Disciplina: Matemática Discreta
Professor: Danielle Gonçalves Teixeira
3ª lista de exercícios

Princípio da Indução Matemática

1 – Use o princípio de indução matemática para provar as identidades que seguem.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(c) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

(d) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$

(e) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$

2 – Use o princípio de indução matemática para provar as desigualdades que seguem.

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, para todo inteiro positivo n

(b) $2^n < \prod_{j=1}^{n} j$, para $n \geq 4$

3 – Prove pelo princípio da indução matemática que o termo geral da progressão:

(a) aritmética é: $a_n = a_1 + (n-1)r$

(b) geométrica é: $a_n = a_1 q^{n-1}$

4 – Prove pelo princípio da indução matemática que a fórmula para a soma dos termos de uma progressão:

(a) aritmética é: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

(b) geométrica é: $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$

5 – Considere F_n o número de Fibonacci. Prove, usando o princípio da indução matemática, que, para todo inteiro positivo n:

(a) $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$

(b) $\sum_{j=1}^{n} F_{2j-1} = F_{2n}$

6 – Provar, pelo princípio da indução matemática, que, para todo inteiro positivo n,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

onde F_1, F_2, ... é a sequência de Fibonacci.