الدائرة
the circle

• الدائرة :- هى المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة مساوية لنصف القطر

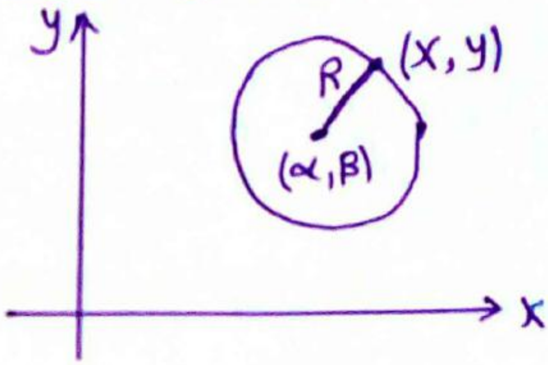
---

1 معادلة الدائرة مركزها (α, β) ونصف قطرها R :-

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad \#$$

⇐ لو المركز $(0,0)$:-

$$x^2 + y^2 = R^2$$



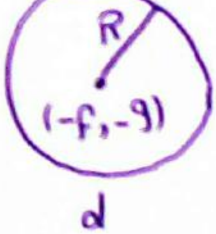
---

2 الصورة العامة لمعادلة الدائرة :-

$$d: x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \#$$

$(c) \Rightarrow$ center $= (-f, -g)$

$(R) \Rightarrow$ Radius $= \sqrt{f^2 + g^2 - c}$



⇐ شروط المعادلة (**) تمثل دائرة :-

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \rightarrow (**)$$

$a = b = 1$ ① , $h = 0$ ② , $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix} \neq 0$ ③

ثلاث شروط

---

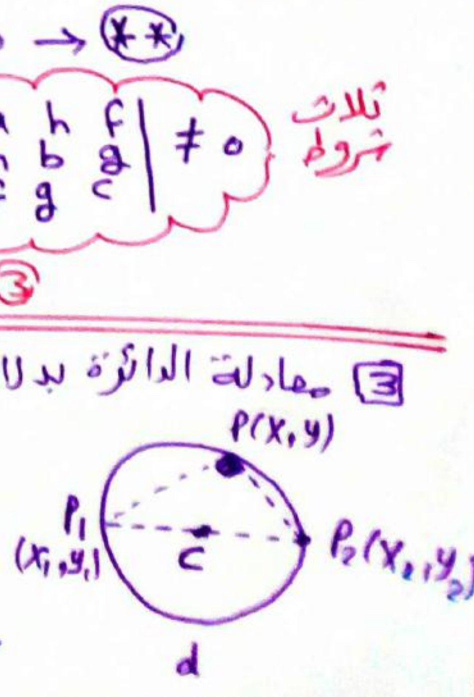
3 معادلة الدائرة بدلالة النقطتين P_1, P_2 يمثلان نهايتى قطرفيها :-

$$\overline{P_1P} \cdot \overline{P_2P} = 0$$

حاصل الضرب القياسى يساوى صفر لأنهم متعامدات

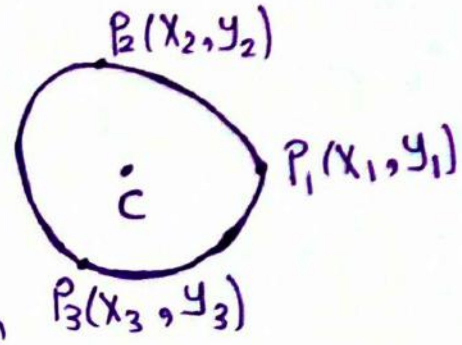
$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x - x_2, y - y_2) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \quad \#$$



4 معادلة دائرة تمر بثلاث نقاط P_1, P_2, P_3 :-

$$d: x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$



P_1 تحقق معادلة الدائرة d

$$x_1^2 + y_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + c = 0 \rightarrow ①$$

P_2 تحقق معادلة الدائرة d

$$x_2^2 + y_2^2 + 2fx_2 + 2gy_2 + c = 0 \rightarrow ②$$

P_3 تحقق معادلة الدائرة d

$$x_3^2 + y_3^2 + 2fx_3 + 2gy_3 + c = 0 \rightarrow ③$$

وبحل الثلاث معادلات لايجاد f, g, c

---

examples

أوجد المركز ونصف القطر للدائرة

1 Find both the center and radius of the circle

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 41$$

solution

$$d: x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \rightarrow ①$$ الصورة العامة

$$d: x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0 \rightarrow ②$$ المعادلة المعطاه

بمقارنة المعادلة ① ب المعادلة ②

$2f = -4 \Rightarrow f = -2$ $\qquad c = -41$

$2g = -8 \Rightarrow g = -4$ $\qquad$ center $= (-f, -g) = (2, 4)$ #

$$R = \sqrt{f^2 + g^2 - c} = \sqrt{4 + 16 + 41} = \sqrt{61} = 7.81 \ \#$$

2 Find the equation of the Circle اوجد معادلة الدائرة

(A) Its center at $(4,-6)$ and its Radius 7 :- مركزها ... نصف قطرها

$\alpha \quad \beta \qquad R$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 49$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 12y + 36 = 49$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 12y + 3 = 0 \quad \#$$

(B) It Passes through the three Points $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,2)$ تمر بالثلاث نقاط

الصورة العامة $d:\ x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \rightarrow ⊛$

المطلوب ايجاد f, g, c لايجاد المعادلة المطلوبة

⊛ تحقق $(1,1) \Rightarrow (1)^2 + (1)^2 + 2f + 2g + c = 0$

$$2f + 2g + c = -2 \rightarrow ①$$

⊛ تحقق $(2,-1) \Rightarrow (2)^2 + (-1)^2 + 4f - 2g + c = 0$

$$4f - 2g + c = -5 \rightarrow ②$$

⊛ تحقق $(3,2) \Rightarrow (3)^2 + (2)^2 + 2f(3) + 2g(2) + c = 0$

$$6f + 4g + c = -13 \rightarrow ③$$

solving ①, ②, ③ آلة حاسبة

$f = \frac{-5}{2} \qquad g = \frac{-1}{2} \qquad c = 4$

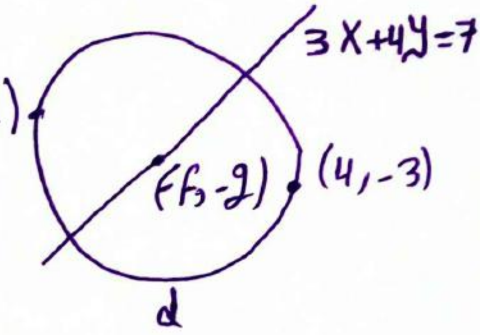
$$d:\ x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0 \quad \#$$

ومركزها يقع على الخط / يمر بالنقطتين

(C) It Passes through the two Points $(1,-2)$, $(4,-3)$ and its center is Located on the line $3x+4y=7$

Solution

الدائرة المطلوبة $d: x^2+y^2+2fx+2gy+c=0 \rightarrow *$



$*$ تحقق $(1,-2) \Rightarrow (1)^2+(-2)^2+2f-4g+c=0$

$2f-4g+c=-5 \rightarrow ①$

$*$ تحقق $(4,-3) \Rightarrow (4)^2+(-3)^2+8f-6g+c=0$

$8f-6g+c=-25 \rightarrow ②$

الخط تحقق $(-f,-g) \Rightarrow -3f-4g=7 \longrightarrow ③$

$3x+4y-7=0$

solving ①, ②, ③ آلة حاسبة

$f=\frac{-47}{15}$ $\quad g=\frac{3}{5}$ $\quad c=\frac{11}{3}$ عوض في $*$

النقطتين في نهاية قطر الدائرة

(D) the two Points $(1,-2)$, $(4,-3)$ are the end of a diagonal in it.
(x_1,y_1) (x_2,y_2)

Solution

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

$$(x-1)(x-4)+(y+2)(y+3)=0$$

$$x^2-4x-x+4+y^2+3y+2y+6=0$$

$$x^2+y^2-5x+5y+10=0$$

المعادلات البارمترية

Parametric equation

[1] المعادلات البارمترية للدائرة مركزها $(0,0)$

$$x^2+y^2=R^2$$

$$x=R\cos\theta$$

$$y=R\sin\theta$$

[2] المعادلة البارمترية للدائرة مركزها (α,β)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

$$x-\alpha=R\cos\theta$$

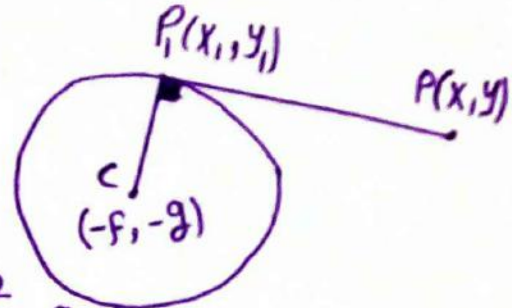
$$y-\beta=R\sin\theta$$

• معادلة خط المماس ووتر التماس والخط القطبي :-

معادلة خط المماس من النقطة P_1

1 tangent line equation From $P_1(x_1, y_1)$ on the circle :-

$$\overline{P_1P} \cdot \overline{CP_1} = 0$$



$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 + f, y_1 + g) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 + f) + (y - y_1)(y_1 + g) = 0$$

$$xx_1 + fx - x_1^2 - fx_1 + yy_1 + gy - y_1^2 - gy_1 = 0$$

$$xx_1 + yy_1 + fx - fx_1 + gy - gy_1 \underbrace{- x_1^2 - y_1^2} = 0$$

$$-x_1^2 - y_1^2 = 2fx_1 + 2gy_1 + c$$

$$xx_1 + yy_1 + fx - fx_1 + gy - gy_1 + 2fx_1 + 2gy_1 + c = 0$$

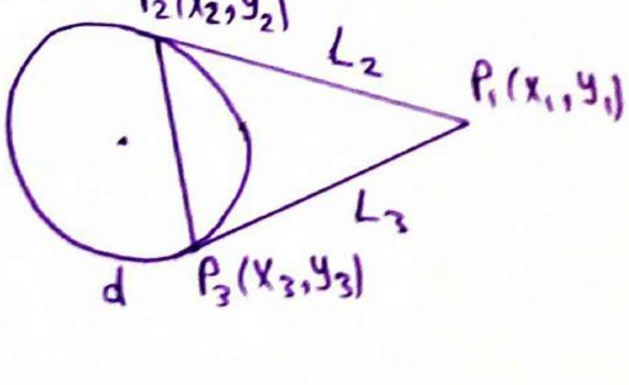
$$xx_1 + yy_1 + f(x + x_1) + g(y + y_1) + c = 0 \;\#$$

وتر التماس للدائرة من النقطة P_1

2 seam chord of A circle From $P_1(x_1, y_1)$:-

معادلة خط المماس من P_2

• the tangent line equation From P_2 :-



$$xx_2 + yy_2 + f(x + x_2) + g(y + y_2) + c = 0$$

P_1 on the line L_2 :-

$$x_1x_2 + y_1y_2 + f(x_1 + x_2) + g(y_1 + y_2) + c = 0 \rightarrow ①$$

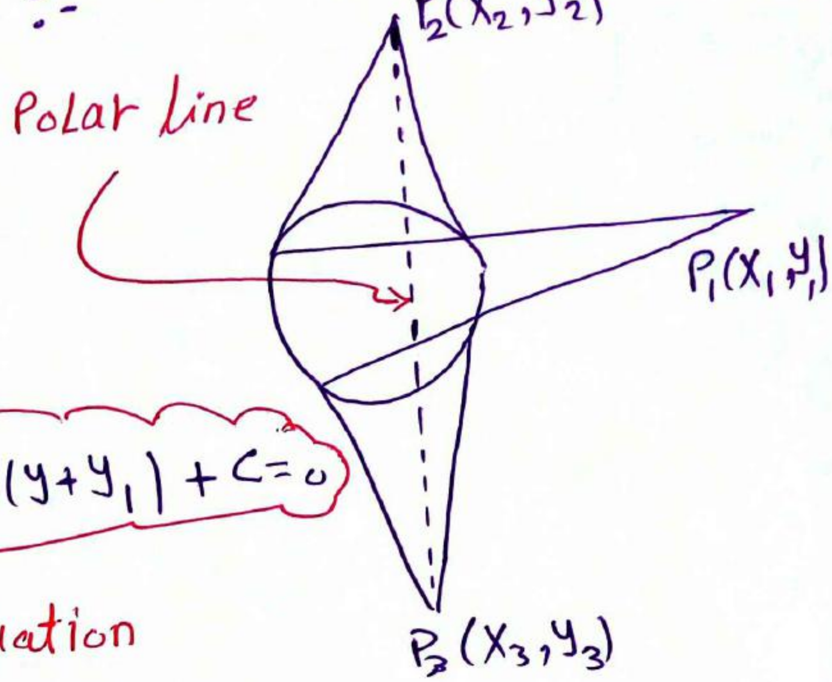
• the tangent line equation From P_3 :-

$$xx_3 + yy_3 + f(x + x_3) + g(y + y_3) + c = 0$$

P_1 on the line L_3: $x_1x_3 + y_1y_3 + f(x_1 + x_3) + g(y_1 + y_3) + c = 0 \rightarrow ②$

بطرح ① - ② للحصول على seam chord : $xx_1 + yy_1 + f(x + x_1) + g(y + y_1) + c = 0$ #

معادلة الخط القطبي
[3] Polar line equation :-



$$\boxed{xx_1 + yy_1 + f(x+x_1) + g(y+y_1) + c = 0}$$

→ Polar line equation

$\therefore xx_1 + yy_1 + f(x+x_1) + g(y+y_1) + c = 0$
- → tangent line معادلة خط المماس
- → seam chord معادلة وتر التماس
- → Polar line equation معادلة الخط القطبي

---

examples

اوجد قطب الخط القطبي.

[1] Find the Pole of the Polar line $x + y = 15$ with respect to the circle $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

Solution

نفرض أن القطب

Assume the Pole $P_1(x_1, y_1)$

من معادلة الدائرة

From the equation of the circle: $2f = -2$ $\boxed{f = -1}$

$2g = 4$ $\boxed{g = 2}$, $\boxed{c = -11}$

معادلة الخط القطبي

Polar line equation:- $xx_1 + yy_1 + f(x+x_1) + g(y+y_1) + c = 0$

$xx_1 + yy_1 - x - x_1 + 2y + 2y_1 - 11 = 0$

$$(x_1-1)x+(y_1+2)y = x_1-2y_1+11 \rightarrow ①$$

$$x + y = 15 \rightarrow ②$$

يطابق

$$① \equiv ②$$

$$\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } x} = \frac{\text{معامل } y}{\text{معامل } y} = \frac{\text{الثابت}}{\text{الثابت}}$$

$$\frac{x_1-1}{1} = \frac{y_1+2}{1} = \frac{x_1-2y_1+11}{15}$$

معادلة ①   معادلة ②

$$x_1 - 1 = y_1 + 2$$

$$x_1 - y_1 = 1+2 = 3 \rightarrow ③$$

$$15x_1 - 15 = x_1 - 2y_1 + 11$$

$$14x_1 + 2y_1 = 26 \rightarrow ④$$

Pole

Solving ③ , ④ $\therefore$ $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ $P_1 = (2,-1)$

اوجد معادلة خط المماس ومعادلة العمودي على المماس

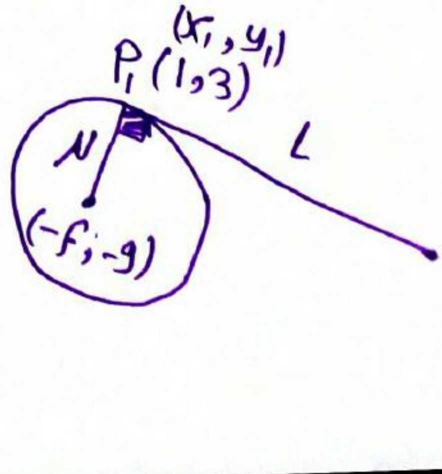
[2] Find the tangent line equation and normal line equation to the circle $x^2+y^2+2x-3y-3=0$ at $P_1(1,3)$

Solution

$f = 1$, $g = \frac{-3}{2}$, $c = -3$

$L^2 = (1)^2 + (3)^2 + 2(1) - 3(3) - 3 = 0$

P_1 on the circle



tangent line equation:

$$x x_1 + y y_1 + f(x+x_1) + g(y+y_1) + c = 0$$

$$x + 3y + (x+1) - \frac{3}{2}(y+3) - 3 = 0$$

$$2x + \frac{3}{2}y - \frac{13}{2} = 0 \quad \times 2$$

$$4x + 3y - 13 = 0 \quad \#$$

Normal line equation

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 + g}{x_1 + f}$$

$$\frac{y - 3}{x - 1} = \frac{3}{4}$$

$$4y - 12 = 3x - 3 \qquad 3x - 4y + 9 = 0 \quad \#$$

ر، المماسات من نقطة الأصل

[3] Draw the two tangents oA & oB From the origin to the circle $x^2 + y^2 - 20x - 20y + 160 = 0$ Find

معادلة وتر التماس

(i) the equation of the Seam Chord AB

معادلات المماسين oA و oB

(ii) the equation of the two tangent oA & oB

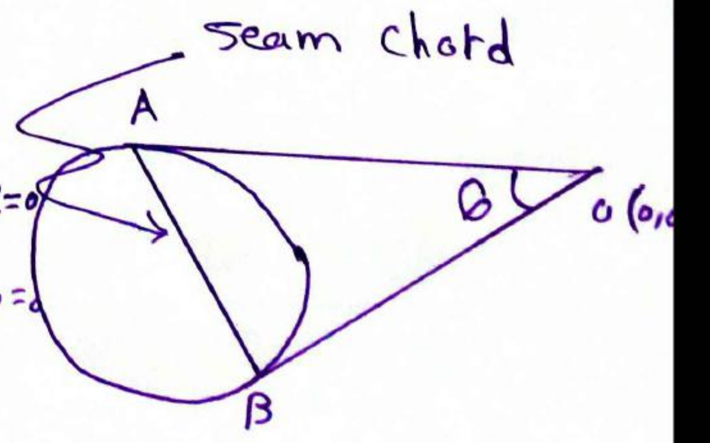
مساحة المثلث oAB

(iii) the Area of the triangle oAB

$f = -10$, $g = -10$
$c = 160$

Solution

(i) Seam chord AB:



$$x x_1 + y y_1 + f(x+x_1) + g(y+y_1) + c = 0$$

$$x(0) + y(0) - 10(x+0) - 10(y+0) + 160 = 0$$

$$-10x - 10y + 160 = 0$$

$$10x + 10y - 160 = 0$$

$$x + y - 16 = 0 \quad \#$$

(ii) tangent line oA, oB :-

بحل معادلة وتر التماس AB مع معادلة الدائرة

لإيجاد نقاط التقاطع A, B

$x + y = 16$

$y = 16 - x \rightarrow (1)$

$x^2 + y^2 - 20x - 20y + 160 = 0$

$x^2 + (16 - x)^2 - 20x - 20(16 - x) + 160 = 0$

$x^2 + 256 - 32x + x^2 - 20x - 320 + 20x + 160 = 0$

حل بالآلة الحاسبة

$2x^2 - 32x + 96 = 0$

$x = 12$ | $x = 4$
$y = 16 - 12 = 4$ | $y = 12$
$A = (12, 4)$ | $B = (4, 12)$

tangent oA : $12x + 4y - 10(x + 12) - 10(y + 4) + 160 = 0$

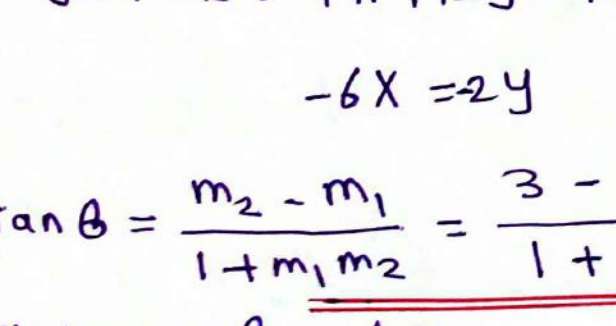
$2x = 6y$ $\quad y = \frac{1}{3}x \quad$ $m_1 = \frac{1}{3}$ #

tangent oB : $4x + 12y - 10(x + 4) - 10(y + 12) + 160 = 0$

$-6x = -2y$ $\quad y = 3x \quad$ $m_2 = 3$ #

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 1} = \frac{4}{3} \qquad \theta = 53.13^\circ \text{ \#}$$

(iii) Area of oAB



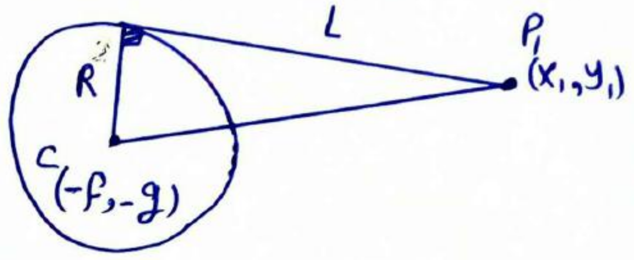
$oA = \sqrt{(12)^2 + (4)^2} = 4\sqrt{10}$

$oB = \sqrt{(4)^2 + (12)^2} = 4\sqrt{10}$

Area =

طول خط المماس من النقطة P_1

• tangent Line length From $P_1(x_1, y_1)$:-



$$L^2 = (P_1C)^2 - R^2$$

$$= (x_1+f)^2 + (y_1+g)^2 - (f^2+g^2-c)$$

$$L^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + C \quad \#$$

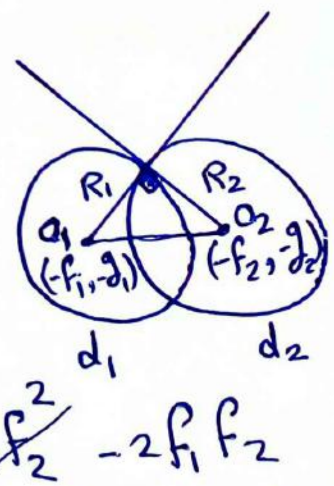
if $L^2 = 0 \Rightarrow P_1(x_1, y_1)$ on the circle

if $L^2 > 0 \Rightarrow P_1(x_1, y_1)$ outside the circle

if $L^2 < 0 \Rightarrow P_1(x_1, y_1)$ inside the circle

• orthogonal circles :- الدوائر المتعامدة

• تتقاطع الدائرتان على التعامد اذا كانت المماسات متعامدة عند نقط التقاطع



$$R_1^2 + R_2^2 = (O_1O_2)^2$$

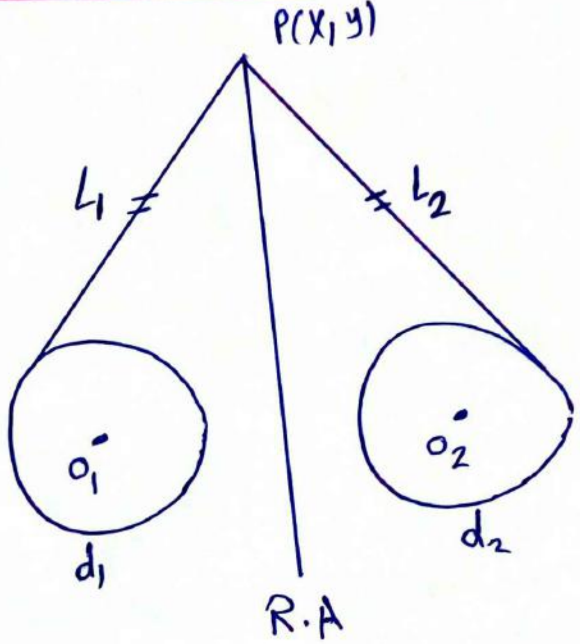
$$f_1^2 + g_1^2 - C_1 + f_2^2 + g_2^2 - C_2 = (f_1-f_2)^2 + (g_1-g_2)^2$$

$$\cancel{f_1^2} + \cancel{g_1^2} - C_1 + \cancel{f_2^2} + \cancel{g_2^2} - C_2 = \cancel{f_1^2} + \cancel{f_2^2} - 2f_1f_2 + \cancel{g_1^2} + \cancel{g_2^2} - 2g_1g_2$$

$$2f_1f_2 + 2g_1g_2 = C_1 + C_2$$

شرط التقاطع على التعامد #

المحور الأساسي لدائرتين
• Radical axis for two circles d_1 & d_2 :-



هو المحل الهندسي للنقطة (x, y) بحيث يكون طول المماس من النقطة P إلى الدائرة d_1 يساوي طول المماس من النقطة P إلى الدائرة d_2

$$L_1^2 = L_2^2$$

$$x^2 + y^2 + 2f_1x + 2g_1y + c_1 = x^2 + y^2 + 2f_2x + 2g_2y + c_2$$

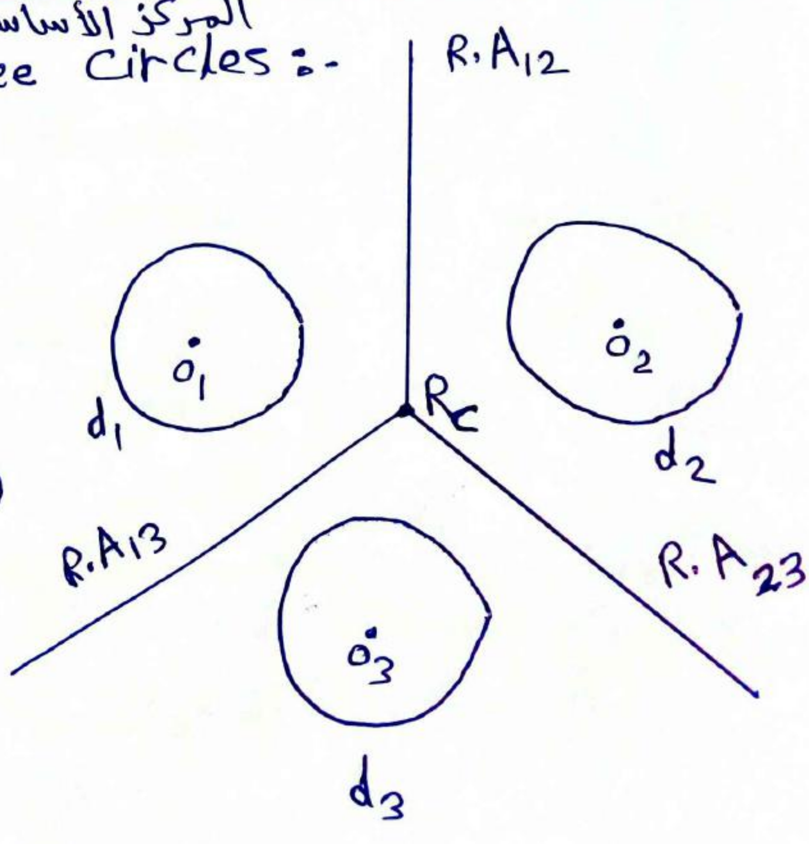
$d_1 : x^2 + y^2 + 2f_1x + 2g_1y + c_1 = 0$

$d_2 : x^2 + y^2 + 2f_2x + 2g_2y + c_2 = 0$

R.A : $2(f_1 - f_2)x + 2(g_1 - g_2)y + c_1 - c_2 = 0$

R.d : $d_1 - d_2 = 0$ المحور الأساسي لدائرتين

المركز الأساسي لثلاث دوائر
• Radical Center of three circles :-



$R.A_{12}$: $d_1 - d_2 = 0 \rightarrow (1)$

$R.A_{13}$: $d_1 - d_3 = 0 \rightarrow (2)$

$R.A_{23}$: $d_2 - d_3 = 0 \rightarrow (3)$

نحل أي معادلتين من الثلاثة للحصول على المركز الأساسي #

• For the two circle d_1 & d_2

المركز

$d_1 : x^2 + y^2 + 2f_1 x + 2g_1 y + C_1 = 0$, $O_1 = (-f_1, -g_1)$

المركز

$d_2 : x^2 + y^2 + 2f_2 x + 2g_2 y + C_2 = 0$, $O_2 = (-f_2, -g_2)$

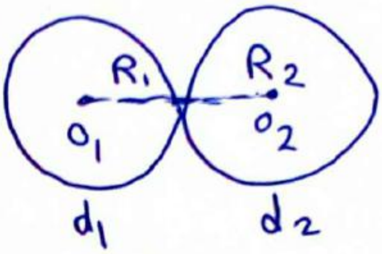
الدائرتين متماستين من الخارج

(i) if $O_1 O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow$ the circles touch each other

$O_1 O_2 = \sqrt{(-f_1 + f_2)^2 + (-g_1 + g_2)^2}$

$R_1 = \sqrt{f_1^2 + g_1^2 - C_1}$

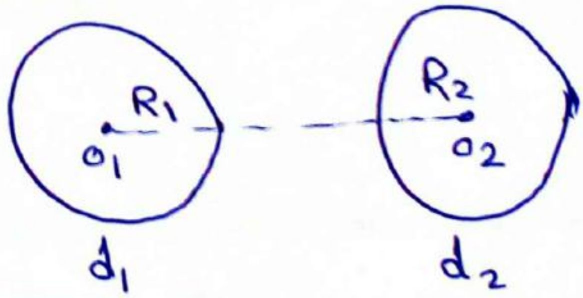
$R_2 = \sqrt{f_2^2 + g_2^2 - C_2}$



المحور الأساسي هنا هو المماس المشترك

لا يوجد تقاطع بين الدائرتين أو الدائرتين منفصلتين

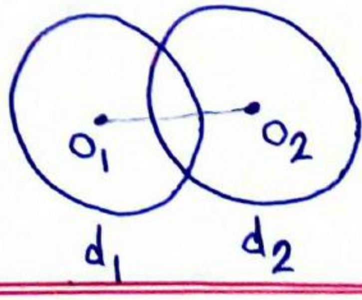
(ii) if $O_1 O_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow$ the circles are separate



الدائرتين متقاطعتين

(iii) if $O_1 O_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow$ the circles intersect each other

المحور الأساسي هنا هو الوتر المشترك



• معادلة مجموعة الدوائر متحدة المحور الأساسي :-

$d_1 + \lambda d_2 = 0$ ※ d_1, d_2 دائرتين في المجموعة

$d_1 + \mu(R.A) = 0$ ※

examples

اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (1,2-)

1. Find the equation of the circle passing through the point $(-1, 2)$ and the two point of intersection between the two circles.

وتمر بنقطتي التقاطع بين الدائرتين

$$d_1: x^2+y^2+2x-4y+11=0$$
$$d_2: x^2+y^2-3x+6y-2=0$$

Solution

معادلة الدائرة التي تمر بنقطتين تقاطع الدائرتين هي

$$d_1 + \lambda d_2 = 0$$

$$x^2+y^2+2x-4y+11+\lambda(x^2+y^2-3x+6y-2)=0$$

$(-1, 2)$ satisfies (تحقق) this circle (الدائرة)

$$(-1)^2+(2)^2+2(-1)-4(2)+11+\lambda[(-1)^2+(2)^2-3(-1)$$
$$+6(2)-2]=0$$

$$1+4-2-8+11+\lambda(1+4+3+12-2)=0$$

$$\lambda=\frac{-6}{18}=\frac{-1}{3}$$

$$\therefore x^2+y^2+2x-4y+11-\frac{1}{3}(x^2+y^2-3x+6y-2)=0 \quad \times 3$$

$$3x^2+3y^2+6x-12y+33-x^2-y^2+3x-6y+2=0$$

$$2x^2+2y^2+9x-18y+35=0 \ \#$$

ملحوظات

1. اذا كانت الدائرتين متقاطعتين فإن المحور الأساسي هو الوتر المشترك
2. اذا كانت الدائرتين متماستين فإن المحور الأساسي هو المماس المشترك
3. المحور الأساسي عمودي على الخط الواصل بين الدائرتين.

اثبت ان الدائرتين متقاطعتين ع التعامد

(2) Prove that the two circles are intersecting orthogonally

$d_1: x^2+y^2-2x-2y-2=0$ & $d_2: x^2+y^2+x+2y-1=0$

ثم اوجد طول ومعادلة الوتر المشترك

then find the equation and Length of the Common Chord

Solution

$f_1=-1$ $\quad$ $f_2=\frac{1}{2}$

$g_1=-1$ $\quad$ $g_2=1$

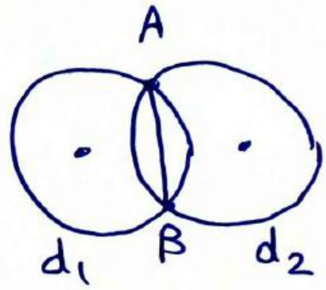
$c_1=-2$ $\quad$ $c_2=-1$

$2f_1f_2+2g_1g_2=-1-2=-3$

$c_1+c_2=-1-2=-3$

$\therefore 2f_1f_2+2g_1g_2=c_1+c_2$ #

∴ الدائرتين متقاطعتين ع التعامد



المحور الأساسى هو الوتر المشترك لأن الدائرتين متقاطعتين

معادلة الوتر المشترك

Common Chord equation:-

$$d_1-d_2=0$$

$$x^2+y^2-2x-2y-2-(x^2+y^2+x+2y-1)=0$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2x-2y-2-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}-x-2y+1=0$$

$$-3x-4y-1=0$$

$$\boxed{3x+4y+1=0}$$ #

نوجد التقاطع بين الوتر المشترك وأحدى الدائرتين لايجاد B, A

$$y=\frac{-1-3x}{4} \rightarrow (1)$$

عوض بـ (1) فى الـ d_1

$$x^2+\left(\frac{-1-3X}{4}\right)^2-2X-2\left(\frac{-1-3X}{4}\right)-2=0$$ *16

$$16X^2+(-1-3X)^2-32X-8(-1-3X)-32=0$$

$$16X^2+1+6X+9X^2-32X+8+24X-32=0$$

$$25X^2-2X-23=0$$ آلة حاسبة وحل

$X=1$ $\qquad$ $X=-0.92$

$y=\frac{-1-3}{4}=-1$ $\qquad$ $y=\frac{-1+3*0.92}{4}=0.44$

$A(1,-1)$ $\qquad$ $B=(-0.92,0.44)$

$$\text{length}=\sqrt{(1+0.92)^2+(-1-0.44)^2}=2.4 \ \#$$

---

3 Find the Radical Axis of the two circles

$d_1: x^2+y^2-2X-4y+1=0$

$d_2: X^2+y^2+6X-10y+33=0$

Solution

$$R.A: d_1-d_2=0$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2X-4y+1-\cancel{X^2}-\cancel{y^2}-6X+10y-33=0$$

$$-8X+6y-32=0$$

$$8X-6y+32=0 \ \#$$

معطى معادلتين للدائرتين من مجموعة الدوائر

[4] given the equations of two members of a common axis set of circles in the Form :-

$d_1: x^2+y^2-4x-4y+4=0$

$d_2: x^2+y^2+6x+6y+9=0$

المحور الأساسي المشترك

نقطتين النهاية

Find :- (A) the two Limit Points and the Common radical axis :-

الخطين القطبين للدائرتين

(B) the two Polar lines equations to the given two circles From the Pole $P_1(2,-3)$

Solution

(A)

نقطة النهاية للمجموعة عبارة عند دائرة نصف قطرها zero

$R=\sqrt{f^2+g^2-c}=0$

$R.A: -10x-10y-5=0$

$2x+2y+1=0$ #

أي دائرة في المجموعة $d_1+\lambda R.A=0$

$x^2+y^2-4x-4y+4+\lambda(2x+2y+1)=0$

$x^2+y^2+(2\lambda-4)x+(2\lambda-4)y+(\lambda+4)=0$

مركز المجموعة center $=(2-\lambda, 2-\lambda)$

$f=\lambda-2 \quad , \quad g=\lambda-2 \quad , \quad C=\lambda+4$

Limit Point : $R=0=\sqrt{f^2+g^2-C}$

$(\lambda-2)^2+(\lambda-2)^2-\lambda-4=0$

$2(\lambda^2-4\lambda+4)-\lambda-4=0$

$2\lambda^2-8\lambda+8-\lambda-4=0$

$2\lambda^2-9\lambda+4=0$

$(2\lambda-1)(\lambda-4)=0$

$\lambda=\frac{1}{2}$ # $\qquad \lambda=4$ #

at $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Limit Point $= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ #

at $\lambda = 4 \Rightarrow$ Limit Point $= (-2, -2)$ #

(B) Polar lines equation to the given two circles From the Pole $P_1(2, -3)$ (x_1, y_1)

$$x x_1 + y y_1 + f(x + x_1) + g(y + y_1) + C = 0$$

$$2x - 3y - 2(x+2) - 2(y-3) + 4 = 0$$

$-5y + 6 = 0$ # الخط القطبى للدائرة الأولى

$$2x - 3y + 3(x+2) + 3(y-3) + 9 = 0$$

$5x + 6 = 0$ # الخط القطبى للدائرة الثانية

اوجد معادلة الدائرة التى نصف قطرها 5

[5] find the equation of the circle has a radius 5 and has

ولها نفس المحور الأساسى للدائرتين

the same axis as the two circles $d_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

and $d_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

Solution

R.A : $d_1 - d_2 = 0$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 6x - 4y - 3 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2x - 2y + 2 = 0$$

$$8x - 6y - 1 = 0 \quad \#$$

معادلة المجموعة التى لها نفس المحور $d_1 + \lambda(R.A) = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 + \lambda(8x - 6y - 1) = 0$$

$$x^2 + y^2 + (6 + 8\lambda)x + (-4 - 6\lambda)y - 3 - \lambda = 0$$

$f = 3 + 4\lambda \quad , \quad g = -2 - 3\lambda \quad , \quad c = -3 - \lambda$

$R = 5 = \sqrt{f^2 + g^2 - c}$

$f^2 + g^2 - c = 25$

$(3 + 4\lambda)^2 + (-2 - 3\lambda)^2 + 3 + \lambda = 25$

$9 + 16\lambda^2 + 24\lambda + 4 + 9\lambda^2 + 12\lambda + 3 + \lambda = 25$

$25\lambda^2 + 37\lambda - 9 = 0$

$\boxed{\lambda = 0.2} \qquad \boxed{\lambda = -1.7}$

at $\lambda = 0.2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 7.6x - 5.2y - 3.2 = 0$ #

at $\lambda = -1.7 \Rightarrow x^2 + y^2 - 7.6x + 6.2y - 1.3 = 0$ #

اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالأصل

(6) find the equation of the circle passes through the origin

ولها نفس المحور الأساسي للدائرتين

and has same axis as the two circles $d_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

and $d_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

Solution

معادلة أي دائرة في المجموعة

$d_1 + \lambda(R.A) = 0$

المحور الأساسي

$R.A: d_1 - d_2 = 0$

$8x - 6y - 1 = 0$ #

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 + \lambda(8x - 6y - 1) = 0$ وتمر $(0,0)$

$(0)^2 + (0)^2 + 6(0) - 4(0) - 3 + \lambda(0 - 0 - 1) = 0 \qquad \boxed{\lambda = -3}$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 - 24x + 18y + 3 = 0$

$x^2 + y^2 - 18x + 14y = 0$ #

حالة خاصة
Special Case

• مجموعة من الدوائر مركزها على محور X

• the center on the X-axis :-

$$x^2+y^2+2fx+C=0$$

معادلة مجموعة الدوائر التى مركزها على محور X

الـ C ← ثابتة لجميع الدوائر

المركز
$\text{Center} = (-f, 0)$

نصف القطر
$\text{Radius} = \sqrt{f^2-C}$

$d_1 : x^2+y^2+2f_1x+C=0$

$d_2 : x^2+y^2+2f_2x+C=0$

معادلة دائرتين من المجموعة

R.A : $d_1 - d_2 = 0$

$2(f_1-f_2)x=0 \qquad x=0$

بحل المحور الأساسى مع معادلة مجموعة الدوائر

$0+y^2+0+C=0$

$y^2=-C \qquad y=\pm\sqrt{-C}$

if $C>0$

لايوجد تقاطع بين المجموعة والـ R.A

ويوجد نقطتين نهايتين

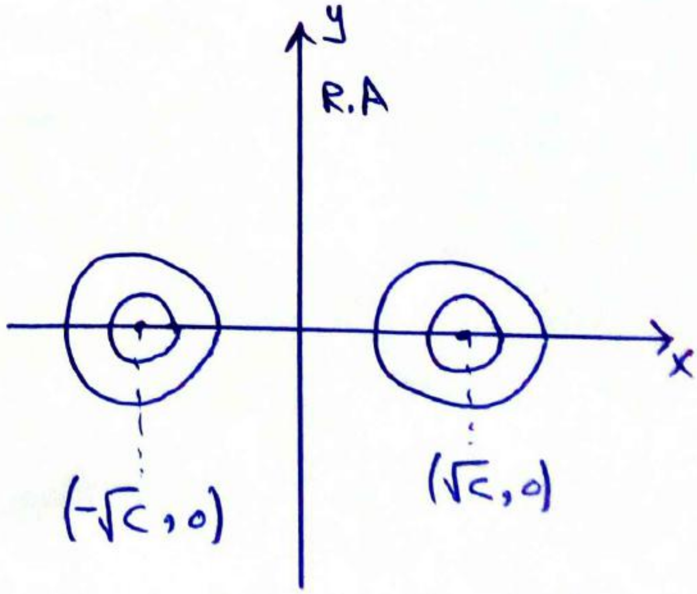
two limit Point :- دائرة قطرها صفر

$R=0=\sqrt{f^2-C}$

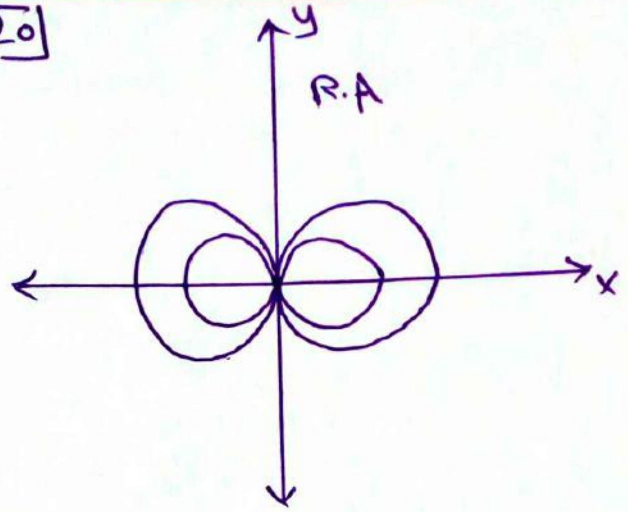
$f=\pm\sqrt{C} \qquad g=0$

$\text{center}=(-f,-g)=(\sqrt{c},0)$

$(-\sqrt{c},0)$

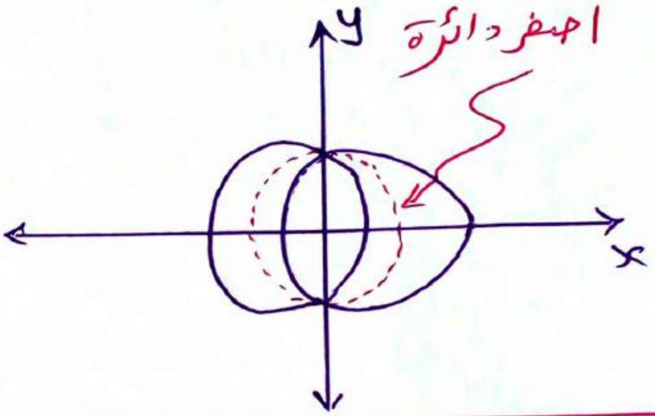


if $c = 0$



يوجد تماس بين R.A والمجموعتين
ويوجد نقطة نهاية
one Limit Point = (0,0)

if $c < 0$



يوجد تقاطع بين R.A والمجموعتين
ولا يوجد نقاط نهاية ولكن يوجد
اصغر دائرة نقاط التقاطع تمثل قطرها

---

examples

1) find circle touches $x^2+y^2-4y+2=0$ at $P_1(1,3)$ and Passes $P_2(3,-1)$

(اوجد الدائرة التي تمس ... وتمر بالنقطة)

solution

اذا كانت الدائرتين متماستين فإن معادلة خط المماس هي المحور الأساسي

tangent line: $xx_1+yy_1+f(x+x_1)+g(y+y_1)+c=0$ $\quad f=0$

OR $\quad g=-2$

Radical Axis: $x+3y-2(y+3)+2=0$ $\quad c=2$

$x+y-4=0$ #

معادلة أي دائرة لها نفس المحور $d_1+\lambda(R.A)=0$

$x^2+y^2-4y+2+\lambda(x+y-4)=0$

تحقق المعادلة $P_2(3,-1)$

$(3)^2+(-1)^2-4(-1)+2+\lambda(3-1-4)=0$ $\quad \lambda=8$

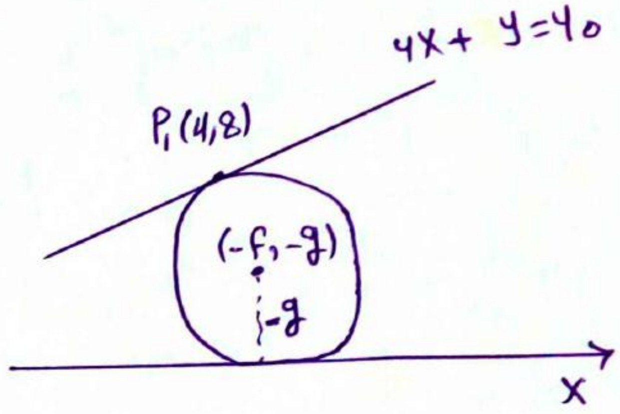
$x^2+y^2-4y+2+8x+8y-32=0$

$x^2+y^2+8x+4y-30=0$ #

اوجد معادلة الدائرة التي تمس الخط $4X+8y=40$ عند النقطة P_1
وتتماس مع محور X

[2] find the equation to the circle tangent to the line $4x+3y=40$ at the point $P_1(4,8)$ and touches the X-axis.

Solution



نفرض دائرة نصف قطرها صفر تمس الخط

$4X+y=40$ عند نقطة $(4,8)$

$$(X-4)^2+(y-8)^2=0$$

$$x^2-8x+16+y^2-16y+64=0$$

$$d_1:-\ x^2+y^2-8x-16y+80=0$$

$$R.A:\ 4X+8y-40=0$$

معادلة مجموعة الدوائر متحدة المحور $\quad d_1+\lambda\, R.A=0$

$$x^2+y^2-8x-16y+80+\lambda(4x+3y-40)=0$$

$$x^2+y^2+(4\lambda-8)x+(3\lambda-16)y+(80-40\lambda)=0$$

$$f=2\lambda-4,\quad g=3\lambda-8,\quad C=80-40\lambda$$

$$R=\sqrt{f^2+g^2-c}$$

$$-g=\sqrt{f^2+g^2-c}$$

$$g^2=f^2+g^2-c$$

$$f^2-c=0$$

$$(2\lambda-4)^2-80+40\lambda=0$$

$$4\lambda^2-16\lambda+16-80+40\lambda=0$$

$$4\lambda^2+24\lambda-64=0$$

$$\{\lambda=2\}\qquad\{\lambda=-8\}$$

at $\lambda=2 \Rightarrow x^2+y^2-10y=0$ #

at $\lambda=-8 \Rightarrow x^2+y^2-40x-40y+400=0$ #

أوجد مركز ونصف قطر أصغر دائرة المتحدة مع الدائرتين

3 Find the Center and radius of the smallest circle that combined with the two circles $x^2+y^2+2x-4=0$ and

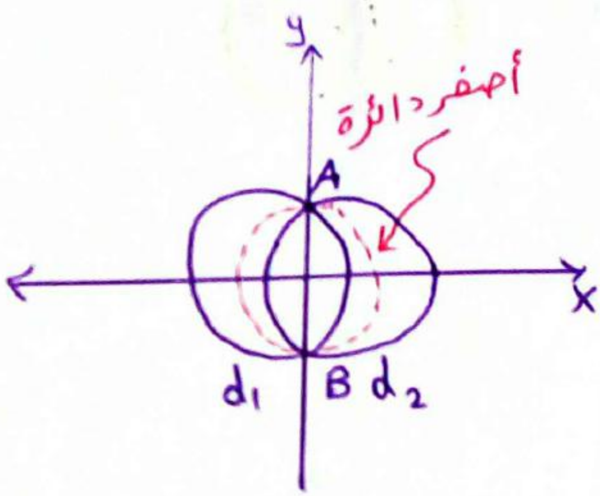
d_1:-

d_2:- $x^2+y^2-3x-4=0$

Solution

R.A: $d_1 - d_2 = 0$

$x = 0$



لايجاد نقاط التقاطع A & B

نحل R.A مع الدائرة d_1

$0 + y^2 + 0 - 4 = 0$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

$A = (0,2) \qquad B = (0,-2)$

معادلة أصغر دائرة بدلالة A,B يمثلان نهاية قطرها

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

$x^2+y^2-4=0 \qquad f = g = 0 \qquad c = -4$

center $= (-f, -g) = (0,0)$

Radius $= \sqrt{f^2+g^2-c} = \sqrt{4} = 2$ #