Table des matières

Chapitre 1

Graphes

1.1 Introduction : Quelques problèmes

Introduire une nouvelle matière n'est pas toujours chose plaisante car il s'agit souvent d'une accumulation de définitions ! Et c'est hélas la situation rencontrée ici. Nous allons donc agrémenter cette présentation, autant que faire se peut, des exemples mettant en lumière l'intérêt pratique de la théorie des graphes. Comme l'indique le titre de ce chapitre, nous nous intéressons aux graphes.

Le graphe est l'un des concepts mathématiques les plus simples qui soient : des points, que l'on appelle " sommets" , reliés entre eux par des lignes, les "arêtes" la notion de "graphique" n'a rien à voir. Étrangement, la forme des lignes du graphe n'a aucune importance ; ce qui compte, c'est quelles relient deux sommets donnés. De même, la position des sommets est sans e§et sur les propriétés du graphe. L'avènement des graphes, au XV IIIe siècle, fut une révolution conceptuelle qui fit voler en éclats plus de deux millénaires de géométrie : en théorie des graphes, la "forme" n'a plus de réalité, c'est à dire que tous les repères géométriques hérites de la géométrie euclidienne classique deviennent caducs, au profit d'une notion unique, celle de "lien" entre les points. Dans la représentation d'un graphe, les arêtes peuvent se croiser, mais l'intersection n'est associée à aucune propriété particulière : c'est comme si elle n'existait pas. Aussi, quand on représente un graphe, évite-t-on de se faire croiser les arêtes - ce qui n'est pas toujours possible.

Exercice 1.1.1. *Une ligue de football contient 15 clubs. Pour des raisons de temps, on décide que chaque club ne jouera que la moitié des matchs possibles. Comment organiser le tournoi ? (on pourra commencer par étudier le cas de 7 clubs).*

Solution 1.1.2. *Avec 15 clubs, il est assez difficile de démarrer le travail sur ce problème, à cause de la taille des données. Avec 7 clubs, on est rapidement amené à un dessin où chaque club* *est représenté par un point, et où on relie par un trait deux clubs qui disputent un match. Une bonne idée est alors de compter le nombre de traits, c'est-à-dire le nombre de matchs qui seront joués ; comme chaque trait a deux extrémités, c'est aussi la moitié du nombre de participations : si chacun des 7 clubs joue 3 matchs, il y a 21 participations, dont $\frac{21}{2}$ matchs, ce qui est absurde ! De même, dans le cas de 15 clubs, si chaque club joue la moitié des matchs possibles, soit 7, il doit y avoir $\frac{15\times 7}{2}$ matchs : l'organisation d'un tel tournoi n'est pas possible, pour de pures raisons arithmétiques. On voit que, plus généralement, pour la même raison, s'il y a un nombre impair d'équipes, il n'est pas possible qu'elles jouent toutes un nombre impair de matchs. L'idée essentielle est de représenter la situation par un dessin particulier, un graphe : des points reliés par des traits. Dans ce dessin, la situation géométrique n'est pas importante, ce qui compte ce sont les points (ou sommets), et la façon dont ils sont reliés à d'autres par des traits (ou arêtes).*

Exercice 1.1.3. *Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?*

Solution 1.1.4. *Si l'on pense à représenter chaque segment par un point, et à relier 2 points si les segments correspondants se coupent, on voit, exactement comme pour l'exercice précédent, que l'exercice proposé est impossible. Remarquons que nous avons obtenu un résultat qui n'était nullement évident : pour montrer qu'un problème est possible, il suffit d'en exhiber une solution ; il est en général bien plus difficile de démontrer qu'un problème est impossible, et cela ne peut se faire sans un raisonnement.*

1.2 Préliminaires

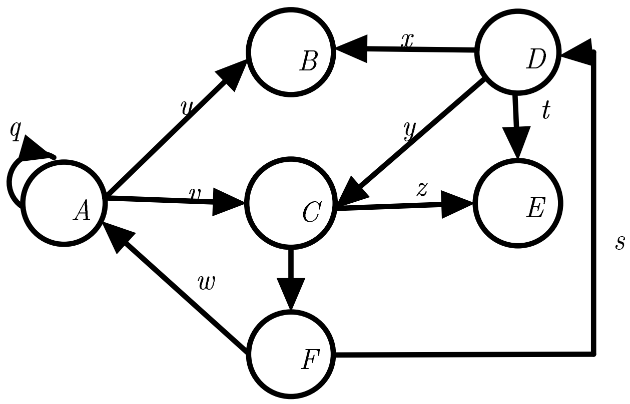
1.2.1 Vocabulaire de base

Définition 1.2.1. *Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ de points appelés sommets (ou nœuds), et d'un ensemble $A = \{a_1; a_2; ...; a_m\}$ d'arêtes, tels qu'à chaque arête ai sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités, et que nous noterons $(x_i; x_j)$ où x_i est un prédécesseur de x_j et x_j est un successeur de x_i.*

Un graphe est un ensemble de nœuds (ou sommets) qui sont reliés entre eux par des arcs. Mathématiquement, un graphe est représenté par un couple de deux ensembles G = (S ;A) où S est l'ensemble des nœuds (ou sommets) et A l'ensemble des arêtes (graphe non orienté) ou arcs (orienté).

Le nombre de sommets présents dans un graphe est l'ordre du graphe.

Remarque 1.2.2. *Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une boucle. Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets ; les mathématiciens ont donné à ce nombre un nom particulier (que l'on retrouve dans d'autres domaines, par exemple en théorie des groupes). Un arc relie deux nœuds entre eux, il sera donc représenté par un couple (x ; y) où x et y sont des nœuds.*
Un arc peut être orienté, c'est-à-dire que l'ordre de x et de y est important dans le couple $(x; y)$*. Un arc peut ne pas être orienté et dans ce cas, l'ordre de x et de y dans le couple* $(x; y)$ *n'a aucune importante, donc* $(x; y) = (y; x)$*.*



Exemple 1.2.3.

- *L'ensemble* $\{A, B, C, D, E, F\}$ *contient les sommets de ce graphe.*
- $\{u, v, w, x, y, z, t, s, q\}$ *est l'ensemble des arcs.*
- q *est une boucle*
- *L'arc* u *peut être représenté par le couple* (A, C) *toujours en respectant l'ordre*

Définition 1.2.4. *L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.*

L'ordre du graphe G de l'exemple (**??**) est égale à 6.

Définition 1.2.5. *Le chemin est une suite de sommets reliés par des arcs en respectant leurs sens.*

Définition 1.2.6. *La longueur d'un chemin est le nombre d'arc qui compose un chemin.*

Définition 1.2.7. *Le circuit d'un graphe orienté est un chemin particulier d'un sommet vers lui-même.*

Définition 1.2.8. *La boucle est un circuit de longueur 1.*

Définition 1.2.9. *Le chemin élémentaire est un chemin tel qu'en le parcourant on ne rencontre pas deux fois le même sommet.*

Définition 1.2.10. *Le chemin simple est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par le même arc.*

Définition 1.2.11. *Un graphe est complet si chaque sommet possède un arc vers tout autre sommet y compris lui-même. Si n sommet alors n^2 arcs.*

Définition 1.2.12. *Étant donnée une arête a associée à $(x_1; x_2)$, on dit que les sommets x_1 et x_2 sont les extrémités de l'arête a, et x_1 et x_2 sont dits adjacents. Lorsque $x_1 = x_2$, on dit que a est une boucle. Un graphe est dit simple si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle (c-à-d ne contient pas d'arête de la forme $(x_i; x_i)$).*

Définition 1.2.13. *Un graphe est dit symétrique lorsque*

$$(x_i x_j) \in A \Leftrightarrow (x_j x_i) \in A$$

Un graphe symétrique est dit aussi graphe non orienté.

Définition 1.2.14. *Un graphe G orienté (appelé aussi digraphe : directed graphe) est constitué d'un ensemble $S = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ de points appelés sommets, et d'un ensemble $A = \{a_1; a_2; ...; a_m\}$ d'arcs, tels qu'à chaque arête ai sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités, et que nous noterons $(x_i; x_j)$ où x_i est l'extrémité initiale et x_j est l'extrémité terminale de l'arc $a_i = (x_i; x_j)$: On dit aussi que x_i et x_j sont adjacents.*

Remarques 1.2.15. *1) Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin. Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot "orienté" pour préciser ; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner. En particulier, une chaîne orientée est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).*

2) Les graphes représentent un outil mathématique simple permettant de modéliser des situations différentes. Citons par exemple :
- *circulation dans une ville : sommets $\longleftrightarrow$carrefour ; arêtes $\longleftrightarrow$ vols existants.*
- *réseau informatique : sommets $\longleftrightarrow$ ordinateurs ; arêtes $\longleftrightarrow$ connexions physiques.*

Exercice 1.2.16. *Dans un groupe de vingt étudiants est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?*

Solution 1.2.17. *La situation est impossible, si du moins on suppose que l'amitié est réciproque. En effet, en traçant le graphe des amis, on voit que l'hypothèse implique qu'il y a 11 sommets impairs, ce qui ne peut arriver.*

Définition 1.2.18. *L'ensemble des successeurs d'un sommet $x \in S$ est noté $\Gamma(x)$: L'application*

$$\begin{aligned} \tau : S &\to P(S) \\ x &\longmapsto \tau(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

est appelée une application multivoque (qui à un élément de l'ensemble de départ associe un ou plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivé). Par ailleurs, l'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $x \in S$ est noté $\Gamma^{-1}(x)$.

Exemple 1.2.19. *Soit $S = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ et $A = \{(x_1; x_2); (x_2; x_1); (x_2; x_4); (x_3; x_3); (x_3; x_4)\}$*

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r, leftrightarrow] & x_2 \arrow[dl] \\ x_4 & x_3 \arrow[l] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

$$G_1 = (S; A)$$

Dans ce cas, $\Gamma(x_2) = \{x_1; x_4\}$ et $\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1\}$

Définition 1.2.20. *On appelle degré sortant (resp. degré rentrant) d'un sommet x le nombre d'éléments de $\Gamma(x)$ (resp. $\Gamma^{-1}(x)$), noté $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$). On appelle degré de x qu'on note $d(x)$ la quantité*

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

Remarque 1.2.21. *Ainsi le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est pair (respectivement impair) si son degré est un nombre pair (respectivement impair) ç-à-d le degré d'un sommet x est le nombre d'arêtes, noté $d(x)$, qui ont pour extrémité x.*

Exemple 1.2.22.
- *Dans le graphe G_1 de l'exemple 1 : s_1 est de degré 5, s_2 de degré 3, s_4 de degré 0.*
- *Les sommets du graphe complet d'ordre n sont tous de degré $(n-1)$.*

Remarque 1.2.23. *Un sommet de degré entrant non nul et de degré sortant nul est appelé puit, alors qu'un sommet de degré entrant nul et de degré sortant non nul est appelé source. D'autre part, un graphe $G = (S; A)$ est dit complet lorsque pour toute paire $(x; y) \in S \times S$ il existe au moins un arc de la forme $(x; y)$ ou $(y; x)$*

Exemple 1.2.24. *Dans le graphe G_1 on a :*

$$d^-(A) = 1; d^+(A) = 1; \quad d(A) = d^-(A) + d^+(A) = 1 + 1 = 2$$

le sommet A est un puit. Mais le graphe G_1 n'est pas complet car

$$(A; C) \in A \text{ et } (C; A) \neq A$$

On prouve facilement le théorème suivant :

Théorème 1.2.25. *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair. En d'autres termes, pour tout graphe G, on a :*

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2card(A).$$

Preuve 1.2.26. *Il suffit de voir que chaque arête relie deux sommets du graphe, et donc qu'elle est comptée exactement deux fois dans la somme de gauche.*

Exemple 1.2.27. *C'est la fête de l'aïd El Khebir. La population d'un village se réunit le matin. Chaque personne serre la main d'un certain nombres d'autres : 0, 1,... etc mains. Prouver que le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair.*

Solution 1.2.28. .

Définition 1.2.29. *Soit G un graphe. Une chaîne eulérienne de G est une chaîne de G qui contient une fois et une seule chaque arête de G.*

• *Un cycle eulérien de G est une chaîne eulérienne de G qui est un cycle, c'est-à-dire une chaîne eulérienne dont les extrémités sont confondues.*

• *Le graphe G est un graphe eulérien si et seulement si il admet un cycle eulérien.*

1.3 Étude de la connexité

1.3.1 Chaîne et cycle

La notion intuitive de chaîne, ou plus tard de chaîne orientée, se comprend bien sur un dessin, et il est essentiel que les élèves sachent reconnaître si un ensemble donnée d'arêtes est une chaîne. Il est moins facile d'en donner une définition effective.

Définition 1.3.1. *Une chaîne dans un graphe G est une suite finie :* $s_0; a_1; s_1; a_2; s_2; a_3; s_3, ..., a_n; s_n$ *débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités. La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la constituent ; la chaîne est fermée si* $s_0 = s_n$*, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un cycle. Un* k*-cycle est un cycle de longueur* k*.*

• *La longueur de la chaîne est égale aux nombres d'arêtes qui la composent.*

• *Si aucun des sommets composants la séquence n'apparaît plus d'une fois est dite chaîne élémentaire.*

• *Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident. Dans le cas des graphes orientés on appellera chemin au lieu de chaîne et circuit à la place de cycle.*

Remarques 1.3.2. *Une chaîne est dite élémentaire si elle ne passe jamais deux fois par le même sommet. Une chaîne est dite simple si elle ne passe jamais deux fois par la même arête.*

• *Dans un graphe simple, si une chaîne est élémentaire, alors elle est simple.*

• *Dans le cas d'un graphe simple, une chaîne est parfaitement caractérisée par la suite des sommets qu'elle rencontre ou par l'extrémité initiale de la chaîne et la suite d'arêtes.*

• *Une chaîne simple de longueur m (i.e. maximale) est une chaîne eulérienne.*

• *Un cycle est une chaîne dont les extrémités initiale et terminale coïncident. Un cycle élémentaire est un cycle minimal, au sens de l'inclusion, i.e. ne contenant strictement aucun cycle.*

• *Un chemin élémentaire de longueur* $n - 1$ *(i.e. maximale) est un chemin hamiltonien.*

• *Un circuit est un chemin dont les extrémités initiale et terminale coïncident. Un circuit élémentaire est un circuit minimal, au sens de l'inclusion, i.e. ne contenant strictement aucun circuit.*

Remarque 1.3.3. *Les notions correspondantes existent pour les graphes non orientés. On utilise alors plutôt le vocabulaire suivant :*

Orienté		Non orienté
arc	$\longleftrightarrow$	arête
chemin	$\longleftrightarrow$	chaîne
circuit	$\longleftrightarrow$	cycle

1.3.2 Graphe et sous-graphes connexes

Définition 1.3.4. *Soit $G = (S; A)$ un graphe non orienté. On dit que G est connexe lorsqu'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G : En d'autres termes,*

$$\forall(x; y) \in S^2; x \neq y, \exists\mu(x; y).$$

Un graphe G orienté est connexe lorsque le graphe non orienté associé est connexe.

Définition 1.3.5. *Un graphe orienté est dit fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconque. En d'autres termes,*

$$\forall(x; y) \in S^2; x \neq y, \exists\mu(x; y).$$

Théorème d'Euler

Théorème 1.3.6. *Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

Théorème 1.3.7. *Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne distincte d'un cycle si et seulement si le nombre de sommets de G de degré impair est égal à 2. Dans ce cas, si A et B sont les deux sommets de G de degré impair, alors le graphe G admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B.*

1.4 Coloration d'un graphe

Définition 1.4.1. *Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets, de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.*

Définition 1.4.2. *On appelle nombre chromatique d'un graphe le plus petit nombre de couleurs permettant de colorer le graphe.*

Remarque 1.4.3. *Il n'existe pas de formule donnant le nombre chromatique d'un graphe. On connait en général un encadrement de celui-ci.*

Proposition 1.4.4. *(Encadrement de nombre chromatique)*
Soit G un graphe et Δ le plus grand de tous les degrés des sommets $\Delta = max_x d(x)$. Alors le nombre chromatique de G est inférieure ou égale à $\Delta + 1$.

Proposition 1.4.5. *Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égale a celui de plus grand graphe complet.*

1.4.1 Algorithme de coloration (algorithmes de Welsh-Powel)

Les algorithmes glouton sont couramment utilisés dans la résolution de problèmes.

Le principe de tels algorithmes consiste à choisir des solutions locales optimales d'un problème dans le but d'obtenir une solution optimale globale au problème.

Dans le cas du coloriage de graphe, cela va consister à colorier les sommets un par un avec la plus petite couleur possible ; l'ensemble des couleurs possibles étant donné par les couleurs de ses voisins. L'ordre dans lequel les sommets sont traités définit les différentes variantes de d'algorithme. Une méthode est de colorer les sommets par ordre de difficultés décroissantes.

L'algorithme glouton le plus utilisé est l'algorithme de Welsh-Powel que nous allons étudier plus en profondeur dans une paragraphe dédié.

Étape 1 : *Repérer le degré de chaque sommet.*

Étape 2 : *Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants (dans certains cas plusieurs possibilités).*

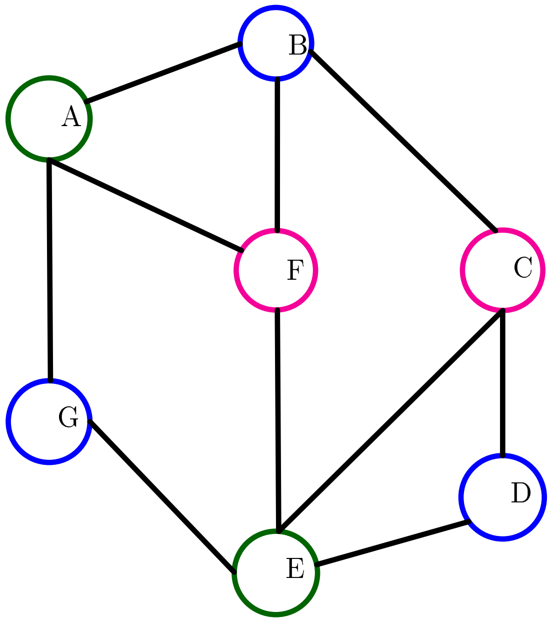
Étape 3 : *Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.*

Étape 4 : *Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).*

Étape 5 : *Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.*

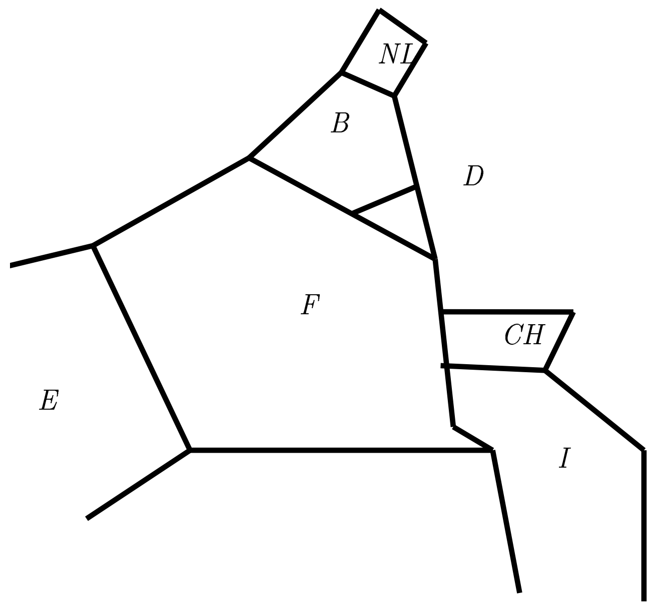
Étape 6 : *Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore coloré de la liste. Répéter les opérations 3 à 7.*

Étape 7 : *Continuer jusqu'à avoir coloré tous les sommets.*



Exemple d'application :

x	$d(x)$	Couleur
E	4	vert
A	3	vert
B	3	bleu
C	3	rose
F	3	rose
D	2	bleu
G	2	bleu



Exemple 1.4.6. *On donne la carte suivante*

1) Représenter la carte par un graphe.

2 Donner un encadrement de nombre chromatique

3) Combien des couleurs faut-il aux minimum pour colorer ce graphe (proposer un coloriage)

Solution 1.4.7. .

1.5 Mode de représentation d'un graphe

1.5.1 Matrice d'adjacence

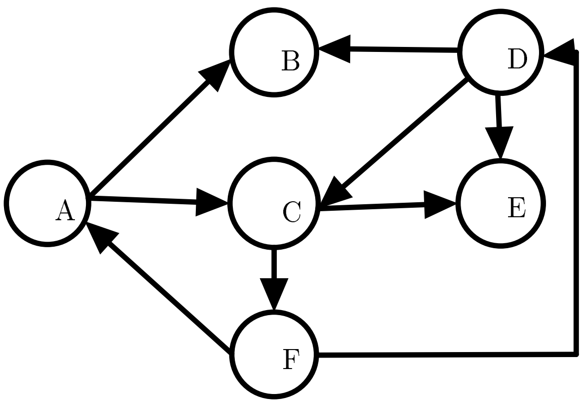
Il est parfois pratique de représenter un graphe G d'arêtes $a_1, ..., , , a_n$ et de sommets $s_1, ..., s_m$ par une matrice.

Définition 1.5.1. *Soit $G = (S; A)$ un graphe comportant n sommets la matrice d'adjacence de G est $U = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq 1}$ telle que :*

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & si(i,j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

En d'autres termes, $u_{ij} = \chi_A(i, j)$: Une telle matrice est booléenne puisqu'elle ne contient que des 0 et des 1

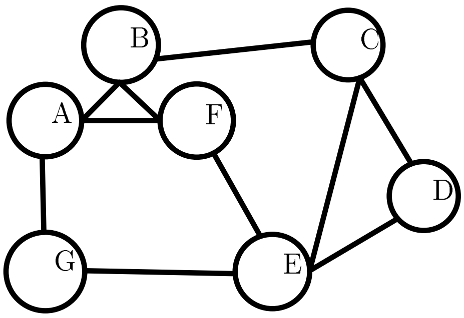
Nous donnons par la suite deux exemples de représentation du graphe par matrice d'adjacence l'un pour un graphe orienté et l'autre pour un graphe non orienté.
Soit le graphe orienté suivant, nous donnons la matrice d'adjacence associé à ce graphe



M est la matrice d'adjacence associé au graphe G.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par la suite vous trouver le graphe G' non orienté et la matrice associé.



$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques 1.5.2. 1. *Si le graphe ne contient pas des boucles, le diagonal de cette matrice est constitué de 0.*

2. *Si le graphe n'est pas orienté cette matrice est symétrique*

3. *Si le graphe est orienté, cette matrice n'est peut être pas symétrique.*

1.5.2 Méthodes de recherche de chemins

En théorie de graphe, il existe un problème important qui consiste en la recherche du chemin le plus court, entre deux points donnés en tenant compte de ce marquage.

Théorème 1.5.3. *Soit $G = (X; A)$ un graphe orienté (respectivement non orienté) d'ordre n, avec $S = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$; de matrice d'adjacence $U = (u_{ij})$: Pour tout entier naturel k ; non nul notons*

$$U^k = \left(u_{ij}^{(k)}\right)$$

Alors $u_{ij}^{(k)}$ est égal au nombre de chemins (respectivement chaînes) de longueur k du sommet x_i au sommet x_j :

Exemple 1.5.4. *Déterminons le nombre de chemins de longueur 4 allant de a à b dans le graphe G_1 :*

La matrice d'adjacence de G est

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chemins cherché est le terme (1 ; 2) de la matrice

$$U^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

ceci implique que Le nombre de chemins cherché est 8

Exemple 1.5.5. *Déterminons le nombre de circuits de longueur 4 dans le graphe G_2 :*

La matrice d'adjacence de G_2 est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de circuits de longueur 4 dans G_2 est égale à la trace de U^4 :

$$U^4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

et $tr(U^4) = 17$: