

```

;将两个序对交替取出
; s1,t1,s2,t2,...,si,ti,...
(define (interleave s t)
  (if (stream-empty? s)
      t
      (stream-cons (stream-car s)
                    (interleave t (stream-cdr s)))))

;序对流
(define (pairs s t)
  (stream-cons
    (list (stream-car s) (stream-car t))
    (interleave
      (stream-map (lambda (x) (list (stream-car s) x))
                  (stream-cdr t))
      (pairs (stream-cdr s) (stream-cdr t)))))

;(display-top10 (pairs integers integers))
;(1 1) (1 2) (2 2) (1 3) (2 3) (1 4) (3 3) (1 5) (2 4)

```

- 以  $Pa(S, T)$  表示序对  $(S_i, T_j)$  组成的流, 其中  $(i \leq j \text{ 且 } i, j > 0)$ 。对这个流有如下描述:  
流的第一个序对是  $(S_1, T_1)$ , 其他部分是流  $\{(S_1, T_2), (S_1, T_3), \dots\}$  和  $Pa(S.r, T.r)$  中的序对元素按交叉顺序出现的流。(其中  $S.r$  表示流  $S$  中第一个元素之外的其他元素, 用  $\langle a, b \rangle$  表示流  $a, b$  中的元素按交叉顺序出现), 则有

$$Pa(S, T) = \{ (S_1, T_1), \langle \{ (S_1, T_2), (S_1, T_3), \dots \}, Pa(S.r, T.r) \rangle \}$$

- 用  $F(i, j)$  表示序对  $(S_i, T_j)$  到序对  $(S_1, T_1)$  的距离, 结合上面的描述, 我们递归的给出这个函数表达式:

假设分别从  $S$  和  $T$  的第  $i-1$  和  $j-1$  的位置开始构造, 可以得到下面的一个流(为了方便, 这里仅用下标表示元素):

$$\dots, (i-1, j-1), (i-1, j), (i, j), (i-1, j+1), \dots$$

我们知道序对  $(i-1, j-1)$  到首序对的距离为  $F(i-1, j-1)$ , 结合  $Pa(S, T)$  的数学描述, 明显的我们可以得到

$$F(i, j) = 2 * F(i-1, j-1) + 2$$

特殊的, 我们知道  $F(1, 1) = 0$ ,  $F(1, j) = 2 * j - 3$ , ( $j > 1$ )。

一般的, 当  $i = j$  时, 有

$$\begin{aligned}
 F(i, j) &= 2 * F(i-1, j-1) + 2 \\
 &\vdots \\
 &= 2^{(i-1)} * F(1, 1) + 2 + 2^2 + \dots + 2^{(i-1)} \\
 &= 2^i - 2
 \end{aligned}$$

当  $i < j$  时, 我们可以知道  $i$  一定会先被减到 1, 所以我们可以得到

$$\begin{aligned}
 F(i, j) &= 2^{(i-1)} * F(1, j-i+1) + 2 + 2^2 + \dots + 2^{(i-1)} \\
 &\vdots \\
 &= 2^i * (j-i) + 2^{(i-1)} - 2
 \end{aligned}$$

- 按照上面的  $F(1, 100) = 197$ , 并且代码验证 `(stream-ref (pairs integers integers) 197)`, 得到 `(1, 100)`
- 那么  $F(100, 100) = 2^{100} - 2$