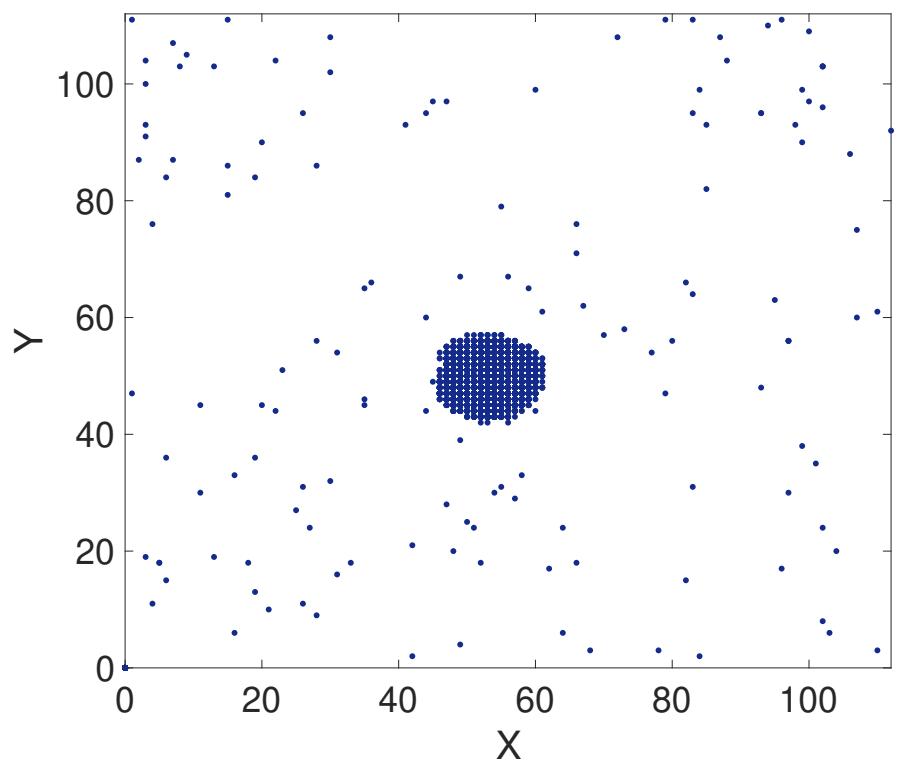


Figura 30: Matrice rappresentate tutti i pixel che sono stati accesi in un certo frame.

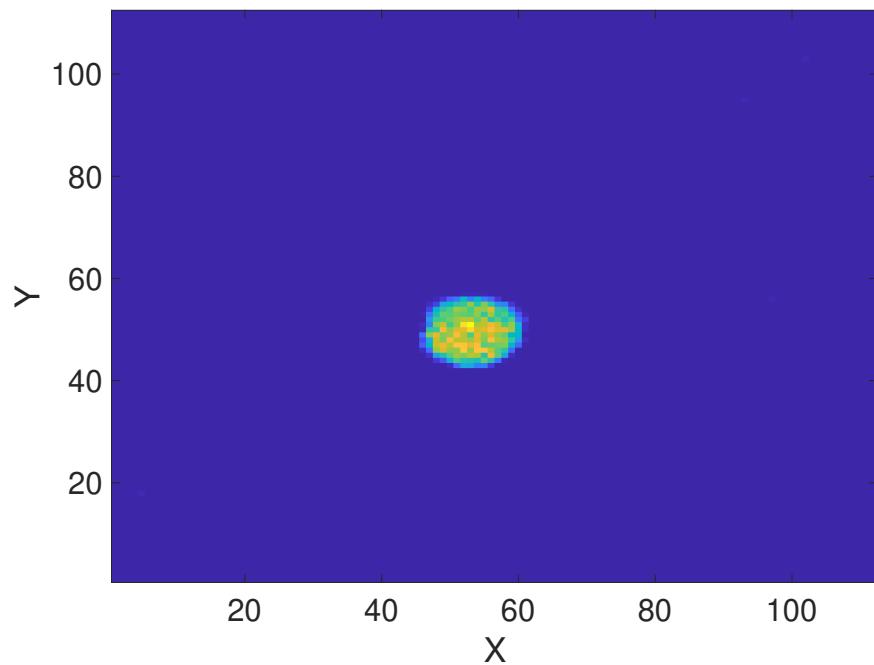


Figura 31: Matrice finale della sorgente avente intensità data dal numero di volte di accensione di ogni pixel, durante tutto il periodo di acquisizione.

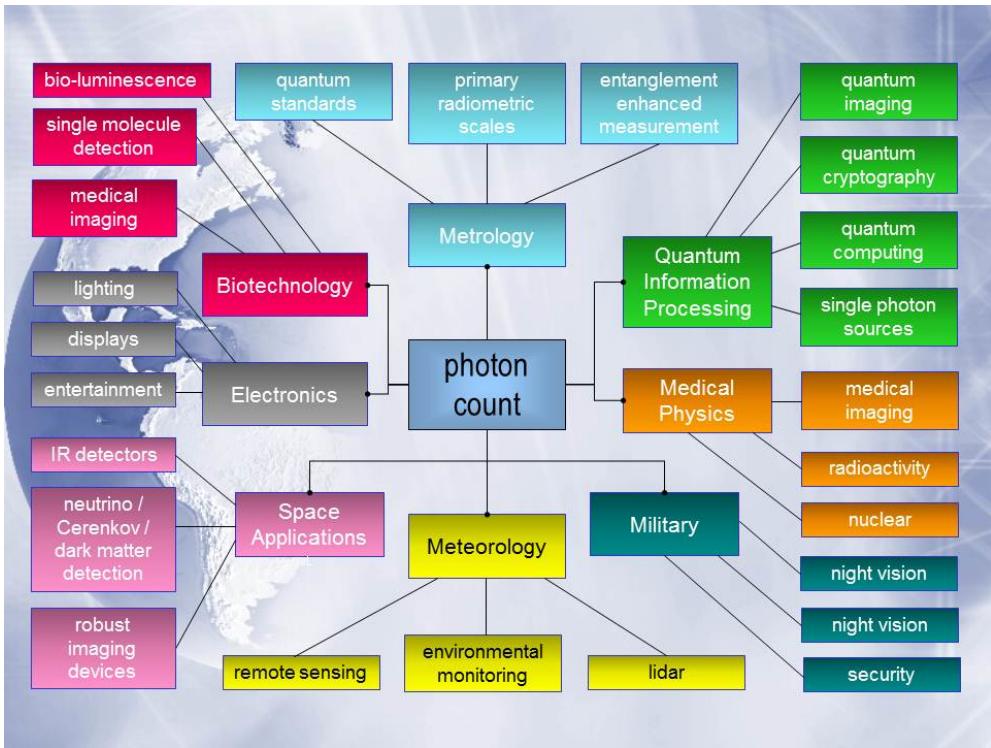


Figura 32: Importanza e l'utilità dei rilevatori di fotoni in diversi campi della Fisica.

3 Caratterizzazione del SiPM

L'interesse per l'interazione materia-luce e, in generale, per la natura corpuscolare di quest'ultima è solo uno dei tanti motivi che hanno portato allo sviluppo di nuovi dispositivi in grado di rivelare quantità anche minime di fotoni. Tra questi vi è il SiPM, acronimo di *Silicon Photomultiplier*, il quale costituisce una tra le più moderne tipologie di fotorivelatore.

In Italia i primi SiPM sono stati prodotti nel 2005 dall'ITC-irst (Istituto per la ricerca scientifica e tecnologica) di Trento e dalla STMicroelectronics di Catania, nell'ambito di programmi di ricerca tecnologica svolti insieme all'Istituto nazionale di fisica nucleare.

L'utilità della rivelazione di radiazione elettromagnetica per il progresso di nuove tecnologie è immensa in molti ambiti diversi della Fisica. Senza approfondirne l'utilizzo, in figura 32 sono illustrati i maggiori campi di interesse e le possibili applicazioni di questi dispositivi.

3.1 Introduzione al SiPM

Il nostro primo intento è quello di descrivere il funzionamento di tale dispositivo.

Cosa si intende con fotomoltiplicatore

Si parla di fotorivelatore quando si ha un sensore in grado di rivelare la radiazione elettromagnetica; questi dispositivi acquisiscono l'intensità della radiazione e la

convertono in un segnale elettrico avente un'intensità di corrente o una differenza di potenziale proporzionale all'intensità della radiazione in entrata. Esistono diverse tipologie di fotorivelatore in base all'effetto che si desidera studiare e quindi all'utilità del dispositivo. In particolare questi possono differire per la porzione di spettro elettromagnetico che sono in grado di rivelare, e per l'intensità luminosa minima che riescono a misurare (quelli che ci interessano sono in grado di rivelare anche i singoli fotoni).

Tra i fotorivelatori ci sono i fototubi, costituiti da diodi fotorivelatori, veri e propri tubi che hanno come principio di funzionamento l'effetto fotoelettrico: la luce provoca l'emissione di elettroni da un catodo in un tubo a vuoto. Ciò che poi categorizza i tubi fotomoltiplicatori è l'emissione secondaria di elettroni: vi è un'amplificazione degli elettroni emessi da parte di vari elettrodi, detti *dinodi*, conduttori che stabiliscono un contatto elettrico con il vuoto che li circonda.

Come funziona un tubo fotomoltiplicatore

Illustriamo la struttura di un tubo fotomoltiplicatore, figura 33.

Si tratta di un tubo in vetro al cui interno viene praticato il vuoto, nel quale sono presenti una serie di dinodi ciascuno caricato ad un potenziale superiore rispetto al precedente e un anodo finale. I fotoni provenienti da una sorgente di luce esterna colpiscono una superficie chiamata *fotocatodo*, di area attiva di misura di $10\text{-}500\text{ mm}^2$, la quale è ricoperta da un materiale che favorisce l'effetto fotoelettrico. A causa di questo fenomeno alcuni elettroni della superficie, detti *fotoelettroni*, subiscono un'accelerazione dovuta al campo elettromagnetico e sono rilasciati con una certa energia cinetica; questi vengono, poi, focalizzati da un particolare elettrodo verso lo stadio di elettromoltiplicazione che si ottiene quando gli elettroni colpiscono uno dopo l'altro, in ordine, i dinodi. Il singolo elettrone emesso, indirizzato dall'elettrodo, va a colpire il primo dinodo della serie, quello a potenziale minore; il contatto con questo provoca l'emissione secondaria, da parte del dinodo stesso, di diversi elettroni a energia minore. La struttura del sistema con fotodiodi connessi in sequenza è progettata in modo che ciascun elettrone emesso da un elettrodo venga accelerato dalla differenza di potenziale, colpisca l'elettrodo successivo e provochi l'emissione di diversi elettroni dallo stesso. Questo succede per ognuno dei dinodi presenti e per ogni elettrone: si ha così un fenomeno a cascata per cui un singolo fotone che colpisce il tubo provoca il passaggio di moltissimi elettroni; inoltre il processo di innesco della valanga è molto rapido. Al termine della sequenza gli elettroni colpiscono un anodo, terminale positivo, e viene generato un rapido impulso elettrico, dell'ordine dei μA , il quale indica il rilevamento del fotone.

Notiamo che, per accelerare un elettrone tra i diodi, è ovviamente necessaria una differenza di potenziale tra il primo e l'ultimo ed è quella tra cui il dispositivo lavora; questa dipende dal numero di diodi. Il numero di dinodi non è scelto arbitrariamente, ma è stabilito in base alla quantità di carica minima che può essere rivelata; la sequenza può terminare quando vi è una quantità di carica sufficientemente alta da essere distinta rispetto alla mancanza di segnale. Per valutarlo si usa definire il *guadagno* di un tubo fotomoltiplicatore: se n è il numero di dinodi, il guadagno è il numero totale di elettroni prodotti per fotone incidente, $G = f^n$ dove f è il fattore di emissione di elettroni secondari di ogni diodo. Un tradizionale dispositivo ha un guadagno dell'ordine di 10^6 . E' proprio questo effetto di elettromoltiplicazione che permette al sensore di rivelare la presenza anche di singoli fotoni, in quanto a ciascun fotone corrisponde un numero G di elettroni successivamente emessi corrispondenti anche a elevate quantità

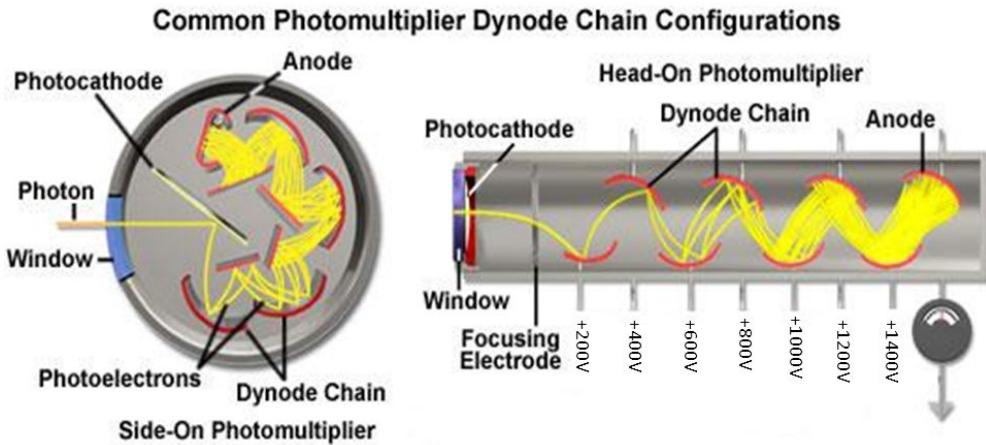


Figura 33: Schema di un fotomoltiplicatore con tubo a vuoto, di lato e di petto.

di carica per n grandi.

I vantaggi dei fotomoltiplicatori sono numerosi tra cui l'elevata sensibilità e stabilità e il basso rumore elettronico caratteristico. Hanno, però, un alto consumo, sono ingombranti, fragili e devono essere schermati magneticamente, in quanto un campo magnetico esterno, anche quello terrestre, potrebbe deviare il percorso degli elettroni all'interno del tubo. Alcuni di questi svantaggi sono stati superati con la diffusione, in campo fisico, del silicio.

Cos'è un fotomoltiplicatore a stato solido

Riassumendo, i tradizionali fotomoltiplicatori sono sensori costituiti da più diodi fotorivelatori, costruiti con un tubo a vuoto nel quale avviene l'elettromoltiplicazione. Vi sono poi i fotomoltiplicatori a stato solido, costituiti da dei particolari diodi a semiconduttore, chiamati *fotodiodi a valanga*, i quali hanno uno stato solido di semiconduttore in sostituzione al vuoto del tubo.

Il funzionamento è simile a quello descritto in precedenza per i tubi fotomoltiplicatori con tubo a vuoto. In ogni fotodiode vi sono quattro strati di semiconduttore; dopo che il fotone è stato segnalato nella prima zona, l'elettrone viene liberato da un atomo di silicio nella *zona intrinseca*. Questo passa, in ordine, nelle ultime due zone delle quali solo la prima delle due, detta *zona p*, permette l'effetto moltiplicativo e il guadagno di cariche, producendo l'effetto valanga, come spiegato, e permettendo la ricezione anche del singolo fotone. Infine la carica viene assorbita e si genera un segnale elettrico. (figura 34)

Il semiconduttore che ci interessa è proprio il Silicio.

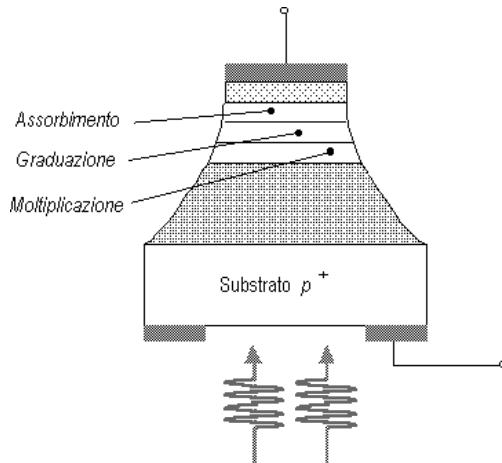


Figura 34: Schema di un fotodiodo a valanga. La zona intrinseca è quella tra il substrato p^+ e la zona di moltiplicazione.

Com'è fatto un SiPM

Il SiPM è un sensore costituito da fotodiodi a valanga. In particolare si tratta di un substrato di silicio sul quale viene impiantata una matrice costituita da microcelle, dette *pixel*, che corrispondono ciascuna ad un fotodiodo a valanga. (Figura 35).

Le dimensioni tipiche di un SiPM sono da (1 mm x 1 mm) fino a (3 mm x 3 mm). Le singole microcelle hanno dimensioni tipiche che vanno dai (20 μm x 20 μm) ai (50 μm x 50 μm). Hanno, quindi, piccole dimensioni e anche il costo è contenuto.

Il SiPM è un dispositivo analogico perché tutte le microcelle sono lette in parallelo, il che rende possibile generare segnali in una gamma dinamica che va dal singolo fotone fino a 1000 fotoni per un'area di un millimetro quadrato. Il segnale complessivo in uscita sarà la somma delle cariche generate da ogni fotodiodo "acceso" da un fotone. Il SiPM dovrebbe, quindi, restituire esclusivamente segnali elettrici che sono multipli interi di un valore fondamentale che è quello prodotto dal singolo fotodiodo dopo la ricezione del singolo fotone. In realtà esso non è esente dal rumore, uno dei suoi svantaggi tra quelli sotto elencati.

Vantaggi e svantaggi dei SiPM

Rispetto ai tradizionali fotomoltiplicatori, i SiPM presentano numerosi vantaggi, quali, ad esempio, la bassa tensione di funzionamento; la tensione di alimentazione dipende dalla tecnologia usata per i dinodi e varia in un intervallo tipico da 20 V a 100 V: si tratta di livelli di tensione che sono da 15 a 75 volte più bassi di quelli richiesti per un tradizionale fotomoltiplicatore a tubo vuoto.

Tali dispositivi sono, inoltre, insensibili al campo magnetico, essendo stati esposti a campi magnetici fino a 4 T, senza nessun degrado di prestazioni. Al tempo stesso un loro limite è il danno da radiazioni; un significativo peggioramento delle prestazioni è stato osservato anche solo dopo un irraggiamento di protoni.

Il loro principale limite applicativo è il rumore statistico, soprattutto termico, presente anche in condizioni di non illuminazione del SiPM, il quale è grossomodo proporzionale alla superficie attiva. Infatti la sensibilità del dispositivo è sicuramente

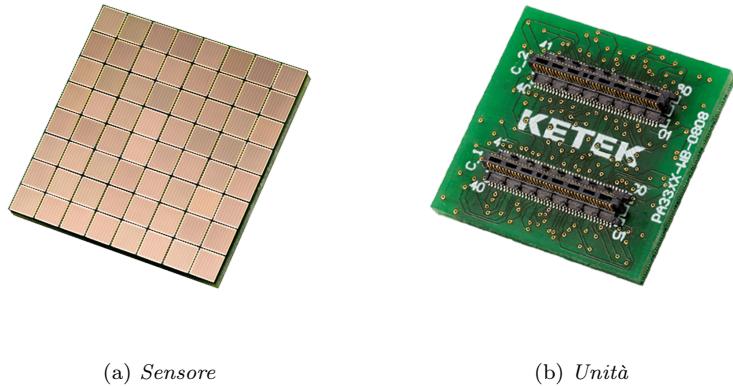


Figura 35: Matrice del SiPM

un pregio per la ricezione dei singoli fotoni, ma al tempo stesso un pericolo, perché tutto ciò che è un minimo rumore viene percepito come singolo fotone. Oltre al rumore termico vi sono altri effetti che influenzano il segnale che possono verificarsi anche in presenza di luce: parleremo di tutti questi nel prossimo paragrafo.

Il rumore è proporzionale alla temperatura a cui si trova il sensore e al voltaggio con cui esso lavora. L'ideale per non favorire l'incremento di effetti rumorosi sarebbe quello di mantenere il sensore a basse temperature e di lavorare con voltaggi bassi, di poco superiori al minimo necessario per percepire il segnale.

I SiPM diventano eccessivamente rumorosi oltre i 30°C e lavorando con voltaggi che superano di 20, 30 V il minimo. Infatti in questi casi il rumore è amplificato al punto da rendere inutilizzabile il segnale. Questo porta a due principali conseguenze:

1. Vi è un chiaro limite nella realizzazione di SiPM di grande superficie attiva. Un certo miglioramento si ottiene utilizzandoli a bassa temperatura, ma è necessario trovare un compromesso tra i vari contributi del rumore. Inoltre misure prese a temperature diverse potrebbero portare a risultati diversi, essendo influenzate molto da ogni variazione di temperatura.
2. I fenomeni che portano al rumore possono alterare anche significativamente il segnale complessivo, soprattutto se l'utilizzo del dispositivo è mirato alla rivelazione di singoli o pochi fotoni. Quindi la determinazione dell'entità di questi fenomeni è di fondamentale importanza nel protocollo di caratterizzazione di questi sensori e l'intensità del rumore determina l'efficienza di rivelazione.

Come si caratterizza un SiPM

La caratterizzazione del dispositivo si basa, quindi, in primo luogo, sull'analisi di fenomeni che si verificano sia spontaneamente, in assenza di sorgente luminosa, sia durante una qualsiasi valanga. Li elenchiamo e commentiamo qui di seguito:

- Dark Count e Dark Count Rate (DC e DCR).

Il maggior contributo di rumore è dovuto alla produzione di un elettrone non in seguito alla rivelazione di un fotone da un fotodiodo, come da sorgente luminosa

esterna, ma per effetto termoelettrico; una carica viene generata a causa di effetti di natura statistica, produce una valanga colpendo la sequenza di dinodi e il sensore rivela apparentemente un fotone. Si tratta di un falso segnale, un *Dark Pulse*, non distinguibile, però, dalla ricezione vera di un fotone. Questo processo viene chiamato effetto di *Dark Count* e viene caratterizzato, tramite delle misure, dal *Dark Count Rate* cioè il numero di fotoni rivelati dal sensore per unità di tempo, in assenza di luce. Questo effetto è quello più sensibile alla temperatura del sensore, essendo un effetto termico casuale.

- After Pulse (AP).

Durante la valanga in qualunque fotodiodo può succedere che un portatore di carica rimanga intrappolato in un'impurità della matrice silicea; questo può essere rilasciato successivamente, in assenza di segnale, e, generando una valanga, può andare ad alterare il segnale in quell'istante producendo una corrente rivelata, pur in assenza di un fotone. Questo può succedere per qualunque tipo di valanga prodotta, nei peggiori casi anche nel caso di DC, causando un'amplificazione stessa del rumore.

- Optical Crosstalk (CT).

Un altro effetto che può verificarsi durante una valanga è la produzione di nuovi fotoni da parte di questa stessa, a causa di diversi fenomeni. Questi possono produrre a loro volta una nuova valanga, essendo rivelati da un fotodiodo adiacente e come risultato finale il sensore conterà due fotoni anziché uno. Questo effetto prende il nome di *Optical Crosstalk* e può essere caratterizzato calcolando la probabilità che avvenga. (P_{CT})

In secondo luogo, oltre alla caratterizzazione del rumore, si vuole impostare il sensore in modo che lavori nel migliore dei modi, quando illuminato; è possibile studiare l'andamento di varie grandezze tipiche degli spettri luminosi e stabilire il valore ottimale di alcuni parametri che determinano il funzionamento del sensore. Sarà poi quello che faremo, tramite delle misure. Per ora ci limitiamo ad elencarli:

- Breakdown Voltage (BV)

Valore di tensione minima al di sotto del quale il sensore non distingue un numero diverso di fotoni: ad esempio non viene percepita alcuna differenza tra segnali di uno o due fotoni. Il regime di alimentazione ideale è superiore di pochi Volt al BV.

- Parametro ottimale di funzionamento per l'analisi: voltaggio d'integrazione. (*bias voltage*)

Come abbiamo già illustrato, affinché il rumore non renda inutilizzabile il segnale l'ideale è che il SiPM lavori ad un voltaggio di poco superiore al BV; questo può essere stabilito soltanto eseguendo delle misure e valutando il valore ottimale per il compromesso segnale-rumore.

- Parametro ottimale di funzionamento per l'analisi: gate d'integrazione.

Il gate d'integrazione è la finestra temporale impostata nella quale si desidera far immagazzinare il segnale elettrico al SiPM. Questo deve essere scelto in maniera ottimale perché se è troppo breve si rischia di perdere parte del segnale; esiste un *gate* per cui il segnale si stabilizza e aumentandolo da lì in poi vi è solo un aumento di rumore.



Figura 36: Il dispositivo nero è il LED, quello rosso in basso è il desktop digitizer e quello sopra è la PSAU con due canali per due diversi SiPM, le strutture circolari.

3.2 Strumentazione

Elichiamo gli strumenti presenti e utilizzati nel nostro laboratorio. In figura 36 il kit di setup strumentale completo della CAEN.

SiPM *SiPM* prodotto dalla Hamamatsu Photonics SpA, avente area fotosensibile complessiva di (1.3 mm x 1.3 mm) per un totale di 667 fotodiodi. I dati del SiPM vengono elaborati nel seguente modo, il segnale elettrico generato dalle valanghe in uscita al circuito viene misurato e registrato come differenza potenziale da altri componenti del setup, come diremo.

PSAU *Power Supply & Amplification Unit SP5600*, dispositivo che fornisce il *bias voltage* al SiPM e che amplifica il segnale in uscita.

Emettitore di segnale luminoso *LED Driver SP5601*, sorgente di luce LED con lunghezza d'onda di 405 nm cioè di frequenza nella zona del violetto. Questo è collegato al SiPM con cavi in fibra ottica ed è in grado di emettere un singolo fotone dopo l'altro.

Oscilloscopio Strumento di misura elettronico che consente di visualizzare, su un grafico bidimensionale, l'andamento nel tempo dei segnali elettrici cioè di avere una visione diretta della differenza di potenziale nel cavo collegato. In questo modo si ha una forma d'onda del potenziale delle valanghe misurato in uscita dal SiPM. Si tratta di un segnale analogico.

Digitizer e Computer *Desktop Digitizer DT5720A*, convertitore dei segnali elettrici in forma digitale analizzabili dal computer. Il programma di analisi utilizzato si chiama KCS, acronimo di *Kit Control Software*. Tramite questo strumento abbiamo una seconda forma d'onda della differenza di potenziale.

Il KCS si occupa di convertire la forma d'onda ricevuta dal SiPM in un istogramma; come prima cosa sottrae il rumore, in modo da fissare lo zero sull'asse delle ordinate sulla base di conteggi di fotoni aventi valori di voltaggio che non superano una certa soglia. Quindi integra la forma d'onda secondo estremi fissati dall'utente; l'istogramma di frequenze degli integrali, mostrato a schermo, è proporzionale alla carica sviluppata dal rivelatore. Per come è costruito, questo istogramma è una somma di più Gaussiane, ciascuna delle quali è il risultato del conteggio della rivelazione di 0, 1, 2, ... fotoni per un certo *gate* e un certo *bias*.

3.3 Obiettivi dell'esperienza

Dopo aver capito come funziona un SiPM vogliamo prima caratterizzare il sensore del nostro laboratorio e successivamente studiare il tipo di statistica che lo contraddistingue. L'esperienza si divide, quindi, in due parti.

Ci occuperemo della caratterizzazione del sensore con la determinazione dei parametri e delle grandezze descritti nel paragrafo della caratterizzazione del SiPM, effettuando le misure necessarie; per alcuni serve tenere il sensore al buio, per altri illuminarlo. Non ci siamo occupati di valutare gli AP, procedura che avrebbe richiesto tecniche più avanzate.

Segue a queste operazioni l'analisi statistica dei dati ottenuti. In particolare, siamo in grado di costruire una statistica sul fenomeno di Dark Count; verificheremo che l'emissione per effetto termoelettrico di elettroni segue un andamento Poissoniano e utilizzeremo ciò per ricalcolare il DCR.

La seconda analisi riguarda il dispositivo LED, sorgente di luce. Dopo aver valutato il rumore e dopo aver stabilito i parametri ottimali per i quali il SiPM può lavorare, verificheremo che l'emissione spontanea di luce, tipica dei LED monocromatici, segue una statistica Poissoniana.

Procediamo nel descrivere i passaggi seguiti e i dati acquisiti. Rimarchiamo l'importanza della temperatura nell'utilizzo del SiPM. In ogni sezione indicheremo la temperatura del sensore nelle misure eseguite.

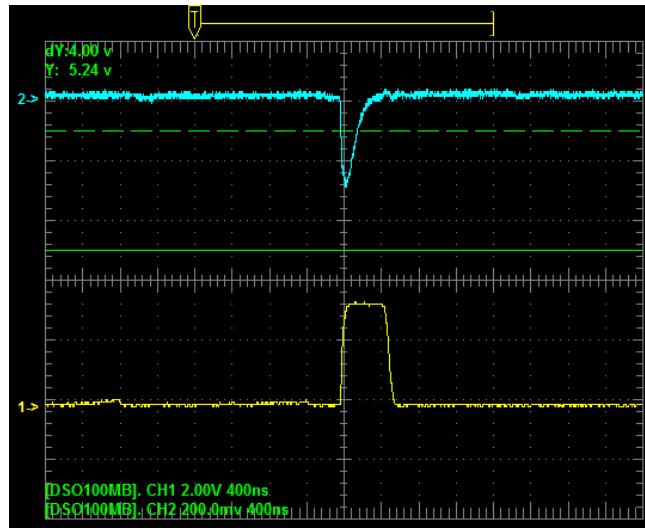


Figura 37: In azzurro il singolo segnale della rivelazione di un fotone da parte dell’oscilloscopio, nell’intervallo temporale prescelto. Con il sensore al buio questi picchi sono dovuti esclusivamente al DC e al CT.

3.4 Sensore al buio

Per caratterizzare il rumore e in particolare stimare il numero di *Dark Count* e *Crosstalk* abbiamo lavorato in assenza di luce in modo che gli impulsi registrati dai fotodiodi fossero necessariamente dovuti a un’emissione casuale.

Tra tutti i metodi possibili noi ne abbiamo utilizzati due, verificando successivamente che i risultanti ottenuti fossero gli stessi; il primo è un conteggio manuale all’oscilloscopio, il secondo utilizza i dati forniti dal digitizer.

Analisi all’Oscilloscopio: DCR e P_{CT}

Temperatura SiPM: 28.1°C

Come prima cosa abbiamo caratterizzato i fenomeni descritti con l’oscilloscopio: osserviamo una serie di segnali come quelli illustrati in figura 37. Impostiamo il *bias voltage* a 56 V e la finestra temporale a $\tau = 100 \mu\text{s}$ in modo da avere 6-7 impulsi per ogni finestra temporale.

Per ogni finestra temporale si notano dei segnali di altezze differenti che indicano un voltaggio in uscita dal SiPM di valori differenti, in mV. In particolare sono presenti alcuni picchi di altezza simile tra loro, corrispondenti alla rivelazione di un singolo fotone da parte di un fotodiodo e picchi di altezza circa doppia, corrispondenti alla rivelazione di due fotoni nell’intervallo di tempo τ (i picchi sono di altezza simile, ma non identico a causa del rumore elettronico). Per come è costruito il SiPM se un fotodiodo rivela un fotone si ha un picco di voltaggio V_0 in uscita, amplificato dalla PSAU; se, invece, le celle accese in un istante sono n allora il segnale finale avrà un valore di $n V_0$. La differenza tra i due valori di voltaggio è detta *delta peak to peak* e valutata manualmente è di circa 40 mV

Come avevamo anticipato, i valori di voltaggio dovrebbero risultare quantizzati e seguire questo ragionamento in quanto il numero di fotoni è discreto; tuttavia a causa

Tabella 10: Frequenza di Dark Count e probabilità di Crosstalk

DCR (1/s)	$9.34 \cdot 10^4 \pm 2.8 \cdot 10^4$
P _{CT} (%)	2.82 ± 0.05

del rumore elettronico alcuni picchi risultano poco più bassi di quelli identificabili come un fotone; questi sono da considerarsi come fluttuazioni elettroniche e non segnale.

Abbiamo impostato due cursori orizzontali sull'oscilloscopio, a mano, il primo alla soglia di un fotone (V_0) e il secondo a circa il doppio del voltaggio, ad indicazione di due fotoni.

Abbiamo contato il numero di tutti picchi che superavano solo la prima soglia, valore di Dark Count e separatamente quelli che superavano anche la seconda, ovvero i Crosstalk; raramente si arrivava ad un numero maggiore di fotoni, ma questi sono stati conteggiati comunque come CT. Questo è stato eseguito per $N = 200$ intervalli temporali.

Analisi Dati Abbiamo due colonne da N elementi con il conteggio dei DC e dei CT; le chiameremo N_{DC} e N_{CT} . Mediando su ciascuna delle due otteniamo le rispettive medie sulle N misure: $\langle N_{DC} \rangle$ e $\langle N_{CT} \rangle$ e gli errori su di esse, come standard deviazioni divise per la radice del numero di eventi: σ_{DC} e σ_{CT} .

Per definizione, il Dark Count Rate è

$$DCR = \frac{\langle N_{DC} \rangle}{\tau} \quad (7)$$

τ : finestra temporale.

mentre la probabilità di Crosstalk può essere calcolata come

$$P_{CT} = \frac{\langle N_{CT} \rangle}{\langle N_{DC} \rangle} \quad (8)$$

I rispettivi errori, per la propagazione degli errori sui singoli, sono:

$$\sigma_{DCR} = \frac{\sigma_{DC}}{\tau} \quad (9)$$

e

$$\sigma_{P_{CT}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{CT}}{\langle N_{DC} \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\langle N_{CT} \rangle}{\langle N_{DC} \rangle^2} \cdot \sigma_{DC} \right)^2} \quad (10)$$

Mostriamo i risultati in tabella 10.

Tabella 11: Frequenza di Dark Count e probabilità di Crosstalk

Bias	56 V	58 V
DCR (1/s)	$1.14 \cdot 10^5 \pm 4.69 \cdot 10^4$	$1.81 \cdot 10^5 \pm 2.91 \cdot 10^4$
P _{CT} (%)	4.17 ± 0.03	14.8 ± 0.2

Analisi con il Digitizer: Staircase, DCR e P_{CT}

Temperatura SiPM: 27.7°C

Viene collegato il digitizer e si sfruttano le potenzialità del KCS sul computer per automatizzare la misura presa con l'oscilloscopio. Con questo programma è possibile variare la soglia di potenziale (mV), prima fissata manualmente, di un intervallo scelto, in base alle necessità. Il dispositivo registra tutti gli impulsi in uscita dal SiPM in un intervallo di tempo τ e conta quelli che superano la soglia prefissata. Ripete 20 volte quest'operazione e riporta la media dei conteggi in funzione del valore del potenziale di soglia. Facendo variare la soglia ci aspettiamo un grafico a scala decrescente, da ciò *staircase*, in cui idealmente dovrebbero esserci dei plateau orizzontali e si dovrebbe passare da uno all'altro in maniera istantanea negli istanti in cui la soglia in mV supera il valore del segnale di rivelazione di n fotoni, iniziando a registrare solo quelli che superano il gradino ($n + 1$)-esimo; ma a causa del rumore elettronico, il passaggio da un plateau all'altro non è immediato.

Il primo plateau rappresenta i Dark Count, il secondo i Crosstalk con due fotoni mentre tutti gli altri plateau rappresentano sempre Crosstalk ma con più fotoni. La scala è decrescente perché tutti i gradini successivi sono conteggi inglobati nel precedente, ovvero, i Crosstalk sono anche Dark Count: superano la prima soglia e perciò vengono conteggiati anch'essi nel primo plateau. Quindi aumentando la soglia i conteggi saranno, ovviamente, sempre meno dei precedenti.

Abbiamo ripetuto la procedura per due diversi voltaggi: 56 V e 58 V. L'intervallo di tempo fissato è $\Delta t = 20$ ms, mentre la soglia varia da 5 a 180 mV con un passo di 5 mV, per un totale di 35 step; i valori sono stati scelti in base alla lettura precedente del *delta peak to peak* dall'oscilloscopio.

Analisi Dati Abbiamo individuato N_{DC} e N_{CT} a partire dalle staircase ottenute, figura 38; quindi abbiamo mediato sui dati di ogni gradino e calcolato le standard deviazioni. Ricalcoliamo, quindi, il Dark Count Rate e la probabilità di Crosstalk per i due bias tramite la (7) e la (8), con $\tau = 35\Delta t$. Allo stesso modo, con la (9) e la (10) calcoliamo gli errori.

I risultati ottenuti sono riportati in tabella 11. La frequenza di DC e la probabilità di CT a bias 56 V sono in accordo con i valori trovati con l'oscilloscopio.

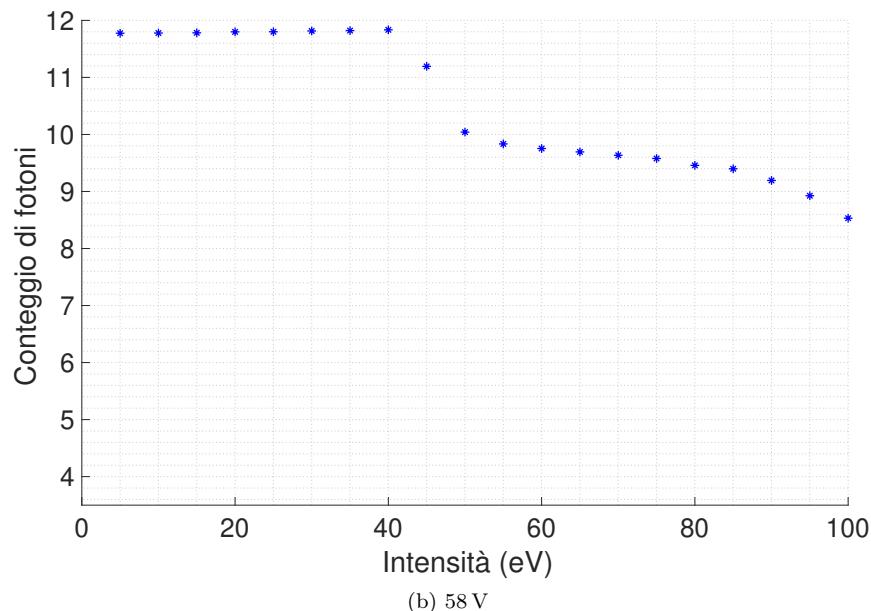
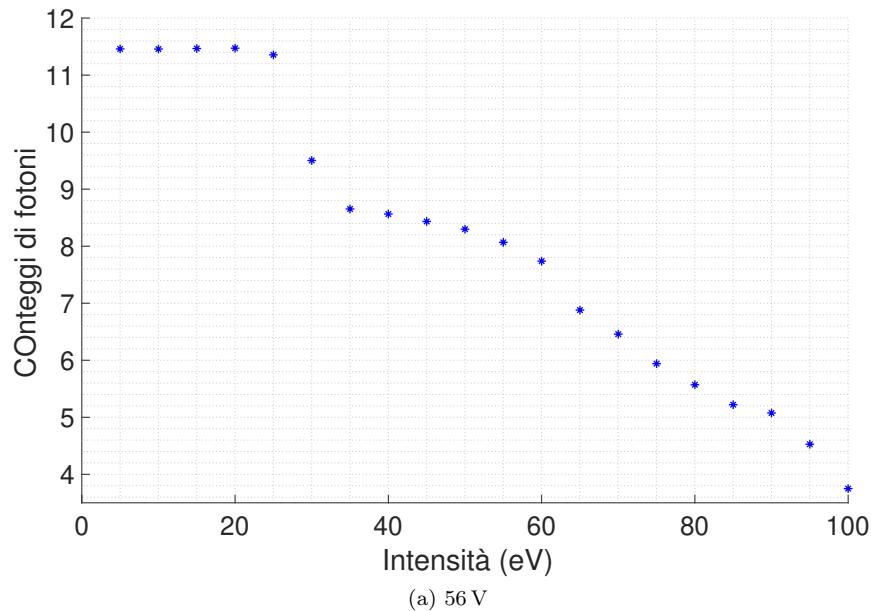


Figura 38: Staircase. In ordinata, per conteggio di fotoni, si intende il numero di volte in cui sono stati registrati segnali che avevano una certa intensità, proporzionale alla differenza di potenziale, dal cui valore si può risalire al numero di fotoni corrispondente.

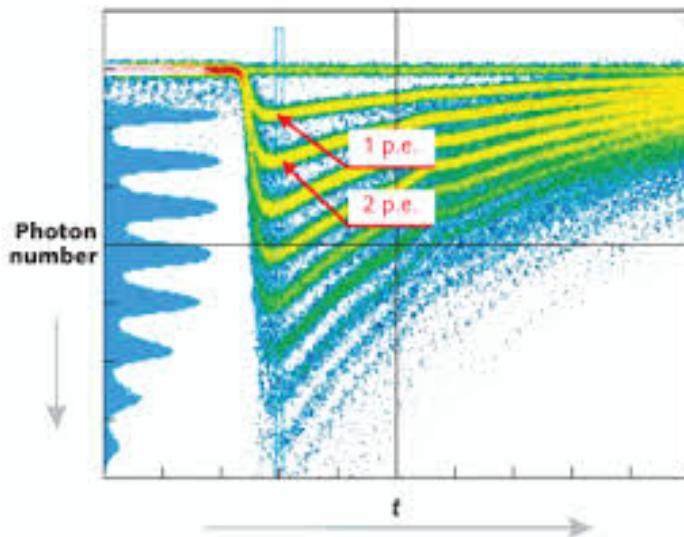


Figura 39: Sulla sinistra forma del segnale sul computer; sulla destra picchi sull’oscilloscopio. In ordinata abbiamo il numero di fotoni misurato come intensità del segnale dal KCS o, proporzionalmente, come differenza di potenziale dall’oscilloscopio. Allo scorrere del tempo aumenta il conteggio di ciascun numero di fotoni.

3.5 Sensore alla luce

Per determinare i valori ottimali di bias e gate e il BV è necessario illuminare il sensore e avere una statistica maggiore di fotoni. Come prima effettuiamo le misure prima solo con l’oscilloscopio e poi con il digitizer. In figura 39 è riportata un’immagine illustrativa dei dati mostrati su entrambi i dispositivi.

Analisi all’Oscilloscopio: BV

Temperatura SiPM: 28.1°C

Abbiamo calcolato il *breakdown voltage*, ovvero il più piccolo valore di bias che permette al SiPM di funzionare. L’oscilloscopio ha rilevato i voltaggi dei vari picchi corrispondenti al numero di fotoni rivelati in quell’istante dal sensore, fino ad un massimo di 6. Siamo riusciti a valutare manualmente la distanza fra il primo e il secondo picco.

Tenendo fissa la finestra temporale abbiamo fatto variare il *bias voltage* da 53 a 59 V con un passo di 0.5 V e per ogni *bias* abbiamo valutato 3 volte il *delta peak to peak* in modo da mediare sui 3 dati della stessa misura e avere un errore.

Al diminuire del *bias* tale distanza diminuisce in modo lineare. Mostrando nella figura 40 l’andamento del *bias* in funzione del *delta peak to peak* abbiamo trovato il BV; questo valore è quello che, per definizione, rende nulla la distanza tra il primo e il secondo picco, ovvero il valore di voltaggio per cui non vi è rivelazione del fotone perché non vi è distinzione tra 0 fotoni e 1 fotone: non permette alle cariche all’interno del sensore di muoversi. Il *breakdown voltage*, con il relativo errore, è estratto dal fit.

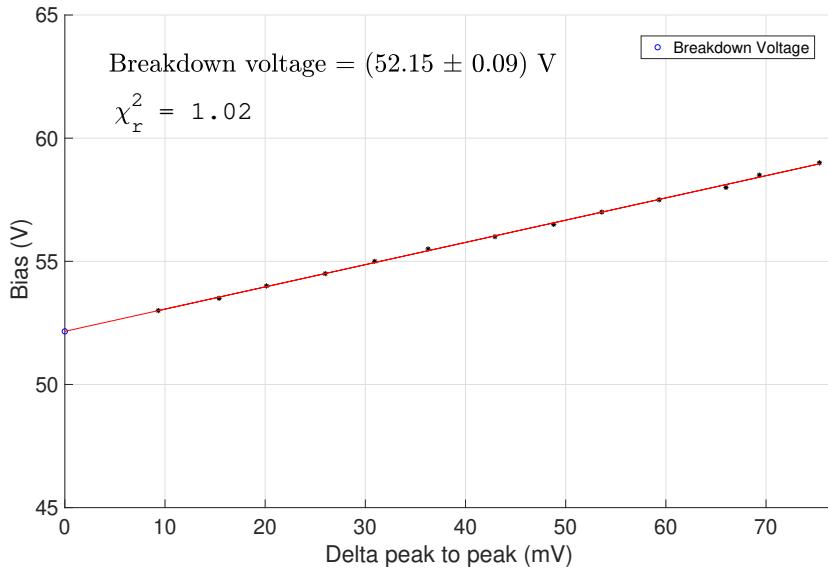


Figura 40: Fit lineare e *breakdown voltage*

Funzione del fit:

$$y = mx + q \quad (11)$$

Con $m \in [0.089, 0.092]$ e $q \in [52.07, 52.24] \equiv \text{BV}$, al 95 % di confidenza.

Usiamo il test del *Chi Quadro* per verificare la compatibilità tra le curve.

Analisi con il Digitizer: parametri ottimali

Analizziamo gli istogrammi forniti dal KCS, come descritto negli strumenti utilizzati; in assenza di luce saranno apprezzabili solo due Gaussiane, corrispondenti alla rivelazione di 0 o 1 fotone; se il sensore è esposto al LED anche i successivi picchi saranno apprezzabili come mostrato nella figura 41.

In questa figura in ordinata abbiamo il conteggio di fotoni, mentre in ascissa l'intensità, in eV del segnale; ad esempio, il picco della prima Gaussiana sarà in $x = 0$ (approssimativamente) e avrà altezza corrispondente al numero di conteggi di eventi in cui non si è rivelato alcun fotone.

Presentiamo un parametro che ci sarà utile nello stabilire i parametri ottimali.

Parametro di Risoluzione (R, adimensionale)

La risoluzione del sensore indica la capacità di "separare" le Gaussiane mantenendone minime le deviazioni standard. Il potere risolutivo sarà, quindi, massimo nelle condizioni ottimali in cui lavora il sensore: in tal caso, infatti, si ha massimizzazione del segnale per il minimo possibile del rumore.

Può essere studiato in funzione dei parametri: *gate* o *bias*. Nel primo caso si ha:

$$R = \frac{\Delta pp}{\sigma_0} \quad (12)$$

σ_0 = larghezza della prima Gaussiana

mentre nel secondo

$$R = \frac{\Delta pp}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}} \quad (13)$$

σ_1 = larghezza della seconda Gaussiana;

in quanto al crescere del *bias* possono aumentare in larghezza anche le Gaussiane successive e non solo quella con picco in 0. Il parametro di risoluzione è un valore utile all'ottimizzazione dei parametri sopra citati.

Scanning in Bias: BV, R e best bias Temperatura SiPM: 26.8°C

Stabiliamo il valore ottimale di *bias voltage*, tenendo fisso il *gate d'integrazione* a 304 ns. Infatti, se il *bias* è troppo alto vi è un eccessivo aumento del rumore.

Abbiamo variato il valore di voltaggio da 53 V a 59 V con un passo di 0.5 V; per ogni *bias* abbiamo salvato l'istogramma fornito dal computer collegato al sensore. Come prima cosa abbiamo trovato per ognuno il *delta peak to peak* tra le prime due Gaussiane dell'istogramma.

La distanza tra i picchi in ascisse ci sarà fornita dal computer in eV, in valori proporzionali ai mV che misuravamo all'oscilloscopio, in ordinate. Si tratta di due modi diversi di convertire lo stesso segnale da parte di due strumenti diversi e questo confronto si nota bene nella precedente figura 39.

Abbiamo, quindi, fissato le curve dell'istogramma che ci interessavano e abbiamo estratto dal fit le posizioni dei picchi delle due Gaussiane con relativo errore, calcolato a partire dagli estremi dell'intervallo di incertezza al 68% di confidenza. In questo modo la differenza tra le due ascisse è la distanza cercata, avente errore ottenuto dalla propagazione dei singoli errori sui picchi:

$$\Delta pp = |a_2 - a_1| \quad (14)$$

Δpp = distanza peak to peak;

a_i = altezza del picco i -esimo.

con errore:

$$\sigma_{\Delta pp} = \sqrt{\sigma_{a_2}^2 + \sigma_{a_1}^2} \quad (15)$$

$\sigma_{\Delta pp}$ = errore sul *delta peak to peak*;

σ_{a_i} = errore sull'altezza del picco i -esimo.

Allo stesso modo abbiamo estratto i valori delle larghezze delle prime due Gaussiane.

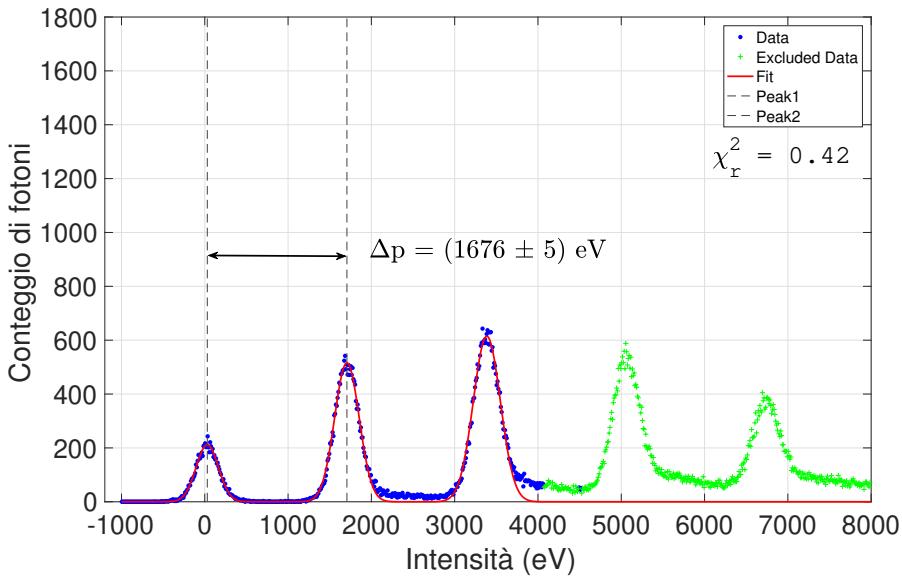


Figura 41: Istogramma del KCS a *bias* 56 V; delta peak to peak.

Riportiamo in figura 41 l'esempio di uno degli istogrammi su cui abbiamo lavorato, con i parametri trovati. Usiamo il test del χ^2 ridotto per verificare la compatibilità della curva teorica con i dati. Questo è un istogramma circa a metà dell'intervallo di variazione del *bias*; per valori bassi succede che le Gaussiane si distinguono sempre meno e le ascisse dei primi due picchi si avvicinano fino quasi a confondersi. Si tratta di valori troppo vicini al voltage minimo e le "valli" del grafico sono riempite da rumore elettronico, come After Pulse. Per alti bias, invece, i picchi sono sempre più bassi e le Gaussiane distanti (figura 42).

Innanzitutto, facendo variare gradualmente il valore di bias abbiamo potuto analizzare l'andamento del *delta peak to peak*. In figura 43 il grafico mostra quanto detto prima dagli istogrammi: per bias alti la distanza tra le Gaussiane aumenta. Possiamo eseguire un fit lineare, come fatto precedentemente, e verificare la compatibilità tra dati sperimentali e teorici. Evidenziamo il fatto che per ogni valore di bias abbiamo analizzato un solo istogramma e non disponiamo, quindi, di un errore sul valore di distanza, come invece avevamo dall'analisi all'oscilloscopio.

Infatti, tale grafico può essere confrontato con la figura 40; l'andamento riportato è lo stesso, il precedente con il solo oscilloscopio, il secondo anche con l'utilizzo del computer (quindi i valori sulle ascisse sono differenti). Ciò che può essere messo a confronto è il valore di ordinata per cui la retta interseca l'asse $x = 0$; questo valore rappresenta il *breakdown voltage* e viene estratto dal fit. I due valori, ottenuti con due metodi diversi, sono compatibili tra loro.

Lo scopo era, poi, per ogni valore di *bias*, quello di calcolare il parametro di risoluzione R , equazione 13.

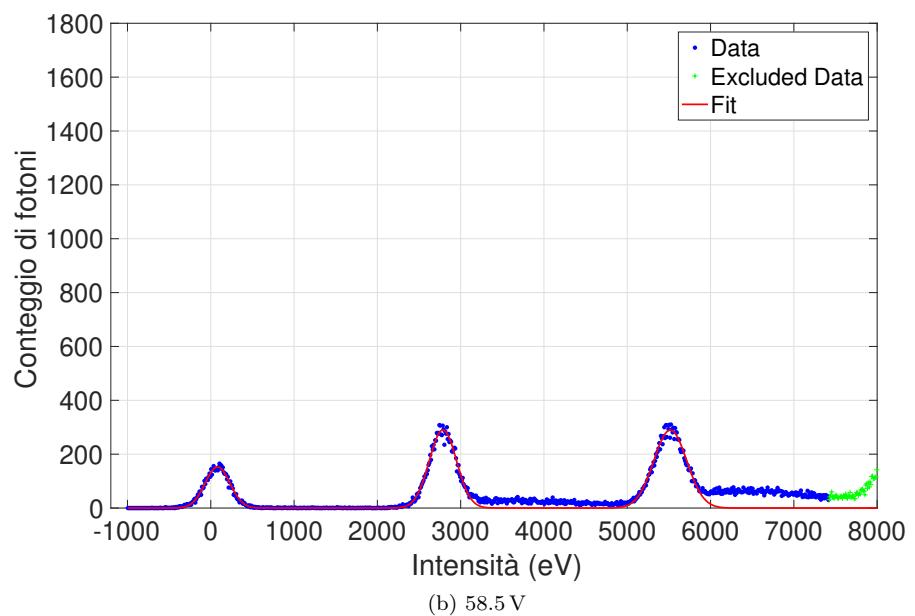
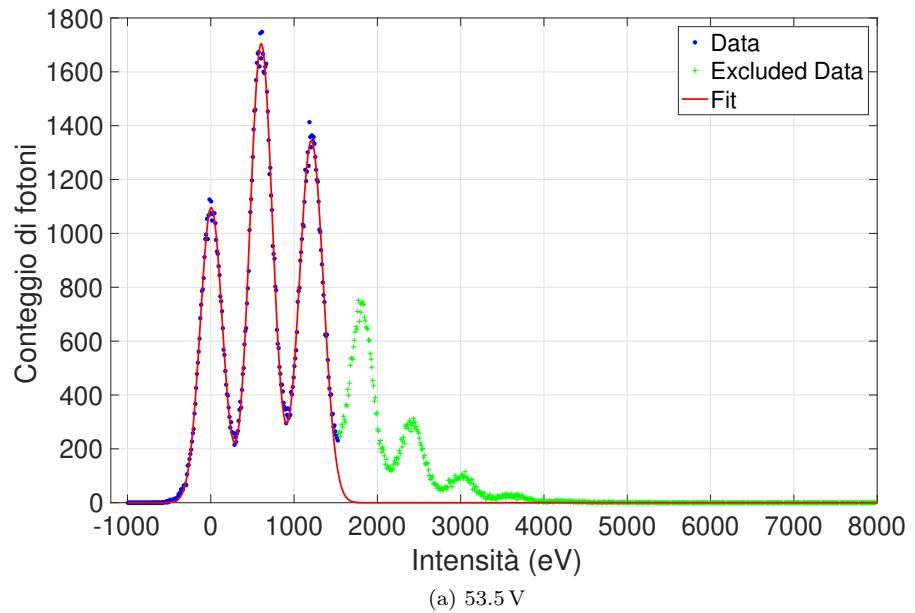


Figura 42: Scanning in Bias: due esempi di istogramma alla luce a *bias* diverso.

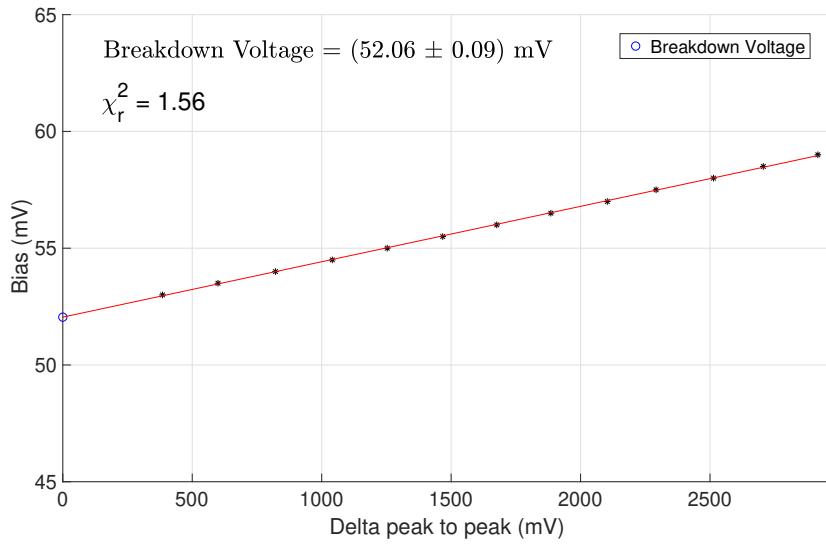


Figura 43: Fit lineare e *breakdown voltage*

Avendo l'errore su tutte le grandezze da cui R dipende possiamo ottenere l'errore su quest'ultimo tramite la propagazione degli errori:

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}} \sigma_{\Delta pp} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{pp} \sigma_1}{(\sigma_0^2 - \sigma_1^2)^{3/2}} \delta_{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{pp} \sigma_0}{(\sigma_0^2 - \sigma_1^2)^{3/2}} \delta_{\sigma_0} \right)^2} \quad (16)$$

$\sigma_{\Delta pp}$ = errore sulla distanza peak to peak;
 δ_{σ_1} = errore sulla larghezza della seconda Gaussiana;
 δ_{σ_0} = errore sulla larghezza della prima Gaussiana;

Il grafico dell'andamento del parametro in funzione del *bias* è mostrato in figura 44.

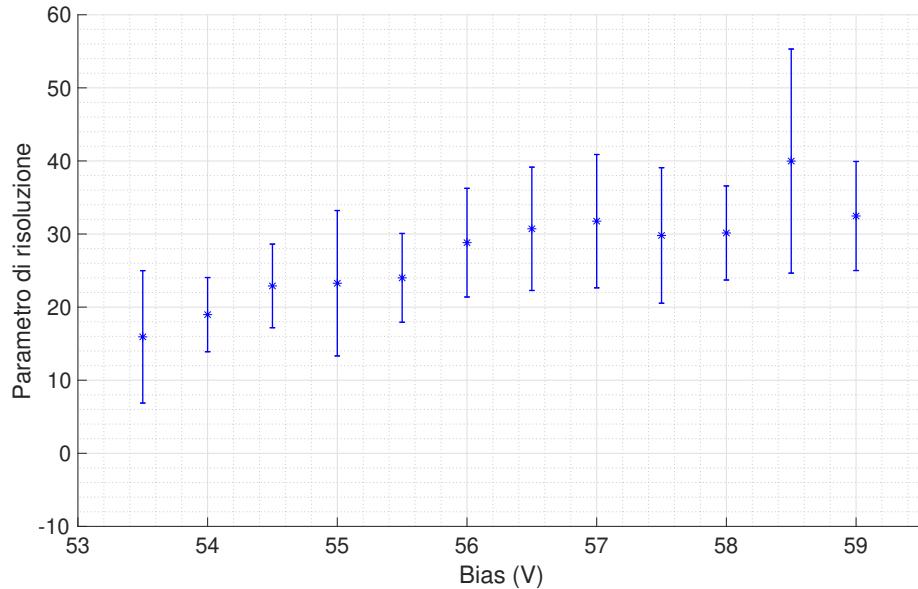


Figura 44: Andamento del parametro di risoluzione.

Teoricamente il valore ottimale è quello per cui si ha un massimo assoluto nella curva, ma, essendo l'intervallo di variazione del *bias* abbastanza ristretto, non si apprezzano evidenti variazioni della risoluzione. Si può, però, notare che il valore non è esattamente costante per valori bassi di voltaggio e si stabilizza aumentandolo, fino quasi a raggiungere un *plateau*. Questo ci ha permesso di valutare il bias ideale per proseguire poi l'analisi con lo scanning in gate: risulta essere il primo valore per cui il parametro di risoluzione si stabilizza. Nel nostro caso 56 V, il cui istogramma era quello in figura 41. Si fa notare che noi scegliamo un valore di *bias* ottimale funzionalmente al fatto che ne abbiamo bisogno per il successivo scanning; in realtà avremmo un range di valori ottimali, non avendo un vero massimo assoluto.

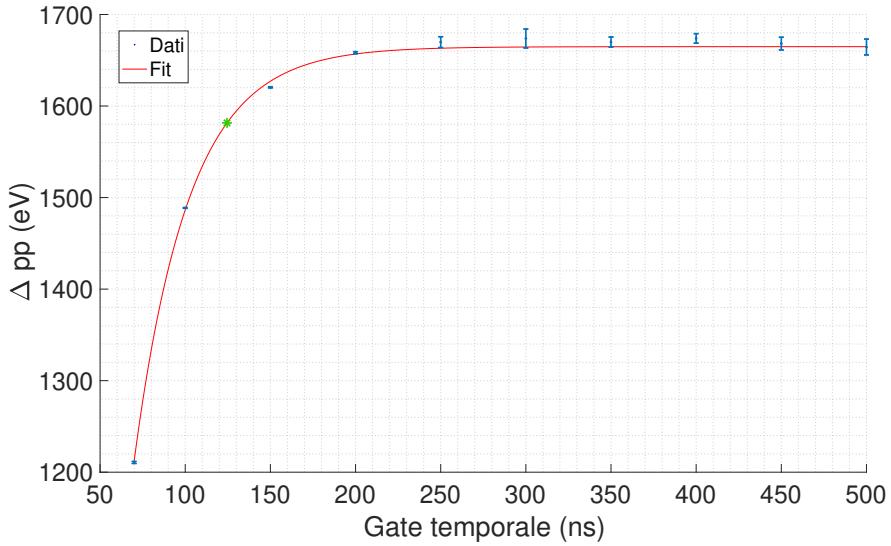


Figura 45: Delta peak to peak in funzione del gate. In verde è rappresentato l'ideale punto del best gate; questo ha una banda d'errore sulle x di (± 6 ns) e sulle y di (± 7 eV).

Scanning in Gate: best gate *Temperatura SiPM: 26.5°C*

Mantenendo un voltaggio di 56 V abbiamo variato il *gate* da 70 ns a 500 ns con un passo di 50 ns.

Come prima, viene eseguito il fit solo delle prime Gaussiane mentre le altre vengono escluse; dai parametri del fit siamo in grado di determinare l'ascissa dei picchi delle Gaussiane per ogni grafico, e quindi calcolarne il Δpp , come prima, dalla (14), con relativo errore (15).

Innanzitutto riportiamo il grafico della variazione del Δpp in funzione del *gate*, figura 45. All'aumentare del *gate* aumenta il segnale, le Gaussiane si ingrandiscono e separano e quindi il Δpp cresce. Questo finché non si ha un *plateau*. Esiste, quindi, un valore di *gate* oltre il quale il segnale comunque non aumenta.

Per capire cosa realmente accade possiamo calcolare la risoluzione, per ogni grafico. Al parametro di risoluzione, equazione 12, si associa l'errore:

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_0} \sigma_{\Delta pp}\right)^2 + \left(\frac{\Delta pp}{\sigma_0^2} \delta_{\sigma_0}\right)^2} \quad (17)$$

con le stesse convenzioni precedenti.

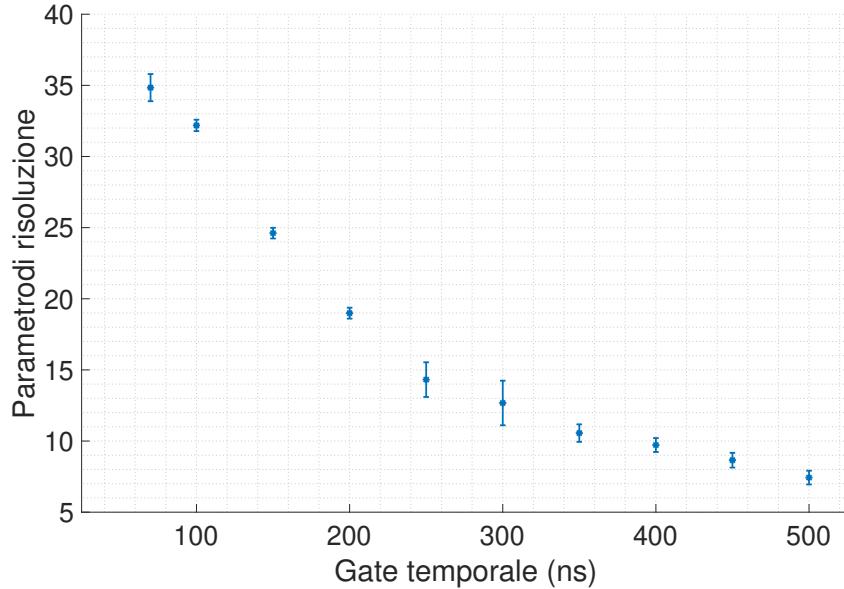


Figura 46: Risoluzione in funzione del gate.

Questo dipende implicitamente dal gate temporale; l'andamento di uno in funzione dell'altro, figura 46, ci aiuta a capire come il Δpp cresca, come detto poco sopra; ma ciò, allo stesso tempo, comporta un aumento del rumore di fondo, cioè aumenta la deviazione standard della prima Gaussiana, tanto che R diminuisce in funzione del *gate*. Infatti, raggiunto il *plateau*, il segnale non aumenta più e si ingrossa solo la prima Gaussiana per il continuo aumento del rumore. Questo permette di capire che non è necessario aumentare il gate all'infinito in quanto, oltre un certo limite, si avrebbe solamente rumore crescente. Il limite è il valore ottimale cercato.

Per individuare il best gate ci basiamo sulla figura 45. Ricordiamo la relazione generale che lega il *delta peak to peak* a $x = \text{gate}$

$$\Delta pp(x) = \int_0^x e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau (1 - e^{-\frac{x}{\tau}}) \quad (18)$$

τ = parametro temporale relativo alla scarica dei fotodiodi di cui il SiPM è composto.

L'algoritmo utilizzato da noi per fittare la curva è leggermente diverso:

$$\Delta pp(x) = A(1 - e^{-\frac{x-B}{C}}) \quad (19)$$

con A , B e C parametri del fit.

Osserviamo semplicemente che $A = \tau$.

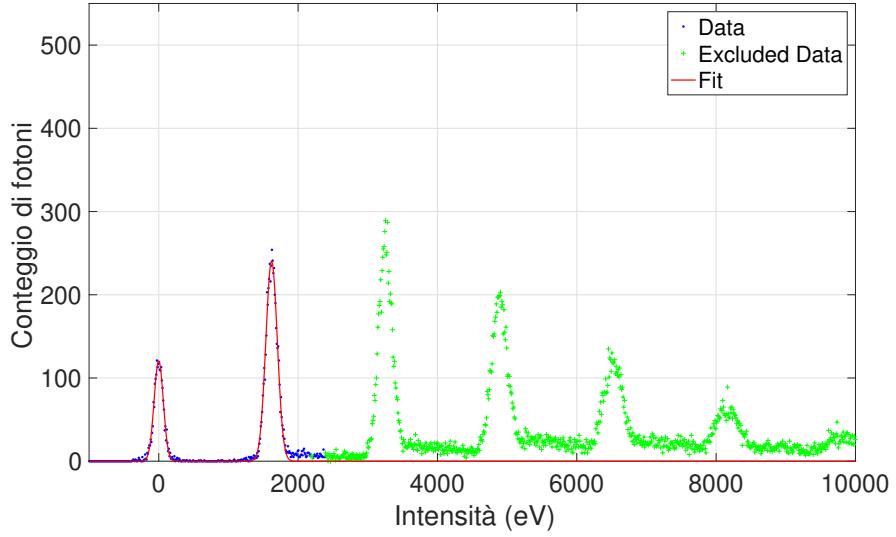


Figura 47: *gate* 150 ns

Il best gate risulta essere quello che permette sia soddisfatta la condizione $\Delta pp = 0.95\tau$. Perciò eseguendo dei semplici calcoli matematici si ottiene che:

$$bestgate = B - C \log 0.05 \quad (20)$$

Possiamo calcolare l'errore, avendo quello dal fit su B e C :

$$\sigma_{bestgate} = \sqrt{\sigma_B^2 + (\log 0.05)^2 \sigma_C^2} \quad (21)$$

Nel nostro caso il best gate risulta essere (125 ± 6) ns.

Lo assumiamo a 150 ns, avendo così variato il *gate*. L'istogramma relativo è in figura 47.

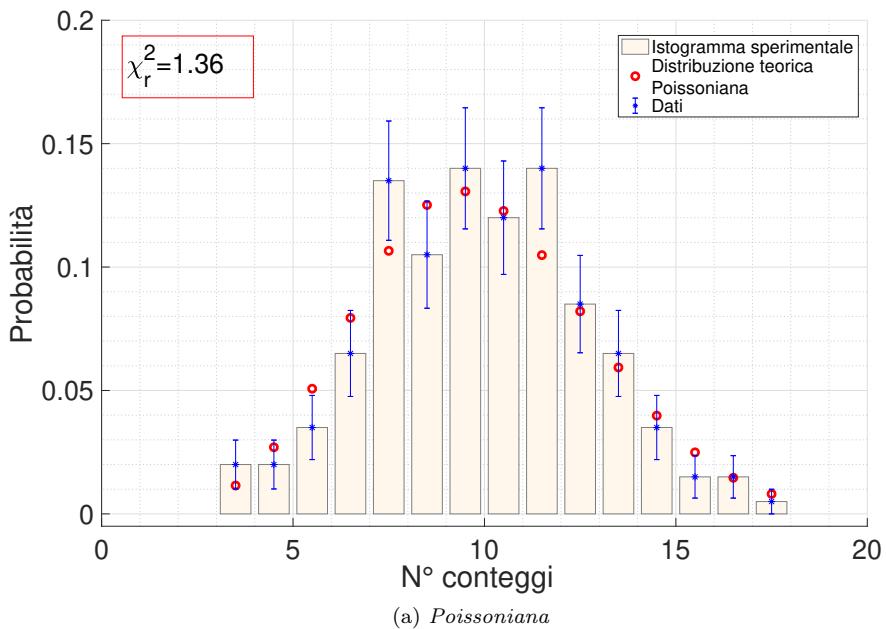
3.6 Statistica sul numero di fotoni

Per fare un'analisi statistica del numero di fotoni rilevati dal SiPM, assumiamo la natura Poissoniana del fenomeno del *Dark Count*, dopo averla verificata ricalcoliamo il DCR; servendoci sia dell'oscilloscopio che del digitizer. Con quest'ultimo abbiamo constatato la natura Poissoniana dell'emissione di fotoni da parte del LED.

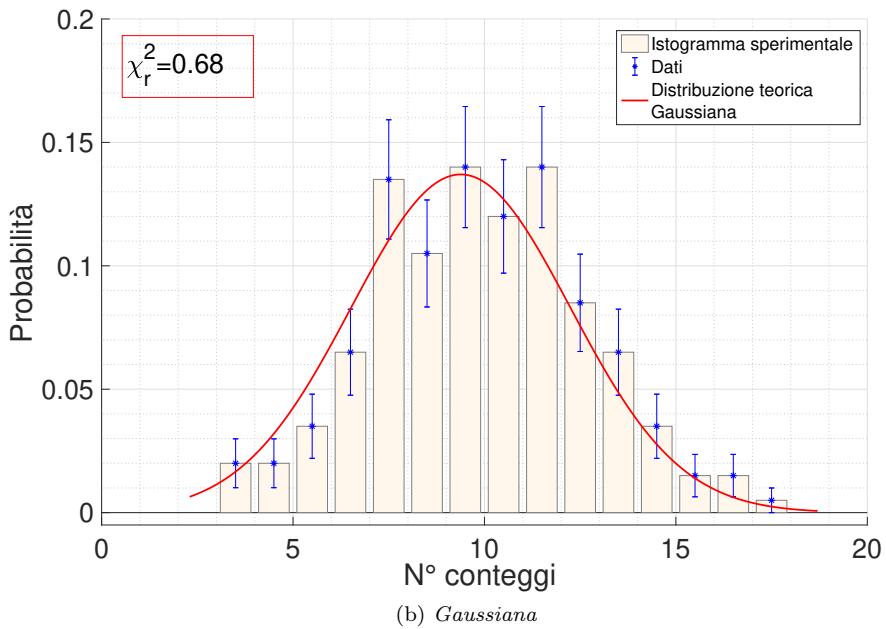
Istogramma al buio: statistica Poissoniana sul numero di Dark Count

Lavoriamo in assenza di luce sul fenomeno del Dark Count.

Oscilloscopio Vogliamo, innanzitutto, confermare la natura Poissoniana del fenomeno del DC: abbiamo costruito un istogramma Poissoniano come predizione teorica, con valore medio ottenuto dalla media del vettore N_{DC} , scegliendo opportunamente l'ampiezza del *bin*. Abbiamo, poi, costruito l'istogramma con le nostre misure, con lo stesso *bin*; verifichiamo, quindi, la compatibilità tra modello e dati sperimentali, figura 48, utilizzando il test del *Chi Quadro ridotto*. Essendo il numero di misure elevato, $N = 200$, la distribuzione tende, per il teorema del limite centrale, a una Gaussiana; abbiamo quindi calcolato il *Chi Quadro ridotto* anche per il fit Gaussiano e i risultati molto simili mostrano la vicinanza della natura Poissoniana alla distribuzione Gaussiana per un alto numero di eventi.



(a) Poissoniana



(b) Gaussiana

Figura 48: Istogramma con i dati sperimentali e la predizione teorica.

Digitizer In questa sezione indagheremo ancora sul fenomeno del Dark Count e sulla natura Poissoniana del numero di fotoni rivelati in assenza di luce. Ci viene fornito l'istogramma dal KCS per un *gate* di 504 ns, per tre valori di bias: 55, 56, 58 V. I dati sono disposti secondo una doppia Gaussiana in cui la prima corrisponde all'assenza di fotoni, mentre la seconda è dovuta al fenomeno di *Dark Count* (figura 49).

Grazie all'ipotesi Poissoniana siamo riusciti a ricavare il DCR; mostriamo in che modo.

Dalla definizione di DCR, sappiamo che μ , media dei conteggi di DC, può essere anche espressa come:

$$\mu = DCR \cdot \tau \quad (22)$$

dove τ è l'intervallo di tempo nel quale si sono presi i dati; nel nostro caso $\tau = 504 \cdot 10^{-9}$ s. Vogliamo calcolare μ , ipotizzando la distribuzione Poissoniana; la probabilità di ottenere n successi con valore medio μ , secondo tale distribuzione, è:

$$P_n(\mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad (23)$$

Per ricavare il valor medio consideriamo il caso $n = 0$, corrispondente alla probabilità di non ottenere fotoni cioè zero successi:

$$P_0(\mu) = e^{-\mu} \quad (24)$$

Da questa si ha:

$$\mu = -\ln(P_0) \quad (25)$$

Calcoliamo P_0 riconducendoci al grafico: si tratta del rapporto fra l'area sottesa alla prima Gaussiana A_0 e l'area totale A_{tot} .

$$P_0 = \frac{A_0}{A_{tot}} \quad (26)$$

Le aree sono calcolabili analiticamente. In generale, la formula per calcolare l'area della superficie sottesa a una Gaussiana è:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{(-\frac{x-b}{c})^2} dx = a c \sqrt{\pi} \quad (27)$$

$G(x)$: curva Gaussiana piccata in 0.

a : altezza del picco.

b : ascissa del picco.

c : deviazione standard della Gaussiana.

Dal fit abbiamo a e c della prima Gaussiana e siamo in grado di calcolare A_0 ; si tratta poi di normalizzare con il numero totale di eventi.

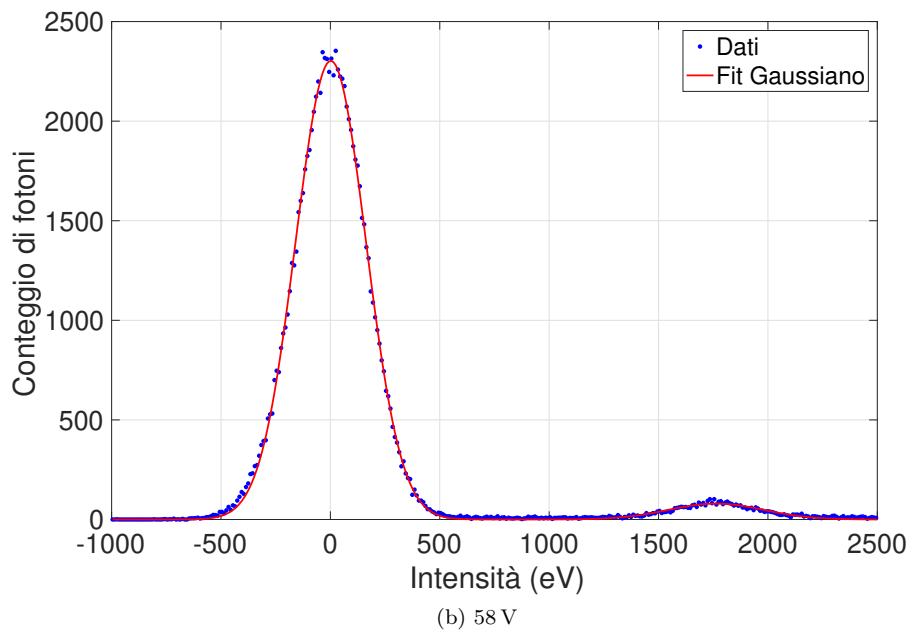
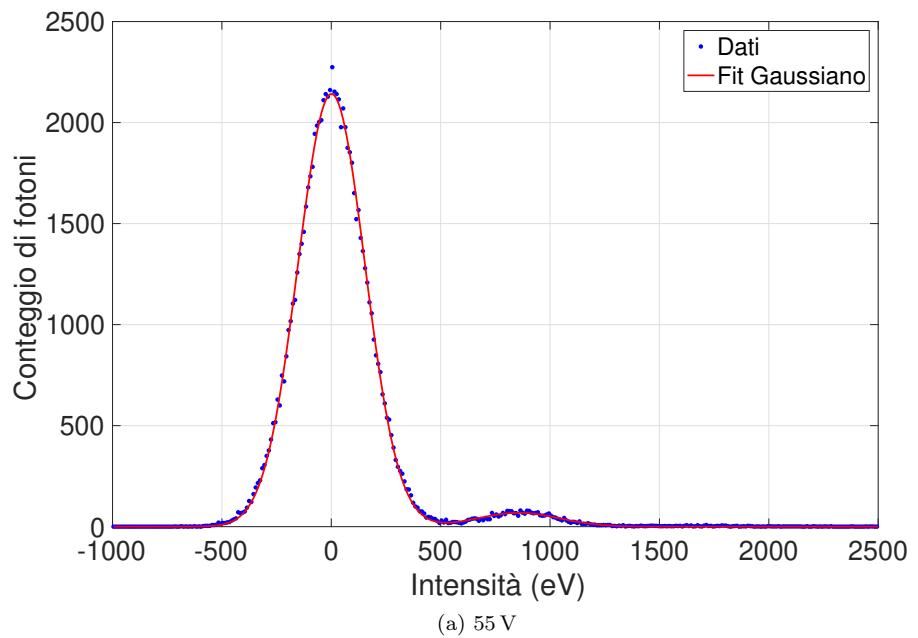


Figura 49: Distribuzione dei segnali: esempi di istogrammi in assenza di luce a bias diversi.

Tabella 12: Frequenza di Dark Count per diversi valori Bias

	Bias 55 V	Bias 56 V	Bias 58 V
DCR (1/s)	$8.97 \cdot 10^4$	$1.10 \cdot 10^5$	$1.54 \cdot 10^5$
σ_{DCR} (1/s)	$2.6 \cdot 10^3$	$2.8 \cdot 10^3$	$3.1 \cdot 10^3$

Dalle due equazioni precedenti, (63) e (??), si ricava dunque l'espressione per il DCR:

$$DCR = -\frac{\ln(P_0)}{\tau} \quad (28)$$

Otteniamo così i valori di DCR per i vari *bias* presi in considerazione; calcoliamo ora l'errore relativo, per propagazione degli errori sulle variabili *a* e *c*:

$$\sigma_{DCR} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}} \quad (29)$$

Com'è possibile vedere dalla tabella 12 i valori del DCR diminuiscono sensibilmente al diminuire del *bias* e per 56 V il risultato può essere confrontato con quelli precedenti, tabelle 10 e 11.

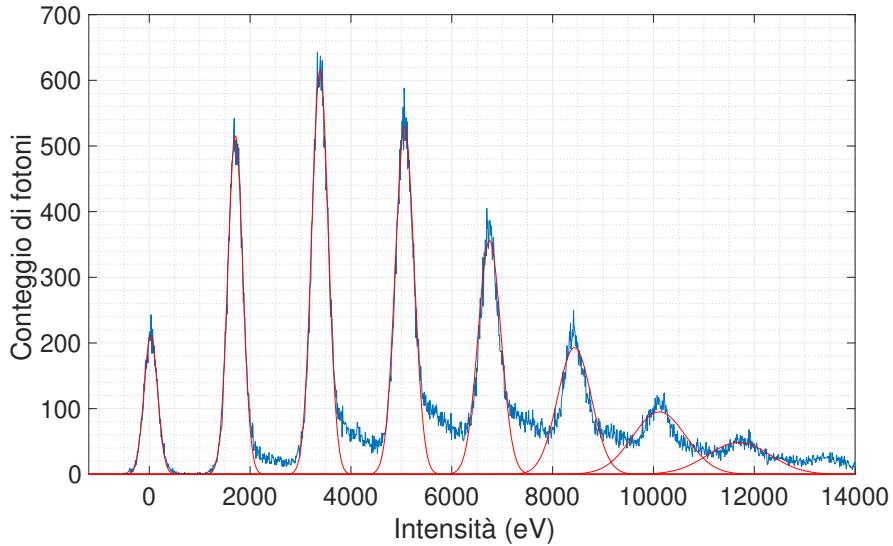


Figura 50: Istogramma del KCS con luce

Iistogramma alla luce: statistica Poissoniana sul numero di fotoni emessi dalla sorgente di luce

Per ogni emissione, il LED manda un numero di fotoni e ci si aspetta che la distribuzione del numero di fotoni sia Poissoniana.

Per verificarlo utilizziamo l'istogramma ottenuto con il *best bias* e il *best gate*

Fittiamo le 8 Gaussiane dell'istogramma e estraiamo per ogni Gaussiana l'altezza del picco (ordinata) con relativo errore al 95% di livello di confidenza. Mostriamo il grafico in figura 50. Vogliamo verificare che l'andamento dei picchi è Poissoniano.

Normalizziamo i conteggi dei fotoni in modo da ottenere la probabilità che sia emesso quel numero di fotoni, con relativo errore; abbiamo riportato in un grafico la probabilità di emissione di x fotoni in funzione di x , curva che rappresenta l'andamento sperimentale. Ad esempio, per $x = 2$ abbiamo il valore di probabilità di emissione di due fotoni, con relativa barra d'errore.

Per confermare l'andamento Poissoniano dei dati sperimentali costruiamo la curva teorica tramite il valore medio μ della distribuzione ottenuta.

Calcoliamo P_0 , probabilità che non siano rivelati fotoni, tramite l'area della Gaussiana piccata in 0, dopo aver normalizzato l'istogramma. Procedimento effettuato in precedenza (equazione ?? e seguenti). Dovendo costruire l'istogramma, per ottenere una probabilità, dividiamo tale area (ricavata dalla equazione 27) per la larghezza del bin utilizzato.

$$P_0 = \frac{A_0}{binsize} \quad (30)$$

Nel nostro caso, binsize=8;

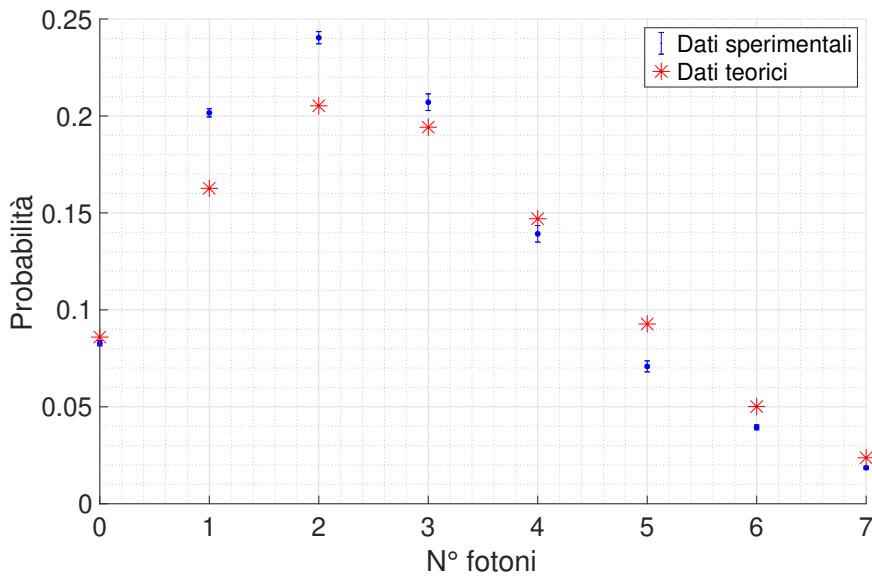


Figura 51: Poissoniana teorica e distribuzione dei dati sperimentali

Possiamo calcolare la media della distribuzione Poissoniana utilizzando la (25).

Costruita la curva teorica Poissoniana (23) possiamo confrontarla con l'andamento dei dati sperimentali, figura (51).

Abbiamo calcolato il *Chi Quadro ridotto* per la Poissoniana, come nel metodo appena presentato, ottenendo $\chi^2_r = 0.19$. E' possibile spiegare il valore basso ottenuto, attribuendo l'errore ad una leggera sovrastima degli errori.

4 Oscillatore armonico

4.1 Apparato strumentale

L'apparato strumentale consiste in un disco metallico oscillante, su cui è presente una freccia, circondato da un ulteriore anello, graduato, avente scala in unità arbitrarie u . La freccia inserita sulla parte oscillante indica sulla scala graduata l'ampiezza raggiunta dall'oscillazione. Questa è nulla quando la freccia indica esattamente $u = 0$, cioè quando il sistema è all'equilibrio.

La parte superiore del disco esterno è inserita in una fotocellula, sensibile al passaggio della freccia, collegata ad un cronometro la cui misura è apprezzabile al millisecondo. Questo è in grado di misurare l'intervallo di tempo che intercorre tra passaggi successivi della freccia. Ciò che caratterizza l'apparato strumentale è poi la presenza di due bobine sulla parte inferiore del disco oscillante. Queste vengono caricate tramite un generatore a cui è collegato un amperometro; il passaggio di corrente crea, per induzione, una forza magnetica che, opponendosi al moto libero, smorza l'oscillazione del disco metallico.

Tramite un motore esterno è possibile forzare il moto del disco; su quest'ultimo, infatti, viene applicata una forza che provoca un ulteriore moto periodico, il cui periodo può essere stabilito dallo sperimentatore.

4.2 Moto Armonico Semplice

Cenni teorici

L'oscillatore armonico è un sistema fisico caratterizzato da un moto oscillatorio armonico. Con quest'ultimo si intende un moto oscillatorio ideale, privo di attriti, la cui legge oraria, espressa dalla funzione $s(t)$, soddisfa la seguente equazione:

$$\ddot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = 0 \quad (31)$$

con ω_0 costante legata alla frequenza propria del moto. Noi ci occuperemo esclusivamente di moti armonici unidimensionali; il moto è parametrizzato dalla coordinata $s(t)$.

Questo tipo di moto è realizzabile in presenza di una forza che sia opposta e direttamente proporzionale allo spostamento s del corpo dalla posizione di equilibrio, assunta come origine del sistema a $s = 0$. Cioè, considerando una forza $F(s)$ dipendente esclusivamente dalla posizione della massa, infinitamente derivabile nell'origine, questa può essere espansa tramite la serie di Taylor, come mostrato:

$$F(s) = F_0 + s \left(\frac{dF}{ds} \right)_0 + \frac{1}{2!} s^2 \left(\frac{d^2F}{ds^2} \right)_0 + \dots \quad (32)$$

Se si assume la perturbazione dall'origine piccola, tutti i termini dal secondo ordine a seguire possono essere trascurati. Questo ci permette di ottenere la forma della forza desiderata, con $k = -(dF/ds)_0$, $k > 0$ e $F_0 = 0$; proprio per questo ci occuperemo solo del limite delle piccole oscillazioni.

$$F(s) = -ks \quad (33)$$

Questa è nota come Forza di Hooke, descrive le deformazioni elastiche e governa

i sistemi che hanno un moto oscillatorio armonico. Infatti, l'equazione del moto in presenza esclusivamente di tale forza sarebbe:

$$m\ddot{s} = -ks \quad (34)$$

che porta esattamente alla (31) avendo definito $\omega_0^2 = k/m$.

In più, alla forza elastica, essendo conservativa, è associata un'energia potenziale tale per cui $F = -(dU/ds) = -ks$ il quale avrà, quindi, forma parabolica:

$$U(s) = \frac{k}{2} s^2 \quad (35)$$

Il potenziale, simmetrico, ha un punto di minimo a $s = 0$ essendo $k > 0$; l'energia potenziale con un minimo è tipica di un moto oscillatorio armonico. Infatti il moto $s(t)$ presenta in quella posizione un punto di equilibrio stabile rispetto al quale vi sono le oscillazioni, ammesso che il corpo sia spostato di poco da tale posizione. Per spostamenti maggiori le oscillazioni diventano non lineari e anarmoniche. Abbiamo quindi che il moto armonico semplice, ideale, è descritto dall'equazione (31) la cui soluzione è la seguente legge oraria che descrive le oscillazioni libere del sistema.

$$s(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad (36)$$

I coefficienti A e B sono determinati dalle condizioni iniziali del moto e definiscono l'ampiezza delle oscillazioni.

Obiettivi dell'esperimento

Il primo obiettivo dell'esperimento è quello di verificare l'isocronia delle piccole oscillazioni cioè l'indipendenza del periodo del moto dall'ampiezza delle oscillazioni. Infatti, idealmente, il periodo del moto è legato solo a ω_0 e dunque unicamente alle caratteristiche del sistema: in particolare, non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni stesse. Dopo aver verificato ciò, diamo una misura precisa del periodo e valutiamo la simmetria dell'oscillatore. Infatti, sempre idealmente, il periodo del moto non dipende neanche dalla direzione di scostamento dalla posizione di equilibrio. Essendo un oscillatore unidimensionale, ciò significa che il periodo del moto non cambia facendo oscillare lo strumento da destra piuttosto che da sinistra.

Esecuzione dell'esperimento

Innanzitutto abbiamo valutato il periodo di oscillazione del moto; affinché fosse confermata l'ipotesi di isocronia delle piccole oscillazioni lo abbiamo misurato più volte, partendo da ampiezze diverse.

Per misurare le ampiezze abbiamo sfruttato la scala graduata dell'oscillatore; a partire da $u = 0$, posizione di equilibrio, ogni tacca rappresentava $1u$, sia scendendo da destra che da sinistra. Per misurare il periodo abbiamo utilizzato il cronometro; questo, infatti, misura l'intervallo di tempo che intercorre tra il primo passaggio della freccia davanti alla fotocellula e il terzo (non il secondo, ma il successivo del successivo) che è appunto il periodo dell'oscillazione. Ci siamo assicuranti che la fotocellula fosse centrata e permettesse la giusta misura.

Abbiamo, quindi, effettuato 5 misure di periodo per ciascuna delle seguenti ampiezze, sia da destra che da sinistra: $19u, 17u, 13u, 9u, 6u, 4u$.

Tabella 13: Misure di periodo

$A(u)$	T_{sx} (s)	T_{dx}
19	1.8186 ± 0.0005	1.8178 ± 0.0004
17	1.8190 ± 0.0001	1.8182 ± 0.0004
13	1.8202 ± 0.0004	1.8198 ± 0.0004
9	1.8198 ± 0.0004	1.8194 ± 0.0005
6	1.8188 ± 0.0004	1.8176 ± 0.0005
4	1.8160 ± 0.0001	1.8146 ± 0.0005

T_{sx} : periodo da sinistra; T_{dx} : periodo da destra; A : ampiezza.

Abbiamo raccolto nella tabella 13 media e deviazione standard delle misure ottenute, per ogni ampiezza, separatamente da destra e da sinistra. Alcune tra le incertezze, essendo minori della sensibilità dello strumento sono state sostituite con quest'ultima (0.0001 s)

L'isocronia delle piccole oscillazioni è, quindi, confermata essendo i periodi a diversa ampiezza tra loro compatibili, sia da destra che da sinistra. Fanno eccezione le misure di periodo ad ampiezze troppo piccole o troppo grandi per le quali il valore del periodo si discosta più significativamente. Per quanto riguarda le ampiezze molto piccole il problema è imputabile allo strumento, mentre quelle più grandi si allontanano dal limite delle piccole ampiezze. L'andamento del periodo in funzione dell'ampiezza è visibile nella figura 52. Si nota la compatibilità della curva T_{dx} con la curva T_{sx} . Non essendo l'oscillatore stesso perfettamente simmetrico, la compatibilità non è perfetta.

Abbiamo potuto stimare il valor medio del periodo delle oscillazioni, con relativa incertezza, grazie a queste misure effettuate proprio perché precedentemente se ne è verificata la compatibilità. Abbiamo così fatto la media pesata delle 12 misure ad ampiezza diversa (6 da destra e 6 da sinistra) con le relative incertezze calcolate precedentemente.

$$T = (1.8177 \pm 0.0007) \text{ s}; \quad (37)$$

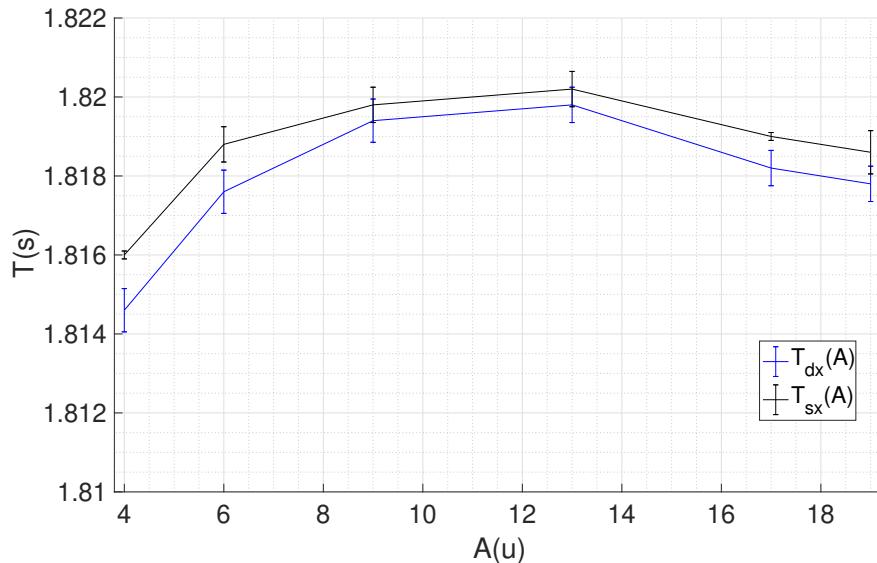


Figura 52: Analisi del periodo delle oscillazioni libere in funzione dell'ampiezza.

4.3 Moto Armonico Smorzato

Cenni teorici

Abbiamo descritto le oscillazioni armoniche libere in presenza esclusivamente di una forza come la forza di Hooke. Questo tipo di moto è ideale e molto irrealistico dato che qualunque sistema fisico oscillante reale arriverà a fermarsi a causa degli attriti. Nel momento in cui, oltre a questa forza, ne è presente un'altra tale da smorzare le oscillazioni, il moto cambia, cambiando l'equazione della legge oraria. Consideriamo come smorzante una forza dipendente linearmente dalla velocità del corpo, come è tipico degli attriti:

$$F_a = -bv = -b\dot{s} \quad (38)$$

b: coefficiente di proporzionalità dipendente dal tipo di forza smorzante (Ns/m).

Otteniamo quindi la seguente legge oraria:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - ks \quad (39)$$

che riarrangiata diventa

$$\ddot{s}(t) + 2\beta\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = 0 \quad (40)$$

avendo definito $\omega_0^2 = k/m$ come fatto precedentemente e $\beta = b/2m$ coefficiente di smorzamento.

Le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2$ sono

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (41)$$

In base al confronto tra β e ω_0 si avranno soluzioni diverse della Formula 40. Quello

che interessa a noi è il caso in cui $\omega_0^2 > \beta^2$ cioè il caso in cui i coefficienti di smorzamento sono piccoli rispetto alla frequenza armonica; la debole smorzante permette di avere delle oscillazioni con una certa frequenza di cui discuteremo, di ampiezza sempre minore prima che quest'ultima si annulli del tutto. In tal caso i valori di $\lambda_{1,2}$ sono immaginari e si ha una soluzione del tipo

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}) \quad (42)$$

con A_1 e A_2 definiti dalle condizioni iniziali e dipendenti a loro volta dall'inverso di i . Per riarrangiare la legge ottenuta definiamo

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (43)$$

come la frequenza caratteristica del moto, essendo questo oscillatorio. Abbiamo, quindi,

$$x(t) = A e^{-\beta t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t = A e^{-\beta t} \sin \omega t \quad (44)$$

A dipende dalle condizioni iniziali del moto.

Notiamo, come detto, che l'ampiezza, dopo aver oscillato, si annulla, per tempi lunghi. Infatti si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A e^{-\beta t} \sin \omega t = 0 \quad (45)$$

Negli altri casi ($\omega_0^2 \leq \beta^2$) la smorzante vince sulle oscillazioni e si ha un moto non periodico per cui l'ampiezza si annulla direttamente, senza oscillare, ma a posteriori, per il tipo di forza smorzante utilizzata, possiamo dire che questo non avviene nel nostro esperimento.

Obiettivi dell'esperimento

Nel nostro caso la smorzante è data dalla forza magnetica prodotta dalle bobine caricate dal generatore, come descritto nell'apparato sperimentale; quindi per voltaggi diversi si avranno intensità di smorzanti diverse e valori di β diversi. L'obiettivo è quello di ricavare i valori del coefficiente di smorzamento del moto per i diversi voltaggi smorzanti. Abbiamo utilizzato due metodi. Il primo consiste nel ricavare il coefficiente di smorzamento tramite l'equazione (43), avendo il periodo armonico e misurando il periodo del moto smorzato. Con il secondo metodo, invece, abbiamo estratto gli stessi coefficienti di smorzamento dal fit dell'andamento dell'ampiezza dell'oscillazione smorzata nel tempo, andamento descritto dalla (44), come vedremo successivamente.

Esecuzione dell'esperimento

Valori di voltaggio utilizzati come smorzanti in *Ampère*: 0 A, 0.25 A, 0.50 A, 0.75 A.

Tabella 14: Velocità angolare a diversi voltaggi

Voltaggio (A)	Velocità Angolare (rad/s)
0.25	3.4555 ± 0.0033
0.50	3.4529 ± 0.0022
0.75	3.4456 ± 0.0018

Primo Metodo Utilizziamo l'equazione (43). Possiamo ottenere il valore di ω_0 dalle misure di periodo fatte precedentemente in assenza di smorzante, tramite la relazione

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (46)$$

Propagando l'errore su ω_0 otteniamo una stima del valore medio della velocità angolare con relativa incertezza, a partire dalla (37).

$$\omega_0 = (3.456 \pm 0.006) \text{ rad/s}; \quad (47)$$

Dobbiamo calcolare ω , la frequenza caratteristica del moto smorzato.

Tramite questo metodo, nel caso particolare di 0 A, abbiamo $\omega = \omega_0$ e $\beta = 0$. Questo non è esattamente corretto perché, come mostreremo nel metodo successivo, l'oscillatore armonico di cui disponiamo non è perfettamente privo di attriti, ma è smorzato lievemente dall'attrito dell'aria. Con questo metodo, non disponendo di un modo per calcolare ω_0 in assenza perfetta di attriti non possiamo apprezzarne la differenza con ω .

Negli altri casi, invece, misuriamo il periodo del moto che si ha dopo aver azionato la smorzante al voltaggio richiesto; allo stesso modo di prima utilizziamo il cronometro, ma stavolta effettuiamo 5 misure di periodo solo da destra per 6u e 19u, dato che lo strumento è molto preciso. Mostriamo nella tabella 14 i valori di velocità angolare calcolati con la (46), con relativo errore.

In conclusione, aumentando il voltaggio, siccome aumenta la smorzante, aumenta il periodo e diminuisce la velocità angolare.

Abbiamo poi calcolato i valori di β , dalla (43):

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (48)$$

con la relativa incertezza:

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \sigma_\omega^2 + \omega_0^2 \sigma_{\omega_0}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (49)$$

Tabella 15: β a diversi voltaggi

Voltaggio (A)	β (rad/s)
0.25	0.0628 ± 0.0003
0.50	0.1494 ± 0.0009
0.75	0.268 ± 0.001

I valori di β sono mostrati in tabella 15; questi sono sempre minori di ω_0 e quindi ricadiamo sempre nel caso descritto nella teoria.

Secondo Metodo Per ogni valore di voltaggio abbiamo eseguito le seguenti operazioni:

- Abbiamo posizionato l'oscillatore in modo tale che avesse ampiezza iniziale $A_0 = 18u$, quindi abbiamo misurato il valore massimo dell'ampiezza del moto ad ogni periodo in modo da avere A_1, A_2, \dots, A_N valori di ampiezza, con N numero di periodi trascorsi da $t = 0$ al momento in cui il pendolo si ferma. L'indice indica quindi il numero di periodi trascorsi da $t = 0$ a quando si prende tale misura di ampiezza. Ad esempio A_i sarà l'ampiezza raggiunta dall'oscillazione all'i-esimo periodo dall'inizio. Le misure possono essere prese o da destra o da sinistra. Avendone confermato la simmetria ciò resta arbitrario; per comodità sceglieremo il lato destro.

Il numero N varia in base ai diversi voltaggi; per valori di voltaggio bassi il numero di misure di ampiezza prese è maggiore poiché il moto è meno smorzato e meno velocemente l'ampiezza del moto arriva a zero. Viceversa per valori di voltaggio alti il moto si smorza velocemente e dopo pochi periodi l'ampiezza si annulla.

- Abbiamo fatto ripartire l'oscillatore per 5 volte, prendendo ogni volta le N misure dette;
- Abbiamo poi fatto partire l'oscillatore da $A_0 = 14u$ per 5 volte, riprendendo, per ognuna, N misure;
- Abbiamo misurato, quindi, le ampiezze massime raggiunte ad ogni periodo. Ottieniamo l'andamento dell'ampiezza massima in funzione del tempo, cioè l'andamento dei massimi della funzione (44). Questo è rappresentato dalla seguente funzione, ottenuta ponendo $\sin \omega t = 1$.

$$X(t) = Ae^{-t\beta} \quad (50)$$

Con questa abbiamo, quindi, fissato i dati misurati.

- Il nostro obiettivo era quello di valutare il coefficiente di smorzamento, parametro libero del fit; in questo modo lo estraiamo dal fit con relativo errore, sia per $A_0=14u$ che per $A_0=18u$, verificandone la compatibilità.

Tabella 16: β a diversi voltaggi

Voltaggio (A)	β (rad/s)
0	0.0045 ± 0.0006
0.25	0.0354 ± 0.0003
0.50	0.1171 ± 0.0016
0.75	0.253 ± 0.002

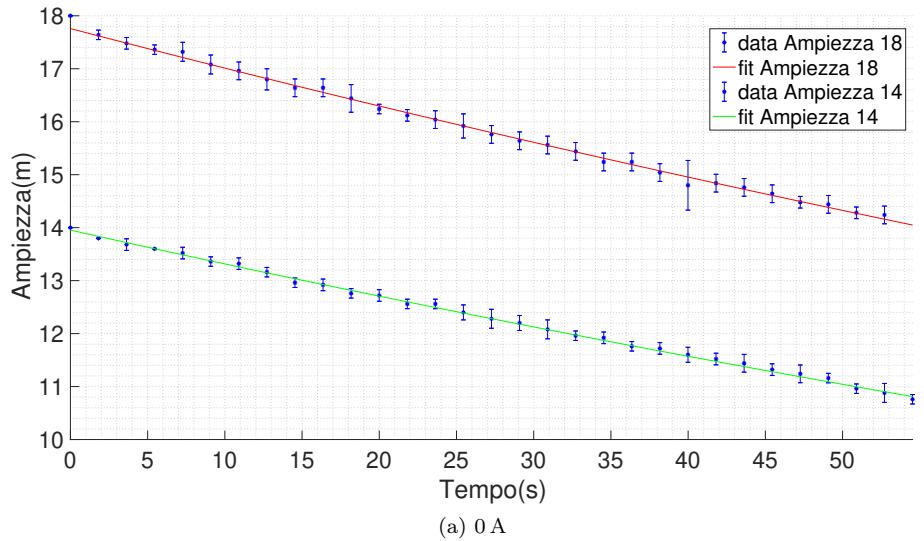
Il primo caso analizzato è stato quello a voltaggio nullo. Infatti l'attrito viscoso dell'aria, unito all'imprescindibile attrito dello strumento stesso fanno da forza smorzante per il moto oscillatorio.

In tutti i casi abbiamo fissato le misure di ampiezza massima utilizzando i pesi relativi alle misure prese, come mostrato nelle figure 53. Abbiamo utilizzato i periodi delle oscillazioni smorzate, calcolati prima per adattare l'asse x alle misure prese al periodo, moltiplicandolo per il periodo stesso. Notiamo che, all'aumentare del voltaggio, essendo la smorzante più marcata, le misure di ampiezza prese sono in minor quantità.

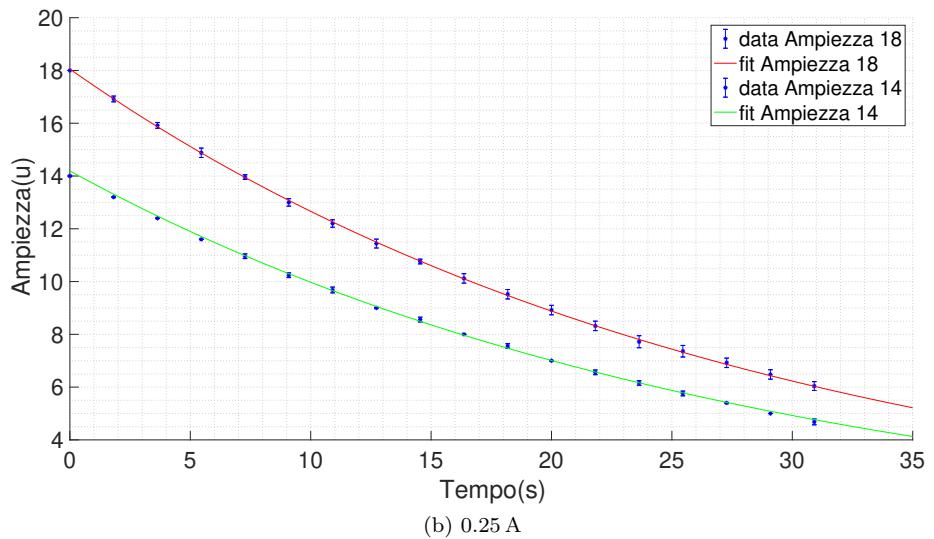
Utilizziamo il *Chi-quadro ridotto* per verificare la compatibilità del fit con i dati sperimentali; tutti i valori ottenuti sono compresi tra 0.82 e 1.47.

Abbiamo estratto β dal fit stesso, con un livello di confidenza al 95%. Avendo due valori, uno dal fit di ampiezza iniziale $14u$ e l'altro $18u$ ne abbiamo fatto la media pesata e calcolato il relativo errore. I valori sono riportati in tabella 16.

Nella figura 54 abbiamo, poi, messo in evidenza come le curve cambiano in base ai coefficienti di smorzamento. Confrontandoli tra loro concludiamo anche che β non dipende dal valore dell'ampiezza iniziale.



(a) 0 A



(b) 0.25 A

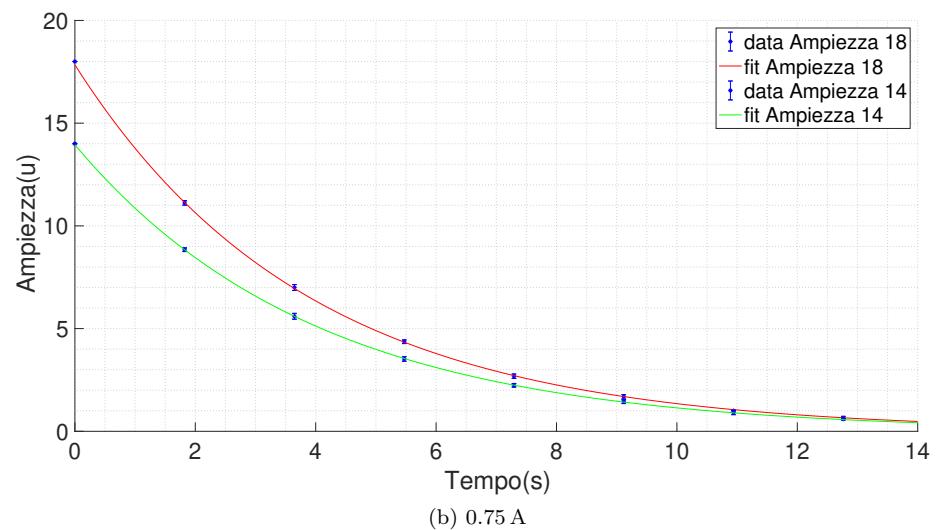
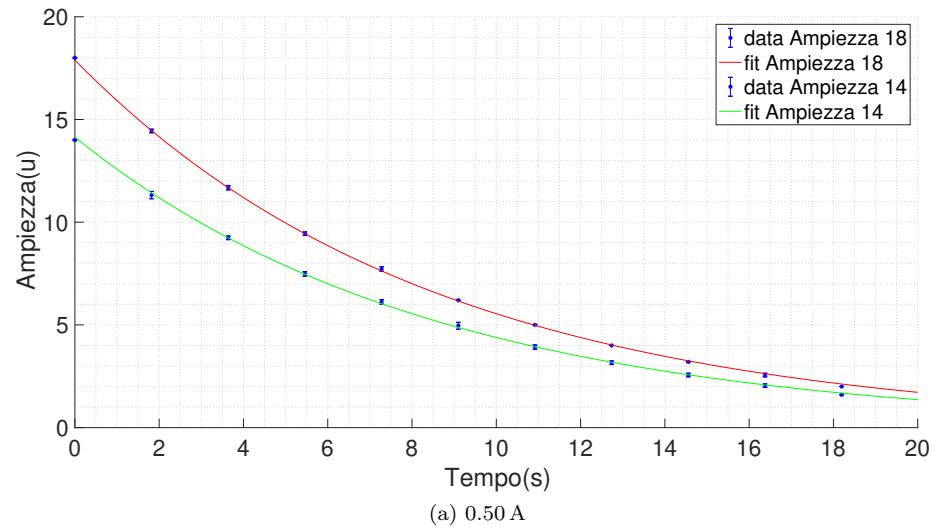


Figura 53: Andamento dei massimi dell'ampiezza.

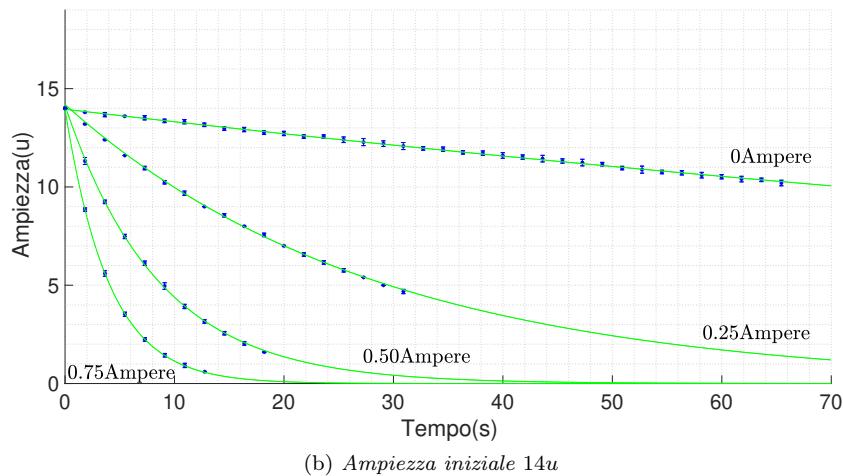
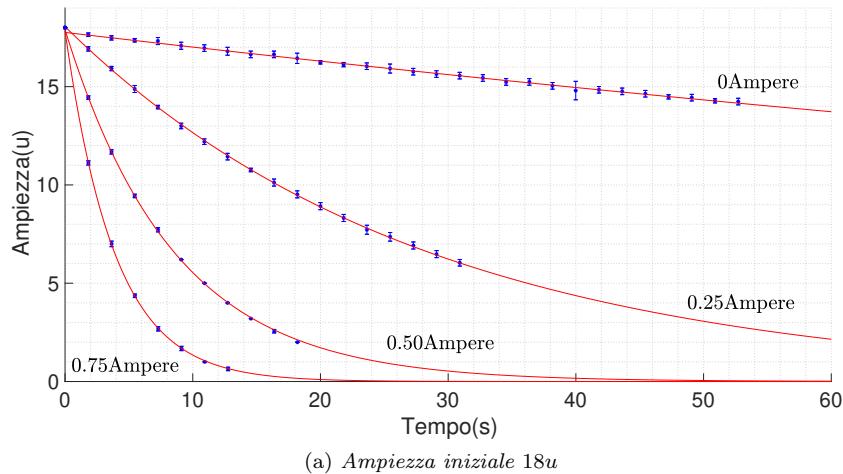


Figura 54: Confronto dell'andamento dei massimi dell'ampiezza per coefficienti di smorzamento diversi.

4.4 Moto Armonico Smorzato Forzato

Cenni teorici

Consideriamo ora il moto di un corpo soggetto alla forza di Hooke, ad una forza smorzante dipendente da \dot{s} come discusso precedentemente e ad un'ulteriore forza che faccia da forzante per il moto armonico cioè una forza del tipo

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (51)$$

avente una propria frequenza ω di oscillazione. In presenza di queste forze otteniamo la seguente legge oraria:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - ks + F_0 \cos(\omega t) \quad (52)$$

che riarrangiata diventa

$$\ddot{s}(t) + 2\beta\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (53)$$

avendo definito $\omega_0^2 = k/m$, $\beta = b/2m$ come fatto precedentemente.

La soluzione dell'omogenea è esattamente quella ottenuta in caso di moto smorzato. Il contributo di questa, però, è nullo a regime cioè per tempi sufficientemente lunghi; questo è quello che avevamo osservato calcolandone il limite nella (45). Fisicamente sono necessari circa 10τ con $\tau = 1/\beta$ per raggiungere ampiezza delle oscillazioni smorzate praticamente nulla. Infatti, inserendo $t = 10\tau = 10/\beta$ nella (50) e ammettendo $A = 1$ otteniamo $X(10\tau) = e^{-10} \approx 4.5 \times 10^{-5}$, un valore dell'ampiezza, dovuto alla smorzante, praticamente nullo. Siccome le misure che prenderemo saranno quelle a regime, quello che ci interessa è la soluzione particolare della non omogenea; possiamo dire che, a regime, il moto sia descritto esclusivamente da quella. Ipotizzando una soluzione della forma $x(t) = C \cos(\omega t - \delta)$ otteniamo:

$$C(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (54)$$

Ai fini del nostro esperimento l'espressione di δ non è fondamentale.

Per ottenere il fenomeno della risonanza assumiamo $\gamma \ll \omega_0$ in modo che $\omega - \omega_0 \sim o(\gamma)$; la (54) diventa:

$$C(\omega) = \frac{F_0/m}{2\omega_0 \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}} \quad (55)$$

Assumendo $\Gamma = F_0/2\omega_0 m$ e considerando l'ampiezza quadra abbiamo:

$$C^2 = b = \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2} \quad (56)$$

La (56) vista come $b(\omega)$ è l'equazione di una funzione lorentziana; questa ha un massimo in $\omega = \omega_0$ di valore $b_{\max} = \Gamma^2/\beta^2$ e per $\omega = \omega_0 \pm \beta$ si ha come ampiezza la metà del massimo. Perciò la "Half width at Half Maximum" è proprio β . La larghezza e l'altezza della curva dipendono quindi dal coefficiente di smorzamento: ci aspettiamo una risonanza alta e stretta per β piccoli.

Obiettivi dell'esperimento

Nel nostro caso un motore esterno forzava il moto ed era possibile, allo sperimentatore, variare il periodo ω della forza. L'obiettivo è quello, nuovamente, di ottenere il parametro di smorzamento β per ogni voltaggio, ma stavolta utilizzando la forzante e ricostruendo la lorentziana da cui estrarre il parametro β richiesto.

Esecuzione dell'esperimento

Abbiamo fissato volta per volta ciascun valore di voltaggio. Variare la pulsazione ω della forzante ci ha permesso di misurare l'ampiezza dell'oscillazione smorzata forzata per diversi valori di ω . Ovviamente per ampiezza intendiamo l'ampiezza massima C della legge oraria $x(t) = C \cos \omega t - \delta$, la quale varia al variare di ω secondo la legge (55). Prima di prendere la misura è stato necessario aspettare il tempo di regime, tanto maggiore quanto minore è il voltaggio, come detto nei cenni teorici.

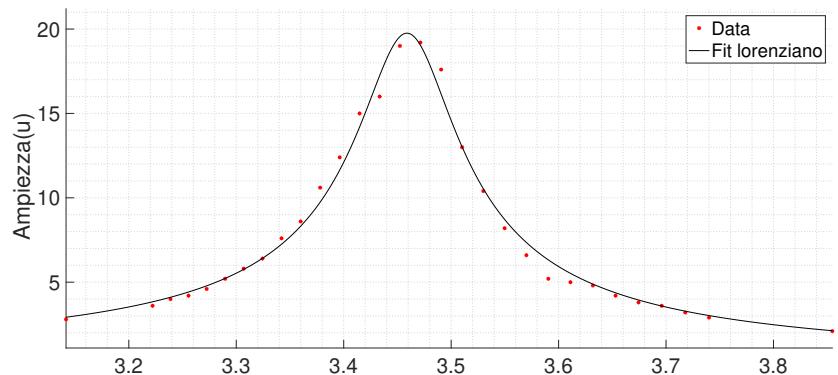
Per questo motivo non siamo riusciti a ricostruire la lorentziana libera, per 0 A: il valore dell'ampiezza continuava a oscillare e non si stabilizzava pur aspettando una decina di minuti. Pur avendo preso le misure e avendo eseguito il fit, queste non ci hanno permesso di avere un adeguato errore sul valore di β estratto.

Consideriamo quindi l'analisi per i diversi valori di voltaggio. Abbiamo variato ω in questo modo: considerando che il periodo dell'oscillatore armonico è di $T_0 = 1.818$ rad/s siamo partiti da $T = 1.630$ rad/s per arrivare a $T = 2.000$ rad/s incrementando per la prima e l'ultima volta di 0.050 rad/s e per tutte le altre di 0.010 rad/s in modo da avere, in totale, 30 misure di ampiezza. Essendo lunga la misura da eseguire per ogni voltaggio, le misure sono state prese 1 sola volta perciò per il singolo dato non si ha la relativa incertezza. Rappresentiamo le funzioni ottenute con i loro fit, composti tramite gli errori relativi alle misure, nella figura 55.

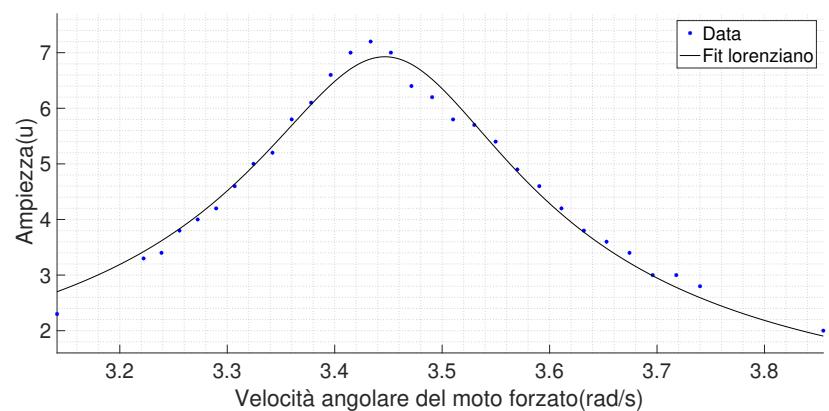
Per completezza inseriamo in figura 56 la lorentziana libera ottenuta, dalla quale, però, non abbiamo dedotto il valore del coefficiente di smorzamento. Notiamo che l'ampiezza, per valori di pulsazioni prossimi alla frequenza dell'oscillatore armonico aumenta tanto più quanto più è piccolo il valore di voltaggio. Infatti in figura a della 55 abbiamo il massimo della funzione a circa $20u$, valore massimo di ampiezza da noi misurabile. Nelle oscillazioni libere il massimo avrebbe raggiunto, secondo il fit, i $2500u$; proprio per questo non abbiamo inserito le misure di ampiezze prese per valori di pulsazioni vicino a ω_0 , come mostrato in figura 56: le misure inserite sono soltanto quelle per cui eravamo certi che l'ampiezza non fosse oltre i $20u$.

Una volta fittata la funzione ottenuta abbiamo potuto estrarre dal fit di questa il valore del parametro β richiesto; ancora una volta mostriamo in tabella 17 i valori del coefficiente ottenuti.

Osservando le tabelle 16 e 17 possiamo notare la compatibilità dei risultati ottenuti con i due metodi descritti.



(a) 0.25 A



(b) 0.50 A

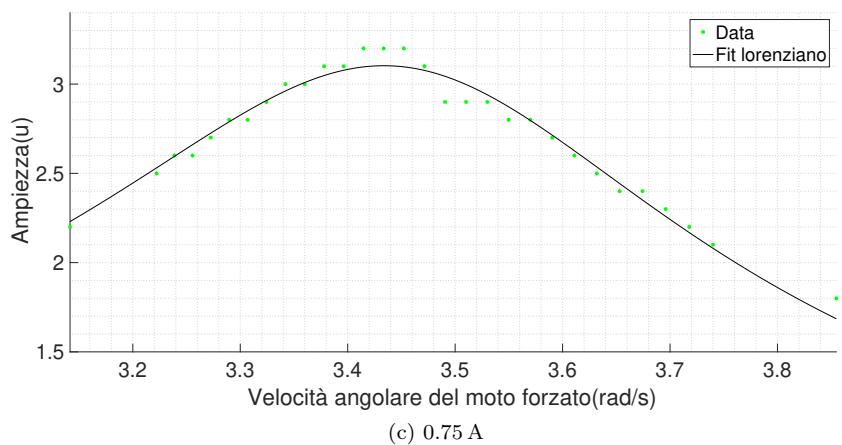
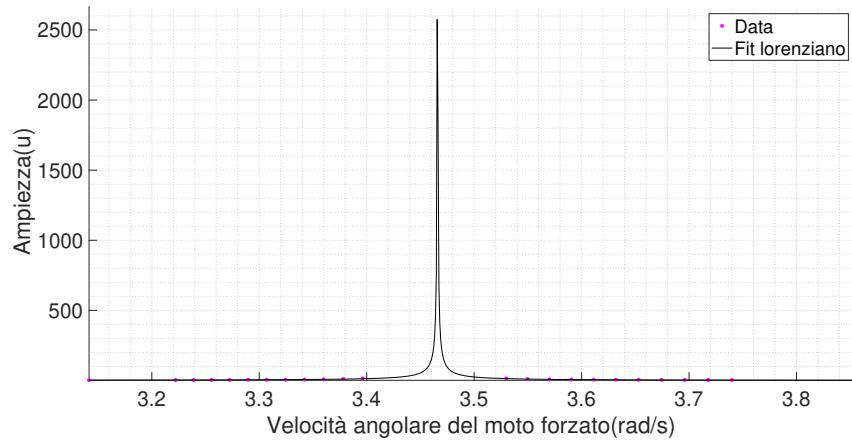
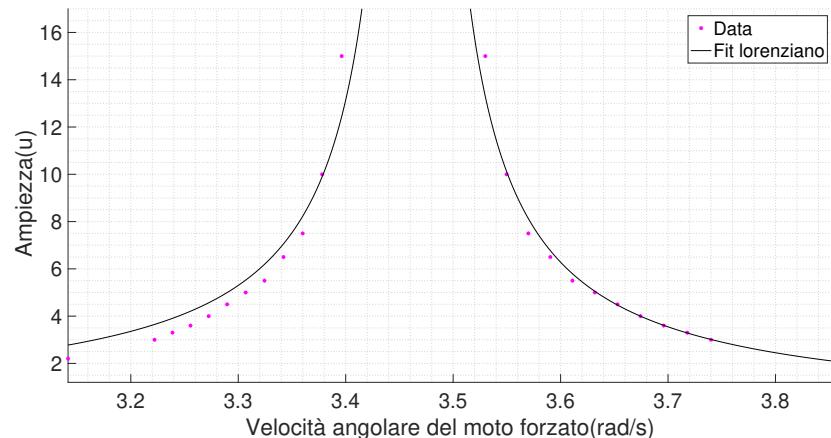


Figura 55: Andamento dei massimi dell'ampiezza.



(a) *Lorentziana completa.*



(b) *Zoom del grafico nei punti presi.*

Figura 56: Lorentziana a 0 A

Tabella 17: β a diversi voltaggi

Voltaggio(A)	β (rad/s)
0.25	0.0453 ± 0.004
0.50	0.123 ± 0.009
0.75	0.29 ± 0.02

Curve di risonanza a diversi smorzamenti

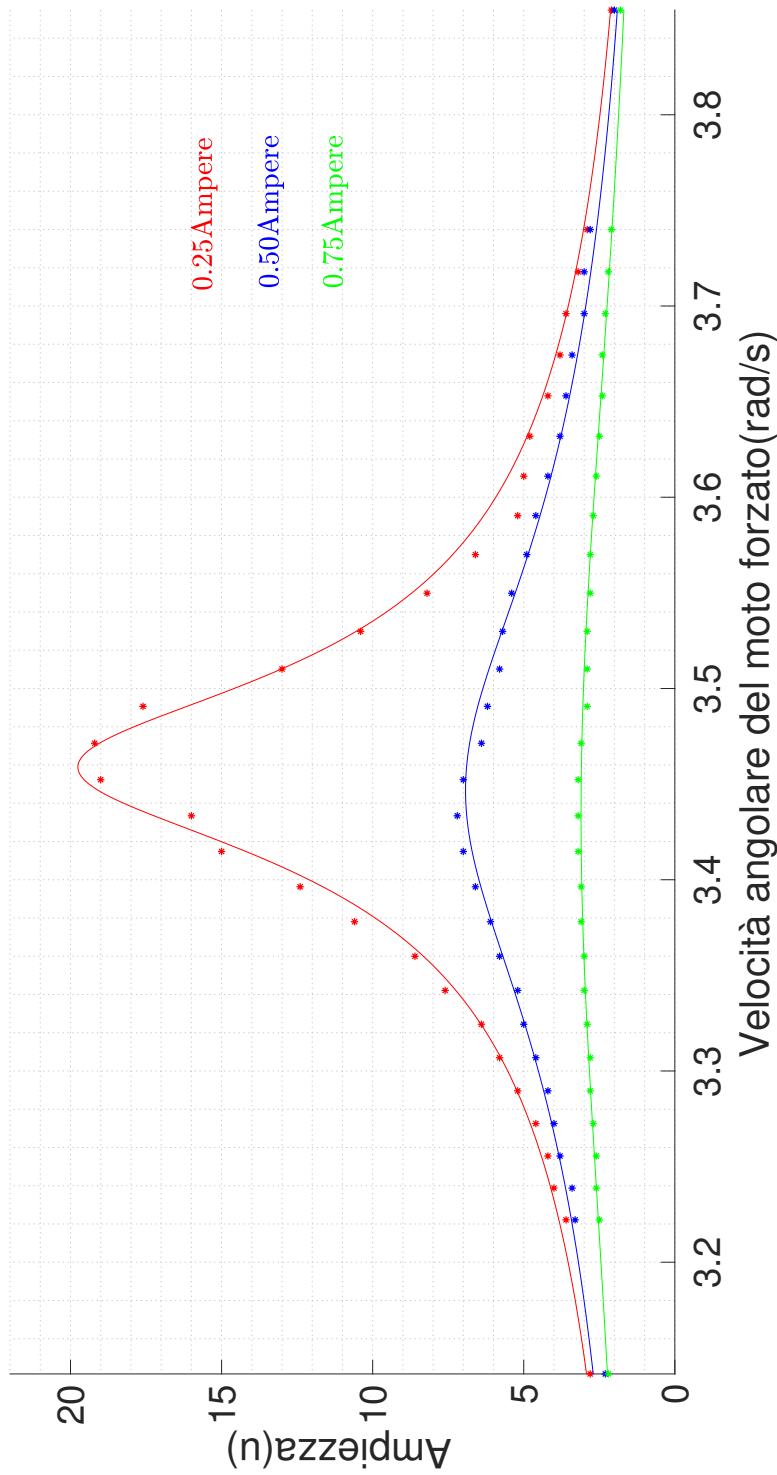


Figura 57: Confronto delle Lorentziane a diversi valori di voltaggio. Si nota quello che è stato detto nei cenni teorici. La risonanza è alta e stretta più il valore di β è piccolo.

5 Rotaia a cuscino d'aria

5.1 Apparato strumentale

L'apparato sperimentale consiste in una rotaia di lunghezza pari a 200 cm, su cui si fa scorrere un carrellino di massa 179.4 grammi. Per minimizzare l'attrito sulla rotaia sono presenti dei fori, disposti uniformemente sulla lunghezza della sbarra, dai quali si fa uscire un flusso d'aria, tramite un ventilatore elettrico. In questo modo il carrellino risulta leggermente sollevato rispetto alla rotaia ma il suo moto è quasi libero da attriti. Possiamo considerare la rotaia posizionata orizzontalmente, ma su questo torneremo nel corso dell'esperimento. Su un'estremità di questa c'è un pistone che viene utilizzato per spingere il carrellino sulla rotaia, mentre sull'altra estremità sono posizionati degli elastici contro i quali il carrellino urta e viene rimbalzato indietro. Fanno parte dell'apparato sperimentale anche due velette che sono posizionate sopra al carrellino: una è più ampia, di lunghezza pari a 10 cm (veletta lunga), ed una meno estesa, di lunghezza trascurabile (veletta corta). Le due velette vengono utilizzate una alla volta e diverso è il loro scopo; come vedremo successivamente si cambia veletta a seconda della misura che si vuole effettuare con il cronometro. Sono presenti, separatamente, anche due masse da 50 grammi da posizionare sopra al carrellino. Di estrema importanza sono le quattro fotocellule, posizio- nate al di sopra della rotaia, che hanno la forma di "ferro di cavallo" rivolto verso il basso, sensibili al passaggio delle velette sopracitate. Un cronometro è collegato alle quattro fotocellule e misura gli intervalli di tempi collegati al passaggio della veletta dalle fotocellule: per ogni percorrenza della veletta il cronometro restituisce quattro misure. A seconda dell'intervallo di tempo che si desidera misurare sono possibili programmazioni diverse del cronometro che portano a misurazioni diverse. Di seguito elencheremo i tre possibili metodi di utilizzo dello strumento che hanno permesso a noi di svolgere le varie misure:

- Utilizzando la veletta lunga si possono misurare i tempi di oscuramento. Detto t_0 l'istante in cui la parte iniziale della veletta inizia a passare in una delle fotocellule e dato t_1 l'istante in cui la parte finale della veletta finisce di passare dalla stessa fotocellula, il cronometro misura il $\Delta t = t_f - t_0$. Questo è possibile misurarlo per ogni fotocellula; il cronometro restituirà le quattro misure dei tempi di oscuramento: $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4$.
- Una variante del primo caso descritto è questa: utilizzando la veletta lunga si possono misurare i tempi di oscuramento di due fotocellule sia all'andata del carrellino sulla rotaia che al ritorno, dopo che è stato rimbalzato dall'elastico. Ad esempio il cronometro ci restituirà Δt_{1A} e Δt_{3A} tempi di oscuramento della prima e della terza fotocellula all'andata e Δt_{1R} , e Δt_{3R} tempi di oscuramento della prima e della terza fotocellula al ritorno.
- Utilizzando la veletta corta si può misurare il tempo di percorrenza ovvero l'intervallo di tempo impiegato dal carrellino per percorrere la distanza tra la prima fotocellula, detta fotocellula start, e le altre tre successive. Il cronometro, infatti, misura l'intervallo di tempo che intercorre tra il passaggio della veletta dalla prima fotocellula al passaggio della veletta dalla seconda, dalla terza e dalla quarta. Siccome la prima delle quattro misure, cioè il passaggio della veletta attraverso la prima fotocellula, è data nulla, le altre misure possono essere considerate come l'istante di tempo in cui la veletta passa attraverso le altre tre. Chiameremo

questi tre istanti di tempo: t_{12} , t_{13} e t_{14} . E' possibile anche cambiare la fotocellula di start e misurare i tre tempi di percorrenza per le tre fotocellule successive.

La prima fotocellula era posizionata non proprio all'inizio della rotaia in modo da evitare eventuali imprecisioni dovute a una misura presa all'inizio della rotaia.

5.2 Cenni teorici: relazione tra accelerazione, coefficiente d'attrito e angolo d'inclinazione in un piano inclinato

Come accennato, analizzeremo se la rotaia è perfettamente orizzontale e, anche per gli altri obiettivi del nostro esperimento, il modello del piano inclinato ci sarà utile. Il piano inclinato è un semplice problema di meccanica Newtoniana; rivediamo le relazioni principali che ci saranno utili nell'analisi dell'esperimento.

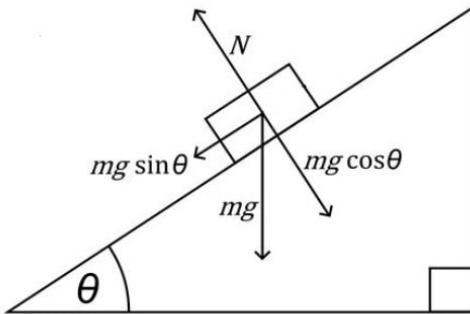


Figura 58: Forze a cui è soggetta la massa m su un piano inclinato

Chiamando l'angolo d'inclinazione del piano θ , la forza peso $P=mg$ può essere scomposta nelle sue due componenti parallela e perpendicolare al piano, come mostrato in figura 58.

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta \quad (57)$$

$$P_{\perp} = mg \cos \theta \quad (58)$$

La componente perpendicolare è perfettamente bilanciata dalla reazione vincolare del piano N . Perciò l'accelerazione del corpo perpendicolare al piano è nulla. Consideriamo, quindi, sono le relazioni sull'asse parallelo al piano. La forza parallela, responsabile del moto, è smorzata dalla presenza di forza d'attrito; consideriamo l'attrito dinamico dato che analizzeremo il carrellino esclusivamente quando già in moto.

$$F_a = \mu_D P_{\perp} = \mu_D mg \cos \theta \quad (59)$$

μ_D = coefficiente d'attrito dinamico

La relazione tra queste due forze varia a seconda che il corpo si stia muovendo in salita o in discesa, proprio perché F_a è sempre opposta al moto del corpo. Considerando l'asse parallelo al piano positivo verso il basso otteniamo le seguenti equazioni :

- Discesa:

$$mA_D = P_{\parallel} - F_a = mg \sin \theta - \mu_D mg \cos \theta \quad (60)$$

- Salita:

$$mA_S = P_{\parallel} + F_a = mg \sin \theta + \mu_D mg \cos \theta \quad (61)$$

Da queste due equazioni, facendo alcuni passaggi algebrici, possiamo ricavare il coefficiente d'attrito dinamico in due modi:

$$\text{Discesa : } \mu_D = \frac{-A_D + g \sin \theta}{g \cos \theta} \quad (62)$$

$$\text{Salita : } \mu_D = \frac{A_S - g \sin \theta}{g \cos \theta} \quad (63)$$

Eguagliando queste due espressioni è facile ricavare l'angolo d'inclinazione del piano in funzione delle due accelerazioni:

$$A_S + A_D = 2g \sin \theta \quad (64)$$

da cui

$$\theta = \arcsin \left(\frac{A_S + A_D}{2g} \right) \quad (65)$$

Osserviamo che il coefficiente di attrito dipende direttamente dall'angolo θ oltre che dall'accelerazione, ma non dipende dalla massa del corpo.

Inoltre notiamo dalla (62) e dalla (63) che le accelerazioni in salita e discesa sono costanti. Si tratta, infatti, di un moto rettilineo uniformemente accelerato e la velocità del carrellino varia linearmente nel tempo; questo è quello che successivamente ricaveremo e che sfrutteremo. In particolare ricordiamo che, se A è l'accelerazione del moto rettilineo uniformemente accelerato, si ha

$$V(t) = V_0 + A t \quad (66)$$

e legge oraria

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} A t^2 \quad (67)$$

Unendo queste ultime si ha

$$V^2 = V_0^2 + 2A(x - x_0) \quad (68)$$

formula che utilizzeremo successivamente.

5.3 Coefficiente d'attrito e angolo d'inclinazione

La prima parte di questo esperimento ha come prima finalità quella di misurare l'accelerazione in salita e in discesa del carrellino, dopo aver inclinato a due inclinazioni diverse la rotaia. Infatti, tramite dei quaderni abbiamo alzato la parte della rotaia senza il pistone, in due modi: abbiamo ottenuto una 1^a inclinazione con 3 quaderni e una 2^a inclinazione con 6. Successivamente, conoscendo le accelerazioni abbiamo calcolato l'angolo d'inclinazione di questa per ciascuna delle due inclinazioni e il coefficiente d'attrito tra la rotaia e il carrellino.

Primo metodo

Vogliamo calcolare l'accelerazione in salita e in discesa sia per la 1^a che per la 2^a inclinazione. Con questo primo metodo, come vedremo successivamente, sono necessarie le misure sia dei tempi di oscuramento che dei tempi di percorrenza. In particolare abbiamo raccolto otto diversi set di misure: 4 per la prima inclinazione di cui 2 per la salita e 2 per la discesa del carrellino e 4 per la seconda, salita e discesa.

Per prendere le misure di discesa abbiamo lasciato partire il carrellino dalla parte più alta senza spingerlo con il pistone e, invece, per la salita abbiamo utilizzato il pistone per metterlo in moto. Per avere un errore minore abbiamo preliminarmente scelto colui che dovesse far partire il carrellino con il pistone ovvero quello che riusciva ad imprimere, tramite il pistone, forze sempre vicine tra loro per ogni percorrenza del carrellino.

Ciò che ci ha permesso di avere una precisione maggiore è stato l'effettuare le misure sia senza masse (massa 1) sia con le due masse da 50 g (100 g totali) (massa 2). Infatti, come notato, la (63) e la (65) non dipendono dalla massa quindi le misure prese a masse diverse sono le stesse, a meno di relativo errore.

Ecco le misure effettuate, sia per i tempi di oscuramento che per i tempi di percorrenza:

Tabella 18: Set di misure

Identificazione misura	Inclinazione	Tipo di moto	Massa
s ₁	1 ^a inclinazione	salita	massa 1
s ₂	1 ^a inclinazione	salita	massa 2
d ₁	1 ^a inclinazione	discesa	massa 1
d ₂	1 ^a inclinazione	discesa	massa 2
S ₁	2 ^a inclinazione	salita	massa 1
S ₂	2 ^a inclinazione	salita	massa 2
D ₁	2 ^a inclinazione	discesa	massa 1
D ₂	2 ^a inclinazione	discesa	massa 2

Abbiamo ripetuto ogni misura 15 volte, per entrambi i tipi di misura. Così, per ogni punto della tabella 18 abbiamo ottenuto due matrici: una dei tempi di oscuramento, 15x4 e l'altra dei tempi di percorrenza, 15x3. In seguito abbiamo calcolato la media e la standard deviazione dei tempi e, successivamente, la standard deviazione sulla media, ottenuta dividendo la standard deviazione per la radice del numero di misure cioè 15. Alla fine otteniamo due matrici, una 8x3 con le medie degli 8 tempi d'oscuramento e una 8x4 con le medie degli 8 tempi di percorrenza per le 8 condizioni

in tabella 18, a cui sono associate due matrici delle stesse dimensioni con i relativi errori.

Velocità istantanea Sfruttando le misure dei tempi di oscuramento possiamo ricavare la velocità istantanea del carrellino negli istanti di tempo in cui è passato attraverso le 4 fotocellule, sapendo che la veletta misura 0,1 m; Per essere precisi si tratta di una velocità media nel passaggio attraverso la fotocellula che può essere considerata istantanea nel tratto totale.

$$V_i = \frac{0.1}{\Delta t_i} \quad \forall i = 1 \dots 4 \quad (69)$$

V_i=velocità istantanea alla i-esima fotocellula

In questo modo abbiamo ottenuto le misure di velocità con relativo errore cioè le velocità di passaggio del carrellino attraverso ogni fotocellula per ogni condizione; rappresentiamo i risultati tramite due plot velocità-tempo. In questi mostriamo i valori delle velocità per ciascuna delle 4 fotocellule in salita per le misure s₁, s₂, S₁ e S₂ (figura a di 59) e quelle in discesa per d₁, d₂, D₁, D₂ (figura b di 59), con relativo errore e con il fit finale dell'andamento dei dati, ottenuto coi pesi derivanti dagli errori calcolati; come avevamo previsto abbiamo ottenuto che la velocità del carrellino varia linearmente nel tempo.

Mostriamo nei grafici anche il valore di *adjust-R*, il coefficiente di determinazione. Questo è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato. Nelle regressioni lineari semplici, come questa, esso è semplicemente il quadrato del coefficiente di correlazione e viene fornito direttamente dal fit delle curve.

Possiamo confrontare le figure a e b di 59. La velocità diminuisce in salita, mentre in discesa aumenta, come ci aspettavamo dalla teoria. Più la rotaia è inclinata maggiore è la pendenza della retta che descrive l'andamento delle velocità; ciò significa che il carrellino ha un'accelerazione maggiore, in valore assoluto, sia in salita che in discesa, se la rotaia è più inclinata.

Possiamo poi osservare che, in salita, le velocità iniziali a masse diverse risultano essere notevolmente diverse e questo è imputabile alla diversa spinta data col pistone nelle misure a massa 1 e in quelle a massa 2. Gli andamenti di s₁ e s₂, pur avendo valori di velocità iniziale diverse si mantengono comunque paralleli, indice del fatto che la legge che regola la velocità non dipende dalla massa; lo stesso accade per S₁ e S₂. In discesa, dato che il carrellino è stato lasciato scendere senza spinta, i valori di velocità iniziale risultano essere praticamente identici, per masse diverse.

Per tutti i fit lineari utilizziamo il valore dell' adjust-R come coefficiente di determinazione il quale rappresenta una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato.

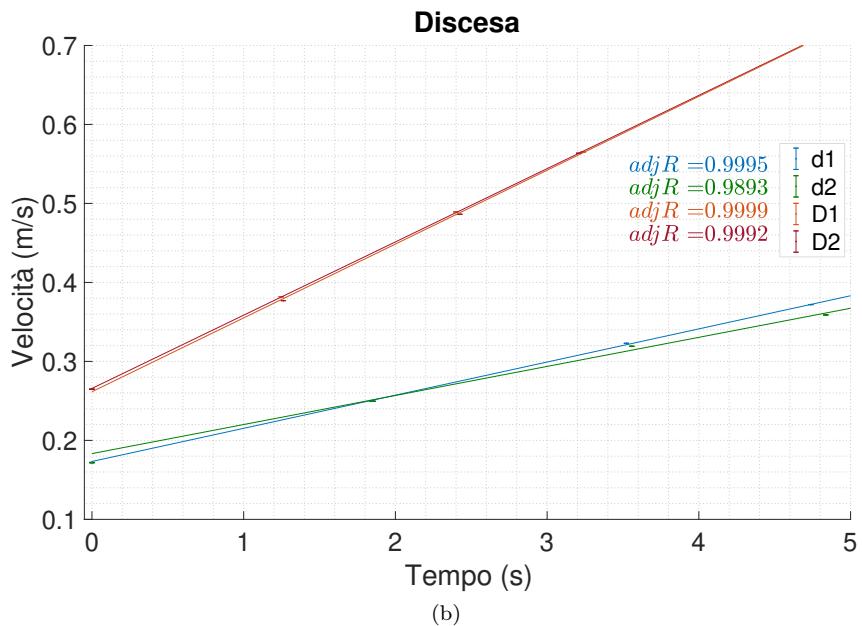
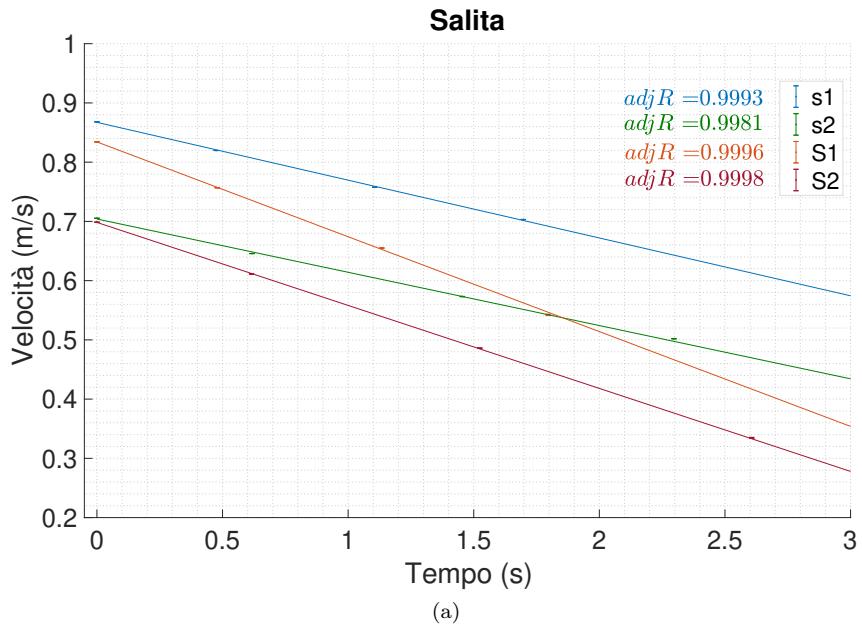


Figura 59: Andamento della velocità per le due inclinazioni a due masse diverse. Per ricavare l'istante di tempo di passaggio ad ogni fotocellula cioè l'ascissa dei punti del grafico utilizziamo i tempi di percorrenza che sono esattamente gli istanti cercati; per $t = 0$ abbiamo il passaggio attraverso la prima fotocellula e per $t = t_{1i}$ attraverso la i -esima.

Accelerazione Successivamente sfruttiamo anche i tempi di percorrenza per ricavare l'accelerazione; sappiamo dalla (66) che:

$$V_i = V_0 + At_{1i} \quad \forall i = 2 \dots 4 \quad (70)$$

e da ciò ricaviamo

$$A = \frac{V_i - V_0}{t_{1i}} \quad \forall i = 2 \dots 4 \quad (71)$$

V_i = velocità istantanea alla fotocellula i -esima.

$V_0 = V_1$ = velocità istantanea alla fotocellula di start.

A = accelerazione

t_{1i} = tempo di percorrenza tra la fotocellula di start e quella i -esima.

Utilizzando le medie delle velocità istantanee e i tempi di percorrenza abbiamo, quindi, i valori medi delle accelerazioni che ha il carrellino quando passa attraverso la seconda, la terza e la quarta fotocellula per ogni punto della tabella 18. Possiamo calcolare, tramite la propagazione degli errori, la standard deviazione sulle varie accelerazioni.

A differenza delle velocità, le accelerazioni non dipendono dal tempo, sono costanti come ottenuto dalle leggi (60) e (61) e come possiamo vedere nella figura 60, grafico accelerazione-tempo; abbiamo i valori di accelerazione per ciascuna delle 3 fotocellule in salita e in discesa a due inclinazioni diverse, con relativo errore e il fit finale del loro andamento ottenuto con i pesi calcolati dagli errori.

Possiamo notare che in salita l'accelerazione è negativa, mentre in discesa è positiva proprio perchè nel primo caso la velocità diminuisce mentre nel secondo aumenta. Come osservato per le velocità, le misure in salita risultano essere più imprecise che quelle in discesa.

Attrito e angolo Proprio perchè al passaggio da ciascuna delle tre fotocellule il carrellino ha la stessa accelerazione, i valori medi delle accelerazioni per le 3 diverse fotocellule, a meno di errore, riportano la stessa misura. Perciò effettuiamo la media pesata sulle tre misure in modo da ottenere i valori delle accelerazioni per ogni punto dell'elenco iniziale, con rispettivo errore.

Possiamo ora calcolare l'angolo di inclinazione tramite la (65) per ognuna delle due inclinazioni scelte sfruttando l'accelerazione in salita e la relativa accelerazione in discesa. Avendo le coppie di set di misura salita-discesa s_1-d_1 , s_2-d_2 per la prima inclinazione e S_1-D_1 , S_2-D_2 per la seconda, otterremo due valori per l'angolo, uno per le misure con la massa 1 e l'altro con la massa 2. Ottenuto l'angolo utilizziamo la (63) per calcolare i coefficienti di attrito, per ciascun valore di angolo ottenuto. I valori calcolati sono mostrati nella tabella 19.

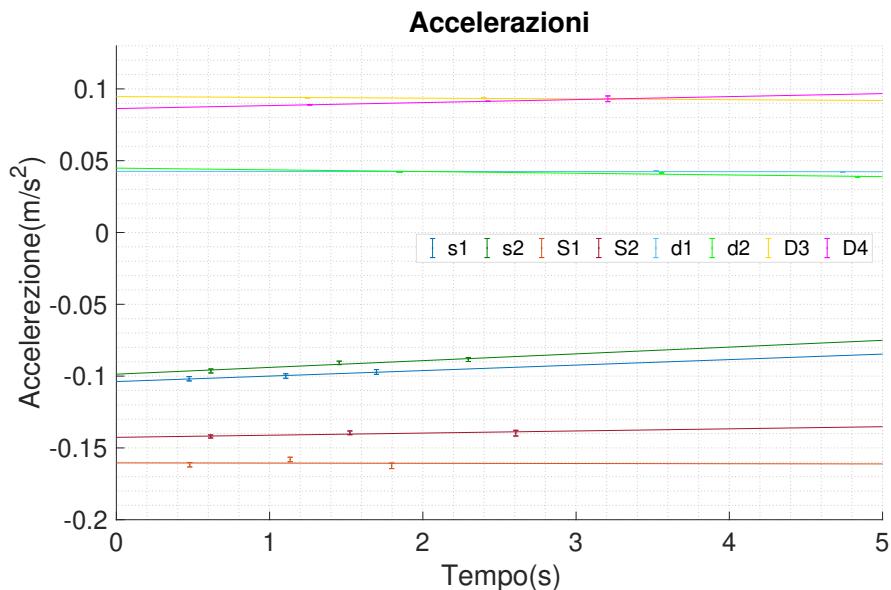


Figura 60: Andamento dell’accelerazione in salita e discesa per le due inclinazioni a due masse diverse. Facciamo lo stesso ragionamento sulle ascisse che abbiamo fatto per le velocità con l’unica differenza che per la prima fotocellula non abbiamo il valore di accelerazione, non potendo avere una differenza di velocità.

Tabella 19: Angoli e coefficienti di attrito (1)

		Angolo (rad)	Coefficiente di attrito
1 ^a inclinazione	massa 1	0.0072 ± 0.0005	0.0174 ± 0.001
	massa2	0.0067 ± 0.0004	0.0161 ± 0.0009
2 ^a inclinazione	massa 1	0.0129 ± 0.0005	0.0293 ± 0.001
	massa 2	0.0118 ± 0.0005	0.0261 ± 0.0009

Tabella 20: Distanze tra le fotocellule

Distanza	Valore (m)	Errore (m)
x_2	0.4040	0.0001
x_3	0.9078	0.0004
x_4	1.3203	0.002

Secondo metodo

Un altro metodo per raggiungere il medesimo risultato è il seguente: possiamo ricavare l'accelerazione tramite la distanza tra la fotocellula di start e le altre tre, sfruttando le misure dei tempi di percorrenza e di oscuramento prese precedentemente.

Accelerazione Sfruttiamo le velocità istantanee già calcolate tramite la (69) per calcolare le distanze tra la prima fotocellula e le altre, cioè lo spazio percorso dal carrellino tra la prima fotocellula e le altre. Avendo misurato i tempi di percorrenza tra la fotocellula di start e le altre tre è facile trovare i valori cercati; consideriamo il moto rettilineo uniforme utilizzando come valore di velocità costante la media delle velocità iniziali e finali e stabilendo $x_0 = x_1 = 0$:

$$x_i = \frac{V_i + V_0}{2} t_{1i} \quad \forall i = 2 \dots 4 \quad (72)$$

x_i = la distanza tra la prima fotocellula e la i -esima.

Abbiamo fatto questa operazione per ogni set di misure della tabella 18. Dato che la distanza tra le fotocellule è sempre la stessa possiamo fare la media pesata di tutti gli elementi e calcolarne l'errore. Mostriamo in tabella 20 le misure ottenute.

Quindi consideriamo la formula (68) ricavata nella teoria in modo tale da ottenere le accelerazioni in salita e in discesa per ognuna delle due inclinazioni con le due diverse masse:

$$A = \frac{V_i^2 - V_0^2}{2x_i} \quad (73)$$

Abbiamo, quindi, come prima, i valori medi delle accelerazioni che ha il carrellino quando passa attraverso la seconda, la terza e la quarta fotocellula per ogni punto della tabella 18. Possiamo calcolare, tramite la propagazione degli errori, la standard deviazione sulle varie misure e allo stesso modo di prima mostriamo l'andamento delle accelerazioni nel grafico 61.

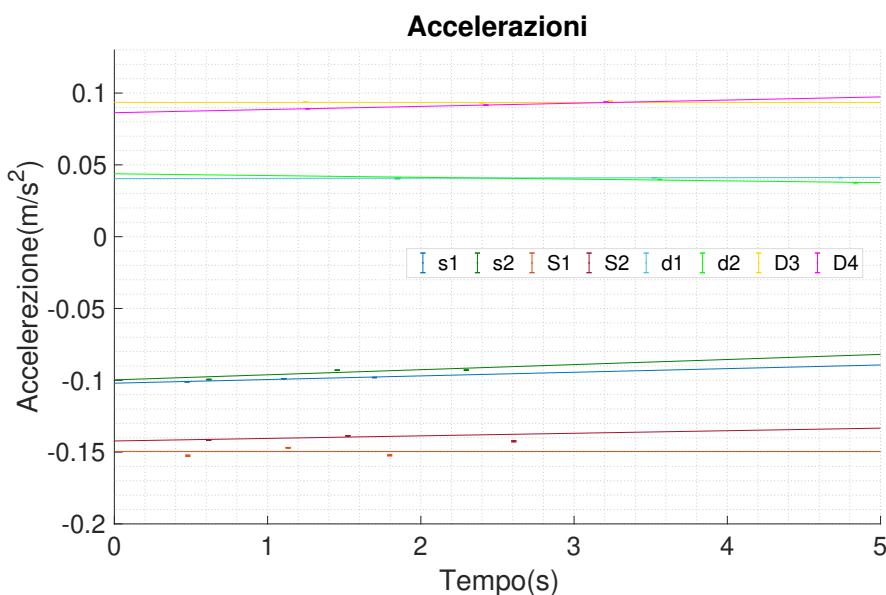


Figura 61: Andamento dell’accelerazione in salita e discesa per le due inclinazioni a due masse diverse.

Tabella 21: Angoli e coefficienti di attrito (2)

	Angolo (rad)	Coefficiente di attrito
1 ^a inclinazione	0.0072 ± 0.0005	0.0173 ± 0.0008
	0.0068 ± 0.0006	0.0164 ± 0.001
2 ^a inclinazione	0.0124 ± 0.001	0.0276 ± 0.002
	0.0117 ± 0.0004	0.0260 ± 0.0009

Attrito e angolo Analogamente al primo metodo e con le stesse equazioni ricavate in precedenza, (63), (65), abbiamo ricavato gli angoli delle due inclinazioni e i coefficienti di attrito tra il carrellino e la rotaia. I valori finali sono mostrati in tabella 21.

Si può valutare la compatibilità tra i valori degli angoli e dei coefficienti di attrito ottenuti con i due metodi diversi comparando le misure mostrate nelle tabelle 19 e 21.

5.4 Orizzontalità della rotaia

In questa seconda parte abbiamo mantenuto la rotaia orizzontale; dobbiamo verificare cinematicamente che questa sia effettivamente posta in posizione orizzontale. Per fare ciò abbiamo preso 10 misure dei tempi di oscuramento mettendo in moto il carrellino con il pistone e abbiamo calcolato la media delle misure con relativo errore; in seguito, nello stesso modo precedente, abbiamo calcolato i quattro valori medi delle velocità istantanee del carrellino quando passa attraverso le fotocellule, conoscendo la lunghezza della veletta. Se la rotaia fosse davvero piana dovremmo ottenere delle velocità identiche, a meno di errore, considerando il moto rettilineo uniforme e trascurando l'attrito. Mostriamo nel grafico (62) l'andamento della velocità ottenuto dai dati e ne facciamo il fit lineare per estrarre il coefficiente angolare della retta.

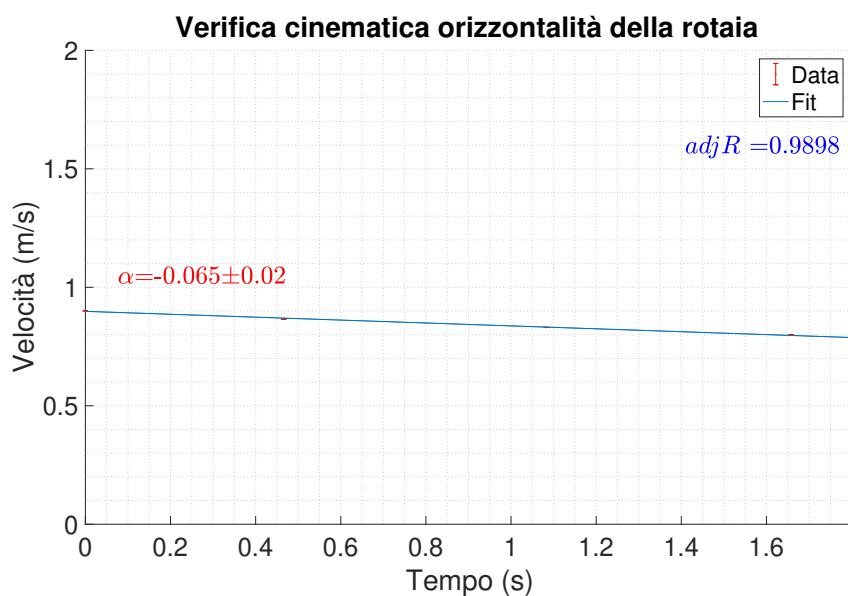


Figura 62: Fit lineare del grafico velocità-tempo

Osserviamo dal grafico che il coefficiente angolare della retta, valore estratto dal fit, è di poco inferiore a 0, indice del fatto che il moto non è perfettamente uniforme, ma leggermente accelerato negativamente. Ciò significa che la rotaia non è esattamente orizzontale, ma di poco inclinata in salita rispetto al moto del carrellino. Abbiamo comunque considerato l'asta orizzontale poiché in laboratorio non siamo stati in grado di effettuare l'analisi dati in tempo reale. Tuttavia non siamo incorsi in un grave errore in quanto l'angolo si discosta dallo zero solo per la seconda cifra decimale.

Tabella 22: Tempi di andata e ritorno

	Tempo andata (s)	Tempo ritorno (s)
Massa 1	0.0103 ± 0.0011	0.0192 ± 0.0014
Massa 2	0.0208 ± 0.0034	0.0349 ± 0.0040

Tabella 23: Differenza dei tempi

	Δt (s)
Massa 1	0.0089 ± 0.0017
Massa 2	0.0141 ± 0.0052

5.5 Anelasticità dell’urto

Utilizziamo ora gli elastici presenti alla fine della rotaia con lo scopo di produrre un urto tra il carrellino e questi ultimi e misurare i tempi sia per il moto sulla rotaia prima dell’urto (andata) sia per il moto successivo all’urto (ritorno); tramite queste misure dobbiamo capire di che tipo di urto si tratta. Possiamo farlo in due diversi modi.

Primo metodo

Ipotizziamo che l’urto sia elastico cioè oltre alla quantità di moto si conservi anche l’energia. Il carrellino, quindi, prima e dopo l’urto deve mantenere la stessa velocità affinchè la variazione di energia sia nulla. Per verificare questo utilizziamo la seguente relazione tra distanze e tempi: se la velocità è la stessa, distanze uguali devono essere percorse in tempi uguali.

$$d \Delta t_A = d \Delta t_R \quad (74)$$

d = distanza percorsa

Δt_A = tempo impiegato a percorrere la distanza prima dell’urto

Δt_R = tempo impiegato a percorrere la stessa distanza dopo l’urto

Per poter valutare se la relazione (74) è o non è soddisfatta è importante che la rotaia sia posta in orizzontale, operazione di cui ci siamo occupati preliminarmente.

Mantendo costante la distanza d fra le fotocellule dobbiamo verificare che i tempi di percorrenza siano uguali.

Perciò abbiamo misurato i tempi di andata (prima dell’urto) e di ritorno (dopo l’urto) del carrellino. Per avere una maggiore precisione abbiamo preso misure per l’andata e per il ritorno, prima con zero masse (massa1) e poi con due masse da 50 g e calcolato i rispettivi errori (tabella 22).

Successivamente abbiamo fatto il modulo tra la differenza dei tempi di andata e i tempi di ritorno del carrellino con e senza masse e calcolato il rispettivo errore (tabella 23).

Vediamo che i risultati differiscono in modo statisticamente rilevante, cioè i tempi con e senza masse (t_1 e t_2) sono diversi tra loro per cui non vale la relazione sopra

Tabella 24: Variazioni percentuali di energia cinetica

	Fotocellula 1 (%)	Fotocellula 3 (%)
Massa 1	-40.37 ± 0.02	-44.39 ± 0.03
Massa 2	-34.97 ± 0.06	-40.52 ± 0.1

descritta (equazione 74) e l'urto è anelastico.

Secondo metodo

Sappiamo che in un urto elastico l'energia meccanica si conserva. Calcoliamo quindi la variazione percentuale di energia prima e dopo l'urto; se questa è nulla l'urto è elastico, altrimenti sarà anelastico.

Dato che l'energia potenziale del carrellino che scorre sulla rotaia orizzontale è costante, possiamo considerare solo la variazione percentuale dell'energia cinetica del carrellino, e calcolarla tramite la (75).

$$\frac{\Delta K}{K} (\%) = \frac{K_A - K_R}{K_A} \quad (75)$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K_A = energia cinetica prima dell'urto

K_R = energia cinetica dopo l'urto

Dobbiamo, quindi, ricavare K_A e K_R . Innanzitutto abbiamo calcolato le velocità istantanee del carrellino ad ogni fotocellula sempre nello stesso modo (formula (69)), prendendo 15 misure dei tempi di oscuramento a massa 1 e 15 misure a massa 2 per andata e ritorno e ottenendo il valore medio con relativo errore per ogni fotocellula. Questa volta abbiamo impostato il cronometro in modo tale che misurasse il tempo di oscuramento esclusivamente della prima e della terza fotocellula, ma andata e ritorno, come spiegato nell'apparato sperimentale. Abbiamo poi misurato la massa del carrellino:

$$\begin{aligned} \text{massa 1} &= 179,4 \text{ g} \\ \text{massa 2} &= 279,4 \text{ g} \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo calcolato K_A e K_R e infine $\frac{\Delta K}{K} (\%)$, per entrambe le masse. Siccome il cronometro ci restituiva misure di tempo per due fotocellule abbiamo trovato due valori della variazione percentuale, per le due fotocellule. Calcolando anche gli errori, riportiamo i risultati ottenuti in tabella 24.

Osservando i risultati possiamo nuovamente affermare che l'urto è anelastico; questo avremmo potuto dirlo anche semplicemente confrontando la velocità istantanea prima e dopo l'urto, ma in più possiamo dire che il carrellino perde energia.

1 Appendice

In questa sezione descriveremo tutte le basi statistiche utilizzate in modo ricorsivo all'interno delle varie analisi dati.

Propagazione degli errori La maggior parte delle grandezze fisiche non possono essere calcolate direttamente tramite una presa dati, ma necessitano di più passaggi per essere acquisite. Per ottenerle si determinano, quindi, prima le grandezze che si possono misurare e successivamente mediante passaggi algebrici si ricavano le grandezze soprattute; queste vengono dette misure indirette.

Noi possiamo stimare gli errori solo sulle grandezze che abbiamo effettivamente misurato. Occorre dunque disporre di un metodo in grado di calcolare l'errore delle misure indirette. Riportiamo di seguito la formula generale per il calcolo della propagazione degli errori la cui dimostrazione viene omessa.

Sia

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (76)$$

l'errore associato è

$$\sigma_y = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (77)$$

σ_y = errore sulla funzione y

σ_{x_i} = errore sulla variabile i -esima

Test del Chi Quadro Per capire come si utilizza il test del chi quadro dobbiamo prima fornire la definizione di test d'ipotesi. Quest'ultimo è una procedura che si utilizza per verificare la bontà di un'ipotesi, chiamata ipotesi nulla, a partire dalle informazioni contenute in un campione casuale della popolazione in esame.

Il test del chi quadro rientra nella famiglia dei test di ipotesi. In particolare permette di confrontare una serie di dati osservati sperimentalmente con la serie dei dati attesi (teorici) in base ad un'ipotesi teorica (ipotesi nulla) e decidere se accettarla o meno. Supponiamo di aver osservato un insieme di eventi ($e_1 e_2 \dots e_n$) che si presentano con frequenze $O_1 O_2 \dots O_n$, dette frequenze osservate, e che secondo un'ipotesi probabilistica ci si attende che si presentino con frequenze $E_1 E_2 \dots E_n$, dette frequenze teoriche o attese. La variabile χ^2 si ottiene nel seguente modo:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} \quad (78)$$

Se le frequenze osservate coincidono con quelle teoriche allora ovviamente $\chi^2 = 0$, mentre se esse differiscono $\chi^2 > 0$. Più è grande la discrepanza tra frequenze osservate e frequenze teoriche più è grande il valore di χ^2 .

Nelle nostre analisi, la maggior parte delle volte, tale valore ci viene restituito dal fit. Fa eccezione il confronto con la Poissoniana, caso in cui, essendo la distribuzione discreta, è stato calcolato 'a mano'.

Chi quadro ridotto Considerando la formula 78 possiamo notare come per $n \rightarrow \infty$ la distribuzione χ^2 tende asintoticamente alla distribuzione:

$$\frac{(N - 1) s^2}{\sigma^2} \quad (79)$$

$s = \text{scarto quadratico medio}$

$\sigma = \text{deviazione standard}$

e con N , ampiezza del campione, dato da:

$$N = \sum_{i=1}^n O_i = \sum_{i=1}^n E_i \quad (80)$$

La condizione di asintoticità risulta raggiunta se $N \geq 50$ e il numero di eventi per classe è almeno uguale a 5. Notiamo inoltre che in questa condizione il valore atteso di χ^2 è uguale al numero di gradi di libertà (ν): $\nu = n - 1$.

Per questa ragione di è soliti a normalizzare il χ^2 a ν , definendo così il χ^2 ridotto:

$$\chi^2 \text{ ridotto} = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (81)$$

Più il valore del χ^2 ridotto si avvicina a 1 più le distribuzioni risultano essere compatibili.

Nelle nostre analisi abbiamo stabilito, volta per volta, il numero di gradi di libertà.

Coefficiente di determinazione (adjust-R) Il coefficiente di determinazione è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato. MATLAB non utilizza l'equazione ordinaria ma una versione "aggiustata", tramite il coefficiente di regressione, in modo tale da rendere più efficiente il confronto tra vari modelli con un numero diverso di variabili indipendenti.

$$R_{adj}^2 = 1 - \left(\frac{n - 1}{n - p} \right) \frac{SSE}{SST} \quad (82)$$

$SSE = \text{somma dell'errore quadratico}$

$SST = \text{somma dei quadrati delle medie}$

$n = \text{numero di osservazioni}$

$p = \text{coefficiente di regressione}$

Nelle nostre analisi tale valore ci viene restituito dal fit lineare.

Bibliografia

- [1] John R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, 1982
- [2] Epicentro, il portale dell'epidemiologia per la sanità pubblica, www.epicentro.iss.it/radon
- [3] Massimo Caccia, *The MIMOTERA: a monolithic pixel detector for real-time beam imaging and profilometry*, 2011
- [4] Massimo Caccia, *XXVII Giornate di studio sui rivelatori*, 2018
- [5] Hamamatsu Photonics, <https://hub.hamamatsu.com/jp/en/technical-note-how-sipm-works/index.html>
- [6] Associazione *Photon Counting Network*, <http://www.photoncount.org>
- [7] Scheda tecnica dell'Educational Photon Kit della Caen, <https://www.caen.it/products/sp5600e/>
- [8] Sergio Focardi, Ignazio G. Massa, Arnaldo Uguzzoni, *Fisica generale: onde e ottica*, 2003
- [9] Sergio Rosati, *Fisica generale: meccanica e termodinamica*, 1978