سنتر فيوتشر

**Subject:** استاتيكا إعدادي

**Chapter:** تفاضل المتجهات

**Mob:** 0112 3333 122

0109 3508 204

تفاضل المتجهات

$$\bar{A} = a_1 i + a_2 J + a_3 k$$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{da_1}{dt} i + \frac{da_2}{dt} J + \frac{da_3}{dt} k$$

if $\bar{A} = (t^3+1) i + (2t-2) J + t k$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = 3t^2 i + 2 J + k \;\#$$

if $A = e^{2t} i + \cos t J + \sin t k$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = 2 e^{2t} i - \sin t J + \cos t k$$

if $\bar{A} = (t^2+1)^2 i + (2t^3 J)$

$$\frac{dA}{dt} = 2(t^2+1)(2t) i + 6t^2 J$$

تكامل المتجهات

if $A = t^2 i + 3t^3 J + 4t k$

Find $\int A \, dt$

$$\int A \, dt = \frac{t^3}{3} i + \frac{3t^4}{4} J + 2t^2 k + C$$

---

if $A = 2t i + 3t^2 J$

Find $\int A \, dt = \bar{B}$

$B(0) = i + 2J$

$$\int A \, dt = t^2 i + t^3 J + c = \bar{B}$$

$t = 0 \qquad B = i + 2J$

$$i + 2J = 0 + 0 + \bar{c}$$

$$\bar{B} = \int A \, dt =$$

$$= t^2 i + t^3 J + i + 2J$$

$$\bar{B} = (t^2+1) i + (t^3+2) J$$

if $A = e^{4t} i + \cos 2t \, J + e^{-3t} k$

find $\dfrac{d^2 A}{dt^2}$

$$\frac{dA}{dt} = 4e^{4t} i - 2\sin(2t) J - 3e^{-3t} k$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 16 e^{4t} i - 4\cos 2t \, J + 9 e^{-3t} k \quad \#$$

السرعة = تفاضل المسافة

العجلة = تفاضل السرعة

السرعة = ∫ العجلة

المسافة = ∫ السرعة

يتحرك جسم طبقا للعلاقة

$$X = 2\cos(3t)\, i + 4\sin 3t\, J + t^3 k$$

اوجد السرعة والعجلة

الحل

$$v = \frac{dX}{dt} = -6\sin(3t)\, i + 12\cos 3t\, J + 3t^2 k$$

العجلة

$$f = \frac{dv}{dt} = -18\cos(3t)\, i - 36\sin 3t\, J + 6t\, k$$

---

$$\cancel{\nabla \cdot F = \frac{df_1}{dx}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} J + \frac{\partial}{\partial z} k$$

$$\vec{F} = X^2 y\, i + 2X^2 y^3 J + y^3 z k$$

$$\nabla \cdot \bar{F} = 2Xy + 6X^2 y^2 + y^3$$

اوجد قيم المتغيرات $x, y, z$ التي تحقق المعادلة

$$(\bar{B}\times\bar{C})x + (\bar{C}\times\bar{A})y + (\bar{A}\times\bar{B})z + \bar{D} = 0$$

علما بأن $A, B, C$ لا تقع في مستوى واحد

الحل

$$(\bar{B}\times\bar{C})x + (\bar{C}\times\bar{A})y + (\bar{A}\times\bar{B})z = -\bar{D}$$

بالضرب $A$ ضرب قياسي

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})x + \cancel{\bar{A}\cdot(\bar{C}\times\bar{A})y} + \cancel{\bar{A}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})z} = -\bar{A}\cdot\bar{D}$$

$$\bar{A}\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = 0 \qquad \bar{A}\cdot(\bar{C}\times\bar{A}) = 0$$

$$x = \frac{-\bar{A}\cdot\bar{D}}{\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})}$$

بالضرب $B$ ضرب قياسي

$$\cancel{\bar{B}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})x} + \bar{B}\cdot(\bar{C}\times\bar{A})y + \cancel{\bar{B}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})z} = -\bar{B}\cdot\bar{D}$$

$$Y = \frac{-\bar{B}\cdot\bar{D}}{\bar{B}\cdot(\bar{C}\times\bar{A})} \quad \#$$

بالضرب × $\bar{C}$ ضرب قياسي

$$\cancel{\bar{C}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})X} + \cancel{\bar{C}\cdot(\bar{C}\times\bar{A})Y} + \bar{C}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})Z = -\bar{C}\cdot\bar{D}$$

$$Z = \frac{-\bar{C}\cdot\bar{D}}{\bar{C}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})}$$

---

اذا كانت $A$ و $B$ , $C$ ثلاث متجهات لاتقع في مستوى واحد

$$x\underline{A} + y\underline{B} + z\underline{C} + \underline{D} = 0 \quad (1)$$

عين $X, Y, Z$ ط

بالضرب ضرب قياسي $(\bar{A}\times\bar{B})$

$$\cancel{x\underline{A}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})} + \cancel{y\bar{B}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})} + z\underline{C}\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = -\bar{D}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})$$

$$Z = \frac{-\overline{D}\cdot(\overline{A}\times\overline{B})}{\overline{C}\cdot(A\times B)}$$

بالضرب ① ؛

$(B\times C)$ ضرب قياسي

$$x\,A\cdot(B\times C) + y\,B\cdot\cancel{(B\times C)} + \cancel{Z\,C\cdot(B\times C)} = -\overline{D}\cdot(B\times C)$$

$$X = -\frac{\overline{D}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})}{A\cdot(B\times C)} \quad \#$$

بعمل الضرب

$(\overline{A}\times\overline{C})$ ضرب قياسي

$$\cancel{x\,A\cdot(\overline{A}\times\overline{C})} + y\,B\cdot(\overline{A}\times\overline{C}) + \cancel{Z\,C\cdot(A\times C)} = -\overline{D}\cdot(A\times C)$$

$$y = \frac{-\overline{D}\cdot(A\times C)}{(A\times C)\cdot B} \quad \#$$

اذا كان

$$\bar{A} = [\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), 0]$$

اوجد قيمة $\alpha$ التي تجعل

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -25A$$

$$\bar{A} = \cos\alpha t\, i + \sin(\alpha t) J$$

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha \sin\alpha t\, i + \alpha \cos t\, \underline{J}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\alpha^2 \cos\alpha t\, i - \alpha^2 \sin\alpha t\, J$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\alpha^2 [\cos\alpha t\, i + \sin\alpha t\, J]$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\alpha^2 A$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -25A$$

$$\alpha^2 = 25$$

$$\alpha = 5$$

الشغل هو حاصل ضرب القوة × الازاحة

اوجد الشغل المبذول من القوة

$\bar{F} = 2i + 3j + 5k$

في تحريك جسم من النقطة $(1, 2, -1)$

$(4, 3, -2)$ ط

$A \to (1, 2, -1)$ $\qquad$ $b(4, 3, -2)$

$\bar{r} = B - A = \underline{3i + j - k}$

$work = \bar{r} \cdot \bar{F}$

$= (2i + 3j + 5k) \cdot (3i + j - k)$

$= 6 + 3 - 5 = 4 \; \#$

لو الشغل = صفر القوة عمودية على الازاحة

لو الشغل بالسالب القوة عكس اتجاه الازاحة

اوجد الشغل المبذول من القوة

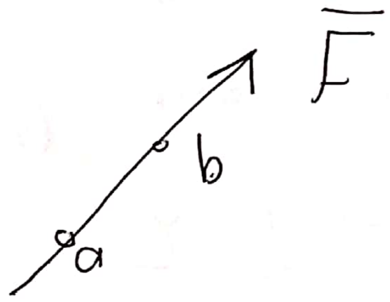
$F = 20\,N$

التى تؤثر باتجاه الواصل

$b(1,0,3)$ ل $a(2,-1,4)$

لتحريك جسم من نقطة b الى النقطة

$(4,3,7)$ ــــــــــــــ ل




$$\bar{F} = |F| \; \hat{ab}$$

مقدار القوة     متجه الوحدة

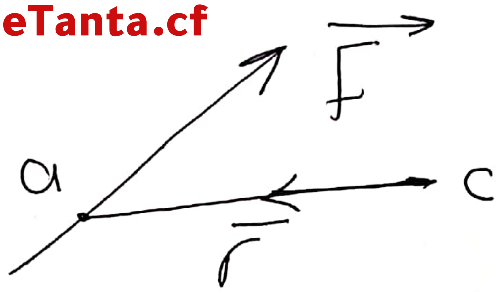
$$= 20\left(\frac{-i + j - k}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-20}{\sqrt{3}} i + \frac{20}{\sqrt{3}} j - \frac{20}{\sqrt{3}} k$$

$\bar{r} =$ نقطة b $= 4i + 3j + 7k$

$$\text{work} = \bar{F} \cdot \bar{r}$$

$$= -\frac{80}{\sqrt{3}} + \frac{60}{\sqrt{3}} - \frac{140}{\sqrt{3}} = -\frac{160}{\sqrt{3}}$$

# عزم قوة حول نقطة

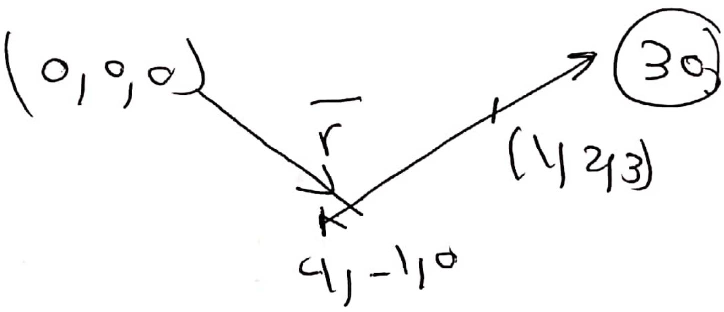



$$M_c = \overline{r} \times \overline{f}$$

* عين عزم القوة
المارة بالنقط
حول نقطة م

$$F = 30N$$

$$(4,-1,0) \text{ و } (1,2,3)$$



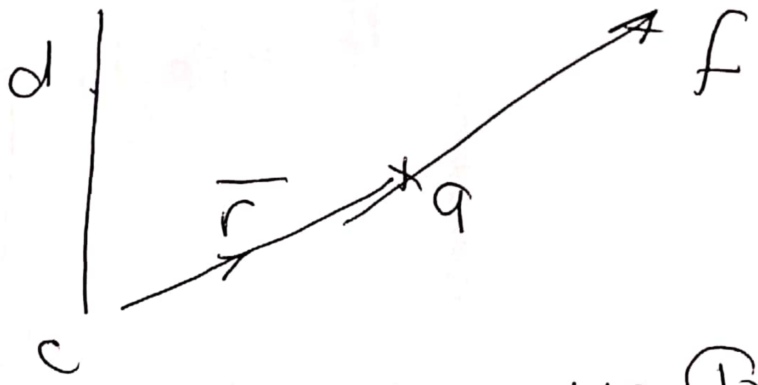

$$\overline{F} = 30 \left[ \frac{-3i + 3j + 3k}{\sqrt{9+9+9}} \right]$$

$$= \frac{10}{\sqrt{3}} \left[ -3i + 3j + 3k \right]$$

$$\overline{F} = -10\sqrt{3}\, i + 10\sqrt{3}\, j + 10\sqrt{3}\, k$$

$$M_o = \overline{r} \times \overline{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 0 \\ -10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

## عزم قوة حول خط [محور]




① هات متجه الوحدة لخط $\hat{cd} = \frac{\overline{cd}}{|cd|}$

② هات عزم القوة حول اى نقطة على الخط

$$M_c = \bar{r} \times \bar{f}$$

$$M_{cd} = \bar{M}_c \cdot \hat{cd}$$

OR $M_{cd} = \begin{vmatrix} \hat{cd} \\ \bar{r} \\ \bar{F} \end{vmatrix}$

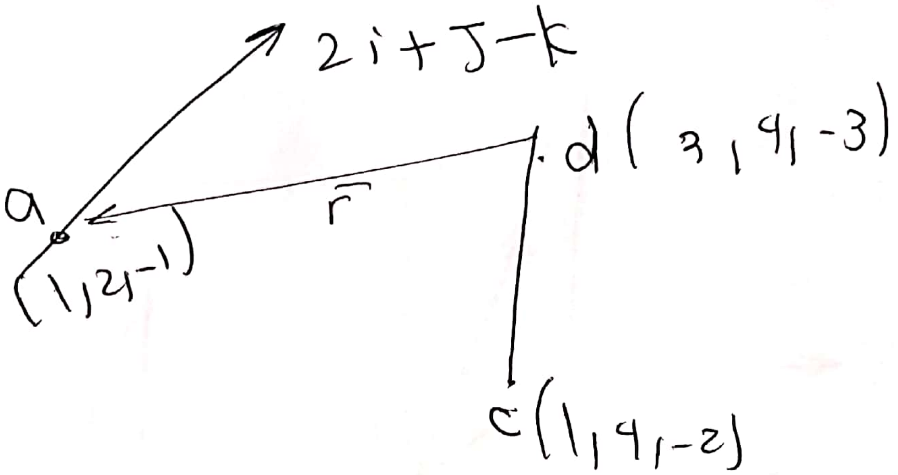
$= \hat{cd} \cdot (\bar{r} \times \bar{f})$

---

اوجد عزم القوة

$\bar{F} = 2i + j - k$ التى تمر بالنقطة $(1, 2, -1)$ حول المستقيم

$c(1, 4, -2)$, $d = (3, 4, -3)$




$$\hat{cd} = \frac{2i + 0J - k}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} i - \frac{1}{\sqrt{5}} k$$

$$\bar{r} = a - d = -2i - 2J + 2k$$

$$M_d = \bar{r} \times f_2 \begin{vmatrix} i & J & k \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

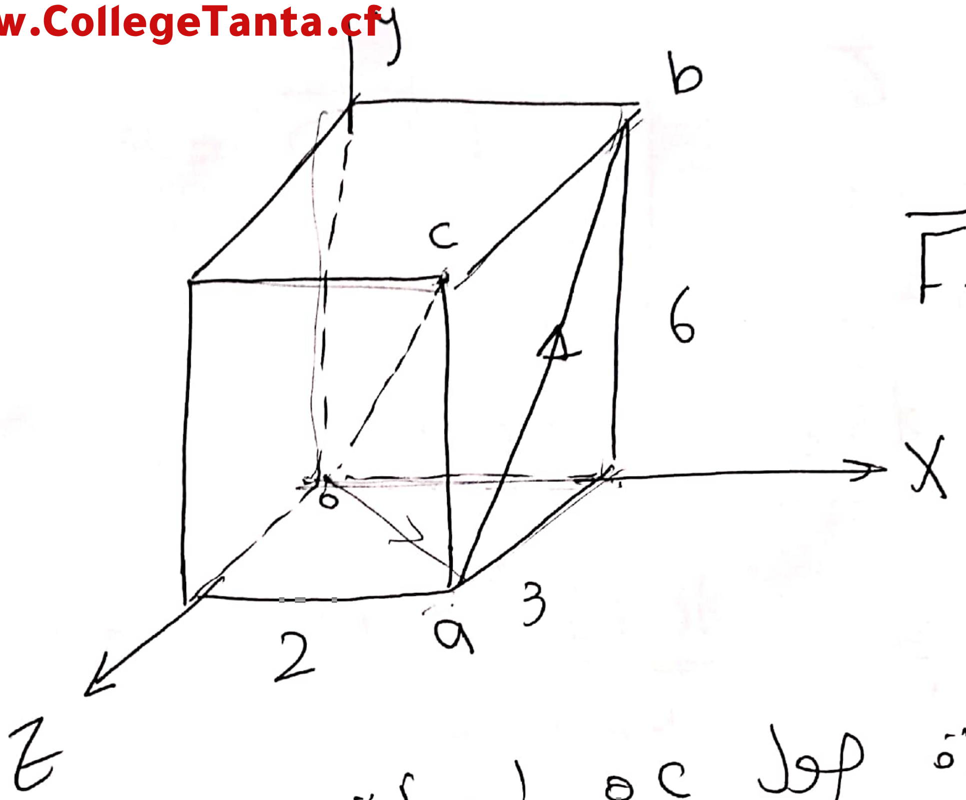
$$= 0i + 2J + 2k$$

$$M_d = 2J + 2k$$

$$M_{cd} = M_d \cdot \hat{cd}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}} i - \frac{1}{\sqrt{5}} k\right) \cdot (2J + 2k)$$

$$= 0 + 0 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$




$\overline{F} = 8\sqrt{5}\,N$

عين عزم القوة حول oc وأوجد أقصر بعد بين oc والمستقيم ab

$o(0,0,0)$ $\quad b(2,6,0)$ $\quad a(2,0,3)$ $\quad c(2,6,3)$

$$\overline{F} = 8\sqrt{5}\left[\frac{0i + 6j - 3k}{\sqrt{36+9}}\right]$$

$$= \frac{8\cancel{\sqrt{5}}}{3\cancel{\sqrt{5}}}(6j - 3k) = 16j - 8k$$

$$\overline{F} = 16j - 8k$$

$$\overline{r} = a - o = 2i + 3k$$

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 16 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{-48i + 16j - 32k} \;\#$$

$$\hat{oc} = \frac{2i + 6j + 3k}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \underline{\frac{2}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{3}{7}k}$$

$$M_{oc} = M_o \cdot \hat{oc}$$

$$= -\frac{48(2)}{7} + \frac{16(6)}{7} - \frac{32(3)}{7} = -\frac{96}{7}$$

$$M_{oc} = -\frac{96}{7}$$

$$\frac{96/7}{\cancel{8}\sqrt{5}} = \frac{\text{مقدار العزم}}{\text{مقدار القوة}} = \text{أقل بعد بينهم}$$

$$= \frac{12}{7\sqrt{5}} \;\#$$

اوجد الشغل المبذول من القوة: $F = xi + \cancel{x}yJ - xy^2zk$

في تحريك جسم من النقطة $a(1,-2,1)$

الى $b(9,-6,27)$

على مسار المنحنى

$x = t^2$ , $y = -2t$ $z = t^3$

ط

$$\bar{F} = xi + xyJ - x^2yzk$$

$$x = t^2 \qquad y = -2t \qquad z = t^3$$

$$\bar{F} = t^2i - 2t^3\underline{J} + 2t^8k$$

متجه الموضع

$$\bar{r} = xi + yJ + zk$$

$$\bar{r} = t^2i - 2t\underline{J} + t^3k$$

$$d\bar{r} = 2ti - 2J + 3t^2k$$

$$\text{work} = \int \vec{F} \cdot d\bar{r}$$

$$= \int (t^2i - 2t^3J + 2t^8k) \cdot (2ti - 2J + 3t^2k)\, dt$$

$$\int (2t^3 + 4t^3 + 16t^{10})\, dt$$

Scanned by CamScanner

$$work = \int (6t^3 + 6t^{10})\, dt$$

$a(1, -2, +1)$ , $b(9, -6, 27)$

$y = -2t$ $\qquad$ $x = t^2$

$y = -2$ $\qquad$ $t = 1$

$y = -6$ $\qquad$ $t = 3$

$$\int_1^3 (6t^3 + 6t^{10})\, dt$$

$$= \frac{6t^4}{4} + \frac{6t^{11}}{11} \Big|_1^3$$

نعوض من القوس - نعوض بالحد

$$= \left[1.5\,[81] + \frac{6}{11}(3)^{11}\right] - \left[1.5 + \frac{6}{11}\right]$$

#