

Partial Fractions الكسور الجزئية

لها هي عملية تحويل كسر كبير إلى مجموع الكسور الصغيرة لتكون له.
 (أي هي عملية عكسية لتوحيد المقامات)

$$\frac{P(x)}{q(x)} \Rightarrow \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \frac{f_3(x)}{g_3(x)} + \dots$$

مجموعة سنتر شير
 للخدمات الطلابية
 كلية الهندسة

أستاذة م. م. م. م.

كسر كبير مطلوب
 تقطع إلى كسور
 صغيرة مجموعها
 مع بعض

الكسور الصغيرة
 المطلوبة

مجموعة سنتر شير
 للخدمات الطلابية
 كلية الهندسة

* شرط لإيجاد الكسور الجزئية:
 ① أن يكون بسط $P(x)$ ولقام $q(x)$ لكسر يكسر عبارة عن

كثيرات حدود مثل $x^3 + 2x^2 - 4$
 أي لا يوجد بهم جذر تربيعي ولا يوجد بهم كسور صغيرة مثل

$$x^3 + 2\sqrt{x} + 3 \Rightarrow \text{لا بد من إتمام هذا الجذر أولاً}$$

$$2x^4 + 5x^3 + \frac{3}{x} + 7 \Rightarrow \text{لا بد من إتمامه من المقام ① أولاً}$$

كما يتفق لا حقا بالأمثلة.

* خطوات لإيجاد الكسور الجزئية:
 ① نأخذ من درجة البسط أقل من درجة المقام "لأننا نأخذ أكبر x "

في البسط أقل من أكبر x في المقام "لأننا نأخذ أكبر x "
 وإذا كان درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام نحل قسمة مطولة
 كما يتفق بالأمثلة

② حال المقام ① البسط صورة مع طرحه أن
 لا يظل

$$x^2 + 4 \Rightarrow$$

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

هنا القسمة على

* بعد تحليل المقام ستكون هناك 3 طرق لحساب (الأسهل) الثانية

① المقام به مقادير (أقواس) درجة أولى غير مكررة (يعني أس = 1)
الأقواس = 1

Ex. $\frac{x^2+3}{(x-1)(x+3)(2x-4)}$ نفرض الحل بالكلية $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{2x-4}$

حيث أن A, B, C ثوابت مجهولة مطلوب إيجادها لاحقاً...

② المقام به مقادير درجة أولى بعضها مكرر (يعني بعض الأقواس أس أكبر من 1)

Ex. $\frac{3x-2}{(x+7)^3(x-2)(x+4)}$ نفرض الحل بالكلية $= \frac{A}{(x+7)^3} + \frac{B}{(x+7)^2} + \frac{C}{(x+7)^1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+4}$

↓
مقدار درجة أولى مكرر 3 مرات
↓
درجة أولى غير مكرر
↓
درجة أولى غير مكرر

لـ الثوابت A, B, C, D, E سيتم حسابها لاحقاً في الأمثلة

③ المقام به مقادير (درجة ثانية) لا تكرر وغير مكررة (يعني أقواس أس = 1)

Ex. : $\frac{x^2+x-2}{(x^2+4)(x^2+x+1)(x+3)}$ نفرض الحل بالكلية $= \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{x+3}$

↓
مقادير درجة ثانية لا تكرر وغير مكررة
↓
درجة ثانية مكررة

مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلابية
تحت إشراف
الهندسة

④ المقام به مقادير درجة ثانية مكررة وبعضها مكرر

Ex. $\frac{3}{(x^2+1)^2(x+5)}$ نفرض الحل بالكلية $= \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^1} + \frac{E}{x+5}$

↓
درجة ثانية مكررة
مكرر مرتين

ملاحظة على ما سبقه: ① إذا كان مقام درجة أولى فإنه ليس ثابت فقط

② إذا كان مقام درجة ثانية كما يدل فإنه ليس درجة أولى مثل $AX+B$...

③ إذا كان مقام درجة ثانية ويميل يبقى لازم حالة ولو محتمل

④ إذا كان مقام كل فإننا نكتب الخمس في ما هو بنفس الأس ثم نكتبه أيضا بعد نقل الأس بمقدار واحد وهكذا حتى نصل بأس المقوس = 1.

⑤ إذا كان مقام درجة ثالثة أو رابعة أو ... يبقى لازم يتحلل علامة يبقى لأنه ليس له حالة منه حالة الكسور الجزئية.

الخطوة ③ في مسألة الكسور الجزئية: حساب قيم الثوابت A, B, C, \dots

مجموعة من الخدمات التعليمية

Center Share

Direct Method

① الطريقة المباشرة "مجرد النظر"

وهذه الطريقة تصلح للحالة الأولى كلها "مقامات درجة أولى غير مكررة"

الحالة الثانية "درجة أولى مكررة" بتعريب الثابت لكل المقام

واحد أكبر من \Rightarrow مثال

$$\frac{X+1}{(X+2)^3(X+3)} = \frac{A}{(X+2)^3} + \frac{B}{(X+2)^2} + \frac{C}{(X+2)} + \frac{D}{X+3}$$

الطريقة المباشرة تعيب الثابت (D) لأن مقامه غير مكررة (حالة الأولى)

و " " (A) لأن مقامه مكرر (حالة الثانية) ومقام واحد

أ أكبر من \Rightarrow ③ \rightarrow من المقوس

كيفية حساب الثابت

أضرب مقام (A) \rightarrow $X = -2$

عوضنا في المقوسر أكبر الأس

$$A = \frac{(-2) + 1}{(-2+3)} = \frac{-1}{1} = -1$$

مع إزالة $X = -2$ هنا A مكررة (حالة غير مكررة)

كيفية حساب الثابت D

$$D \xrightarrow{\text{أصغر مقامه}} \frac{-3+1}{(-3+2)^3} = \frac{-2}{(-1)^3} = \boxed{2}$$

عوضنا بـ -3 في المقام
الذي حصل من $x = -3$

مع إزالة مقام D منه

* أما الثوابت B, C، وأيضا ثوابت الحالة الثالث (درجة ثانية - غير مكررة)
الرابعة (" " مكررة)

نقوم بحساب جبرياً بالطريقة [2] طريقة توحيد المقامات

أمثلة
Examples

Factorize the following fractions into its Partial fractions
"جزء كسراتها إلى كسور جزئية"
صيغة السؤال

① $\frac{2x^2+6}{x(x-1)(x-2)}$

Solution

لحساب مقام جاهز (حالة الأولى)

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

وهذه الثوابت جميعاً نوجد بالطريقة المباشرة

A $\xrightarrow{\text{أصغر مقامه}} \frac{2(0)^2+6}{(0-1)(0-2)} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

B $\xrightarrow{\text{أصغر مقامه}} \frac{2(1)^2+6}{(1)(1-2)} = \frac{8}{-1} = \boxed{-8}$

C $\xrightarrow{\text{أصغر مقامه}} \frac{2(2)^2+6}{2(2-1)} = \boxed{7}$

$$\therefore \frac{2x^2+6}{x(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x} + \frac{-8}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

#

Ex ② $\frac{2x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x}$

Solution

$\frac{2x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x}$

8 درجة تحليل لتمام 8 درجة درجة أكبر من الثانية

$= \frac{2x^2 + 6}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{2x^2 + 6}{x(x-1)(x+2)}$

$\begin{array}{r} x-1 \\ x+2 \end{array}$

$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

كل الثوابت بمجرد النظر في الثوابت

$A|_{x=0} = \frac{6}{-2} = -3$

$B|_{x=1} = \frac{8}{(1)(3)} = \frac{8}{3}$

$C|_{x=-2} = \frac{14}{(-2)(-3)} = \frac{7}{3}$

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$\therefore \frac{2x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-3}{x} + \frac{8/3}{x-1} + \frac{7/3}{x+2} \quad \#$

Ex ③ $\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

الحل

Center Share

$\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

x^2 عامل مشترك

$= \frac{1}{x^2(x-1) - (x-1)}$

عامل مشترك

$= \frac{1}{(x-1)[x^2-1]} = \frac{1}{(x-1)(x-1)(x+1)}$

يحل

دقة قدس مقرر
يبقى 8 م يكتب
 $(x-1)^2$

الآن الثاني

$= \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$

A و C فسيكون بمجرد النظر (بسهولة)

$A|_{x=1} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$

$C|_{x=-1} = \frac{1}{(-1-1)^2} = \frac{1}{4}$

لا يار B نقوس بتوحيده مقامات الطرفين إلى كسرين

$$\therefore \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$$

(مقام 2) (مقام 1) (مقام 2)

$$= \frac{A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

نزيل المقامات مع بعضنا : بسط = بسط

$$1 = \frac{1}{2}A(x+1) + B(x-1)(x+1) + \frac{1}{4}C(x-1)^2 \rightarrow (*)$$

لوضع x بأى رقم في الطرفين للوصول على B . Put $x=0$

$$\therefore 1 = \frac{1}{2}(0+1) + B(0-1)(0+1) + \frac{1}{4}(0-1)^2$$

$$1 = \frac{1}{2} - B + \frac{1}{4} \quad B = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{(x-1)} + \frac{1/4}{x+1} \quad \#$$

Ex ③ $\frac{x}{(x-2)^3}$ الحل

مقام درجة أولى مكرر 3 مرات

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$= \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^1}$$

A فقل بحسب الطريقة المباشرة (مكرر مقام هو المقوم أى ص 0 "أكثر من")

$$A|_{x=2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \frac{x}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^1}$$

$$= \frac{A + B(x-2) + C(x-2)^2}{(x-2)^3}$$

لا يار B, C :

بوجه مقادير

$$\therefore X = \frac{2}{(x-2)^3} + B(x-2) + C(x-2)^2 \rightarrow (*)$$

عندما نراه بسط الطرفين

ملاحظة: عند الحصول على معادلة (*) فإنها صالحة يمكن إكمال الحل

طريقة

نضع x في أرقام

Put $x=0 \Rightarrow 0=2-2B+4C$
 $\Rightarrow 2C-B=-1 \rightarrow ①$

Put $x=1 \Rightarrow 1=2-B+C$
 $\Rightarrow C-B=-1 \rightarrow ②$

$\Rightarrow C=0$
 $B=1$

الآن $\frac{2}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2} + 0$

لإيجاد معاملات x المختلفة للطرفين

بمساواة معاملات أكبر x للطرفين (x^2)

$\Rightarrow 0=C$

بمساواة معاملات x^1 للطرفين

$\Rightarrow 1=B-4C \Rightarrow B=1$

وهو نفس النتيجة في الحالة

#

مجموعة منتقش
 خدمات الطلاب
 كلية هندسة

Ex ④: $\frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)}$

$= \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+4)}$

$= \frac{A(x+4) + B(x+3)(x+4) + C(x+3)^2}{(x+3)^2(x+4)}$

$A|_{x=-3} = \frac{2(-3)^2+16(-3)+29}{(-3+4)}$
 $\Rightarrow A=-1$

$C|_{x=-4} = \frac{2(-4)^2+16(-4)+29}{(-4+3)}$
 $\Rightarrow C=-3$

بإيجاد B بتوسيع المقامات

$\Rightarrow 2x^2+16x+29 = \frac{-1}{(x+3)^2} + B(x+3)(x+4) + \frac{-3}{(x+3)^2}$

Put $x=0 \Rightarrow 29 = -4 + 3B + 4 - 27 \Rightarrow B=5$

الآن $\frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{x+3} - \frac{3}{x+4}$ #

$$\frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)} = \frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{x+3} - \frac{3}{x+4} \quad \#$$

Ex: $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

لـ $\frac{1}{x-1}$ درجة أولى
غير مكررة
لـ $\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$ درجة ثانية
مكرر

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$A \rightarrow$ عند $x=1$ $\therefore A = \frac{1+15}{1+2+5} = 2$

$$= \frac{A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

عبارة بسط مطابقة

$$\therefore x^2+15 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)$$

Put $x=0$ $(0, 15) \therefore 15 = 5A - C$

$$\therefore C = -5$$

Put $x=-1$ $(-1, 16) \therefore 16 = 4A - 2C + 2B$

$$\therefore B = -1$$

$$\therefore \frac{1}{x^2+15} = \frac{2}{x-1} + \frac{-x-5}{x^2+2x+5} \quad \#$$

Ex: $\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^1}$

مقسوم عليه $(x^2+1)^2$ مقسم عليه $(x^2+1)^1$ كما كان مقسم

مجموع المقامات

$$= \frac{(Ax+B) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

مساواة بسط للطرفين :-

$$\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = (Ax+B) + (Cx+D)(x^2+1)$$

مساواة معامل x^3 للطرفين :-

$\therefore 0 = C$

$1 = D$

$-2 = A + C$

$\therefore A = -2$

$\therefore 1 = B + D$ $B = 0$

$\therefore \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)}$ #

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Ex 12: Find the Partial fraction for

11

$$\frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15}$$

دعنا البسط أكبر من المقام

نقوم بالقسمة الطويلة

$$\frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15} = X + 3 + \frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

$$= X + 3 + \frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

نقوم بإيجاد العوامل الجزئية
هنا الكسور

$$\frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15} = X + 3 + \frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

$$\frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15} = X + 3 + \frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

$$\frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

$$\frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

$$\frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15}$$

$$\frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15} = \frac{9X + 48}{(X + 5)(X - 3)} = \frac{A}{X + 5} + \frac{B}{X - 3}$$

$$A|_{X=-5} = \frac{9(-5) + 48}{(-5 - 3)} = \frac{-3}{8}$$

بمجرد النظر

$$B|_{X=3} = \frac{9(3) + 48}{(3 + 5)} = \frac{75}{8}$$

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\frac{9X + 48}{X^2 + 2X - 15} = \frac{-3/8}{X + 5} + \frac{75}{8(X - 3)}$$

$$\therefore \frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15} = X + 3 - \frac{3}{8(X + 5)} + \frac{75}{8(X - 3)}$$

[12]

Report

$$4x^2 - 4x + 16$$

$$x^3 + 4x \Rightarrow x(x^2 + 4) \Rightarrow \text{Complete--}$$

V.I.P.

Ex:

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{5}{x^2(x+2) + (x+2)}$$

كامل مشترك

$$= \frac{5}{(x+2)(x^2+1)}$$

مجموعة منتير شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

حل على () \leftarrow معادلة من الدرجة الثانية غير مكررة \leftarrow معادلة من الدرجة الأولى

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$A \Big|_{x=-2} = \frac{5}{(-2)^2+1} = 1 \quad A \leftarrow \text{عبر د انظر}$$

* ليبدأ B, C بتوحيد المقامات

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

* مساواة لليسار للطرفين :

$$\therefore 5 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2) \quad (*)$$

Put $x=0$ $\therefore 5 = A + 2C \quad \boxed{C=2}$

• Put $\boxed{x=1}$

$\therefore 5 = 2A + 3B + 3C$

13

$\therefore 3B = -3 \quad \therefore \boxed{B = -1}$

$\therefore \frac{5}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{1}{x+2} + \frac{(-x+2)}{x^2+1}$ #

Ex: $\frac{x^4}{x^4 - 25}$

درجته أكبر من
درجته
« قسمه طوله »

OR $= \frac{(x^4 - 25) + 25}{x^4 - 25}$

مثال 1
 $\frac{x^4 - 25}{x^4 - 25} = 1 + \frac{25}{x^4 - 25}$

$= 1 + \frac{25}{x^4 - 25}$

نوضح كسر جزئي
هنا الكسر

مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلاب
كلية الهندسة

$\frac{25}{x^4 - 25} = \frac{25}{(x^2 - 5)(x^2 + 5)} = \frac{25}{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)}$

لأن فرقته بين مربعين
يحل

لأنه يحلل
يحل

$= \frac{A}{x - \sqrt{5}} + \frac{B}{x + \sqrt{5}} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5}$

A, B بمجرد النظر

14

$$A \Big|_{x=\sqrt{5}} = \frac{25}{(\sqrt{5}+\sqrt{5})(5+5)} = \frac{25}{20\sqrt{5}}$$

$$B \Big|_{x=-\sqrt{5}} = \frac{25}{(-\sqrt{5}-\sqrt{5})(5+5)} = \frac{-25}{20\sqrt{5}}$$

بقوم في مقام ومساواة البسط منتهية بالـ 1 و 5 في الجواب

$$\therefore 25 = A(x+\sqrt{5})(x^2+5) + B(x-\sqrt{5})(x^2+5) + C(x+D)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

$$0 = A+B+C \quad \sim \quad \boxed{C=0}$$

* معامل x^3 = 0
* المعادلة:

$$25 = 5\sqrt{5}A - 5\sqrt{5}B - 5D$$

$$25 = 5\sqrt{5} \times \frac{25}{20\sqrt{5}} + 5\sqrt{5} \times \frac{25}{20\sqrt{5}} - 5D$$

$$\sim \boxed{D = -\frac{5}{2}}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\therefore \frac{x^4}{x^4-25} = 1 + \frac{25}{20\sqrt{5}(x-\sqrt{5})} - \frac{25/20\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} + \frac{-5/2}{x^2+5}$$

#

13

Ex:- جزر VIP.

$$\frac{6\sqrt{x} + 30}{x^3 - 1}$$

⑤

ملاحظة: الكسور الجزئية تتعامل مع الكسور التي بسطها
كسرة حدود وحاصلها كثيرة حدود ولا يوجد جذور
لذلك نقوم بإزالة هذه الجذور عن طريق:

Put $y = \sqrt{x}$

فول بالة كل المتغير y

$$\therefore x = y^2 \quad \sim \quad x^3 = y^6$$

$$\therefore \frac{6\sqrt{x} + 30}{x^3 - 1} = \frac{6y + 30}{y^6 - 1} \Rightarrow \text{كل}$$

مجموعه منتظر شير
مهندسات الطلابية
نسبة الهندسة

$$= \frac{6y + 30}{(y^3 - 1)(y^3 + 1)}$$

مجموع متحسين (كل) $\frac{6y + 30}{(y^3 - 1)(y^3 + 1)}$ $\frac{6y + 30}{(y^3 - 1)(y^3 + 1)}$ فرقته بينه متحسينه كل

$$= \frac{6y + 30}{(y - 1)(y^2 + y + 1)(y + 1)(y^2 - y + 1)}$$

$$= \frac{A}{y - 1} + \frac{B}{y + 1} + \frac{Cy + D}{y^2 + y + 1} + \frac{Ey + F}{y^2 - y + 1}$$

15

$$A \Big|_{y=1} = \frac{6(1) + 30}{(1+1)(1+1)(1-1+1)} = 6$$

$$B \Big|_{y=-1} = \frac{6(-1) + 30}{(-1-1)((-1)^2 - 1 + 1)((-1)^2 + 1 + 1)} = -4$$

مجموعة منتير شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

بتوجيه لقطاعات ومساراة البسط للطرفين:-

$$6y + 30 = A(y+1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

$$+ B(y-1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

$$+ (Cy+D)(y^2-1)(y^2-y+1)$$

$$+ (Ey+F)(y^2-1)(y^2+y+1) \Rightarrow (*)$$

لاحظ القويضة الثانية: $y^2+y+1 \rightarrow$ ف لقطاعات

$$y^2+y+1=0 \quad \sim \quad y^2 = -y-1 \quad \text{لإيجاد } C, D \text{ } \leftarrow \text{نظام } \begin{cases} C \\ D \end{cases} = 0$$

(*) عوض في المعادلة

$$\therefore 6y + 30 = 0 + 0 + (Cy+D)(-y-1-1)(-y-1-y+1) + 0$$

$$6y + 30 = (Cy+D)(-y-2)(-2y) = (Cy+D)(2y^2+4y)$$

$$6y + 30 = (Cy+D)(2(-y-1) + 4y)$$

$$= (Cy+D)(-2y-2+4y) = (Cy+D)(2y-2)$$

17

$$\therefore 6y+30 = 2Cy^2 - 2Cy + 2Dy - 2D$$

$$= 2C(-y-1) - 2Cy + 2Dy - 2D$$

$$6y+30 = -2Cy - 2C - 2Cy + 2Dy - 2D$$

$$6y+30 = y(-4C+2D) + (-2C-2D)$$

* معادلات y للفرصة:

$$\therefore 6 = -4C + 2D \rightarrow (1)$$

$$\therefore 30 = -2C - 2D \rightarrow (2) \quad \text{* المعادلة للفرصة:}$$

$$\therefore \boxed{C = -6}, \boxed{D = -9} \quad \text{حل (1) و (2)}$$

$$y^2 - y + 1 = 0 \quad \text{معادلات } E, F \quad \text{* بالمثل لي ياد}$$

$$\therefore \boxed{y^2 = y - 1} \rightarrow$$

عوضه في المعادلة (*)

$$\therefore 6y+30 = 0+0+0 + (Ey+F)(y-1-1)(y-1+y+1)$$

$$= (Ey+F)(y-2)(2y) = (Ey+F)(2y^2-4y)$$

$$\therefore 6y+30 = (Ey+F)(2(y-1)-4y)$$

$$= (Ey+F)(-2y-2)$$

مجموعة المنتسرين شير
مجموعات الطلابية
خليفة

Center Share

18

$$\therefore 6y + 30 = -2Ey^2 - 2Ey - 2Fy - 2F$$

$$6y + 30 = -2Ey^2 + 2E - 2Ey - 2Fy - 2F$$

$$6y + 30 = (-4E - 2F)y + 2E - 2F$$

$$6 = -4E - 2F \rightarrow (3) \quad : y \text{ مخرج } *$$

$$30 = 2E - 2F \rightarrow (4) \quad : \text{الحد الثابت } *$$

$$E = 4, F = -11 \quad \text{في } 4, 3$$

$$\therefore \frac{6\sqrt{x} + 30}{x^3 - 1} = \frac{6}{\sqrt{x}y - 1} + \frac{-4}{\sqrt{x}y + 1}$$

$$+ \frac{-6y\sqrt{x} - 9}{x^2 + y + 1} + \frac{4y\sqrt{x} - 11}{x^2 - y + 1}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

17

* Find the Partial Fractions of the Fraction:

$$\frac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Solution

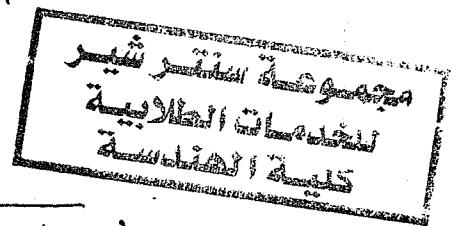
- درجة البسط (2) و درجة المقام (6) ، المقام كله حاصل ضرب عوامل

لافظ أنه عبارة عن مجموع مربعين

علو حظاً أيضاً أنه لا x في البسط ، المقام على صيغة x^2 فقط

يمكن نفع

$$\boxed{x^2 = y}$$



$$\therefore \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{y - 2}{(y + 2)(y + 1)(y + 4)}$$

أصبح المقام عبارة عن مجموع ثلاثة عوامل

$$= \frac{A}{y + 2} + \frac{B}{y + 1} + \frac{C}{y + 4}$$

$$A|_{y=-2} = \frac{-4}{(-1)(2)} = 2$$

$$B|_{y=-1} = \frac{-3}{(1)(3)} = -1$$

$$C|_{y=-4} = \frac{-6}{(-2)(-3)} = -1$$

$$\therefore \frac{y - 2}{(y + 2)(y + 1)(y + 4)} = \frac{2}{y + 2} + \frac{-1}{y + 1} + \frac{-1}{y + 4}$$

ثم نزيد y ونضع x^2

$$= \frac{2}{x^2 + 2} - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4}$$

• Solve حل بنظر عن فضاء

Find The Partial Fractions:

$$(1) \frac{x^2 + x + 4}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

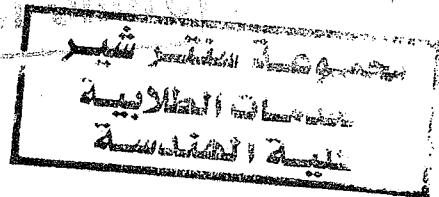
$$(2) \frac{x^2}{(1-x)(1+x^2)^2}$$

$$(3) \frac{x^4}{x^3 + 1}$$

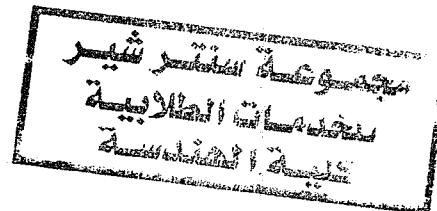
$$(4) \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$(5) g(y) = \frac{5y + 1 + \frac{2}{y}}{(y+2)(y^2+1)}$$

Center Share



Center Share



Center Share

② طلال الحقام لکھنؤ حیدرہ
وہاڑی، انکسور، جزیہ

ex. $\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$ طرق درجه اولی غیر مکرر

ex. $\frac{7}{(x-3)(x+6)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+6)^2} + \frac{C}{(x+6)^1}$ بعضیها ممکنه

ex. $\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$

درجه تانیسه لاقل
بعضی مکرر

ex: $\frac{3x^2-4}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^1}$

ثم توجد الثوابت ← إذا كانت الحقائق درجة أولى غير مكدرة
أو درجة أولى مكدرة وافذة أعلى من نوعها
بطريقة مجرد النظر (الطريقة الجباشرة)

غير كدة نفوس الحقائق وان ادى بسبب للفرقة
ثم اضع X اى ارقام او نقارن الحاصلات للفرقة #

۱۰۰
 ۱۰۱
 ۱۰۲
 ۱۰۳
 ۱۰۴
 ۱۰۵
 ۱۰۶
 ۱۰۷
 ۱۰۸
 ۱۰۹
 ۱۱۰
 ۱۱۱
 ۱۱۲
 ۱۱۳
 ۱۱۴
 ۱۱۵
 ۱۱۶
 ۱۱۷
 ۱۱۸
 ۱۱۹
 ۱۲۰
 ۱۲۱
 ۱۲۲
 ۱۲۳
 ۱۲۴
 ۱۲۵
 ۱۲۶
 ۱۲۷
 ۱۲۸
 ۱۲۹
 ۱۳۰
 ۱۳۱
 ۱۳۲
 ۱۳۳
 ۱۳۴
 ۱۳۵
 ۱۳۶
 ۱۳۷
 ۱۳۸
 ۱۳۹
 ۱۴۰
 ۱۴۱
 ۱۴۲
 ۱۴۳
 ۱۴۴
 ۱۴۵
 ۱۴۶
 ۱۴۷
 ۱۴۸
 ۱۴۹
 ۱۵۰
 ۱۵۱
 ۱۵۲
 ۱۵۳
 ۱۵۴
 ۱۵۵
 ۱۵۶
 ۱۵۷
 ۱۵۸
 ۱۵۹
 ۱۶۰
 ۱۶۱
 ۱۶۲
 ۱۶۳
 ۱۶۴
 ۱۶۵
 ۱۶۶
 ۱۶۷
 ۱۶۸
 ۱۶۹
 ۱۷۰
 ۱۷۱
 ۱۷۲
 ۱۷۳
 ۱۷۴
 ۱۷۵
 ۱۷۶
 ۱۷۷
 ۱۷۸
 ۱۷۹
 ۱۸۰
 ۱۸۱
 ۱۸۲
 ۱۸۳
 ۱۸۴
 ۱۸۵
 ۱۸۶
 ۱۸۷
 ۱۸۸
 ۱۸۹
 ۱۹۰
 ۱۹۱
 ۱۹۲
 ۱۹۳
 ۱۹۴
 ۱۹۵
 ۱۹۶
 ۱۹۷
 ۱۹۸
 ۱۹۹
 ۲۰۰
 ۲۰۱
 ۲۰۲
 ۲۰۳
 ۲۰۴
 ۲۰۵
 ۲۰۶
 ۲۰۷
 ۲۰۸
 ۲۰۹
 ۲۱۰
 ۲۱۱
 ۲۱۲
 ۲۱۳
 ۲۱۴
 ۲۱۵
 ۲۱۶
 ۲۱۷
 ۲۱۸
 ۲۱۹
 ۲۲۰
 ۲۲۱
 ۲۲۲
 ۲۲۳
 ۲۲۴
 ۲۲۵
 ۲۲۶
 ۲۲۷
 ۲۲۸
 ۲۲۹
 ۲۳۰
 ۲۳۱
 ۲۳۲
 ۲۳۳
 ۲۳۴
 ۲۳۵
 ۲۳۶
 ۲۳۷
 ۲۳۸
 ۲۳۹
 ۲۴۰
 ۲۴۱
 ۲۴۲
 ۲۴۳
 ۲۴۴
 ۲۴۵
 ۲۴۶
 ۲۴۷
 ۲۴۸
 ۲۴۹
 ۲۵۰
 ۲۵۱
 ۲۵۲
 ۲۵۳
 ۲۵۴
 ۲۵۵
 ۲۵۶
 ۲۵۷
 ۲۵۸
 ۲۵۹
 ۲۶۰
 ۲۶۱
 ۲۶۲
 ۲۶۳
 ۲۶۴
 ۲۶۵
 ۲۶۶
 ۲۶۷
 ۲۶۸
 ۲۶۹
 ۲۷۰
 ۲۷۱
 ۲۷۲
 ۲۷۳
 ۲۷۴
 ۲۷۵
 ۲۷۶
 ۲۷۷
 ۲۷۸
 ۲۷۹
 ۲۸۰
 ۲۸۱
 ۲۸۲
 ۲۸۳
 ۲۸۴
 ۲۸۵
 ۲۸۶
 ۲۸۷
 ۲۸۸
 ۲۸۹
 ۲۹۰
 ۲۹۱
 ۲۹۲
 ۲۹۳
 ۲۹۴
 ۲۹۵
 ۲۹۶
 ۲۹۷
 ۲۹۸
 ۲۹۹
 ۳۰۰
 ۳۰۱
 ۳۰۲
 ۳۰۳
 ۳۰۴
 ۳۰۵
 ۳۰۶
 ۳۰۷
 ۳۰۸
 ۳۰۹
 ۳۱۰
 ۳۱۱
 ۳۱۲
 ۳۱۳
 ۳۱۴
 ۳۱۵
 ۳۱۶
 ۳۱۷
 ۳۱۸
 ۳۱۹
 ۳۲۰
 ۳۲۱
 ۳۲۲
 ۳۲۳
 ۳۲۴
 ۳۲۵
 ۳۲۶
 ۳۲۷
 ۳۲۸
 ۳۲۹
 ۳۳۰
 ۳۳۱
 ۳۳۲
 ۳۳۳
 ۳۳۴
 ۳۳۵
 ۳۳۶
 ۳۳۷
 ۳۳۸
 ۳۳۹
 ۳۴۰
 ۳۴۱
 ۳۴۲
 ۳۴۳
 ۳۴۴
 ۳۴۵
 ۳۴۶
 ۳۴۷
 ۳۴۸
 ۳۴۹
 ۳۵۰
 ۳۵۱
 ۳۵۲
 ۳۵۳
 ۳۵۴
 ۳۵۵
 ۳۵۶
 ۳۵۷
 ۳۵۸
 ۳۵۹
 ۳۶۰
 ۳۶۱
 ۳۶۲
 ۳۶۳
 ۳۶۴
 ۳۶۵
 ۳۶۶
 ۳۶۷
 ۳۶۸
 ۳۶۹
 ۳۷۰
 ۳۷۱
 ۳۷۲
 ۳۷۳
 ۳۷۴
 ۳۷۵
 ۳۷۶
 ۳۷۷
 ۳۷۸
 ۳۷۹
 ۳۸۰
 ۳۸۱
 ۳۸۲
 ۳۸۳
 ۳۸۴
 ۳۸۵
 ۳۸۶
 ۳۸۷
 ۳۸۸
 ۳۸۹
 ۳۹۰
 ۳۹۱
 ۳۹۲
 ۳۹۳
 ۳۹۴
 ۳۹۵
 ۳۹۶
 ۳۹۷
 ۳۹۸
 ۳۹۹
 ۴۰۰
 ۴۰۱
 ۴۰۲
 ۴۰۳
 ۴۰۴
 ۴۰۵
 ۴۰۶
 ۴۰۷
 ۴۰۸
 ۴۰۹
 ۴۱۰
 ۴۱۱
 ۴۱۲
 ۴۱۳
 ۴۱۴
 ۴۱۵
 ۴۱۶
 ۴۱۷
 ۴۱۸
 ۴۱۹
 ۴۲۰
 ۴۲۱
 ۴۲۲
 ۴۲۳
 ۴۲۴
 ۴۲۵
 ۴۲۶
 ۴۲۷
 ۴۲۸
 ۴۲۹
 ۴۳۰
 ۴۳۱
 ۴۳۲
 ۴۳۳
 ۴۳۴
 ۴۳۵
 ۴۳۶
 ۴۳۷
 ۴۳۸
 ۴۳۹
 ۴۴۰
 ۴۴۱
 ۴۴۲
 ۴۴۳
 ۴۴۴
 ۴۴۵
 ۴۴۶
 ۴۴۷
 ۴۴۸
 ۴۴۹
 ۴۵۰
 ۴۵۱
 ۴۵۲
 ۴۵۳
 ۴۵۴
 ۴۵۵
 ۴۵۶
 ۴۵۷
 ۴۵۸
 ۴۵۹
 ۴۶۰
 ۴۶۱
 ۴۶۲
 ۴۶۳
 ۴۶۴
 ۴۶۵
 ۴۶۶
 ۴۶۷
 ۴۶۸
 ۴۶۹
 ۴۷۰
 ۴۷۱

Examples

[1] M.T. 2015:

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$$

جس Center Share

$$= \frac{x+4}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$$

$$A \xrightarrow{x=2} A = \frac{2+4}{(2+2)(2+1)} = \frac{6}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

↑
ملاحظة
A ملاحظة

$$B \xrightarrow{x=-2} B = \frac{(-2+4)}{(-2-2)(-2+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C \xrightarrow{x=-1} C = \frac{-1+4}{(-1-2)(-1+2)} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\therefore \frac{x+4}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{1/2}{x-2} + \frac{1/2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \quad \#$$

[2] Factorize the fraction $\frac{1}{(1-3x)^2(1+x^2)}$ into Partial fractions (2015 final)

جس

$$\frac{1}{(1-3x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{(1-3x)^2} + \frac{B}{(1-3x)^1} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

↓ ملاحظة
↓ ملاحظة

$$A \xrightarrow{x=1/3} A = \frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{10}$$

لا يسار باقى لثوابت بتوضيح

$$= \frac{A(1+x^2) + B(1-3x)(1+x^2) + (Cx+D)(1-3x)^2}{(1-3x)^2(1+x^2)}$$

بجسالة البسط للفرص:

$$\therefore 1 = \overset{\frac{9}{10}}{A}(1+x^2) + B(1-3x)(1+x^2) + (Cx+D)(1-3x)^2 \rightarrow (1-6x+9x^2)$$

مطابقة Coeff x^3 : $0 = -3B + 9C \rightarrow \textcircled{1} \rightarrow 3C - B = 0$

x^2 : $0 = \frac{9}{10} + B - 6C + 9D \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow B - 6C + 9D = -\frac{9}{10}$

x : $0 = -3B + C - 6D \rightarrow \textcircled{3}$

Const: $1 = \frac{9}{10} + B + D \rightarrow \textcircled{4} \therefore B + D = \frac{1}{10}$

$B = 9/50$

$C = 3/50$

$D = -4/50$

كل $\textcircled{3}, \textcircled{2}, \textcircled{1}$ حل

[3] 2016

$2x^2 + 26$

$(x^4 + 5x^2 + 4)(x^4 + 4x^2 + 3)$

كل الصغرة عبارة عن x^2 ومضاعفات

\therefore Put $x^2 = y \quad \therefore x^4 = y^2$

$= \frac{2y+26}{(y^2+5y+4)(y^2+4y+3)} = \frac{2y+26}{(y+1)(y+4)(y+1)(y+3)}$

$= \frac{2y+26}{(y+4)(y+3)(y+1)^2}$

$= \frac{A}{y+4} + \frac{B}{y+3} + \frac{C}{(y+1)^2} + \frac{D}{(y+1)}$

بمجرد انتظار A, B, C

$$A|_{y=-4} = \frac{-8+26}{(-4+3)(-4+1)^2} = \frac{18}{(-1)(9)} = -2$$

$$B|_{y=-3} = \frac{-6+26}{(-3+4)(-3+1)^2} = \frac{20}{1(4)} = 5$$

$$C|_{y=-1} = \frac{-2+26}{(-1+4)(-1+3)} = \frac{24}{6} = 4$$

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

ليبار D بقوى المقامات

$$\frac{2y+26}{(y+4)(y+3)(y+1)^2} = \frac{\overset{-2}{A}(y+3)(y+1)^2 + \overset{5}{B}(y+4)(y+1)^2 + \overset{4}{C}(y+4)(y+3) + D(y+4)(y+3)(y+1)}{(y+4)(y+3)(y+1)^2}$$

بمساواة بسط الطرفين

$$\therefore 2y+26 = -2(y+3)(y+1)^2 + 5(y+4)(y+1)^2 + 4(y+4)(y+3) + D(y+4)(y+3)(y+1)$$

Put $y=0 \rightarrow$ أي رقم
لم يسبقه أس قبل

$$\therefore 26 = (-2)(3)(1) + 5(4)(1) + 4(4)(3) + D(4)(3)(1)$$

$$\therefore D = -3$$

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\therefore \frac{2y+26}{(y+4)(y+3)(y+1)^2} = \frac{-2}{y+4} + \frac{5}{y+3} + \frac{4}{(y+1)^2} + \frac{-3}{y+1}$$

then put $y = x^2$

#

4) 2014

$$\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{1}{x^2(x-1) - (x-1)} = \frac{1}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$$

مجرد بقا
C, A

$$A \xrightarrow{x=1} A = \frac{1}{(1+1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$C \Big|_{x=-1} = \frac{1}{(-1-1)^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

مجموعة أساتذ شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

ليار B بوجه نظام مساواة بسيط للفرص

$$1 = \overset{\frac{1}{2}}{A}(x+1) + B(x-1)(x+1) + \overset{\frac{1}{4}}{C}(x-1)^2$$

put $x=0$

$$\therefore 1 = \frac{1}{2} + B(-1)(1) + \frac{1}{4}(-1)^2 \quad \therefore \boxed{B = -\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} \quad \#$$

مجموعة أساتذ شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

Ex : $\frac{5y+1+\frac{2}{y}}{y(y+2)(y^2+1)}$

الحل

يوجد مقاماً صغيراً في البسط 8 بدونه، لنخلص منه أولاً
بالضرب * لبطا ومقاماً

$$\therefore = \frac{5y^2+y+2}{(y)^2(y+2)(y^2+1)} = \frac{A}{(y)^2} + \frac{B}{y} + \frac{C}{y+2} + \frac{Dy+E}{y^2+1}$$

هذا القوس ممكن
نعتبر درجة أولى مكرر مرتين $\rightarrow \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y}$
وممكن نعتبر (y^2+1) بعين درجة ثانية غير مكرر $\rightarrow \frac{Ay+B}{y^2}$
والثانية صح #

ليأخذ A و C ← مجرد النظر : $A|_{y=0} = \frac{0+0+2}{(0+2)(0+1)} = 1$

$C|_{y=-2} = \frac{5(-2)^2+(-2)+2}{(-2)^2((-2)^2+1)} = \frac{20}{20} = 1$

مجموعتنا الشئير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

لنصل على B و D و E بتوحيد المقامات :

$$= \frac{A(y+2)(y^2+1) + B.y.(y+2)(y^2+1) + C.y^2.(y^2+1) + (Dy+E).y^2(y+2)}{y^2(y+2)(y^2+1)}$$

بمساواة البسط للطرفين :

$$\therefore 5y^2+y+2 = \frac{1}{y^2}(y+2)(y^2+1) + B.y.(y+2)(y^2+1) + \frac{1}{y^2}.y^2.(y^2+1) + (Dy+E).y^2(y+2)$$

معاملات y^4 : $0 = B+1+D \Rightarrow B+D=-1$ ①

معاملات y^3 : $0 = 1+2B+E \Rightarrow 2B+E=-1$ ②

معاملات y^2 : $5 = 2+B+1+2E \Rightarrow B+2E=2$ ③

حل ② و ③ $\Rightarrow B = -4/3$
بالتعويض في ① $\Rightarrow D = 1/3$
$E = 5/3$

Ex(2) Find The Partial Fractions For:

$$\frac{x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 10}{(x^2 + 2x - 1)^2 (x - 3)}$$

□ Solution □

↓
عوامل القسمة

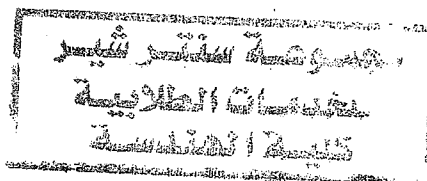
55 (4) 55 (4)

$$\frac{Ax+B}{(x^2+2x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x-1} + \frac{E}{x-3}$$

$$E/x=3 = \frac{59}{98}$$

← E نوجد بجد النظر :-

Report ← البيان بالتوازي بوجود القامات :-



Center Sheet