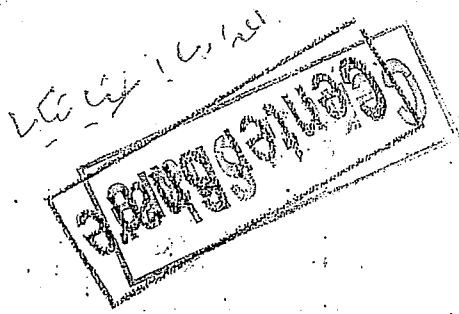


« الباب الاول »

المتجهات

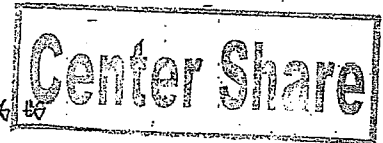
المتجهات



تقسم المتجهات الفيزيائية إلى:

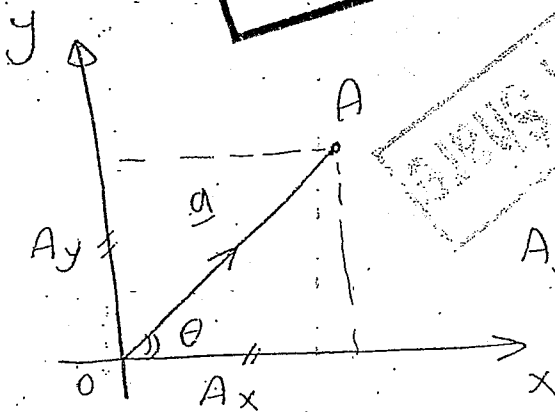
1- المتجهات قياسية : والتي يمكن تحديدها بعدة طرق المقادير
مثل « المسافة - الطول - ... »

2- المتجهات متجهة : والتي يمكن تحديدها بعدة طرق المقادير والاتجاه



مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

← المتجهات في المستوي



$$A_x = A \cos \theta$$

- مركبة المتجه a في اتجاه محور y هي A_y

$$A_y = A \sin \theta$$

$$\vec{OA} = \vec{a} = A \cos \theta \vec{i} + A \sin \theta \vec{j}$$

$$A = \sqrt{A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \|\vec{a}\|$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

ي: متجه وحدة \vec{i} في اتجاه محور x
 \vec{j} : متجه وحدة \vec{j} في اتجاه محور y

ملامحة:

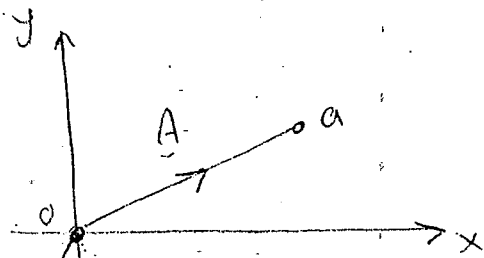
$$\vec{a} = \frac{A_x}{A} \vec{i} + \frac{A_y}{A} \vec{j}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

لنأخذ الأول

لنرّاجع

ارتفاع



$$\underline{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

لحساب $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

المركبة الزاوية لا خاصية N مركبة من \hat{A}
مركبة الوحدة

$$\hat{A} = \frac{\underline{A}}{A} = \left(\frac{A_x}{A} \right) \hat{i} + \left(\frac{A_y}{A} \right) \hat{j} + \left(\frac{A_z}{A} \right) \hat{k}$$

$\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} \rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{A_x}{A}$$

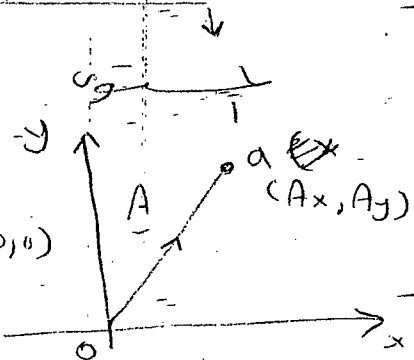
$$\cos \beta = \frac{A_y}{A} \rightarrow \beta = \cos^{-1} \frac{A_y}{A}$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{A} \rightarrow \gamma = \cos^{-1} \frac{A_z}{A}$$

$\alpha, \beta, \gamma \rightarrow$ الزوايا الاتجاهية للمركبة

Center Share

$$\begin{aligned} &= a - o \\ &= (A_x, A_y) - (0, 0) \\ &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \end{aligned}$$



$$\underline{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

لحساب $A = \|\underline{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x}$$

$$\hat{A} = \frac{\underline{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j}}{A}$$

مركبة الوحدة $\hat{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j}$

مركبة الوحدة : معناها مركبة الوحدة
نول

Center Share

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

نقطتين

$$\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\underline{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\underline{A} \times \underline{B} = \|\underline{A}\| \|\underline{B}\| \sin \theta \hat{n}$$

$\hat{n} \rightarrow$ متجه الوحدة

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\hat{n} = \frac{\underline{A} \times \underline{B}}{\|\underline{A} \times \underline{B}\|}$$

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

نقطتين

$$\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\underline{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$= \|\underline{A}\| \|\underline{B}\| \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\|\underline{A}\| \|\underline{B}\|}$$

المسألة 2:

1- مساحة مثلث \underline{A} و \underline{B} متجهين

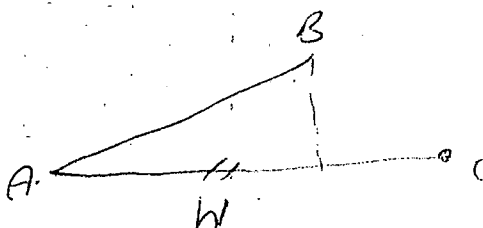
$$\frac{1}{2} \|\underline{A} \times \underline{B}\| =$$

مساحة المثلث

$$\|\underline{A} \times \underline{B}\|$$

Center Share

2- مساحة \underline{A} و \underline{B} متجهين

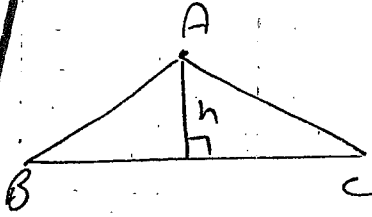


$$w = \underline{AB} \cdot \hat{AC}$$

$$\rightarrow w = \|\underline{AB}\| \cos(\theta)$$

(20)

١- اقصر من بين نقطتين ومثل مستقيم



اقصره $h \rightarrow$

$$\frac{1}{2} \|BC\| * h = \frac{1}{2} \|BA \times BC\|$$

Center Share

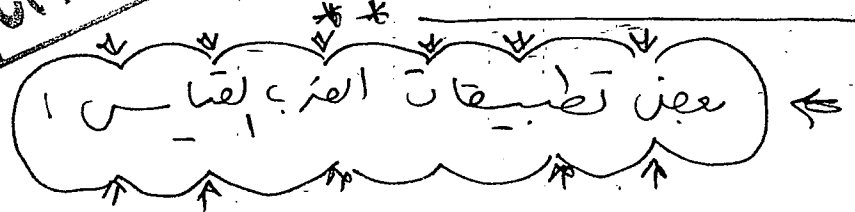
$$A \times B = 0 \rightarrow A \parallel B$$

(مسافة طول)

٥- توازي مستقيم

$$A = (a_x, a_y, a_z)$$

$$B = (b_x, b_y, b_z)$$



اجبار الزاوية بين مستقيم

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}$$

$$\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\|A\| \|B\|}$$

Center Share

اثبات تمام مستقيم

$$A \cdot B = 0 \rightarrow A \perp B \quad (\theta = 90)$$

مستقيم - مستقيم =

$$B \text{ على } A \text{ مستقيم} = A \cdot B = 0 \rightarrow \text{مستقيم}$$

طريقة الاختصاصية (A, B)

Center Share

الشغل المبذول

$$W = F \cdot d = \text{شغل} \rightarrow \text{لوكانه (الزاوية) فضاء مستقيم}$$

$$W = \int F \cdot dr \rightarrow \text{لوكانه (الزاوية) منحني}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$A(B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

صم صواب $\neq 0$

معناها ان الثلاث متساوية
لغوا في سونو

أضياء منهم تطبيق لثلاث لثلاث

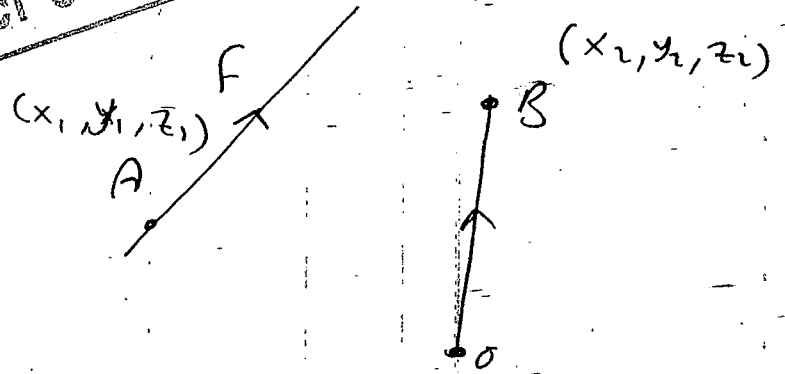
مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

$$M_B = r \times F$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

جربنا لثلاث
وهو 3A



$$BA = A - B = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

Center Share

عزم F حول المحور B = $M_B \cdot \hat{OB} = \text{رقم}$

$$= (r \times F) \cdot \hat{OB}$$

$$= \hat{OB} \cdot (r \times F) = \begin{vmatrix} \hat{OB}_1 & \hat{OB}_2 & \hat{OB}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \text{رقم}$$

(22)

الهندسة المتكافئة

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = [\underline{A} \cdot \underline{C}] \underline{B} - [\underline{A} \cdot \underline{B}] \underline{C}$$

= متجه

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Mid term 2016

Center Share

احول متجه الوحد الى مستوى
حيث يكون له اشكال عام

$$\underline{A} (1, 0, 1)$$

$$\underline{B} (0, 1, 1)$$

$$\underline{C} (-1, 1, 0)$$

$$\hat{n} = \frac{\underline{AB} \times \underline{AC}}{\|\underline{AB} \times \underline{AC}\|} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (-1, 1, 0)$$

$$\underline{AC} = \underline{C} - \underline{A} = (0, 1, -1)$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +\hat{i}[-1] - \hat{j}[-1] + \hat{k}[-1] \\ = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} = (-1, -1, -1)$$

$$\|\underline{AB} \times \underline{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

Center Share

$$\hat{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

#

(23)

سؤال ٥

إذا كان

$$A = (0, 4, 3)$$

$$B = (2, 3, 6)$$

$$C = (-2, 0, 2)$$

$$D = (1, 1, 1)$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

مطلوب

(٩) اوجد متجه AB و DA

(١٠) اوجد مساحة المثلث ABC ثم اوجد اقلر عمودي من نقطة C

والمتجه AB

(١١) اوجد معادلات المستويين ABC و ABD

(١٢) اوجد اقلر عمودي من نقطة D الى المستوي ABC و اقلر عمودي من نقطة C الى المستوي ABD

(٩) اوجد متجه AB و DA

$$\underline{AB} = B - A = (2, 3, 6) - (0, 4, 3) = (2, -1, 3)$$

$$\underline{DA} = A - D = (0, 4, 3) - (1, 1, 1) = (-1, 3, 2)$$

$$\underline{AB} \cdot \underline{DA} = (-1, 3, 2) \cdot (2, -1, 3) = -2 - 3 + 6 = 1$$

$$\hat{AB} = \frac{\underline{AB}}{\|\underline{AB}\|} = \frac{(2, -1, 3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\underline{AB} \cdot \underline{DA} = 1 = \frac{-2}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

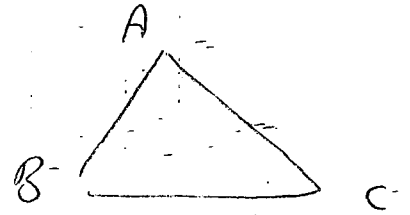
مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

(24)

ABC مثلث (ن)

$$\underline{AB} = (2, -1, 3)$$

$$\underline{AC} = \underline{C} - \underline{A} = (-2, 0, 2) - (0, 4, 3) \\ = (-2, -4, -1)$$



Center Share

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-1+12) - \hat{j}(-2+6) \\ + \hat{k}(-8-2)$$

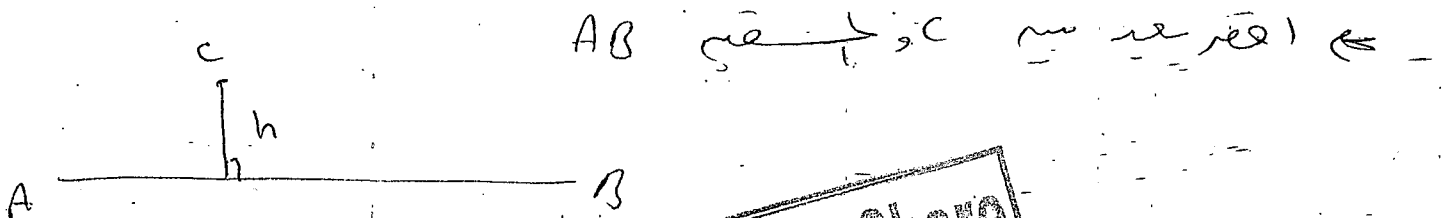
$$= 11\hat{i} - 4\hat{j} - 10\hat{k}$$

Center Share

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\frac{1}{2} \|\underline{AB} \times \underline{AC}\| = \text{Area of } \triangle ABC$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(11)^2 + (-4)^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{285} \quad \text{وهذه هي المساحة}$$



AB قاعدة المثلث و C رأسه

Center Share

$$\frac{1}{2} \times \|\underline{AB}\| \times h = \frac{1}{2} \|\underline{AB} \times \underline{AC}\|$$

$$\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} \times h = \sqrt{285}$$

$$h = \frac{\sqrt{285}}{\sqrt{14}} = 4.51 \quad \text{وهذه طول الارتفاع}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

(ج) حدد اتجاه السطح في صورة A, B, C, D

$$\underline{AB} = (2, -1, 3)$$

$$\underline{AC} = (-2, -4, -1)$$

$$\underline{AD} = \underline{D} - \underline{A} = (1, -3, -2)$$

$$\underline{AB} \cdot (\underline{AC} \times \underline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

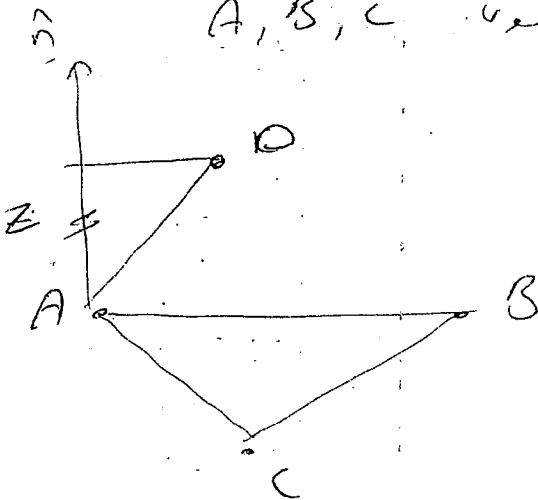
مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$= 2(8 - 3) + 1(4 + 1) + 3(6 + 4) = 10 + 5 + 15 = 30 \neq 0$$

Center Share

السطح في صورة A, B, C, D

(د) احسب المساحة A, B, C, D في صورة A, B, C



$$\hat{n} = \frac{\underline{AB} \times \underline{AC}}{\|\underline{AB} \times \underline{AC}\|}$$

$$= \frac{(13, -4, -10)}{\sqrt{285}}$$

$$= \left(\frac{13}{\sqrt{285}}, \frac{-4}{\sqrt{285}}, \frac{-10}{\sqrt{285}} \right)$$

$$\underline{Z} = \underline{AD} \cdot \hat{n} = (1, -3, -2) \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{285}}, \frac{-4}{\sqrt{285}}, \frac{-10}{\sqrt{285}} \right)$$

$$= \frac{13}{\sqrt{285}} + \frac{12}{\sqrt{285}} + \frac{20}{\sqrt{285}}$$

$$= \frac{45}{\sqrt{285}}$$

السطح

①

Midterm (2015)

26

السؤال الأول:

$$A(0, 4, 3)$$

$$B(2, 3, 6)$$

$$C(-2, 0, 2)$$

$$D(1, 1, 1)$$



② $\vec{AB} \perp \vec{DA}$ قطة

$$\vec{DA} = \vec{DA} - \vec{AB}$$

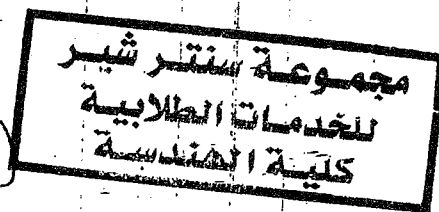
$$= (-1, 3, 2) - \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\vec{DA} = A - D = (-1, 3, 2)$$

$$\vec{AB} = B - A = (2, -1, 3)$$

$$\vec{AC} = C - A = (-2, -4, -1)$$

$$\hat{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

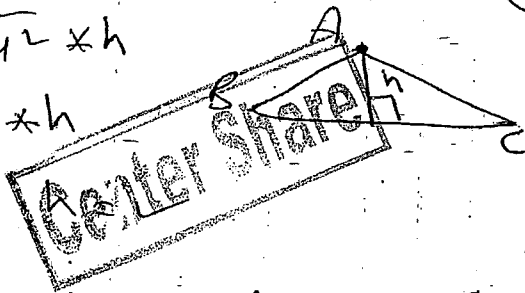


③ \vec{BC} و A قطة

$$\frac{1}{2} \sqrt{(13)^2 + (4)^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 3^2 + 4^2} \times h$$

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{BC}\| \times h$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = +\hat{i}[1+12] - \hat{j}[-2+6] + \hat{k}[-8-2] = (13, -4, -10)$$



R, D, C, A, B, C

(1) النقاط: $A(1, 1, 0)$, $B(3, -1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$, $D(0, 4, -1)$

المسألة: ABC و D نقطة الوحدة الجوانب

$$\underline{AB} = B - A = (3, -1, 1) - (1, 1, 0) = (2, -2, 1)$$

$$\underline{AC} = C - A = (-1, 0, 2) - (1, 1, 0) = (-2, -1, 2)$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i(-4+1) - j(4+2) + k(-2-4) = -3i - 6j - 6k$$

$$\|\underline{AB} \times \underline{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 9$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$مساحة \triangle ABC = \frac{1}{2} \|\underline{AB} \times \underline{AC}\| = \frac{1}{2} \times 9 = 4.5$$

$$\underline{AD} = D - A = (0, 4, -1) - (1, 1, 0) = (-1, 3, -1)$$

$$\hat{n} = \frac{\underline{AB} \times \underline{AC}}{\|\underline{AB} \times \underline{AC}\|} = \frac{(-3, -6, -6)}{9} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\underline{AB} \cdot (\underline{AC} \times \underline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(1-6) + 2(2+2) + 1(-6-1) = -9 \neq 0$$

النقاط لا تقع في مستوى واحد

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Sheet ①

(28)

(٤) إذا كانت متجهات موضع نقطة A, B, C بالنسبة لـ O

$$\underline{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \quad , \quad \underline{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \quad : \text{حيث}$$

$$\underline{c} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

أوجد متجه الوحدة العمودي على مستوي ABC

Center Share

$$\hat{n} = \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{\|\underline{a} \times \underline{b}\|}$$

قانون متجه الوحدة العمودي على المستوي

مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\underline{A} = (2, -1, 3) = \underline{A} - \underline{O} = (2, -1, 3)$$

$$\therefore \underline{A} (2, -1, 3) \quad \underline{B} (3, 2, -4) \quad \underline{C} (-1, 3, -2)$$

Center Share

$$\therefore \hat{n} = \frac{\underline{AB} \times \underline{AC}}{\|\underline{AB} \times \underline{AC}\|} = \frac{(13, 26, 13)}{13\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \#$$

$$\underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (1, 3, -7)$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -7 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Center Share

$$\underline{AC} = \underline{C} - \underline{A} = (-3, 4, -5)$$

$$= +\hat{i}[-15 + 28] - \hat{j}[-5 - 21] + \hat{k}[4 + 9]$$

$$= 13\hat{i} + 26\hat{j} + 13\hat{k} = (13, 26, 13)$$

$$\|\underline{AB} \times \underline{AC}\| = \sqrt{(13)^2 + (26)^2 + (13)^2} = 13\sqrt{6}$$

(29)
(5) لم يتم فتح a, b, c يتم فحص

$$a\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$c\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Center Share
(أشياء)

متعادلة

هذا قياس صغير

$$(1) \rightarrow (a, 2, b)$$

$$(2) \rightarrow (c, -1, 0)$$

$$(3) \rightarrow (2, 1, 1)$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

$$\Rightarrow (2) \cdot (3) = (c, -1, 0) - (2, 1, 1) = 0$$

$$= 2c - 1 = 0$$

$$\boxed{c = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (1) \cdot (2) = (a, 2, b) \cdot \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right) = 0$$

$$= \frac{1}{2}a - 2 = 0$$

$$\boxed{a = 4}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

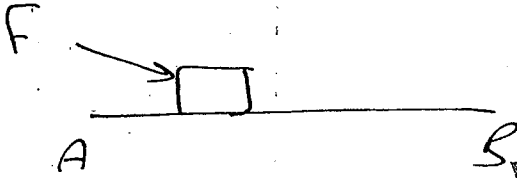
$$\Rightarrow (1) \cdot (3) = (4, 2, b) - (2, 1, 1) = 0$$

$$= 4 + 2 + b = 0$$

$$\boxed{b = -10}$$

(30)

(٨) اكتب التجهيز والاسم من القوة
 حركة جسيم في $A(2, -1, 8)$ من نقطة
 الى النقطة $B(13, -6, 3)$



$$\underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (11, -5, -5)$$

$$W = \underline{F} \cdot \underline{AB}$$

$$= (4, 5, -7) \cdot (11, -5, -5)$$

$$= 44 - 25 + 35$$

$$= 54$$

Center Share

مجموعة منتظر شير
 لخدمات الطلابية
 كلية الهندسة

(٩) اثبت ان التجهيزات تكون متعامد قائم

$$\underline{A} = (3, -4, -4) \quad \underline{B} = (1, -3, -5) \quad \underline{C} = (2, -1, 1)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (3, -4, -4) \cdot (1, -3, -5) = 3 + 12 + 20 = 35 \neq 0$$

$$\underline{A} \cdot \underline{C} = (3, -4, -4) \cdot (2, -1, 1) = 6 + 4 - 4 = 6 \neq 0$$

$$\underline{B} \cdot \underline{C} = (1, -3, -5) \cdot (2, -1, 1) = 2 + 3 - 5 = 0 \quad \therefore \underline{B} \perp \underline{C}$$

التي اثبت قائم الزاوية

(31)

$$\underline{r} \cdot \underline{r} - 8\underline{k} \cdot \underline{r} + 7 = 0 \quad (1) \text{ أحده من المعادلات :}$$

حيث \underline{k} متجه الوحدة والاتجاه هو \underline{z} وأحده المتجهين \underline{r} المتجهين \underline{r} والآخر \underline{r}

(الحل)

$$\underline{r} \cdot \underline{r} - 8\underline{k} \cdot \underline{r} + 7 = 0$$

Center Share

$$\underline{r} \cdot \underline{r} - 8\underline{k} \cdot \underline{r} + 16 + 7 = 16$$

$$(\underline{r} - 4\underline{k}) \cdot (\underline{r} - 4\underline{k}) + 7 = 16$$

$$\|(\underline{r} - 4\underline{k})\|^2 = 9$$

Center Share

$$\|\underline{r} - 4\underline{k}\| = 3$$

نصف المسافة
التيمجموعة المتجهات
للخدمات الطلابية
كلية الهندسةمجموعة المتجهات
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\underline{r} - 4\underline{k} = 3\underline{e} \rightarrow \#$$

Center Share

$$\underline{r} = 4\underline{k} + 3\underline{e} = 7\underline{k}$$

$$\underline{r} = 7$$

→ حبة نظير

$$-\underline{k} = \underline{e}$$

* المتجهين

$$\underline{r} = 4\underline{k} - 3\underline{k} = \underline{k}$$

$$\underline{r} = 1$$

→ حبة صغرى

(10) إذا تحرك جسم من نقطة $P_1(1, -2, 1)$ إلى $P_2(9, -6, 27)$ في مجال متجهي $\vec{F} = (x, xy, -xy^2z)$ حيث c :
 $x = t^2$
 $y = -2t$
 $z = t^3$

حسب تأثير القوة $\vec{F} = (x, xy, -xy^2z)$

أوجد مقدار الشغل المبذول ؟
 $\vec{r} = (x, y, z)$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = (t^2, -2t^3, -4t^7)$$

$$\vec{r} = (t^2, -2t, t^3)$$

$$d\vec{r} = (2t, -2, 3t^2) dt$$

$$\therefore W = \int_1^3 (t^2, -2t^3, -4t^7) \cdot (2t, -2, 3t^2) dt$$

$$= \int_1^3 (2t^3 + 4t^3 - 12t^9) dt$$

$$= \int_1^3 [6t^3 - 12t^9] dt$$

$$= \left[\frac{6t^4}{4} - \frac{12t^{10}}{10} \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{3(3)^4}{2} - \frac{6(3)^{10}}{5} \right] - \left[\frac{3(1)^4}{2} - \frac{6(1)^{10}}{5} \right]$$

= ✓ وهو المطلوب

Center Share

مجموعة سنتر شير
 لخدمات الطلابية
 كلية الهندسة

Center Share

مجموعة سنتر شير
 لخدمات الطلابية
 كلية الهندسة

Center Share

(١٤) إذا كانت متجه القوة $\vec{F} = (3, 2, -4)$ ووضعت عليها غير بالنقطة $A(1, -1, 2)$ اوجد متجه العزم لهذه القوة حول نقطة $B(2, -1, 3)$ ثم عرّف عزم \vec{F} حول المحط المتطابق مع متجه الموضع للنقطة B .

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \hat{i}[-4-3] - \hat{j}[4+3] + \hat{k}[-2] = \boxed{(2, -7, -2)} \quad \#$$

$$\vec{r}_{BF} \text{ حول المحور } \vec{OB} = \vec{M}_B - \vec{OB}$$

$$= (2, -7, -2) - \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{14}} + \frac{7}{\sqrt{14}} + \frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$= \boxed{\frac{5}{\sqrt{14}}} \quad \#$$

$$\vec{OB} = \frac{\vec{B}-\vec{O}}{\|\vec{B}-\vec{O}\|} = \frac{(2, -1, 3)}{\sqrt{14}}$$

مجموعة منتير شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\Rightarrow \int_C \underline{F} \times d\underline{r} = \int (t^2, -2t^3, -4t^7) \times (2t, -2, 3t^2) dt$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ t^2 & -2t^3 & -4t^7 \\ 2t & -2 & 3t^2 \end{vmatrix} = +i[-6t^5 - 8t^7] - j[3t^4 + 8t^8] + k[-2t^4 + 4t^4]$$

$$\int_C \underline{F} \times d\underline{r} = \int_1^3 (-6t^5 - 8t^7) i - j(3t^4 + 8t^8) + k(-2t^4 + 4t^4) dt$$

نتيجة

مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\int_C \frac{dF}{dt} \times d\underline{r}$$

$$\int_C \frac{dF}{dt} \times d\underline{r}$$

$$\frac{dF}{dt} = (2t, -6t^2, -28t^6)$$

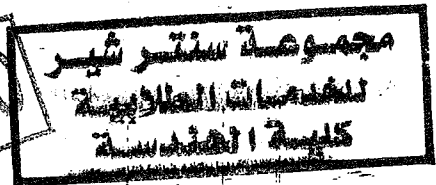
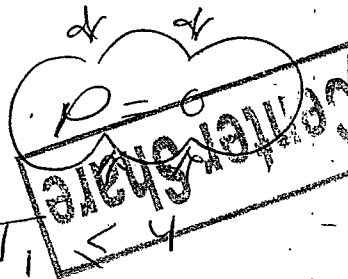
مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

##

9- خذ بالاعتبار بنية (A) إذا كان كل متر يسلم بحمل

ش - لا يتجاوز 4 kN بالعمود ووزن البعش ليس مهم
 - البعش للوزن Q التي تحفظ التوازن وذلك من حيث
 حيث $P=1 \text{ kN}$ و $P=0$



at $0 \leq T_1 \leq 4$

$$M_B = 0 \rightarrow 3 \times 0.5 + T_1 \times 2.25 - Q \times 3 = 0$$

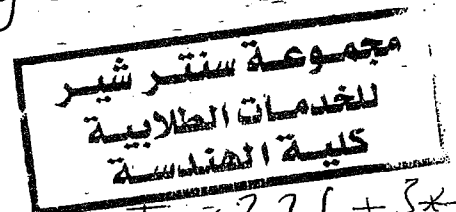
$$\text{at } T_1 = 0 \rightarrow Q = 0.5 \text{ kN}$$

$$\text{at } T_1 = 4 \rightarrow Q = 3.5 \text{ kN}$$

$$\therefore 0.5 \leq Q \leq 3.5$$

Range Q التي كافت $0 \leq T_1 \leq 4$

at $0 \leq T_2 \leq 4$



$$M_B = 0 \rightarrow -Q \times 0.75 - T_2 \times 2.25 + 3 \times 2 = 0$$

$$\text{at } T_2 = 0 \rightarrow Q = 11 \text{ kN}$$

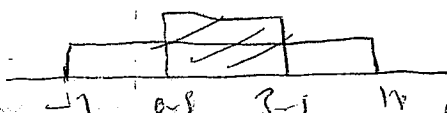
$$\text{at } T_2 = 4 \rightarrow Q = -1 \text{ kN}$$

$$-1 \leq Q \leq 11$$

$$0 \leq T_2 \leq 4$$

Range Q التي كافت $0 \leq T_2 \leq 4$

$$0.5 \leq Q \leq 3.5$$



1. Range Q التي كافت $0 \leq T_1 \leq 4$