المعادلات Equations Theorem نظرية

هذا الباب ينقسم إلى :

1. نظرية الباقي: Remainder Theorem
2. طريقة هورنر للقسمة التركيبية : Horner's Method for Synthetic Division
3. العلاقة بين جذور معادلة ومعاملاتها .
4. يعطي معادلة ذو جذور معينة ويطلب تكوين معادلة أخرى لها علاقة بالمعادلة الأصلية .

---

(1) Remainder Theorem نظرية الباقي

لو يعطي معادلة $f(x)$ وعدد (r) أو مقدار $(x-r)$

ويطلب باقي القسمة عند قسمة $\frac{f(x)}{x-r}$ (بدون ما تقسم)

الحل

قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=r$ $\rightarrow$ الباقي $R = f(r)$

Ex1 Using the Remainder theorem to find the Remainder if $f(x) = x^3+3x^2-4x-12$ is divided by $(x-2)$. قسمت على

Solution أوجد باقي القسمة بإستخدام نظرية الباقي عندما $f(x)$ (مقطاة) ÷ $x-2$ $\rightarrow$ أصفارة $r=2$

$$R = f(r) = f(2) = (2)^3+3(2)^2-4(2)-12 = 0$$

لاحظ إذا كان الباقي $(R) = 0$ فإن الرقم (r)

يسمى جذر من جذور المعادلة ← لأنه يحققها #

ملاحظات هامة : (1) المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية لها جذران

" " " " " الثالثة لها ٣ جذور وهكذا .

(2) إذا كان العدد المركب $a+ib$ أحد جذور المعادلة

∴ $a-ib$ أيضاً أحد جذور المعادلة

(3) إذا كان $a+\sqrt{b}$ أحد جذور المعادلة فإن $a-\sqrt{b}$ أيضاً أحد جذورها .

Ex ②:- write (أكتب) down the Eqn that has roots

$r_1 = 1+i$, $r_2 = 1-\sqrt{2}$

الحل

∵ $1+i$ جذر $\Rightarrow$ ∴ $1-i$ أيضاً جذر

∵ $1-\sqrt{2}$ جذر $\rightarrow$ $1+\sqrt{2}$ أيضاً جذر ∴

∴ المعادلة هي

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)=0$$

$$\therefore [x-1-i][x-1+i][x-1+\sqrt{2}][x-1-\sqrt{2}]=0$$

$$\therefore [x^2 - \cancel{x} + ix - \cancel{x} + 1 - \cancel{i} - ix + \cancel{i} - i^2][x^2 - x - \cancel{\sqrt{2}x} - x + 1 + \ldots + \cancel{\sqrt{2}x} - \cancel{\sqrt{2}} - 2]$$

ملاحظة لو عندك معادلة $x^2+3x+2=0$

$\boxed{x=-1,\ x=-2}$

يمكن إرجاع المعادلة تاني من الجذور ⇐

$(x+1)(x+2)=$

$$[x^2-2x+2][x^2-2x-1]=0$$

$$\therefore x^4-2x^3-x^2-2x^3+4x^2+2x+2x^2-4x-2=0$$

$$\therefore \boxed{x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0}$$

#

* نظرية هورنر (طريقة) للقسمة تركيبية :

Horner's Method for synthetic division :-

هذه الطريقة لتوجد ناتج القسمة و باقي إذا قسم $F(x)$

$\boxed{\text{ع مقدار من الدرجة الأولى : } X-a}$

وإذا لم يكن المقدار من الدرجة الأولى فلله ونقسم ع كل قوس على حده

كالتالي :

Example (3): Find the Quotient الناتج and the remainder الباقي

if $F(x) = 5X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = b$ is divised

by قسمت ع $X+2$

$\boxed{\text{الحل}}$

تكون جدول هورنر :- معاملات المقسوم $F(x)$

أصفار القوس هي $X = -2$

	x^4	x^3	x^2	x	const
-2	5	-3	2	-3	-1
		$+$ -10	$+$ 26	$+$ -56	$+$ 118
	5	-13	28	-59	$\boxed{117}$

أي رقم ينزل تحت ينضرب $* (-2)$

معاملات الناتج

$\underline{R}$ الباقي

$\therefore$ الباقي $= R = 117$

الناتج $Q(x) = 5X^3 - 13X^2 + 28X - 59$ #

إذا كان المقسوم عليه عبارة عن قوسين تربيعي مثلاً نقوم بتحليله ونقسم ع أحد الأقواس وناتج نقسمه ع القوس الآخر.

Ex④: 2013 Find the quotient & the Remainder of division of the eqn $5x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ by $(x-2)(3x+1)$ (Solution)

أصفاره

$x=2$ $x=\frac{-1}{3}$

	x^4	x^3	x^2	x	Const
$\frac{-1}{3}$	5	-3	2	-3	1
		$-\frac{5}{3}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{-32}{27}$	$\frac{113}{81}$
2	5	$-\frac{14}{3}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{-113}{27}$	$\frac{194}{81}$
		10	$\frac{32}{3}$	$\frac{256}{9}$	
	5	$\frac{16}{3}$	$\frac{128}{9}$	$\frac{655}{27}$	
	x^2	x	Const		

الناتج $Q = \frac{5x^2+\frac{16}{3}x+128}{3*1}$

معامل x في القوس الثاني — معامل x في القوس الأول

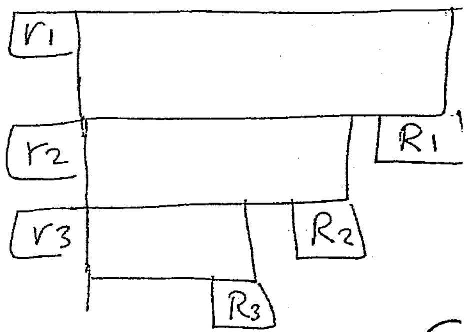
الباقي $\boxed{R = R_2(x-a)+R_1}$ حفظ

$$= \frac{655}{27}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{194}{81} = \frac{655}{27}x+\frac{283}{27} \#$$

لاحظ لو قسم ع ٣ أقواس

$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

$$\boxed{R_{\text{الباقي يكون}} = R_3(x-r_2)(x-r_1) + R_2(x-r_1) + R_1}$$



Ex 5: Find the roots of the eqⁿ [Solve the eqⁿ

$$X^3 - 9X^2 + 23X - 15 = 0$$ Using Horners Method.

الحل

ملاحظة: أحد جذور المعادلة هو أحد معاملات الحد المطلق (-15)

نعين الأرقام اللي تنضرب * بعضها تعطي -15 وهي

± 1 أو ± 15 أو ± 3 أو ± 5

العدد يكون جذر للمعادلة إذا حقق المعادلة (نعين في L.H.S = R.H.S = 0)

$X = 1$:

$f(1) = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$ تحقق المعادلة

$\therefore X = 1$ أحد الجذور

لإيجاد الجذرين الآخرين: نقسم المعادلة $f(x)$ على $X - 1$

لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية وذلك لنوجد الجذرين الآخرين

	x^3	x^2	x	Const
	1	-9	23	-15
		1	-8	15
	1	-8	15	$\boxed{0}$

الباقي = 0 لأننا قسمنا على أحد الجذور

$X^2 - 8X + 15 = 0$ ثم

$X - 3$
$X - 5$

$X = 3$

$X = 5$

$\therefore$ الجذور الثلاثة هي

$X = 1$

$X = 3$

$X = 5$

#

القسمة التركيبية التامة: يعني نقسم المعادلة على مقدار من الدرجة الأولى عدد من المرات يساوي أعلى أس في الدالة $f(x) \leftarrow$ المقسوم.

Complet Synthetic division

لها إذا

إذا طلب تغيير شكل الدالة $f(x)$ إلى قوى $(x-a)$

إذا طلب قيمة الدالة ومشتقاتها عند عدد معين

باقي

$\boxed{Ex\ 7/2013}$ Use complete synthetic division (القسمة التركيبية التامة) to find t

قيمة Value of $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 1$ and it's derivatives (مشتقاتها) at $x = 2$.

الحل

نقسم $f(x)$ على $x=2$ أربع مرات

	x^4	x^3	x^2	x	Cons
2	5	0	−3	−3	1
		10	20	34	6
	5	10	17	31	6
		10	40	114	
	5	20	57	145 → $f'(2)$	
		10	60		
	5	30	117 → $\frac{f''(2)}{2!}$		
		10			
	5 → $\frac{f''''(2)}{4!}$	40 → $\frac{f'''(2)}{3!}$			

$\therefore f(2) = 63$

$f'(2) = 145$

$\frac{f''(2)}{2!} = 117 \qquad \therefore f''(2) = 234$

$\frac{f'''(2)}{3!} = 40 \qquad \therefore f'''(2) = (3!) * 40 = 240$

$\frac{f''''(2)}{4!} = 5 \qquad \therefore f''''(2) = (4!)\,5 = 5*24 = 120$

#

Ex ⑧: write $f(x) = x^5 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$ in Power of $x+1$

Solution

نقسم $f(x)$ ع $\boxed{x=-1}$

5 مرات

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	Const	
-1	1	0	0	-3	5	-1	
		-1	1	-1	4	-9	
	1	-1	1	-4	9		$\boxed{-10}$
		-1	2	-3	7		
	1	-2	3	-7			$\boxed{16}$
		-1	3	-6			
	1	-3	6				$\boxed{-13}$
		-1	4				
	1	-4					$\boxed{10}$
		-1					
	1						$\boxed{-5}$
	$\boxed{1}$						

المعاملات للأقواس

$$f(x) = (x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 10(x+1)^3 - 13(x+1)^2 + 16(x+1) - 10 = 0$$

هى نفس المعادلة الأصلية ولكن بشكل آخر.

سيعطى معادلة لها جذور معينة ويطلب معادلة لها علاقة بجذور المعادلة الأصلية :

Ex ①*: if the eqn $f(x) = x^4 - 3x + 2 = 0$ has roots r_i, $i = 1, 2, 3, 4$. find the eqn that has roots

$r_i - 2$

الحل

مطلوب معادلة جذورها تقل 2 عن جذور المعادلة الأصلية

$y = x - 2$

الجديد ، القديم $- 2$

يعني نكتب $f(x)$ بدلالة قوى $x-2$

نزيل $x-2$ ← ونضع y لنحصل على المعادلة المطلوبة

	x^4	x^3	x^2	x	Const
2	1	0	0	-3	2
		2	4	8	10
	1	2	4	5	12
		2	12	32	
	1	6	16	37	
		2	16		
	1	8	32		
		2			
	1	10			

$$\therefore f(x) = (x-2)^4 + 10(x-2)^3 + 32(x-2)^2 + 37(x-2) + 12 = 0$$

نزيل $x-2$ ونضع y

$$\therefore f(y) = y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 37y + 12 = 0$$

معادلة جذورها $y = r_i - 2$

Ex ②* if $f(x) = x^4 - 3x + 2 = 0$ has roots r_i find eqn that has roots $\frac{3}{r_i - 2}$

الحل ← كسر ∴ لابد من جعل البسط خالٍ من r_i

بالفعل البسط خالٍ من r_i

∴ نبدأ بالمقام ← ① نوجد معادلة جذورها $r_i - 2$

$y = x - 2 \xrightarrow{\text{نفس}}$ Ex ①* $\quad \boxed{f(y) = y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 37y + 12 = 0}$

$y = r_i - 2$

② نوجد المطلوب : معادلة جذورها $\boxed{z = \frac{3}{y}} = \frac{3}{r_i - 2}$

$\therefore y = \frac{3}{z}$

$\therefore f(z) = \left(\frac{3}{z}\right)^4 + 10\left(\frac{3}{z}\right)^3 + 32\left(\frac{3}{z}\right)^2 + 37\left(\frac{3}{z}\right) + 12 = 0$

الضرب $\times$ z^4 للتبسيط

$$\boxed{\therefore f(z) = 81 + 270z + 288z^2 + 111z^3 + 12z^4 = 0}$$

مطلوب $z = \frac{3}{r_i - 2}$

Ex ③* if $f(x) = x^4 - 3x + 2 = 0$ has roots r_i find the eqn that has roots $\frac{r_i - 5}{r_i - 2}$

الحل

لازم يكون بسط خالي من r_i

$$\frac{r_i - 5}{r_i - 2} = \frac{r_i - 2 - 3}{r_i - 2} = 1 - \frac{3}{r_i - 2}$$

① نوجد معادلة جذورها $r_i - 2$ ← كافى ← ex ①*

$f(y) = y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 37y + 12 = 0$

② معادلة جذورها $\frac{3}{r_i - 2}$ ← كا سبق فى ex ②*

$f(z) = 12z^4 + 111z^3 + 288z^2 + 270z + 81 = 0$

③ نوجد المطلوب: معادلة جذورها $1 - \frac{3}{r_i - 2}$

$w = 1 - z \Longrightarrow \therefore \boxed{z = 1 - w}$

Ex(1)

$\boxed{2015}$ if the roots of the eqn $x^4 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$ are r_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Find the eqn whose roots are $\frac{1 - r_i}{r_i}$.

$\frac{1}{r_i} - 1$

الحل

① لو جد معادلة جذورها $\frac{1}{r_i}$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$y = \frac{1}{x}$

$\therefore x = \frac{1}{y}$

$\therefore f(y) = \left(\frac{1}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{y}\right) - 1 = 0$

$\boxed{f(y) = 1 - 2y^2 + 5y^3 - y^4 = 0} \rightarrow y = \frac{1}{r_i}$

② لو جد معادلة جذورها $\frac{1}{r_i} - 1$

$z = y - 1$

$y = z + 1$

$f(z) = 1 - 2(z+1)^2 + 5(z+1)^3 - (z+1)^4 = 0$

---

if $x^4 + 4x^2 - x + 6 = 0$ has roots r_i # حل بديل

find the eqn that has roots $\frac{r_i + 1}{r_i + 3}$

$\frac{r_i + 3 + 1 - 3}{r_i + 3} = 1 - \frac{2}{r_i + 3}$

(1)

Ex(5)

* Find The E^{qn} that has a roots Squares of The Roots of The eqn:

$f(x) = x^3 + x + 1 = 0$ ⟸ أوجد معادلة جذورها مربعات جذور المعادلة

Solution: Put $y = x^2$

$\therefore y^2 = x^4$

وهنا ولكن لوجد x^3 , x نشيلهم ونضع مكانهم ايه؟

⟸ نتخلص الأول من x , x^3 أى ال x الفردية عن طريق:

(1-) $f(-x) = +(-x)^3 + (-x) + 1 = 0$

$$\boxed{f(-x) = -x^3 - x + 1 = 0}$$

نضرب طرفى المعادلة المعطاة $f(x)$ فى المقدار $f(-x)$

$\therefore f(x) \cdot f(-x) = 0$

$(x^3+x+1)(-x^3-x+1) = 0$

$\therefore -x^6 - x^4 + \cancel{x^3} - x^4 - x^2 + \cancel{x} - \cancel{x^3} - \cancel{x} + 1 = 0$

$\therefore -x^6 - 2x^4 - x^2 + 1 = 0$

$\therefore x^6 + 2x^4 + x^2 - 1 = 0$

نضع $y = x^2$ نجد :

$$\therefore f(y) = y^3 + 2y^2 + y - 1 = 0$$

Ex 6* * if $f(x) = x^4 + x^2 - 10x + 1 = 0$ has a roots r_i, $i = 1, 2, 3, 4$ find the Eq^n That has a roots $\dfrac{1}{r_i^2 - 1}$

(Solution)

⇐ إذا أعطى $\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ فلا يبسط فالى منه r_i

⇐ إنزل للمقام وإبدأ اشتغل كما يلي :

(١) نوجد معادلة جذورها r_i^2 $\therefore (y = x^2)$

نتخلص منه x الفردية وذلك عن طريق ضرب $f(x) \cdot f(-x)$

$$\therefore (x^4 + x^2 - 10x + 1)(x^4 + x^2 + 10x + 1) = 0$$

$$\therefore (x^8 + x^6 + \cancel{10x^5} + x^4) + (x^6 + x^4 + \cancel{10x^3} + x^2)$$

$$+ (\cancel{-10x^5} - \cancel{10x^3} - 100x^2 - \cancel{10x}) + x^4 + x^2 + \cancel{10x} + 1 = 0$$

$$\therefore x^8 + 2x^6 + 3x^4 - 99x^2 + 1 = 0$$

$y = x^2$

$$\therefore f(y) = y^4 + 2y^3 + 3y^2 - 99y + 1 = 0 \rightarrow r_i^2 = y$$

② نوجد معادلة جذورها تقل بمقدار ١ عن جذور $f(y)$

$$r_i^2 - 1 \quad (r_i^2 \to y)$$

$$\boxed{\therefore Z = y - 1}$$

نقسم المعادلة $f(y)$ على $(y-1)$ أولاً لتحول شكل

على هيئة $(y-1) \Leftarrow$ (4 مرات)

1	1	2	3	-99	1	
		1	3	6	-93	
1	1	3	6	-93	-92	R_0
		1	4	10		
	1	4	10	-83		R_1
		1	5			
	1	5	15			R_2
		1				
	1	6				R_4, R_3

$$\therefore f(y) = 1(y-1)^4 + 6(y-1)^3 + 15(y-1)^2 - 83(y-1) - 92 = 0$$

Then Put $\boxed{y - 1 = Z}$

$$\therefore f(Z) = Z^4 + 6Z^3 + 15Z^2 - 83Z - 92 = 0$$

جذورها $\Leftarrow$ $r_i^2 - 1 = Z$

③ نوجد معادلة جذورها $\dfrac{1}{r_i^2 - 1} \rightarrow \dfrac{1}{Z}$

Put $\omega = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{\omega}$

$$\therefore f(\omega) = \frac{1}{\omega^4} + 6\left(\frac{1}{\omega}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 - 83\left(\frac{1}{\omega}\right) - 92 = $$

$* \ \omega^4$

$$\therefore f(\omega) = 1 + 6\omega + 15\omega^2 - 83\omega - 92\omega^4 =$$

المعادلة المطلوبة التي جذورها $\frac{1}{r_i^2 - 1}$

Arthmatic Series

* المتتابعة الحسابية :

تكون على الشكل

$$\ldots, a-2r, a-r, a, a+r, a+2r, \ldots$$

Geometric Series

* المتتابعة الهندسية :

شكل

$$\ldots, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2, \ldots$$

حيث a, r مجاهيل عندنا في حل المعادلات سيكون مطلوب إيجادهم

17

مطلوب << إوجد المعادلة التي جذورها ...>>

تزيد أو تقل بمقدار C عن المعادلة المعلومة

Put $y = x \pm C$ (تزيد: $+$، تقل: $-$)

* الحل: قسمة تركيبية تامة عن C ثم نزيل $x-c$ ونضع y مكانها

تساوى مقلوب جذور المعادلة المعلومة

الحل ⇐ Put $y = \frac{1}{x}$

$\therefore \boxed{x = \frac{1}{y}}$

تساوى مضاعفات جذور المعادلة المعلومة

الحل ⇐ Put $y = n\,x$

$\therefore \boxed{x = \frac{y}{n}}$

ملاحظة: إذا وجد المقدار على هيئة $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ يجب أن يكون البسط خالي من r_i أو ...

تساوى مربعات جذور المعادلة المعلومة

الحل ⇐ يجب ألا تحتوى المعادلة على $x^5,\ x^3,\ x$ ...

لذلك يتم حذفهم عن طريق:

- خلى $f(x) = 0$

$$\boxed{f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots = 0}$$

- تكون المعادلة

$$\boxed{(x + r_1)(x + r_2)\dots = 0}$$

- نضرب المعادلتين فى بعض

$\therefore (x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2)\dots = 0$

Then Put $\boxed{x^2 = y}$

الباقى من Ex: 1* to 6*

العلاقة بين الجذور والمعاملات :

let n

$$\boxed{X^{4}+a_3X^{3}+a_2X^{2}+a_1X+a_0=0}$$ has roots r_1, r_2, r_3

$\boxed{1}$ حاصل ضرب الجذور $= (-1)^{n} *$ الحد المطلق

احفظ

$\therefore (-1)^{4}(a_0)=r_1r_2r_3r_4$

$\boxed{2}$ احفظ مجموع الجذور $= (-1)^{n-1}$ معامل X^{n-1}

$$-a_3=(a_3)(-)^{\overset{4-1=3}{n-1}}=r_1+r_2+r_3+r_4$$

$\boxed{3}$ مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى $= (-1)^{n-2} *$ معامل X^{n-2}

احفظ

$$(a_2)(-1)^{2}=r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4$$

المتتابعة الهندسية Geometric Series

$$\dots, \frac{a}{m^2} \xrightarrow{*m} \frac{a}{m}, a, am, am^2, \dots$$

المتتابعة الحسابية Arthmatic Series:

$$\dots, a-2m \xrightarrow{+m} a-m, a, a+m, a+2m, \dots$$

يعطى معادلة فيها معاملات مجهولة ويعطى علاقة بين الجذور ويطلب جذور المعادلة وقيم المجاهيل ← لا بد من استخدام قوانين العلاقة بين الجذور والمعاملات السابقة.

2016 if two roots of the eqn $x^4+6x^3+rx^2+sx+$ are real حقيقية and equal twice يساوا ضعف the other two roots الجذرين الأخرين. Solve the eqn and find r, s

الحل

إذا كان جذرين من جذور المعادلة حقيقية ويساويا ضعف الجذرين الأخرين . حل المعادلة , هات r, s

let the roots are r_1, r_2 و

$2r_1, 2r_2$ ضعف الأولتين

(1) حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n \times$ الحد المطلق

$\therefore 2r_1^2\ 2r_2^2 = (-1)^4 (36)$ $\div 4$

$r_1^2 r_2^2 = 9 \quad \therefore \boxed{r_1 r_2 = \pm 3}$ (1)

(2) مجموع الجذور $= -$ معامل x^{n-1}

$\therefore 3r_1 + 3r_2 = -6 \qquad \div 3$

$r_1 + r_2 = -2 \rightarrow$ (2) $\quad \boxed{\therefore r_1 = -2 - r_2}$

$\therefore r_1 r_2 = 3$

$\therefore (-2-r_2) r_2 = 3$

$\therefore +r_2^2 + 2r_2 + 3 = 0$

$r_2 =$ تخيلي $\rightarrow$ مرفوض

or $r_1 r_2 = -3$

$(-2-r_2) r_2 = -3$

$-r_2^2 - 2r_2 + 3 = 0$

$r_2 = 1 \qquad r_2 = -3$

$\therefore r_1 = -3 \qquad r_1 = 1$

$\therefore$ The roots are 1 و -3 و
2 و -6 ضعف

* لإيجاد r و S

$\therefore x=1$ جذر ∴ كيحقق المعادلة ∴

$\therefore 1+6+r+S+36=0$ $\quad \boxed{\therefore r+S=-43}$ (3)

$x=2$ جذر $\therefore 16+48+4r+2S+36=0$ $\quad \boxed{\therefore 2r+S=-S}$

$\therefore r=-7 \qquad S=-36$ #

---

*EX②: Find the roots جذور of the eq^n: $x^3-3x^2-6x+8=0$ if the sum of two of it's roots (مجموع جذرين) equal to 5

أوجد جذور المعادلة إذا كان مجموع جذرين من جذورها = 5

الحل

نفرض الجذور r_1, r_2, r_3

let $\boxed{r_1+r_2=5} \rightarrow \boxed{1}$

$\because$ مجموع الجذور $= -$ معامل x^{n-1} $\div$ معامل x^2

$\therefore r_1+r_2+r_3 = -(-3) = +3 \rightarrow \boxed{2}$

$\therefore 5+r_3 = 3 \qquad \therefore \boxed{r_3} = 3-5 = \boxed{-2}$ #

$\because$ حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n *$ الحد المطلق :

$\therefore r_1 r_2 r_3 = (-1)^3 (8) = -8$

$\therefore r_1 r_2 (-2) = -8 \qquad \therefore \boxed{r_1 r_2 = \frac{-8}{-2} = 4} \rightarrow$

from $\boxed{1}$ $\quad \boxed{r_2 = 5-r_1}$ $\qquad \therefore r_1(5-r_1)=4$

$\therefore 5r_1 - r_1^2 = 4$

$5r_1 - r_1^2 = 4$ $\quad \therefore 5r_1 - r_1^2 - 4 = 0$

$r_1^2 - 5r_1 + 4 = 0$

$(r_1 - 1)(r_1 - 4) = 0$

$\therefore r_1 = 1$ or $r_1 = 4$

$\therefore r_2 = 5 - r_1 = 5 - 1 = 4$ $\qquad r_2 = 5 - 4 = 1$

∴ الجذور هي

$1, 4, -2$

Ex③ * if The Eqn: $x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 52 = 0$ has a root $= 3 + 2i$, find The other Roots and The value of a, b

"إذا كانت المعادلة لها جذر $3+2i$ أوجد باقي الجذور وقيم a, b"

$\boxed{\text{Solution}}$: ∴ $3+2i$ جذر ∴ $(3-2i)$ جذر

المعادلة من الدرجة الرابعة: أي لها أربعة جذور عندنا ٢ باقي ٢

نفرضهم r_1, r_2

∴ مجموع الجذور $=$ معامل x^{n-1} $(-)$

$\therefore r_1 + r_2 + 3 + \cancel{2i} + 3 - \cancel{2i} = -(-3) = 3$

$\boxed{r_1 + r_2 = -3} \rightarrow ①$

حاصل ضرب الجذور = الحد المطلق $\times (-1)^n$

$\therefore r_1 r_2 (3+2i)(3-2i) = (-1)^4 \cdot (-52)$

$\therefore r_1 r_2 (9+4) = -52 \longrightarrow (2)$

from 1 $\therefore r_2 = -3 - r_1$

عوض في (2)

$\therefore r_1(-3-r_1) = \frac{-52}{13} = -4$

$\therefore -3r_1 - r_1^2 + 4 = 0$

$r_1^2 + 3r_1 - 4 = 0$

$r_1 = 1$ or $r_1 = -4$

$\downarrow$

$\therefore r_2 = -3-1 = -4$ or $r_2 = -3+4 = 1$

$\therefore$ الجذور هي

$(2 \pm 3i)$, (1) , (-4)

* لإيجاد قيم $\therefore a, b$

$\therefore 1, -4$ جذران للمعادلة

$\therefore$ يحققان المعادلة

$\therefore f(1) = 0 \quad \therefore 1 - 3 + a + b - 52 = 0 \quad \therefore \boxed{a+b=54}$

$\therefore f(-4) = 0 \quad \therefore (-4)^4 - 3(-4)^3 + a(-4)^2 + b(-4) - 52 = 0$

$\therefore 16a - 4b = 396 \longrightarrow (4)$

بحل (4) مع (3) $\therefore a = \frac{153}{5}, b = \frac{117}{5}$

(4): if the roots of the eqn $x^3-7x^2+cx-8=0$ in the form of a Geometric Series "Progresion" متتابعة هندسية find it's roots وجد جذورها and the value of c وقيمة c

الحل

معادلة من الدرجة الثالثة نعني لها 3 جذور نفرضهم على شكل متتابعة هندسية

$$\frac{a}{m},\ a,\ a.m$$

(1) حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n$ (الحد المطلق / 1)

$$\frac{a}{\cancel{m}}\cdot a\cdot a\cancel{m} = (-1)^3(-8) = +8 \longrightarrow a^3=8 \quad \boxed{a=2}$$

(2) مجموع الجذور = − معامل x^{n-1} ÷ معامل x^2

$$\therefore \frac{a}{m}+a+am = -(-7) = +7$$

$$\therefore \frac{2}{m}+2+2m = +7 \quad (\text{بالضرب} \times m)$$

$$\therefore 2+2m+2m^2 = 7m$$

$$2m^2-5m+2=0 \Longrightarrow \begin{matrix} 2m & -1 \\ m & -2 \end{matrix}$$

أو حلها بالآلة الحاسبة

$$(2m-1)(m-2)=0$$

$m=+\frac{1}{2}$ من (1) $\boxed{a=2}$ $m=2$

∴ الجذور هي

∴ الجذور: $\frac{a}{m}=\frac{2}{+\frac{1}{2}}=+4$ $\frac{a}{m}=\frac{2}{2}=1$

$a=2$ $a=2$

$a.m=2(+\frac{1}{2})=+1$ $a.m=2(2)=4$

∴ الجذور هي $\boxed{1,2,4}$

للحصول على c : ∵ $x=1$ جذر للمعادلة ∴ تحققها

$$\therefore (1)^3-7(1)^2+c(1)-8=0 \quad \therefore 1-7+c-8=0 \quad \boxed{\therefore c=14}$$

EX(5)

* Find the roots of the eqn: $X^4 + X^3 - 16X^2 - 4X + 48 = 0$
if the Product (حاصل ضرب) for two of it's roots جذرين من جذورها
equal to 6.

الحل

المعادلة معطاة إذا كان حاصل ضرب جذرين من جذورها $= 6$.

المعادلة من الدرجة الرابعة ∴ لها 4 جذور نفرضهم r_1, r_2, r_3, r_4

نفرض $\boxed{r_1 r_2 = 6} \rightarrow \boxed{1}$

من علاقة الجذور بالمعاملات ① حاصل ضرب الجذور $=$ الحد المطلق $/ 1 * (-1)^n$

$$\therefore \underbrace{r_1 r_2}_{6} r_3 r_4 = (-1)^4 (48) = +48$$

$$6 \cdot r_3 r_4 = 48 \qquad \boxed{\therefore r_3 r_4 = \frac{48}{6} = 8} \rightarrow \boxed{2}$$

② مجموع الجذور $= -$ معامل $x^{n-1} = -$ معامل x^3

$$\boxed{\therefore r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -1} \rightarrow \boxed{3}$$

* مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى $=$ معامل $x^{n-2} (-1)^{n-2} =$ معامل $x^2 (-1)^2$

$$\therefore \underbrace{r_1 r_2}_{6} + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \underbrace{r_3 r_4}_{8} = +(-16)$$

$$6 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + 8 = -16$$

$$\boxed{\therefore r_1 (r_3 + r_4) + r_2 (r_3 + r_4) = -30} \rightarrow \boxed{4}$$

from $\boxed{3}$ $\quad r_3 + r_4 = -1 - (r_1 + r_2)$

$$\therefore r_1 [-1 - r_1 - r_2] + r_2 [-1 - r_1 - r_2] = -30$$

$$\therefore \cancel{+} r_1 \cancel{+} r_1^2 \cancel{+} r_1 r_2 \cancel{+} r_2 \cancel{+} r_1 r_2 \cancel{+} r_2^2 = \cancel{+} 30$$

$$\therefore r_1 + r_2 + 2\underbrace{r_1 r_2}_{6} + r_2^2 = 30 \qquad \text{from } \boxed{1} \quad r_1 = \frac{6}{r_2}$$

$$\therefore \frac{6}{r_2} + r_2 + 12 + r_2^2 = 30 \qquad * r_2$$

$$\boxed{\therefore r_2^3 + r_2^2 - 18 r_2 + 6 = 0} \xrightarrow{\text{نوجد}} r_2$$

ثم r_1 ثم r_3 ثم r_4

حل آخر للمثال السابقه (م)

$\therefore \boxed{r_1 r_2 = 6} \rightarrow \boxed{1}$

حاصل ضرب الجذور = في الحلقه $* (-1)^n$

$(48)(-1)^4 =$

$\therefore \underbrace{r_1 r_2}_{6} r_3 r_4 = +48$

$6\, r_3 r_4 = 48 \Longrightarrow \boxed{\therefore r_3 \cdot r_4 = \frac{48}{6} = 8} \rightarrow \boxed{2}$

المعادلة $\boxed{1}$ بتقول إنه $r_1 \cdot r_2 = 6$ يعني r_1, r_2 هما أحد عوامل المقدار $6 \Rightarrow \pm 1 \pm 2 \pm 3$
± 6

طيب عايزين نعرف r_1 بكام، وكذلك r_2 بكام

له الرقم اللى يحقق المعادلة $f(x)$ يبقى هو الجذر ...

$f(+1) = 1 - 1 - 16 - 4 - 48 \neq 0$

$f(+2) = 16 + 8 - 64 - 8 + 48 = 0 \Longrightarrow \boxed{\therefore r_1 = +2}$

$\boxed{\therefore r_2 = \frac{6}{r_1} = \frac{6}{2} = +3}$

بالمثل: $r_3 r_4 = 8$ يعني r_3, r_4 أحد عوامل المقدار $8 \Rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$f(+4) = 256 + 64 - 256 - 16 + 48 \neq 0$

$f(-4) = 256 - 64 - 256 + 16 + 48 = 0 \quad \boxed{\therefore r_3 = -4}$

$\therefore r_4 = \frac{8}{r_3} = \frac{8}{-4} = \boxed{-2}$

$\therefore$ الجذور هي $\boxed{2, 3, -2, -4}$ #

⇐ أسهل من الحل السابق ..

تابع نظرية المعادلات

الحلول العددية للمعادلات الجبرية ■ Numerical Methods for Solving Non Linear Eq^{ns}

من المعروف أن جذر المعادلة هو الرقم الذي يحقق المعادلة

$y = f(x)$

أي نحصل على 0 ⟸ أي هو قيمة $\boxed{X}$ التي تجعل $\boxed{y=0}$

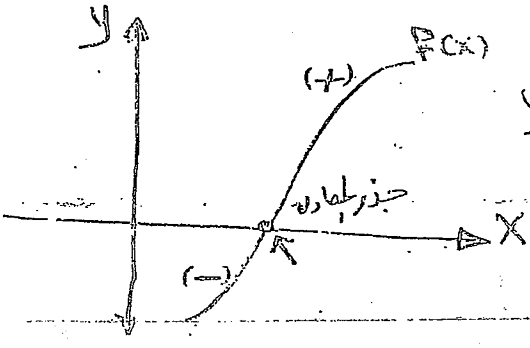
• من المعادلات السابقة في الباب الأول نعطي معادلة ونطلب جذورها ← الحل موجود في معاملات الحد المطلق

- نعوض في المعادلة بالرقم الذي يحقق ليكون جذر نقسم عليه...

• أما إذا كانت كل الأعداد لا تحقق المعادلة فإن هذه المعادلة لا تحل بالطريقة الجبرية بل يتم حلها بطريقة عددية.

• وقد نعطي معادلة غير خطية مثل $f(x) = \sin x + e^{x}$ ونطلب حلها نقوم بحلها عدديا أيضا.

• والطريقة العددية هي طريقة توضح جذور المعادلة بقيمة تقريبية (أي أنه ليس الجذر بالضبط ولكنه قريب جدا من الحل الصحيح).

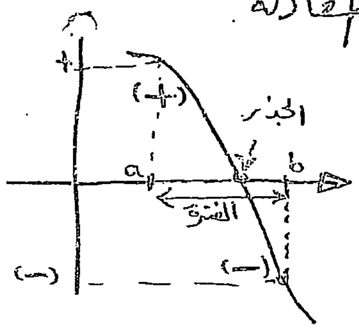


• نبدأ بتخمين قيم X التي تجعل $y=0$

* لحل مسألة معطاة عدديا نتبع الخطوات التالية :

① نحدد فترة الجذر واقع بداخلها $[a,b]$

وذلك عن طريق : التعويض بقيم لـ X في المعادلة حتى تتغير $f(x)$ من الموجب إلى السالب والعكس ، لتكون أحد قيم لـ X هي $[a,b]$



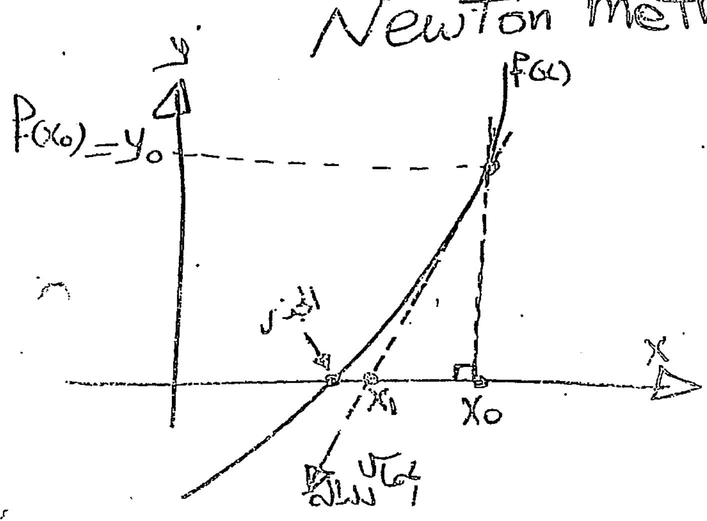
② نفرض قيمة ابتدائية للجذر المطلوب ولتكن (X_0) ونأخذها منتصف الفترة $[a,b]$

$$\boxed{X_0 = \frac{b+a}{2}}$$

③ لنوجد قيمة أفضل للجذر أي أقرب للجذر الفعلي أي نقوم بعمل تحسين لـ X_0 لتصل إلى رقم أقرب للحقيقة

وذلك عن طريق الطرق العددية الآتية :

1 طريقة نيوتن "Newton method"



نفرض أن نقطة تقاطع المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(X_0 , f(X_0))$ مع محور X هي جذر المعادلة الأقرب للصحيح (X_1)

وتكون نقطة تقاطع الميل مع محور X هي النقطة X_1

إحداثيها $(X_1, 0)$

$\because$ الميل = المشتقة الأولى = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\therefore F'(X_0) = \frac{F(X_0)}{X - X_0} = \frac{0 - F(X_0)}{X_1 - X_0}$$

$$\therefore X_1 - X_0 = -\frac{F(X_0)}{F'(X_0)}$$

$$\therefore \boxed{X_1 = X_0 - \frac{F(X_0)}{F'(X_0)}} \rightarrow$$ قيمة أقرب للجذر

وبنفس الطريقة نقوم بعمل مماس آخر عند النقطة X_1 يقطع هنا محور X عند نقطة (X_2) وهي قيمة أقرب من X_1 وهكذا نكرر هذه العملية n مرة

$$\therefore \boxed{X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)}{F'(X_n)}} \Rightarrow$$ القانون يستخدم لتحسين الجذر

حفظ

$n = 0, 1, 2, 3, \dots\dots$

أي إيجاد قيمة أقرب للجذر.

Examples: Using Newton Method to Solve:

① $x^3 - 3x + 1 = 0$ Solution

$\because f(x) = x^3 - 3x + 1$

نوجد فترة يقع خلالها الجذر

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow +ve$

$x = 1 \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow -ve$

$\therefore$ الإشارة لـ $f(x)$ تغيرت خلال تغير x من $0 \rightarrow 1$

$\therefore [a, b] = [0, 1]$ $\therefore x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

* القانون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\because f(x) = x^3 - 3x + 1$ $\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$

نعوض في القانون

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

$\boxed{n = 0} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 1}{3x_0^2 - 3} =$

$$= 0.5 - \frac{(1/2)^3 - 3(1/2) + 1}{3(1/2)^2 - 3} = 0.333$$

$\boxed{n=1}$ $\therefore X_2 = X_1 - \dfrac{X_1^3 - 3X_1 + 1}{3X_1^2 - 3}$

$\therefore X_2 = 0.333 - \dfrac{(0.333)^3 - 3(0.333) + 1}{3(0.333)^2 - 3} = 0.347$

$\boxed{n=2} \rightarrow X_3 = X_2 - \dfrac{X_2^3 - 3X_2 + 1}{3X_2^2 - 3}$

$= 0.347 - \dfrac{(0.347)^3 - 3(0.347) + 1}{3(0.347)^2 - 3} = 0.3473$

$\therefore X \cong 0.3473$ القيم تقترب من بعض

---

(2) $f(x) = 2^x - 5x + 2$ Solution

$f(0) = 1 - 0 + 2 = 3$ $+ve$

$f(1) = 2 - 5 + 2 = -1$ $-ve$

$\rightarrow [a,b] = [0,1]$

$x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\therefore f(x) = 2^x - 5x + 2$

$f'(x) = 2^x . Ln(2) - 5$

$$\boxed{\therefore X_{n+1} = X_n - \frac{2^{X_n} - 5X_n + 2}{2^{X_n} Ln(2) - 5}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\underline{n=0}$: $X_1 = x_0 - \dfrac{2^{x_0} - 5x_0 + 2}{2^{x_0}\ln 2 - 5}$

$$X_1 = 0.5 - \frac{2^{0.5} - 5(0.5) + 2}{2^{0.5}\ln 2 - 5} = 0.727$$

$\underline{n=1}$: $X_2 = X_1 - \dfrac{2^{X_1} - 5X_1 + 2}{2^{X_1}\ln 2 - 5}$

$$\therefore X_2 = 0.727 - \frac{2^{0.727} - 5(0.727) + 2}{2^{0.727}\ln 2 - 5} = 0.732$$

$\underline{n=2}$: $X_3 = X_2 - \dfrac{2^{X_2} - 5X_2 + 2}{2^{X_2}\ln 2 - 5} = 0.732$

$$\therefore \boxed{X \simeq 0.732}$$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^{x^2} - 6 = 0$ Solution

$f(1) = 1^{1^2} - 6 = -5$ (-ve)

$f(2) = 2^{2^2} - 6 = 16 - 6 = 10$ +ve

$\rightarrow [a,b] = [1,2]$

$x_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

ممكن نجيب المشتقة الأولى $f'(x)$ ←

$$f(x) = x^{x^2} - 6 = u - 6 \qquad \overset{\text{صح}}{\Longrightarrow} u = x^{x^2}$$

$$\ln u = \ln x^{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = u'$$

$$\frac{1}{u} \cdot u' = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (2x)$$

$$\therefore f'(x) = x^{x^2}\left[x + 2x\ln x\right] \Longleftarrow u' = x^{x^2}\left[x + 2x\ln x\right]$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{x_n^2} - 6}{x_n^{x_n^2}\left[x_n + 2x_n \ln x_n\right]}$$

$$n=0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^{x_0^2} - 6}{x_0^{x_0^2}\left[x_0 + 2x_0 \ln x_0\right]} = 2.019$$

$$n=1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1^{x_1^2} - 6}{x_1^{x_1^2}\left[x_1 + 2x_1 \ln x_1\right]} = 1.884$$

$$n=2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2^{x_2^2} - 6}{x_2^{x_2^2}\left[x_2 + 2x_2 \ln x_2\right]} = 1.798$$

$$n=3 \Rightarrow x_4 = x_3 - \frac{x_3^{x_3^2} - 6}{x_3^{x_3^2}\left[x_3 + 2x_3 \ln x_3\right]} = 1.773$$

$$\boxed{\therefore x \simeq 1.773}$$

3 الطريقة التكرارية البسيطة :

Simple Itterative Method :

معطى $f(x) = 0$

نجعل أحد الـ x منفرداً في طرف وباقي الـ x آت في الطرف الآخر

ونكون المعادلة المعطاة على الشكل

$$\boxed{x = \phi(x)}$$

أحد x آت   باقي x آت

لازم يتحقق $\boxed{|\phi'(x_0)| < 1}$ شرط

وإذا لم يتحقق هذا في طرف من الباقي نجرب نضع $\phi(x)$ جديد ونطبق عليه الشرط

الحل :

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

يعني

$n = 0 \rightarrow x_1 = \phi(x_0)$

$n = 1 \rightarrow x_2 = \phi(x_1)$

وهكذا

*** Examples:-** Using simple Itterative method to Evaluate a root to the eqn.:

$$f(x) = x^3 - 7x + 4 = 0$$ (Solution)

في كل الطرق نجيب الأول

$f(0) = +4$

$f(1) = 1 - 7 + 4 = -2$

$\longrightarrow [0,1] \quad \therefore x_0 = \frac{1}{2}$

$\because f(x) = \boxed{x^3 - 7x + 4 = 0}$

let $7x = x^3 + 4$

$\therefore x = \frac{1}{7}(x^3 + 4) \longrightarrow \phi(x)$

بس لازم نحقق الشرط الأول

$\phi'(x) = \frac{1}{7}(3x^2)$ $\quad \because |\phi'(x_0)| = \left|\frac{1}{7}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right| = 0.107 < 1$

الشرط متحقق.

$$\therefore \boxed{x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{1}{7}(x_n^3 + 4)}$$

$n=0 \quad x_1 = \frac{1}{7}(x_0^3 + 4) = \frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\right) = 0.589$

$n=1 \quad x_2 = \frac{1}{7}(x_1^3 + 4) = \frac{1}{7}\left((0.589)^3 + 4\right) = 0.6007$

$n=2 \quad x_3 = \frac{1}{7}(x_2^3 + 4) = \frac{1}{7}\left((0.6007)^3 + 4\right) = 0.602$

$\therefore x \simeq 0.602$ #

(2) $\sin(x) + \frac{x}{2} - 1 = 0$ (Solution)

$$f(0) = \sin(0) + 0 - 1 = -1$$
$$f(1) = \sin\left(1 \times \frac{180}{\pi}\right) + \frac{1}{2} - 1 = 0.34$$
$$\rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

let $\frac{x}{2} = 1 - \sin(x)$

$$x = 2(1 - \sin x) \rightarrow \phi(x)$$

نشوف هل الشرط محقق أم لا

$$\phi'(x) = 2(-\cos x)$$

$$|\phi'(x_0)| = 2\left|\cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{180}{\pi}\right)\right| = 1.755 > 1$$

الشرط مش متحقق

∴ نرجع للمعادلة ونختار X تانية غير الأولى :

$$\because \sin(x) + \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore \sin(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \sin^{-1}\left[1 - \frac{x}{2}\right] \rightarrow \phi(x)$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$$

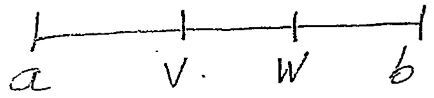
$$\phi'(x_0) = \frac{-1/2}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1/2}{2}\right)^2}} = 0.756 < 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

الشرط محقق

* تابع الحلول العددية للمعادلات الجبرية *

Golden Section Search Method :-

هذه الطريقة تشبه طريقة (Bisection) ولكن نقوم بتقسيم الفترة [a,b] الى ثلاث اجزاء → كما بالرسم ..

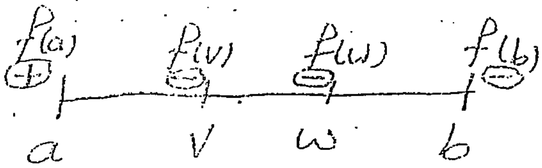


$$V = a + (b-a)K_1$$
$$W = a + (b-a)K_2$$

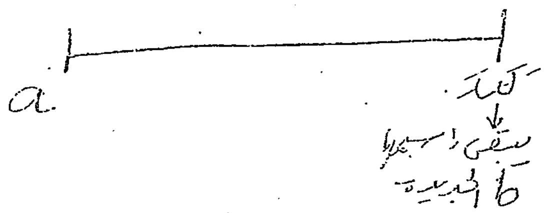
حفظ
$K_1 = 0.382$
$K_2 = 0.618$

ونوجد بعد ذلك
$f(a)$ و $f(b)$, $f(V)$, $f(W)$
ونقوم بحذف أحد الفترات على حسب اشارة قيم الدالة f

مثال ex. →



نحذف الفترة (W−b) ليتحول على باقي الفترة وهي



← نقوم بتقسيم هذه الفترة الجديدة مرة أخرى ونوجد W , V جديدة

— ونشوف اشارة $f(a), f(b), f(v), f(w)$ ونزيل أحد الفترات ونشتغل على باقي الفترة وهكذا ...

www.CollegeTanta.cf

$$\therefore \phi(x_n) = \boxed{x_{n+1} = \sin^{-1}\left(1 - \frac{x}{2}\right)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$n = 0$ $\qquad \therefore x_1 = \phi(x_0) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{x_0}{2}\right) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1/2}{2}\right)$

$$\therefore x_1 = 48.59^\circ * \frac{\pi}{180} = 0.8481$$

$n = 1$ $\qquad \therefore x_2 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{x_1}{2}\right) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.8481}{2}\right)$

$$x_2 = 35.17 * \frac{\pi}{180} = 0.613$$

$n = 2$ $\qquad x_3 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.613}{2}\right) = 43.88 * \frac{\pi}{180} = 0.766$

$n = 3$ $\qquad x_4 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.766}{2}\right) = 38.1 * \frac{\pi}{180} = 0.665$

$n = 4 \Rightarrow x_5 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.665}{2}\right) = 41.87 * \frac{\pi}{180} = 0.73$

$$\therefore x \simeq 0.73$$