Référentiels astronomiques

1. Présentation

Par « référentiel », nous entendons un ensemble de quatre paramètres scalaires : trois paramètres définissant la position dans l'espace et un paramètre temps définissant l'instant d'observation.

1.1. Physique galiléenne

Nous nous plaçons résolument dans le cadre de la physique galiléenne où l'on considère que le temps et l'espace sont indépendants, l'espace ayant une structure euclidienne de dimension trois. Ceci est une approximation qui ne sera sensée qu'à la double condition suivante :

1- **Il faut que les vitesses envisagées restent très petites par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide**, faute de quoi le modèle de la *relativité restreinte* devra être appliqué dans lequel l'espace-temps est un *espace de Minkowski* quadridimensionnel : le temps et l'espace ne sont alors plus indépendants avec pour corolaire que les notions de distance (intervalle d'espace entre deux évènements) et de durée (intervalle de temps entre deux évènements) ne sont plus des absolus. Cependant l'univers reste « plat » et pour chaque observateur la géométrie de l'espace est euclidienne.

2- **Les champs de gravitation ne doivent pas être trop intenses**, faute de quoi le modèle de la *relativité générale* devra être appliqué : non seulement le temps et l'espace ne sont plus indépendants, mais la géométrie n'est plus euclidienne. L'Univers devient « courbe » : la lumière ne s'y déplace plus en ligne droite mais selon des *géodésiques* définies par la courbure locale de l'espace-temps produite par la gravitation.

1.2. Repérage dans le temps

Nous sommes dans l'hypothèse qu'il existe un temps idéalement uniforme dans lequel les lois de la physique s'expriment de façon universelle et permanente.

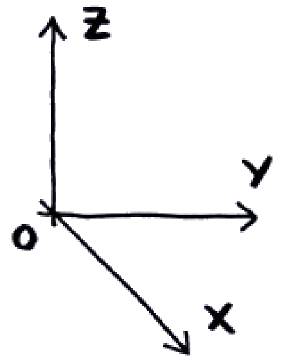
Pour se repérer dans ce temps qui est le même pour tous, il suffit dès lors de s'entendre sur le choix d'un instant privilégié que l'on choisit comme *origine du temps* et d'une unité de mesure des *intervalles de temps* (ou encore des *durées*).

L'astronomie a joué un rôle essentiel dans l'histoire des sciences pour ce qui concerne la connaissance du temps et nous consacrerons une section entière de ce document à en faire une petite synthèse.

1.3. Repérage dans l'espace

Coordonnées cartésiennes

La façon la plus simple de se repérer dans l'espace consiste à définir un point origine O, une unité de longueur et trois directions arbitraires de préférence orthogonales entre elles 2 à 2. Les projections orthogonales d'un point M de l'espace sur chacun de ces axes définissent les *coordonnées cartésiennes* $[X, Y, Z]$ du point M dans ce référentiel d'espace orthonormé.

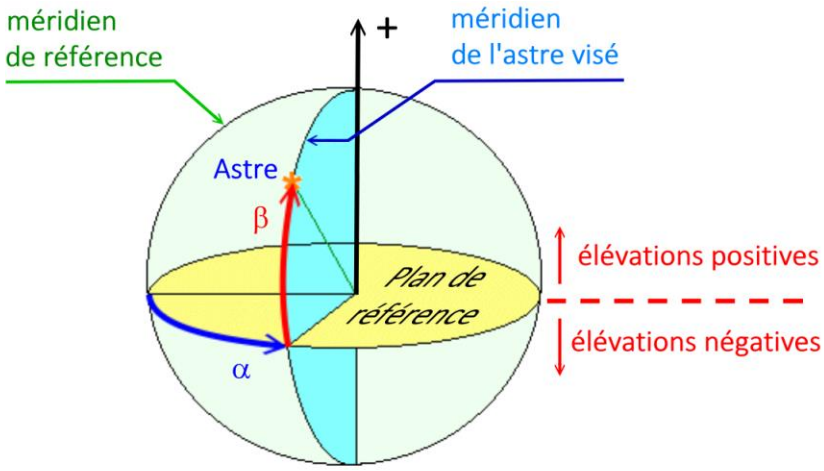


$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ étant les vecteurs unitaires dans ces trois directions, la position dans l'espace sera décrite par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

Coordonnées sphériques

Si simple que soit ce système de coordonnées cartésiennes, il n'est pas souvent la meilleure façon de se repérer dans l'espace pour l'astronomie.

Souhaitant décrire ce que nous voyons dans le ciel depuis un point d'observation particulier, le plus simple est de se considérer au centre d'une sphère (la *sphère céleste*) et d'utiliser deux angles (α, β) pour définir la direction dans l'espace de l'objet visé et la distance d , positive donc, à laquelle se trouve cet objet.



Tout d'abord, il faut choisir un plan de référence, selon le type d'observation qui nous intéresse, et une normale positive à ce plan. Ce plan (en jaune sur le schéma) sera tantôt le plan horizontal, tantôt le plan équatorial ou le plan de l'écliptique ou alors galactique. Le plan doit être orienté, c'est-à-dire qu'il faut lui définir une normale positive. Ce sera tantôt le Pôle *nord* céleste, tantôt le *Zénith*, tantôt le Pôle *nord* écliptique ou galactique…

Les plans orthogonaux au plan de référence découpent sur la sphère céleste des demi-cercles que l'on appelle des « *méridiens* » et l'un de ces méridiens aura le privilège de définir l'origine des *longitudes* α . Cet angle sera mesuré tantôt dans le sens direct (*ascension droite, longitude écliptique ou galactique*), tantôt dans le sens inverse (*azimut, angle horaire*).

Le deuxième angle, β , mesure algébriquement l'élévation de l'astre à partir du plan de référence. Il s'appellera tantôt *hauteur*, *déclinaison* ou *latitude*.

2. Le calendrier et la mesure du temps

2.1. Le temps atomique international : TAI

La *seconde*, unité de temps du Système International d'unités est, de très loin, l'unité dont la définition est la plus précise et ceci grâce à l'usage des horloges atomiques au césium :

« *La seconde est, par définition, la durée de* $9\,192\,631\,770$ *périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'isotope* 133 *de l'atome de césium, au repos, à une température de* 0 K. »

Le *Bureau international des poids et mesures* définit une échelle de temps dite du *temps atomique international* (TAI) à partir de plus de 400 horloges atomiques réparties dans plus de 70 laboratoires différents dans le monde.

La seconde est aujourd'hui définie avec une incertitude relative inférieure à 10^{-14} .

En astronomie, cette extrême précision n'est pas sans intérêt : elle nous permet par exemple de rendre compte des très infimes irrégularités de la rotation de la Terre sur elle-même. Cette précision des horloges atomiques permet aussi de mesurer les effets de la gravitation sur le cadencement du temps et de vérifier les prédictions théoriques de la relativité générale.

2.2. Le temps universel : UT

Pour la quasi-totalité de nos activités astronomiques, la référence au *temps universel* (UT) est largement suffisante. Cette échelle de temps est basée sur la rotation moyenne de la Terre sur elle-même.

Définition

La période de rotation de la Terre autour de son axe polaire, mesurée dans un référentiel d'inertie, est d'une constance déjà très fiable. Pour s'assurer d'une mesure dans un référentiel d'inertie, on mesure l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs d'une même étoile au méridien, en prenant garde de choisir une étoile n'ayant pas de mouvement propre appréciable. On parle aussi bien, par raccourci de langage, de la « rotation sidérale » de la Terre et de sa « période sidérale » T_{sid} .

Valeur numérique : $T_{\text{sid}} = 23\text{ h }56\text{ min }4{,}09\text{ s}$. Les irrégularités du jour sidéral sont de l'ordre de grandeur de la milliseconde. Nous observons actuellement une augmentation de T_{sid} de l'ordre de 1 ms/jour , ce qui correspond à un décalage d'une fraction non négligeable de seconde par an.

L'origine du temps

L'Union Astronomique Internationale a défini pour origine des temps le premier janvier de l'an 2000 à midi UT. Sauf indication contraire, ce choix s'impose dans tous les calculs astronomiques.

Exemple : pour connaître le temps t le 2 novembre 2016 à 18 h 27 min heure française, soit 17 h 27 min UT, calculons tout d'abord le nombre de jours écoulés entre le 1er janvier 2000 à 12 h UT et le 2 novembre 2016 à 12 h UT, soit 6150 jours, puis la fraction de jour écoulée entre 12 h et 17 h 27 min, soit 0,14375 jour. Nous en déduisons : $t = 6150{,}14375\text{ j } = 531372\,420\text{ s}$

2.3. Le calendrier

Établir un calendrier signifie repérer le temps par une numérotation entière continue des secondes, des jours et des années : si le jour solaire moyen durait exactement un nombre entier de secondes et si l'année tropique (définissant le cadencement des saisons) durait exactement un nombre entier de jours, nous n'aurions pas de problème de calendrier. Mais ces vœux ne sont satisfaits ni l'un ni l'autre.

Les secondes intercalaires

La seconde étant définie indépendamment de la rotation de la Terre, le jour solaire moyen ne dure pas exactement 84600 secondes et il apparaîtrait au fil des siècles, si l'on n'y prenait garde, un décalage du temps par rapport au cadencement des jours : c'est un problème de calendrier.

Pour pallier cet inconvénient, le bureau international des poids et mesures définit le *temps universel coordonné* (UTC) qui s'écoule comme le temps atomique à ceci près qu'on lui ajoute (ou on lui retranche) une *seconde intercalaire* quand c'est nécessaire pour que les jours ne se décalent pas au fil du temps.

La différence UTC–TAI est donc égale, par définition, à un nombre entier de secondes : 36 secondes depuis le 30 juin 2015 et la prochaine seconde intercalaire, additionnelle, est déjà programmée pour le 31 décembre 2017.

Les années bissextiles

L'année tropique, intervalle de temps entre deux équinoxes de printemps consécutifs, a une durée actuelle de 365,2422 jours. Ce nombre n'est pas entier et cela pose un problème de calendrier.

En partant sur la base d'une année de 365 jours, il est nécessaire d'ajouter un jour intercalaire à la fréquence d'un peu moins d'un jour tous les quatre ans pour qu'il ne se produise pas de décalage dans l'appellation des jours par rapport aux saisons.

Le *calendrier julien*, mis en œuvre par Jules César à partir de 45 avant JC, introduit un jour intercalaire (le 29 février) toutes les années dont le numéro est divisible par quatre, ce qui conduit à définir une année calendaire moyenne de $\frac{365+365+365+366}{4}=365,25\text{ jours}$, se rapprochant assez de l'année tropique dont la durée était bien connue des astronomes à cette époque. Cette période de 365,25 jours est appelée « année julienne ».

Le calendrier julien produit un décalage de 0,78 jour par siècle par rapport au rythme des saisons et cela est devenu progressivement trop important. La célébration des fêtes religieuses ne devait pas ainsi se décaler pour la seule raison que l'on compte mal les jours : c'est la motivation de la réforme grégorienne imposée par l'église catholique en 1584.

En plus de passer à la trappe les 10 jours que l'on a compté en trop, la réforme propose un nouveau mode de détermination des années bissextiles : dorénavant, les années de siècle ne seront bissextiles que si le numéro du siècle est un multiple de 4. C'est ainsi que 2000 fut une année bissextile (20 est divisible par 4) et que 2100 ne le sera pas (21 n'est pas divisible par 4).

La réforme grégorienne conduit à définir une année calendaire moyenne de 365,2425 jours produisant un décalage de moins de 3 jours en 10000 ans, ce qui laisse largement le temps à l'humanité de considérer que les religions d'aujourd'hui sont des croyances naïves du passé.

3. Coordonnées sphériques horizontales

3.1. Définitions

Les coordonnées horizontales $\{A, h\}$ d'un astre sont des coordonnées sphériques locales ayant pour base le cercle de l'horizon. Le plan horizontal est orienté par la verticale ascendante dont la direction est appelée *Zénith*.

Azimut

L'azimut, noté A, se mesure en astronomie dans le sens horaire, à partir du méridien sud. En général, cet angle est exprimé en degrés soit dans l'intervalle $0° \leq A < 360°$, soit dans l'intervalle $-180° < A \leq +180°$.

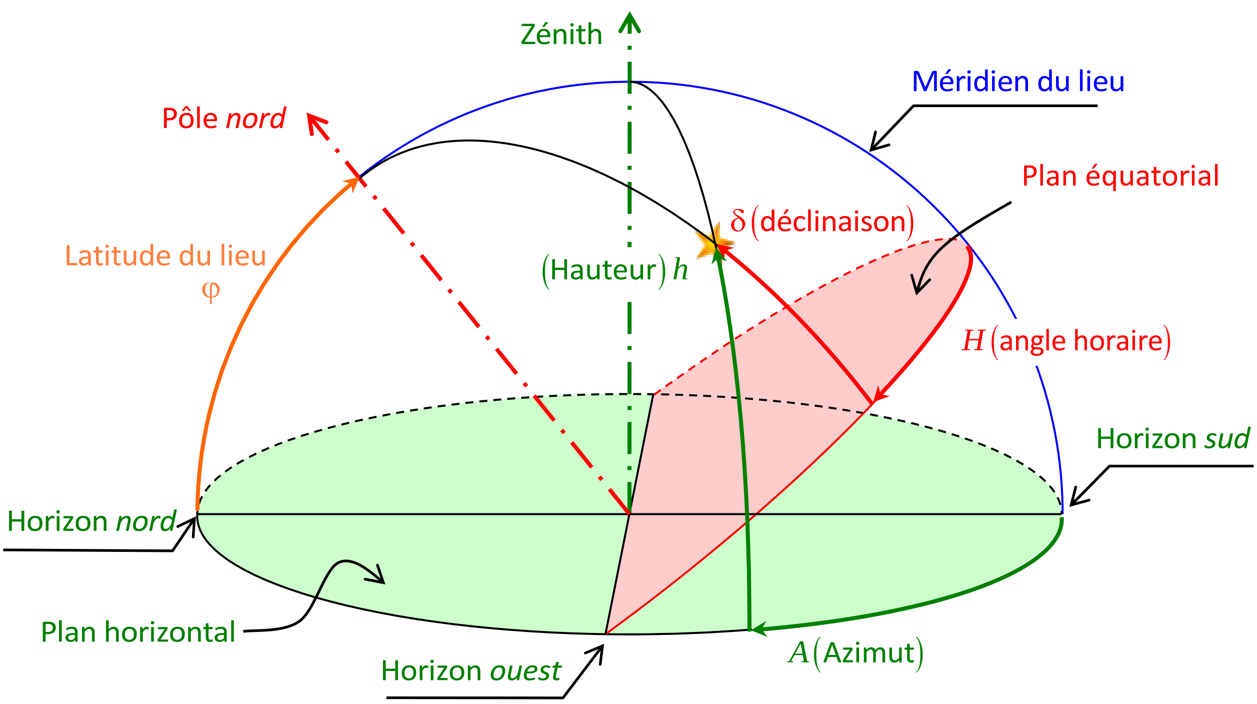
Attention ! Les marins repèrent traditionnellement l'azimut à partir de l'horizon *nord* tout en le mesurant comme les astronomes dans le sens rétrograde. Ainsi sont étalonnés tous les compas de *relèvement* (autre nom donné par les marins à l'azimut). Cette tradition est si forte que certains astronomes ne respectent pas les normes de leur discipline.

Note : c'est le cas en particulier du logiciel PRISM que nous utilisons à l'observatoire de la Pointe du Diable, pour lequel le *nord* est à l'azimut $0°$, l'*est* à $90°$, le *sud* à $180°$ et l'*ouest* à $270°$.

Hauteur

Pour la hauteur, notée h, tout le monde est d'accord : la hauteur d'un astre à l'horizon est nulle. Elle se mesure positivement au-dessus de l'horizon, de $0°$ jusqu'à $90°$ au zénith, et négativement en dessous de l'horizon, de $0°$ jusqu'à $-90°$ au *nadir* (direction opposée au zénith).

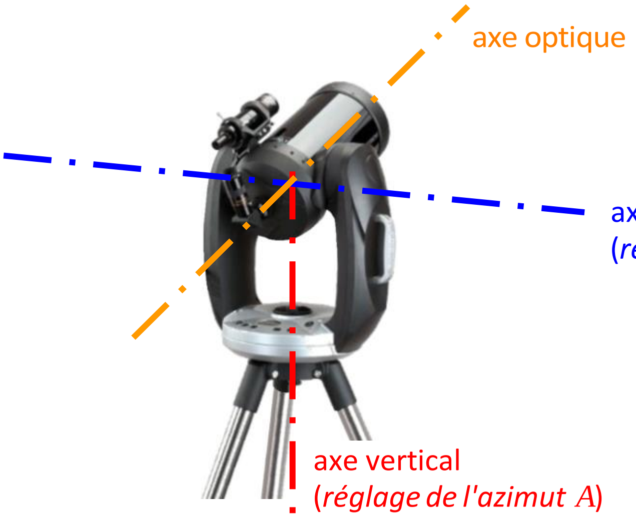
On utilise parfois aussi l'angle complémentaire que l'on appelle « distance zénithale ».



3.2. Montures astronomiques azimutales

Définition

Ainsi nomme-t-on ces montures, de plus en plus utilisées en astronomie, possédant deux axes orthogonaux dont l'un, vertical, permet de régler l'azimut de l'astre visé, et l'autre, horizontal, permet d'en régler la hauteur. L'anglicisme « alt-azimutale » est souvent utilisé, strictement dans le même sens.



Avantages

La construction mécanique de telles montures est la plus simple qui soit et cela conduit donc à un coût moins élevé. De plus, si les trois axes (axe d'azimut, axe de hauteur et axe optique du télescope) sont concourants, cela correspond à des montures idéales du point de vue gravitationnel : point de porte-à-faux, point de flexion, point de torsion. Ce n'est pas pour rien que les plus récents télescopes professionnels en sont équipés.

Du côté des amateurs, du fait de leur réalisation à moindre coût et de la facilité de leur mise en œuvre, ces montures seront privilégiées pour équiper des instruments de type « *Dobson* » qui privilégient l'observation directe à l'oculaire.

Inconvénients

Ils sont nombreux : ce n'est pas pour rien que les amateurs sont peu nombreux à opter pour cette technologie. En voici les plus importants :

1- La poursuite horaire des astres doit être effectuée sur deux axes et le mouvement n'est pas uniforme. La motorisation efficace de telles montures nécessite donc l'utilisation d'un calculateur numérique. Notons bien que cet inconvénient est aujourd'hui tout à fait mineur : un ordinateur lambda est apte à gérer ces calculs ne coute pas très cher.

2- Le passage sans encombre très près du zénith suppose d'être capable de produire des vitesses de rotation importantes. Cet inconvénient (mineur) fait que, la puissance des moteurs étant choisie, il existe un cône autour du zénith dans lequel la poursuite sera inévitablement déficiente.

3- La poursuite azimutale entraîne une rotation du champ autour de l'axe optique du télescope, ce qui est un inconvénient majeur pour la photographie, pour la spectroscopie, pour la quasi-totalité des activités à l'exception de l'observation directe à l'oculaire. Ces montures azimutales doivent donc le plus souvent être combinées avec un troisième dispositif motorisé : le *dé-rotateur de champ*.

4. Visée équatoriale d'un astre

4.1. Montures équatoriales

Une monture équatoriale est constituée de deux axes concourants supposés orthogonaux :

- L'axe horaire (on dit aussi bien « axe *alpha* »), positionné parallèlement à l'axe de rotation de la Terre sur elle-même, autour duquel s'effectue le mouvement horaire.
- L'axe de déclinaison (on dit aussi bien « axe *delta* »), orthogonal à l'axe horaire. Le télescope est solidaire de l'axe de déclinaison par un mode de fixation qui diffère selon le type de monture.

L'intérêt des montures équatoriale est de permettre la compensation du mouvement apparent des étoiles dû à la rotation de la Terre sur elle-même par l'action d'un seul moteur faisant tourner le télescope autour de l'axe horaire d'un mouvement exactement opposé à celui de la Terre. Dans ces conditions, toutes choses parfaites par ailleurs, une étoile visée reste indéfiniment au centre du champ.

Les deux types de montures les plus utilisées en astronomie amateur sont les *montures équatoriales à fourche* et les *montures équatoriales allemandes*.

- Dans le cas d'une monture à fourche, le télescope est porté à l'intérieur d'une fourche en U de telle sorte que son axe optique soit concourant avec les deux axes de la monture.
- Dans le cas d'une monture allemande, le télescope est déporté, attaché à une extrémité de l'axe de déclinaison tandis qu'à l'autre extrémité est placé un contrepoids d'équilibrage.

Retournement d'une monture allemande

Dans le cas d'une monture allemande, il peut exister deux façons de placer le télescope conduisant à observer dans la même direction du ciel. Nous définissons ainsi deux configurations « duales » obtenues pour la monture allemande en permutant le télescope et le contrepoids.

La configuration qui place le télescope plus haut que le contrepoids (position haute) est toujours accessible tandis que la configuration qui place le télescope plus bas que le contrepoids (position basse) n'est accessible que pour certaines directions de visée.

Remarque : Dans le cas d'une monture à fourche, il existe aussi des configurations duales. Le retournement consiste alors à faire passer l'oculaire dans la fourche, ce qui n'est pas toujours possible.

4.2. Coordonnées équatoriales d'un astre

Les coordonnées équatoriales sont des coordonnées sphériques à base équatoriale. Il s'agit d'un système de repérage des astres dans le ciel ayant une valeur universelle : ces deux angles sont identiques pour un même astre à la même époque pour tous les observateurs terrestres.

Ascension droite

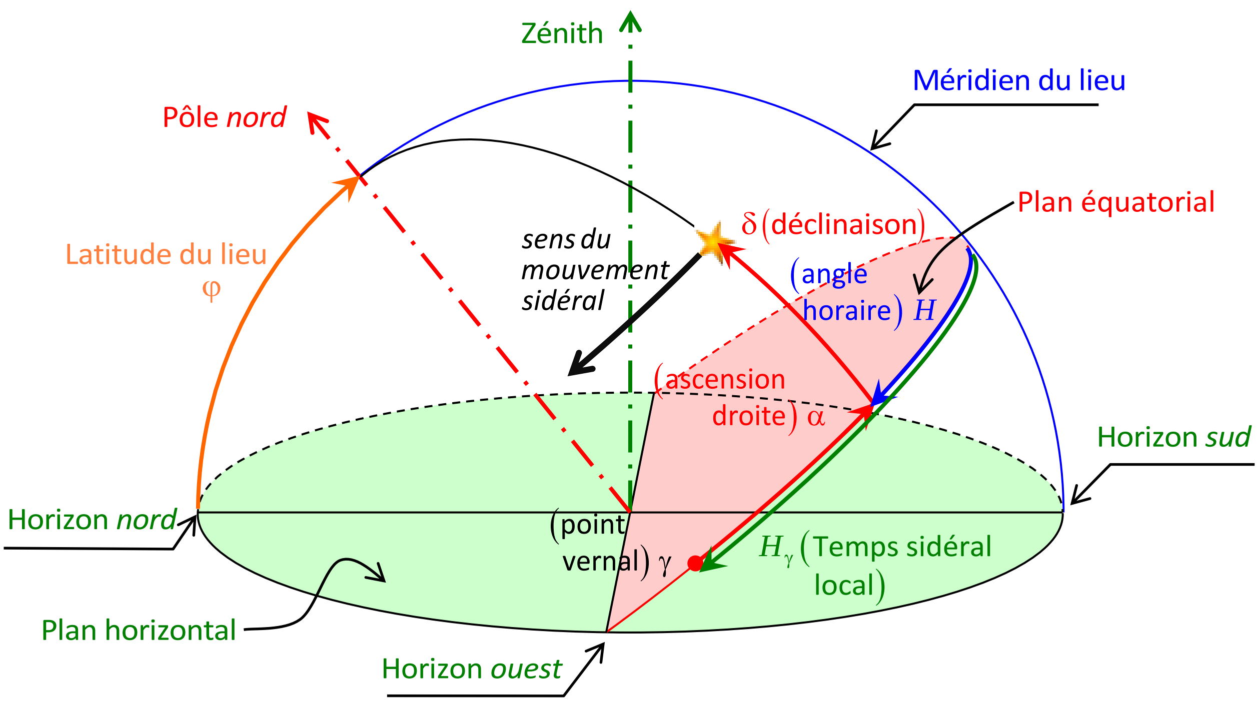
L'ascension droite, notée α (lire : alpha) est une longitude comptée sur l'équateur céleste positivement dans le sens direct à partir du *point vernal* noté γ.

Le sens direct est le sens de rotation de la Terre, opposé donc au sens du mouvement apparent des étoiles dans le ciel que l'on qualifie de « mouvement sidéral » ou « mouvement diurne », cette dernière appellation faisant référence au mouvement apparent du Soleil.

Le point vernal (on dit aussi « point gamma ») correspond à la position du centre du Soleil quand il franchit l'équateur, passant de l'hémisphère *sud* à l'hémisphère *nord*, au moment de l'équinoxe de printemps. Le point vernal est animé du même mouvement diurne que les étoiles : il se lève à l'*est*, culmine au méridien *sud* et se couche à l'*ouest* pour poursuivre sa course sous l'horizon dans l'hémisphère opposé.

Remarque : nous verrons plus loin que ce point vernal est lentement variable, ce qui a pour effet de faire varier les coordonnées équatoriales des astres. C'est pourquoi il doit toujours être précisé l'époque à laquelle elles correspondent. Les cartes et les tables actuelles font en général référence aux coordonnées équatoriales au 1^{er} janvier 2000.

L'unité d'angle par défaut est toujours le radian $(1\,\text{tour} = 2\pi\ \text{rad})$, mais il est d'usage d'exprimer les ascensions droites en heures, minutes, secondes, avec par définition 24 heures pour faire un tour, soit $1\ \text{heure} = 15°$, les sous-multiples minutes sidérales et secondes sidérales étant définis, comme pour le temps, dans un système numérique sexagésimal.



Déclinaison

La déclinaison d'un astre, notée δ (lire : delta) est son élévation comptée positivement de l'équateur céleste vers le pôle *nord* céleste et négativement, bien sûr, de l'équateur vers le pôle *sud*.

L'unité d'angle usuelle pour les déclinaisons est le degré. Elles se mesurent donc de $0°$ à $+90°$ de l'équateur jusqu'au pôle *nord* et de $0°$ à $-90°$ de l'équateur jusqu'au pôle *sud*.

Attention ! Le degré est aussi associé à des sous-multiples sexagésimaux, la minute d'arc et la seconde d'arc : $1\,\text{h} = 15°$; $1\,\text{min} = 15'$ (lire : une *minute sidérale* = quinze *minutes d'arc*) et $1\,\text{s} = 15''$. Il faut être d'autant plus vigilent que l'on dit souvent minute et seconde sans autre indication, le sens venant du contexte.

4.3. Coordonnées horaires d'un astre

Les coordonnées horaires sont également des coordonnées sphériques basées sur l'équateur : l'angle horaire H et la déclinaison δ. La déclinaison a la même définition que pour les coordonnées équatoriales mais l'angle horaire, cette fois, a une définition locale.

Angle horaire

Le méridien de référence pour l'angle horaire est le méridien du lieu d'observation et cet angle se mesure, comme son nom l'indique, dans le sens horaire, c'est-à-dire dans le sens du mouvement diurne.

Comme pour l'ascension droite, l'angle horaire sera usuellement exprimé en heures, minutes et secondes dans l'intervalle $0\text{ h} \le H < 24\text{ h}$ ou, aussi bien, dans l'intervalle $-12\text{ h} < H \le +12\text{ h}$ (H négatif à l'*est* du méridien et positif à l'*ouest*)

Temps sidéral local

Un lieu d'observation sur la Terre est caractérisé par deux angles : la longitude du méridien local (λ), comptée positivement vers l'*ouest* à partir du méridien de Greenwich, et la latitude (φ), comptée à partir de l'équateur, positivement vers le *nord*. En un lieu donné de longitude λ et à l'instant *t*, l'angle horaire $H_\gamma(\lambda, t)$ du point vernal γ s'appelle le *temps sidéral local*. Le temps sidéral est une fonction affine du temps de la forme :

$$H_\gamma(\lambda, t) = H_{\gamma 0} - \lambda + \Omega_{\text{sid}}\, t$$

La constante $H_{\gamma 0}$ est le temps sidéral de Greenwich à la date origine choisie conventionnellement par l'Union astronomique internationale le 1er janvier 2000 à 12 h.

Valeur numérique : $H_{\gamma 0} = 1{,}7533686\text{ rad} = 100°\ 27'\ 38'' = 6\text{ h }41\text{ min }50{,}5\text{ s}$.

Remarque : le temps sidéral est incrémenté de 24 h (unité d'angle) toutes les 23 h 56 min 4,09 s (unité de temps). Les secondes sidérales se suivent quasiment au rythme des secondes de temps, mais il ne faut pas s'y tromper : **le temps sidéral est un angle** et nous pouvons tout aussi bien l'exprimer en radian ou en degrés. L'usage des heures, minutes et secondes d'angle n'est que conventionnel.

Ω_{sid} est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe polaire, mesurée dans un référentiel d'inertie : on dit aussi bien, par raccourci de langage, « rotation sidérale ».

Valeur numérique : $\Omega_{\text{sid}} = \dfrac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = 7{,}292115855 \times 10^{-5}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 360{,}9856474\,°/\text{jour}$.

Relation entre ascension droite, temps sidéral et angle horaire

Compte tenu de toutes ces définitions, l'angle horaire d'un astre en un lieu donné de longitude λ, à l'instant t, est donc une fonction affine croissante du temps ayant pour expression :

$$H = H_\gamma - \alpha = H_{\gamma 0} - \lambda - \alpha + \Omega_{\text{sid}}\, t$$

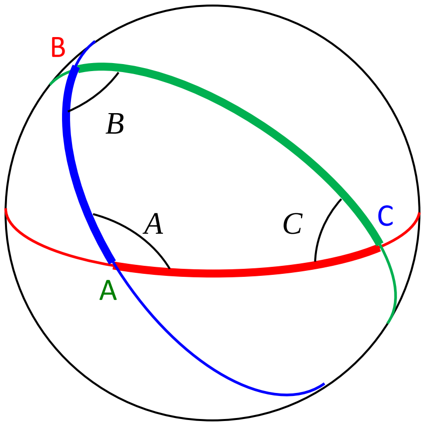
5. Juste un soupçon de trigonométrie sphérique

Nous devons exprimer des relations entre des angles et des arcs à la surface d'une sphère : c'est le domaine de la *trigonométrie sphérique*. Il ne s'agit pas ici d'un exposé exhaustif de trigonométrie sphérique, mais seulement de l'énoncé, sans démonstration, de deux théorèmes : le *théorème de Pythagore généralisé* et la *règle des sinus dans le triangle sphérique*.

5.1. Théorème de Pythagore généralisé

Théorème de Pythagore généralisé en trigonométrie sphérique

Dans un triangle sphérique quelconque dont les arcs sont dessinés sur des grands cercles, pour chaque sommet, le cosinus de l'arc opposé est égal à la somme du produit des cosinus des deux arcs adjacents et du produit du cosinus de l'angle au sommet par les sinus des deux arcs adjacents.



ABC étant un triangle sphérique quelconque :

$$\cos \text{BC} = \cos \text{AB} \cos \text{AC} + \sin \text{AB} \sin \text{AC} \cos A$$

$$\cos \text{CA} = \cos \text{BC} \cos \text{BA} + \sin \text{BC} \sin \text{BA} \cos B$$

$$\cos \text{AB} = \cos \text{CA} \cos \text{CB} + \sin \text{CA} \sin \text{CB} \cos C$$

Attention ! Les deux arcs adjacents doivent être mesurés avec la même convention algébrique : tous deux convergents vers le sommet ou tous deux divergents. En effet, à la différence du cosinus, le sinus d'un arc change de signe quand on change l'orientation de l'arc et si les orientations ne sont pas conformes, la formule devient fausse.

Note : si le triangle est très petit, la formulation du théorème de Pythagore généralisé en trigonométrie sphérique conduit au premier ordre non nul à la formule du cosinus dans le triangle quelconque en géométrie plane. La relation $\cos \text{BC} = \cos \text{AB} \cos \text{AC} + \sin \text{AB} \sin \text{AC} \cos A$ devenant dans une approximation au second ordre :

$$1 - \frac{\text{BC}^2}{2} \simeq \left(1 - \frac{\text{AB}^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\text{AC}^2}{2}\right) + \text{AB AC} \cos A \simeq 1 - \frac{\text{AB}^2}{2} - \frac{\text{AC}^2}{2} + \text{AB AC} \cos A$$

Soit : $\text{BC}^2 \simeq \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2\ \text{AB AC} \cos A$

Corolaire : le théorème de Pythagore en trigonométrie sphérique

Le très célèbre théorème de Pythagore a aussi son équivalent en trigonométrie sphérique, comme cas particulier du théorème généralisé dont l'appellation se trouve ainsi justifiée.

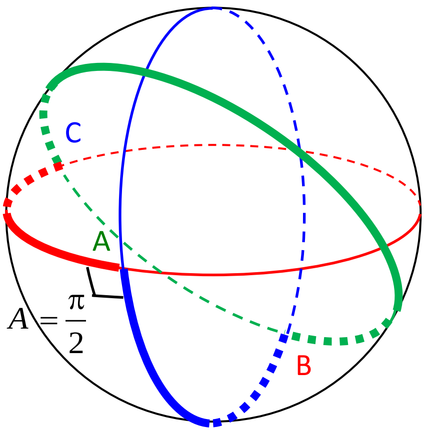
Théorème de Pythagore en trigonométrie sphérique

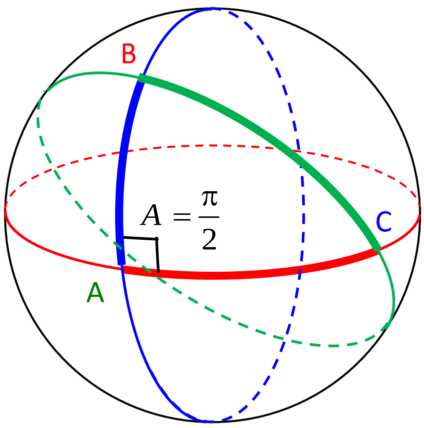
Dans un triangle rectangle sphérique dont les arcs sont définis sur des grands cercles, le cosinus de l'arc hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux arcs côtés de l'angle droit.

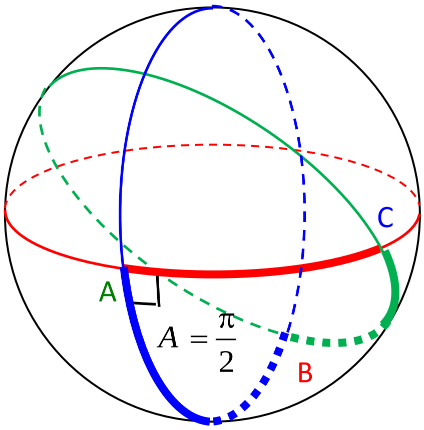
ABC étant un triangle sphérique rectangle en A : $\cos \mathrm{BC} = \cos \mathrm{AB} \cos \mathrm{AC}$

Note : si le triangle est très petit, le théorème de Pythagore s'écrit : $\mathrm{BC}^2 \simeq \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$ (le carré de l'hypoténuse est égal, si je ne m'abuse, à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit).

Remarque : un triangle rectangle sphérique peut avoir des formes assez exotiques parfois difficiles à identifier. De façon générale, deux points sur un grand cercle définissent non pas un arc, mais deux arcs, l'un de mesure inférieure à un demi-tour et l'autre de mesure supérieure à une demi-tour, dont la réunion reconstitue le grand cercle. Trois points sur une sphère définissent donc $2^3 = 8$ triangles sphériques différents. Voici trois exemples de triangles rectangles sphériques tous rectangles en A :







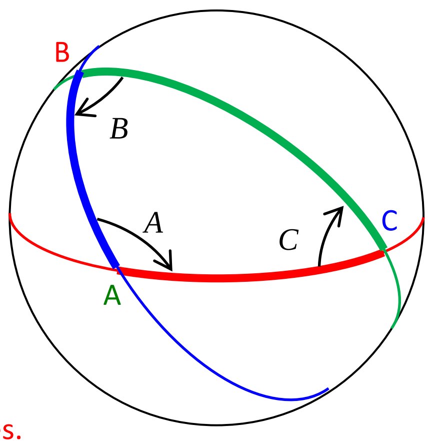
5.2. Règle des sinus

Règle des sinus en trigonométrie sphérique

Dans un triangle sphérique quelconque dont les arcs sont définis sur des grands cercles, le rapport du sinus d'un angle au sommet au sinus de l'arc opposé est le même pour les trois sommets.

ABC étant un triangle sphérique quelconque :

$$\frac{\sin A}{\sin \mathrm{BC}} = \frac{\sin B}{\sin \mathrm{CA}} = \frac{\sin C}{\sin \mathrm{AB}}$$



Attention aux signes ! Les angles A, B et C sont nécessairement orientés comme les arcs opposés.

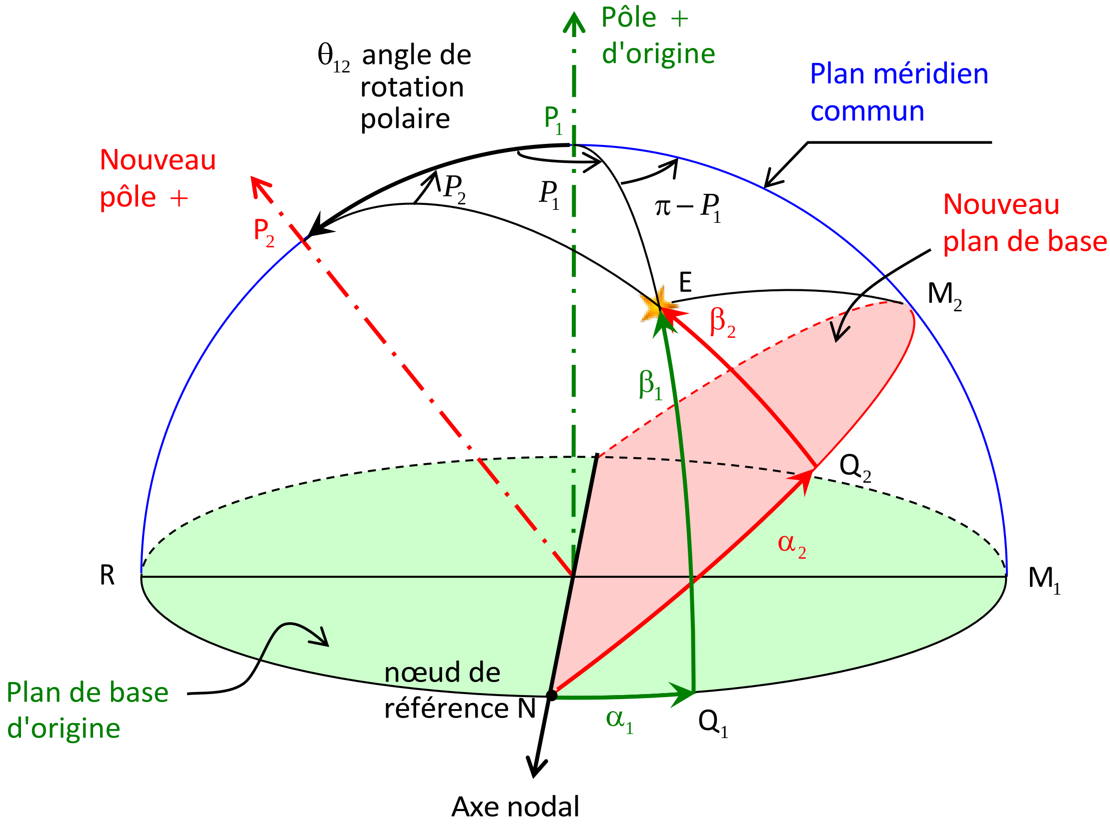
Note : si le triangle est très petit, nous retrouvons la règle des sinus de la géométrie plane. La relation $\frac{\sin A}{\sin \mathrm{BC}} = \frac{\sin B}{\sin \mathrm{CA}} = \frac{\sin C}{\sin \mathrm{AB}}$ devenant dans une approximation au premier ordre $\frac{\sin A}{\mathrm{BC}} = \frac{\sin B}{\mathrm{CA}} = \frac{\sin C}{\mathrm{AB}}$.

5.3. Rotation du plan de base d'un référentiel sphérique

Voici, à titre d'exemple, mais non pas sans arrière-pensée, un problème classique de trigonométrie sphérique dont la solution nous intéresse au plus haut point.

Une étoile E est repérée dans un premier référentiel sphérique par sa longitude α_1 et sa latitude β_1 et l'on veut exprimer les coordonnées sphériques $\{\alpha_2,\beta_2\}$ de cette même étoile dans un second référentiel qui aura tourné d'un angle polaire θ_{12} autour de l'axe nodal des deux plans de référence.

L'axe nodal est la droite d'intersection des deux plans de référence orientée en choisissant arbitrairement un nœud de référence noté N. Les longitudes α_1 et α_2 sont toutes deux comptées dans le sens direct à partir du nœud de référence.



Si nous considérons le triangle sphérique P_1EP_2 nous pouvons y exprimer la relation des sinus entre P_1 et P_2, ce qui donne :

$$\frac{\sin P_1}{\sin P_2E} = \frac{\sin P_2}{\sin EP_1} \quad \text{soit} \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)} \quad \text{soit encore} \quad \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_1}$$

Dans le même triangle sphérique P_1EP_2 exprimons le théorème de Pythagore généralisé en P_1 :

$$\cos P_2E = \cos P_2P_1 \, \cos P_1E + \sin P_2P_1 \, \sin P_1E \, \cos P_1 \quad \text{soit} \quad \sin\beta_2 = \cos\theta_{12}\sin\beta_1 - \sin\theta_{12}\cos\beta_1\sin\alpha_1$$

Enfin, nous obtenons deux expressions de $\cos \mathrm{M_2E}$ en écrivant le théorème de Pythagore dans le triangle sphérique $\mathrm{Q_2M_2E}$ rectangle en $\mathrm{Q_2}$ et le théorème de Pythagore généralisé en $\mathrm{P_1}$ dans le triangle sphérique $\mathrm{P_1M_2E}$:

$$\cos \mathrm{M_2E} = \cos \mathrm{Q_2M_2}\ \cos \mathrm{Q_2E} = \cos \mathrm{P_1M_2}\ \cos \mathrm{P_1E} + \sin \mathrm{P_1M_2}\ \sin \mathrm{P_1E}\ \cos\left(\pi - P_1\right)$$

Soit : $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)\cos\beta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)$$

Ou encore : $$\sin\alpha_2\cos\beta_2 = \sin\theta_{12}\sin\beta_1 + \cos\theta_{12}\cos\beta_1\sin\alpha_1$$

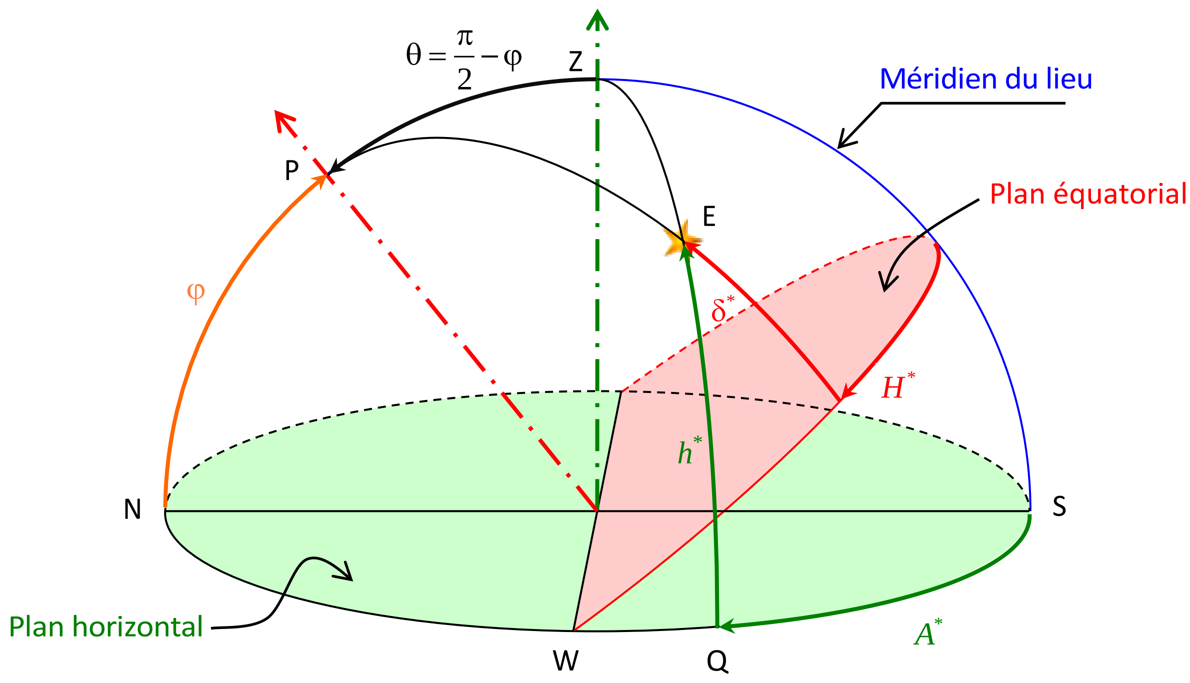
Nous avons ainsi déterminé un ensemble trois équations permettant d'exprimer de façon univoque les coordonnées $\{\alpha_2, \beta_2\}$ en fonction des coordonnées $\{\alpha_1, \beta_1\}$ pour une rotation d'angle θ_{12} :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sin\beta_2 = \cos\theta_{12}\sin\beta_1 - \sin\theta_{12}\cos\beta_1\sin\alpha_1} \\ \boldsymbol{\cos\alpha_2\cos\beta_2 = \cos\alpha_1\cos\beta_1} \\ \boldsymbol{\sin\alpha_2\cos\beta_2 = \sin\theta_{12}\sin\beta_1 + \cos\theta_{12}\cos\beta_1\sin\alpha_1} \end{cases}$$

6. Relations entre les coordonnées horaires et les coordonnées horizontales

6.1. Conversion des coordonnées horizontales en coordonnées horaires

Soit une étoile E de coordonnées horaires $\{H^*, \delta^*\}$ et de coordonnées horizontales $\{A^*, h^*\}$.



En choisissant la direction de l'horizon *ouest* comme nœud de référence, nous voyons que les coordonnées $\left\{\frac{\pi}{2} - H^*, \delta^*\right\}$ se déduisent de $\left\{\frac{\pi}{2} - A^*, h^*\right\}$ par rotation d'un angle polaire $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

$$\begin{cases} \sin\delta^* = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin h^* - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos h^* \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A^*\right) \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-H^*\right)\cos\delta^* = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A^*\right)\cos h^* \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-H^*\right)\cos\delta^* = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin h^* + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos h^* \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A^*\right) \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\begin{cases} \sin\delta^* = \sin\varphi \, \sin h^* - \cos\varphi \, \cos h^* \cos A^* \\ \sin H^* \cos\delta^* = \sin A^* \cos h^* \\ \cos H^* \cos\delta^* = \cos\varphi \, \sin h^* + \sin\varphi \, \cos h^* \cos A^* \end{cases}$$

Où φ, rappelons-le, est la latitude du lieu.

6.2. Conversion des coordonnées horaires en coordonnées horizontales

De la même façon, les coordonnées $\left\{\dfrac{\pi}{2}-A^*, \delta^*\right\}$ se déduisent de $\left\{\dfrac{\pi}{2}-H^*, h^*\right\}$ par rotation de l'angle opposé $\varphi-\dfrac{\pi}{2}$. Nous en déduisons les relations réciproques :

$$\begin{cases} \sin h^* = \sin\varphi \, \sin\delta^* + \cos\varphi \, \cos\delta^* \cos H^* \\ \sin A^* \cos h^* = \sin H^* \cos\delta^* \\ \cos A^* \cos h^* = -\cos\varphi \, \sin\delta^* + \sin\varphi \, \cos\delta^* \cos H^* \end{cases}$$

6.3. Exemple d'application : vitesse de lever et de coucher des étoiles

On souhaite déterminer la vitesse de lever ou de coucher d'un astre, c'est-à-dire la vitesse de variation de la hauteur de cet astre $\dfrac{dh^*}{dt}$.

Il n'y a guère d'autre solution que de passer par les coordonnées horaires associées, pour lesquelles nous savons que, pour toutes les étoiles, $\dfrac{dH^*}{dt} = \Omega_{\text{sid}}$ et $\dfrac{d\delta^*}{dt} = 0$.

Dérivons la relation exprimant le sinus de la hauteur : $\sin h^* = \sin\varphi \, \sin\delta^* + \cos\varphi \, \cos\delta^* \cos H^*$

Cela donne : $$\cos h^* \frac{dh^*}{dt} = -\Omega_{\text{sid}} \cos\varphi \, \cos\delta^* \sin H^* = -\Omega_{\text{sid}} \cos\varphi \, \cos h^* \sin A^*$$

Nous en déduisons cette relation simple valable en toutes circonstance : $\dfrac{dh^*}{dt} = -\Omega_{\text{sid}} \cos\varphi \, \sin A^*$

Les vitesses de lever et de coucher des étoiles sur l'horizon ne dépendent que de l'azimut de l'étoile. À l'*est* $\left(\sin A^* < 0\right)$, les étoiles se lèvent $\left(\dfrac{dh^*}{dt} > 0\right)$ tandis qu'à l'*ouest*, les étoiles se couchent.

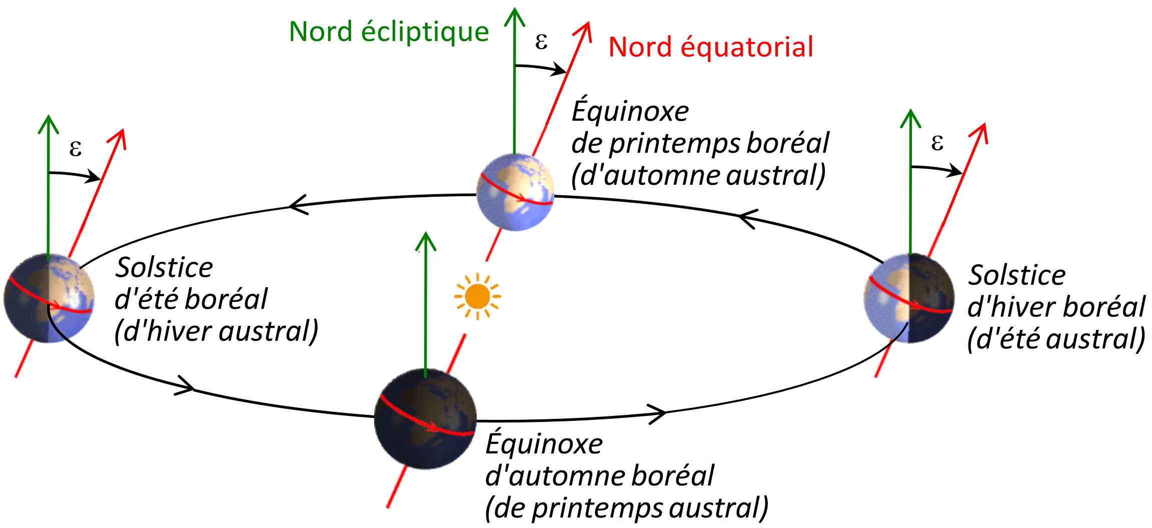
7. Coordonnées écliptiques

7.1. Définition

Point de vue héliocentrique

Nous appelons *écliptique* le plan de l'orbite de la Terre dans son mouvement de translation elliptique autour du Soleil. La Terre parcoure son orbite autour du Soleil en gardant son axe polaire parallèle à lui-même, toujours incliné par rapport à la normale au plan de l'écliptique du même angle ε que l'on appelle l'*obliquité*. L'oblicité a pour conséquence principale les importantes variations saisonnières du temps d'ensoleillement diurne, responsable du rythme des saisons.

L'obliquité oscille très lentement sur une période de 41000 ans entre $\varepsilon_{\text{min}} \simeq 22,2°$ et $\varepsilon_{\text{max}} \simeq 24,5°$. La valeur actuelle est $\varepsilon = 23°\ 26'$. De plus, l'axe de rotation décrit un cône autour du pôle écliptique à raison d'un tour en 25760 ans, c'est ce que l'on appelle la *précession des équinoxes*, nous y viendrons plus loin. Dans un premier temps, nous allons considérer que l'obliquité est constante.



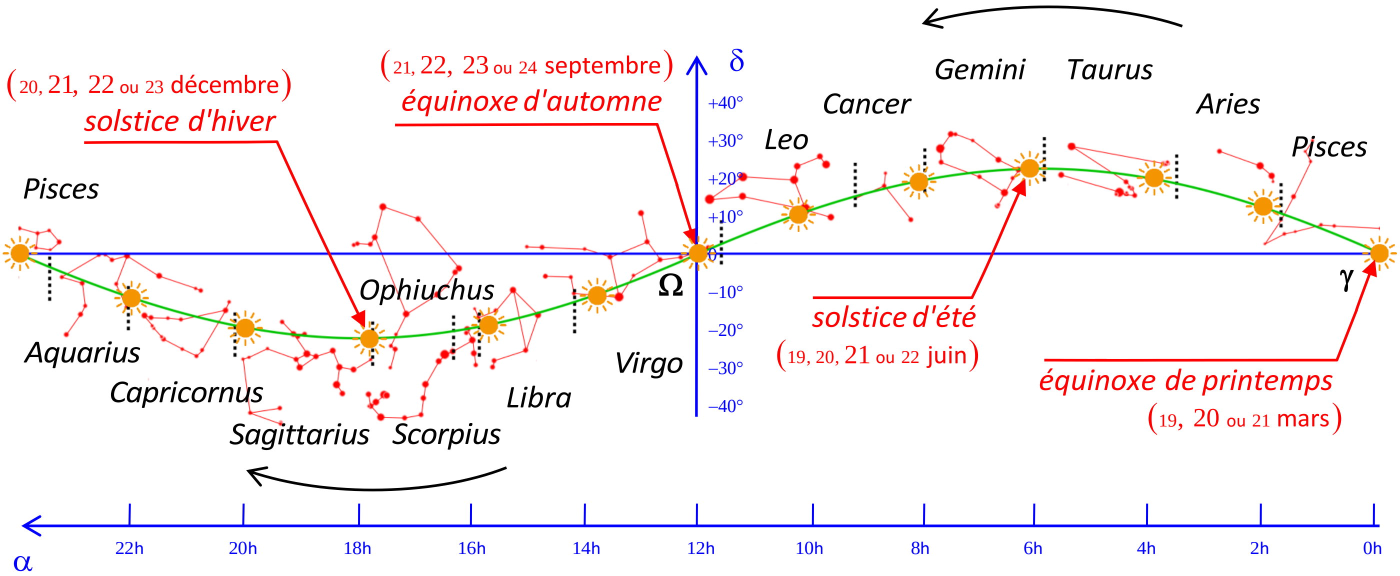
Point de vue géocentrique

L'écliptique peut aussi bien être définie comme la trajectoire apparente du Soleil dans le ciel tout au long de l'année. Les constellations traversées s'appellent « *constellations du zodiaque* » et sont au nombre de 13.

Le 20 mars ou plus rarement le 21 mars et tout à fait exceptionnellement le 19, la déclinaison du Soleil redevient positive, le Soleil franchit l'équateur avec une déclinaison croissante il se trouve alors dans la constellation des Poissons sur le point γ servant précisément d'origine aux ascensions droite : c'est l'*équinoxe de printemps* (sous-entendu : boréal). La déclinaison du Soleil va alors croissante et culmine au *solstice d'été* pour une valeur égale à l'obliquité $(\varepsilon = 23°\ 26')$. Ainsi se poursuit le cycle des saisons.

Note : le Soleil entre alors dans le secteur zodiacal des Béliers. La division du ciel par les astronomes de l'antiquité en douze secteurs zodiacaux ne correspond plus aujourd'hui aux constellations dans lesquelles se trouve le Soleil, ceci du fait de la précession des équinoxes. Le point γ doit son nom au signe zodiacal du Bélier ♈ de la même façon que le point opposé, où se trouve le Soleil au moment de l'équinoxe d'automne s'appelle le point Ω (oméga), nom issu du symbole de la Balance ♎. Les charlatans de l'astrologie ont gardé aujourd'hui les signes d'antan pour leur pratique prétendument divinatoire.

Successivement, le Soleil travers ensuite au cours de l'année les constellations des Béliers (*Aries*), du Taureau (*Taurus*), des Gémeaux (*Gemini*), du Cancer (*Cancer*), du Lion (*Leo*), de la Vierge (*Virgo*), de la Balance (*Libra*), du Scorpion (*Scorpius*), du Serpentaire (*Ophiuchus*), du Sagittaire (*Sagittarius*), du Capricorne (*Capricornus*), du Verseau (*Aquarius*) et enfin à nouveau des Poissons (*Pisces*).

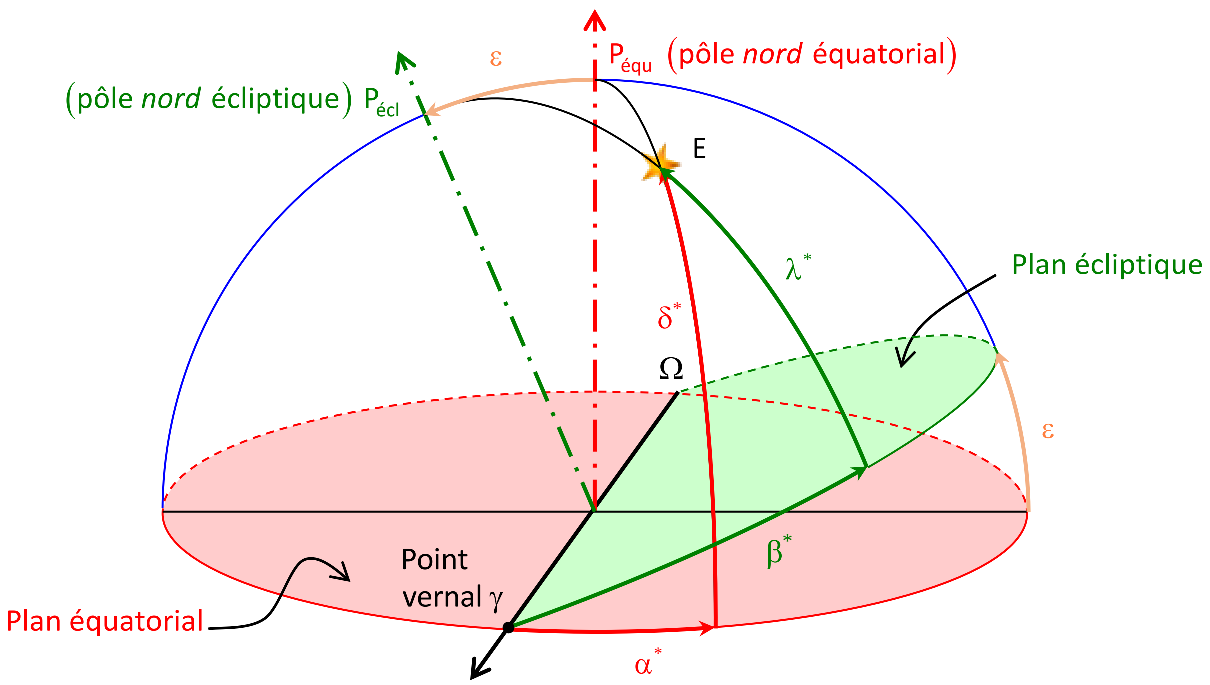


7.2. Relations entre les coordonnées écliptiques et coordonnées équatoriales

Nous considérons dorénavant le point de vue géocentrique et nous nous proposons de décrire ce que verrait un observateur virtuel placé au centre de la Terre.

Passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques

Nous voulons exprimer les coordonnées écliptiques $\{\lambda^*, \beta^*\}$ d'une étoile en fonction de ses coordonnées équatoriales $\{\alpha^*, \delta^*\}$.



Le pôle écliptique se déduisant du pôle équatorial par rotation d'un angle $+\varepsilon$ autour de la ligne des nœuds orientée vers le nœud ascendant γ, nous en déduisons ces relations entre par application directe des formules de rotation démontrées précédemment.

$$\begin{cases} \sin\beta^* = \cos\varepsilon \sin\delta^* - \sin\varepsilon \cos\delta^* \sin\alpha^* \\ \cos\lambda^* \cos\beta^* = \cos\alpha^* \cos\delta^* \\ \sin\lambda^* \cos\beta^* = \sin\varepsilon \sin\delta^* + \cos\varepsilon \cos\delta^* \sin\alpha^* \end{cases}$$

Passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales

Réciproquement, les coordonnées équatoriales $\{\alpha^*, \delta^*\}$ se déduisent des coordonnées écliptiques $\{\lambda^*, \beta^*\}$ par rotation d'un angle $-\varepsilon$ autour de la ligne des nœuds orientée vers le nœud ascendant γ :

$$\begin{cases} \sin\delta^* = \cos\varepsilon \sin\beta^* + \sin\varepsilon \cos\beta^* \sin\lambda^* \\ \cos\alpha^* \cos\delta^* = \cos\lambda^* \cos\beta^* \\ \sin\alpha^* \cos\delta^* = -\sin\varepsilon \sin\beta^* + \cos\varepsilon \cos\beta^* \sin\lambda^* \end{cases}$$

7.3. Mouvement apparent du Soleil

La réduction à l'équateur

Le soleil est un astre dont la latitude écliptique $\beta_\odot$ est nulle, par définition. Nous en déduisons les expressions des coordonnées équatoriales du Soleil $\{\alpha_\odot, \delta_\odot\}$ en fonction de sa longitude écliptique $\lambda_\odot$:

$$\begin{cases} \sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot \\ \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot = \cos\lambda_\odot \\ \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot = \cos\varepsilon \sin\lambda_\odot \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \tan\alpha_\odot = \cos\varepsilon \tan\lambda_\odot \\ \sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot \end{cases}$$

Ces équations ne sont pas linéaires : quand bien même le mouvement du Soleil sur l'écliptique serait un mouvement uniforme, le mouvement équatorial ne le serait pas. La différence entre les deux mouvements s'appelle traditionnellement « la réduction à l'équateur ».

En posant $q = \left(\tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \simeq 0,0430$, nous obtenons sans approximation $\tan(\alpha_\odot - \lambda_\odot) = -\frac{q \sin 2\lambda_\odot}{1 + q\cos 2\lambda_\odot}$

Cette formule nous permet d'exprimer $\alpha_\odot$ en fonction de $\lambda_\odot$ par un développement limité en q rapidement convergent. Cela nous donne, dans une approximation au premier ordre en q, une expression de l'ascension droite qui est fiable à q^2 radian près $\left(q^2 \simeq 18\times10^{-4} \text{ rad} \simeq 6'\right)$:

$$\alpha_\odot \simeq \lambda_\odot - q\sin 2\lambda_\odot$$

L'anomalie keplérienne

Nous savons de plus que le mouvement apparent du Soleil sur l'écliptique obéit aux lois de Kepler, il n'est donc pas précisément uniforme. La différence entre le mouvement réel sur l'écliptique et un hypothétique mouvement uniforme de même période s'appelle « l'inégalité keplérienne ».

Ce mouvement képlérien est étudié très en détail dans le document intitulé « **mouvement du Soleil, de la Lune et des planètes** ». Dans le cas d'une orbite très faiblement excentrique comme c'est le cas de l'orbite de la Terre, le mouvement képlérien s'exprime comme un développement limité rapidement convergent de l'excentricité *e* de l'orbite. Pour la Terre : $e = 0,01671$

Si nous nous limitons au terme de premier ordre, la longitude écliptique du soleil diffère de son mouvement moyen par un simple terme sinusoïdal :

$$\lambda_{\odot} = \lambda_{\mathrm{P}\odot} + \frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}}(t - t_{\mathrm{P}}) + 2e\sin\frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}}(t - t_{\mathrm{P}})$$

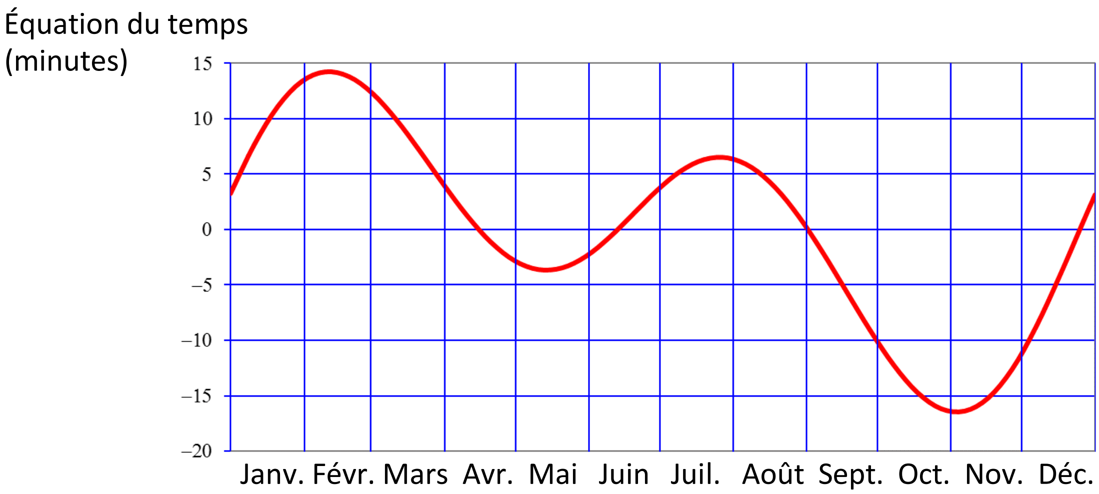
Où t_{P} est la date de passage de la Terre au périhélie de son orbite (le 2 ou le 3 janvier selon la proximité d'une année bissextile, en valeur moyenne $t_{\mathrm{P}} = 2,7$ jours), T_{a} la période anomalistique de la Terre définie comme l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs au périhélie $(T_{\mathrm{a}} = 365,25\ \mathrm{j})$, peu différente de l'année tropique, et $\lambda_{\mathrm{P}\odot}$ est la longitude du Soleil au moment du passage au périhélie : $\lambda_{\mathrm{P}\odot} \simeq 4,94\ \mathrm{rad} \simeq 283°$.

L'équation du temps

La somme de la réduction à l'équateur et de l'inégalité képlérienne correspond à « l'équation du temps » rendant compte des avances et des retards du mouvement réel du Soleil par rapport à son mouvement équatorial « moyen ». Voir à ce sujet le document intitulé « ***analemme, équation du temps*** ».

$$\alpha_{\odot}(t) \simeq \underbrace{\lambda_{\mathrm{P}\odot} + \frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}}(t - t_{\mathrm{P}})}_{\text{mouvement moyen}} + \underbrace{2e\sin\frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}}(t - t_{\mathrm{P}}) - q\sin\left(\frac{4\pi}{T_{\mathrm{a}}}(t - t_{\mathrm{P}}) + 2\lambda_{\mathrm{P}\odot}\right)}_{\text{équation du temps}}$$

Les écarts sont assez importants : à la mi-février, le Soleil a 15 minutes d'avance sur son mouvement moyen alors qu'au 1er novembre il a 17 minutes de retard.



7.4. Précession des équinoxes

L'axe polaire de la Terre décrit, sous l'action mécanique de l'attraction lunaire, un cône ayant l'obliquité pour demi-angle au sommet à raison d'un tour en un temps $T_{pe} = 25770$ ans **dans le sens rétrograde**. C'est ce que l'on appelle le mouvement de « précession ».

Il s'ensuit pour chaque astre une croissance linéaire dans le temps de sa longitude écliptique, de la forme $\lambda = \lambda_0 + \Omega_{pe} t$.

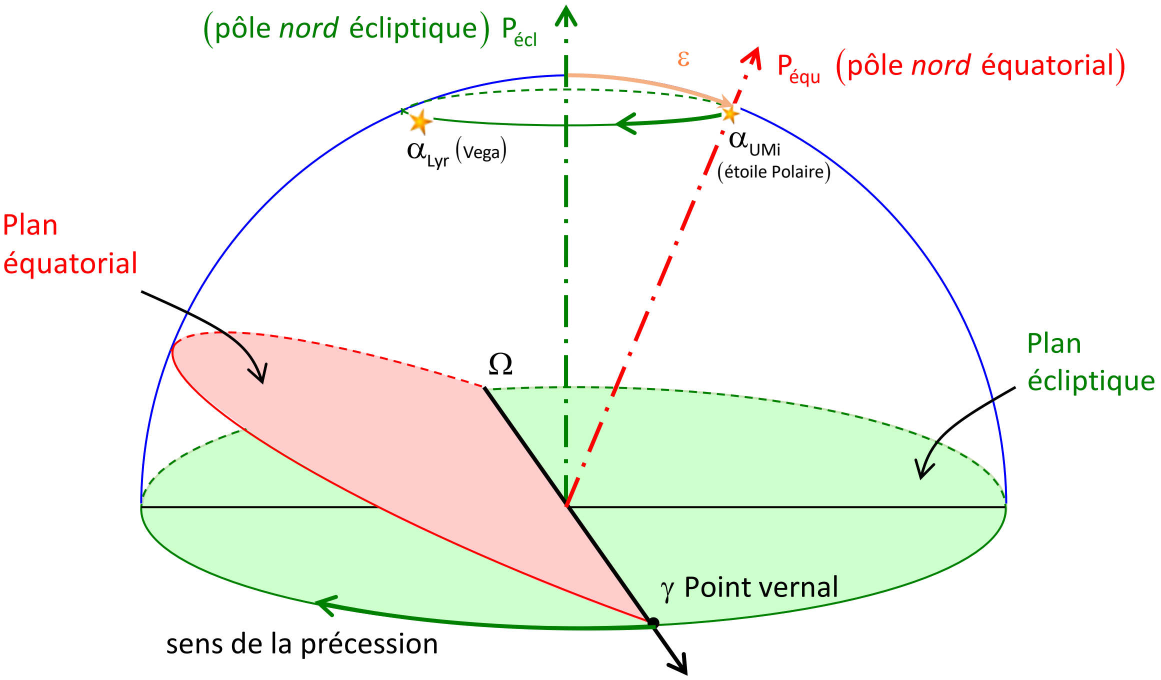
Soit :
$$\frac{d\lambda}{dt} = \Omega_{pe} = \frac{2\pi}{T_{ep}}$$

Application numérique : $\Omega_{pe} = 7,7291 \times 10^{-12}$ rad $\cdot$ s^{-1} $\simeq 1,4°$ / siècle.

Vega, l'étoile alpha de la Lyre sera étoile polaire dans 12000 ans

Nous voulons savoir quelle sera l'étoile polaire dans 120 siècles, en l'an 14000 ? Nous pouvons calculer sans problème les coordonnées équatoriales actuelles $\{\alpha_{2000}, \delta_{2000}\}$ du point du ciel qui sera le pôle de l'an 14000.

Remarque : il s'agira d'un calcul en ordre de grandeur, car à cette échelle de temps, il faudrait tenir compte de la variation de l'obliquité.



Le pôle *nord* équatorial a pour coordonnées écliptiques : $\{\lambda_{14000}, \beta_{14000}\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right\}$

Avec $\Delta t = 12000$ ans, nous en déduisons ce que doivent être aujourd'hui les coordonnées écliptiques de futur pôle de l'an 14000 :

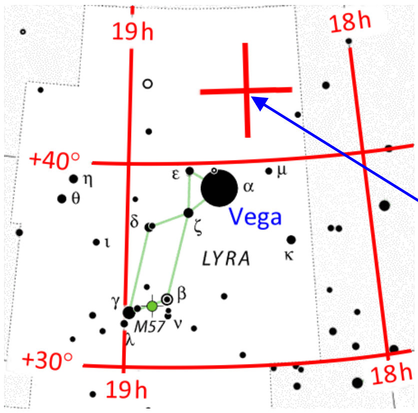
$$\begin{cases} \lambda_{2000} = \lambda_{14000} - \Omega_{pe}\Delta t = -1,3562 \text{ rad} \\ \beta_{2000} = \beta_{14000} \qquad\qquad\quad = +1,1618 \text{ rad} \end{cases}$$

Les coordonnées équatoriales correspondantes s'en déduisent par le groupe de formules de rotation :

$$\begin{cases} \sin\delta_{2000} = \cos\varepsilon\,\sin\beta_{2000} + \sin\varepsilon\,\cos\beta_{2000}\sin\lambda_{2000} = +0,6873 \text{ rad} \\ \cos\alpha_{2000}\cos\delta_{2000} = \cos\lambda_{2000}\cos\beta_{2000} = +0,0847 \text{ rad} \\ \sin\alpha_{2000}\cos\delta_{2000} = -\sin\varepsilon\,\sin\beta_{2000} + \cos\varepsilon\,\cos\beta_{2000}\sin\lambda_{2000} = -0,7214 \text{ rad} \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\begin{cases} \alpha_{2000} = 18 \text{ h } 27 \text{ min} \\ \delta_{2000} = 43,4° \end{cases}$$



Pôle céleste en l'an 14000

L'étoile Vega n'est pas loin de là !

Précession sur une courte période

Du fait de la lente variation de λ, il s'ensuit une lente variation des coordonnées équatoriales de chaque astre, donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \cos\delta\,\dfrac{d\delta}{dt} = +\Omega_{pe}\sin\varepsilon\,\cos\beta\,\cos\lambda \\ -\sin\alpha\,\cos\delta\,\dfrac{d\alpha}{dt} - \cos\alpha\,\sin\delta\,\dfrac{d\delta}{dt} = -\Omega_{pe}\sin\lambda\,\cos\beta \\ \cos\alpha\,\cos\delta\,\dfrac{d\alpha}{dt} - \sin\alpha\,\sin\delta\,\dfrac{d\delta}{dt} = +\Omega_{pe}\cos\varepsilon\,\cos\beta\,\cos\lambda \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \Omega_{pe}\left(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,\tan\delta\,\sin\alpha\right) \\ \dfrac{d\delta}{dt} = \Omega_{pe}\sin\varepsilon\,\cos\alpha \end{cases}$$

Pour des évolutions concernant des durées de quelques décennies, le calcul différentiel est suffisant pour exprimer quantitativement les variations des coordonnées équatoriales par le fait de la précession.

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \Omega_{pe}\left(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,\tan\delta\,\sin\alpha\right)\Delta t \\ \Delta\delta = \Omega_{pe}\sin\varepsilon\,\cos\alpha\,\Delta t \end{cases}$$

Exemple de calcul : Connaissant les coordonnées équatoriales 2000 de l'étoile Vega : $\left(\alpha_{\text{Vega}}^{2000} = 18\text{ h } 36 \text{ min } 56 \text{ s};\ \delta_{\text{Vega}}^{2000} = 38°\ 47,0'\right)$, déterminer ses coordonnées au 1er janvier 2017.

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \Omega_{pe}\left(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,\tan\delta\,\sin\alpha\right)\Delta t = +34 \text{ s} \\ \Delta\delta = \Omega_{pe}\sin\varepsilon\,\cos\alpha\,\Delta t = +1,2' \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha_{\text{Vega}}^{2017} = 18\text{ h } 37 \text{ min } 30 \text{ s} \\ \delta_{\text{Vega}}^{2017} = 38°\ 48,2' \end{cases}$$

Les variations sont tellement petites que le calcul différentiel est largement suffisant.