سنتر فيوتشر

Subject: رياضة اعدادي

Chapter: الاستنتاج الرياضي

Mob: 0112 3333 122

0109 3508 204

mathmatical induction

الاستقراء الرياضي

① نثبت صحة العلاقة عندما $n=1$

② نفرض صحة العلاقة عندما $n=k$

③ نحاول إثبات صحة العلاقة $n=k+1$

Ex

→ Prove that

by using mathmatical induction show that

$$1+2+3+4 - - - - - - + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\underline{n=1}$ R.H.S $\frac{1}{2}(2) = 1$

L.HS = 1

العلاقة صحيحة عندما $n=1$

asome relation is true at $n=k$

نفرض صحة العلاقة $n=k$

$$1+2+3+ - - - - + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad ①$$

requied to prove relation is true at $n=k+1$

عاوز اثبات م

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

L.H.S

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

Prove that

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n=1$ $\quad R.H.S=\frac{1(2)(3)}{6}=1$

$L.H.S=1^2=1$

العلاقة صحيحة عندما $n=1$

نفرض صحة العلاقة $n = k$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 - - - - - + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

المطلوب اثبات صحة العلاقة $n = k+1$

عوض و اثبت انه

$$1^2 + 2^2 + 3^2 - - - - + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$L.H.S = \underline{\underline{1^2 + 2^2 + 3^2 - - - k^2}} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right]$$

$$\frac{(k+1)}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\left[2k^2 + 7k + 6\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

Prove that

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-----+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

① نثبت صحة العلاقة $n=1$

$n=1$ $\quad R.H.S=\frac{1}{3}$

$L.H.S=\frac{1}{3}$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=1$

② نفرض صحة العلاقة $n=k$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+-----+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

③ نحاول إثبات صحة العلاقة $n=k+1$

عاوزا نثبت أن

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}-------\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

L.H.S

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\ (2k+3)}$$

$$=\frac{\cancel{(2k+1)}(k+1)}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)}=\text{R.H.S}$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

اذا

$$1^3+2^3+3^3+---+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$n=1$ $\quad R.H.S = \frac{1^2(2)^2}{4} = 1$

$L.H.S = 1^3 = 1$

العلاقة صحيحة $n=1$

$n=k$ $\leftarrow$ نفرض صحة العلاقة عند

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (2)$$

المطلوب اثبات صحة العلاقة $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

L.H.S

$$= \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

من (2)

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + \frac{4(k+1)}{4}\right]$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

Prove

$$\sum_{r=1}^{n} r\, r! = (n+1)! - 1$$

ط

$\underline{n=1}$ $\quad R.H.S = 2! - 1 = 1$

$L.H.S = (1)(1!) = 1$

العلاقة صحيحة عند $n=1$

asume relation is true at $n=k$

$$\sum_{r=1}^{k} r\, r! = (k+1)! - 1 \longrightarrow (2)$$

المطلوب اثبات صحة العلاقة عندما $n = k+1$

$$\sum_{r=1}^{k+1} r\, r! = (k+2)! - 1$$

L.H.S

$$\sum_{r=1}^{k+1} r\, r! = \sum_{r=1}^{k} r\, r! + (k+1)(k+1)!$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$$

$$= (k+1)!\,(k+1+1) - 1$$

$$= (k+2)(k+1)! - 1$$

$$= (k+2)! - 1 = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(1+i)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

اثبات

$n=1$ R.H.S $= 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

L.H.S $= \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

∴ العلاقة صحيحة عند $n=1$

* asume relation true at $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(1+i)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} \quad (1)$$

required to prove

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(1+i)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$\text{L.H.S} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(1+i)!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(1+i)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$L.H.S = 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$= 1 + \frac{k+1-(k+2)}{(k+2)!}$$

$$= 1 + \frac{-1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$= R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

Prove that

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$\underline{n=1}$ $\quad R.H.S = \cos\theta + i\sin\theta$

$L.H.S = \cos\theta + i\sin\theta$

العلاقة صحيحة عندما $n=1$

$\underline{n=k}$ نفرض صحة العلاقة عندما

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta \quad (2)$$

required to prove

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

$$L.H.S = (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{k}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta$$

$$+ i\cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta$$

$$= \cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)$$

$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

Prove that

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

n=1 $\quad R.H.S = 2^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 1+i$$

$L.H.S = 1+i$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=1$

n=k $\quad$ نفرض صحة العلاقة

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left[\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right] \quad (1)$$

required to prove

$$(1+i)^{k+1} = 2^{\frac{k+1}{2}}\left[\cos(k+1)\frac{\pi}{4} + i\sin(k+1)\frac{\pi}{4}\right]$$

L.H.S

$$(1+i)^{k+1} = \underline{(1+i)^k}(1+i)$$

$$L.H.S. = (1+i)\, 2^{\frac{k}{2}}\left[\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{\frac{k}{2}}\left[\left(\cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{4}\right) + i\sin\frac{k\pi}{4} + i\cos\frac{k\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{k}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{k\pi}{4} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{k\pi}{4} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{k\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{k\pi}{4} + i\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{k\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

Prove $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

n=1 $\quad R.H.S = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L.H.S = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

∴ العلاقة صحيحة عند n=1

n=k $\quad \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & kx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ①

نفرض صحة العلاقة عند n=k

* required to prove $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = ?$

$= \begin{pmatrix} 1 & (k+1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L.H.S = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & kx \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2 \times 2 \quad 2 \times 2$

$$L.H.S = \begin{bmatrix} 1+0 & x+kx \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (k+1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n #

OR

بضرب طرفي المعادلة ③

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & kx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & kx+x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n