سنتر فيوتشر

Subject: فيزياء اعدادي

Chapter: خواص ماده (الحركه التوافقيه البسيطه)

Mob: 0112 3333 122

0109 3508 204

الحركة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion.

الحركة الاهتزازية: فى الحياة العادية توجد الكثير من الاهتزازات مثل حركة وتر مشدود "جيتار" أو شوكة رنانة او ثقل معلق فى خيط.

تنقسم الحركة الاهتزازية إلى ثلاث أنواع :-

1. **الحركة الاهتزازية المخمدة**: هى تلك الحركة حول موضع الاستقرار التى تتوقف بعد فترة من الزمن تلقائياً نتيجة وجود قوى خارجية مؤثرة على الجسم عكس الاهتزاز تجعله يتوقف عن الحركة

2. **الاهتزازة المجبرة**

هى نفس الاهتزازة المخمدة ولكن يتم تزويدها بقوة كل ما تتوقف حتى تستمر فى الحركة.

3. **الحركة التوافقية البسيطة**

- هى حركة اهتزازية حول موضع معين لكن تستمر إلى مالانهاية "وقت طويل جداً" ولا تتوقف مع الزمن.
- حركة مثالية وغير موجودة عملياً فى الحياة.
- لا يوجد أى فقد فى الطاقة أى أن طاقتها ثابتة طول المسار $E = Constant$

ملاحظة

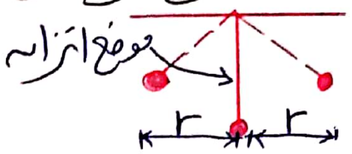
لو فرضنا أن هناك طفل يتأرجح على أرجوحة وتم دفعه اول مرة.

1. اذا استمرت الأرجوحة فى الاهتزاز دائماً بدون اى تدخل ← حركة توافقية بسيطة
2. اذا توقفت بعد فترة ← اهتزازة مخمدة.
3. اذا دفع احدهم الطفل مرة أخرى ← مجبرة.

فى دراستنا سوف نعمل فقط على الحركة التوافقية البسيطة

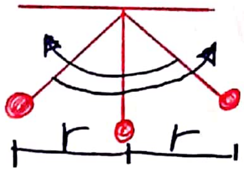
بعض التعريفات الهامة

1 حركة اهتزازية ← هى حركة تتكرر ذهابًا وإيابًا فى نفس المسار حول موضع اتزانه وعليه



2 سعة اهتزازة ← هى أقصى إزاحة للجسم عن موضع الاتزان "r"

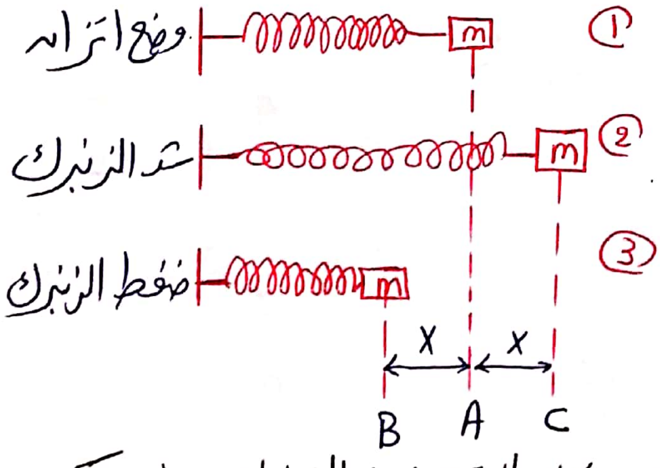
3 الاهتزازة الكاملة ← عندما ينطلق الجسم من نقطة ثم يعود إليها فى نفس اتجاه الحركة، وتكون عبارة عن 4r



4 الزمن الدورى T ← زمن اهتزازة أو دورة كاملة.

5 التردد ← عدد الاهتزازات فى الثانية الواحدة وهو مقلوب الزمن الدورى.

الزنبرك الأفقى ← مثال على الحركة التوافقية البسيطة للدراسة:



- افترض وجود كتلة "M" أفقية موضوعة على سطح أملس تمامًا "لا يوجد احتكاك"

- عند شد الزنبرك بأى قوة إلى النقطة "C" وتركه فإنه سوف يتحرك حول موضع استقرار الكتلة "A"

وحيث أنه ليس هناك احتكاك ← ليس هناك فقد فى الطاقة إذا الزنبرك يتحرك حركة توافقية بسيطة.

عند دراسة الزنبرك الأفقى نجد أن:

- الحركة التى حدثت هى نتيجة قوة خفية دائمًا تريد إرجاع الكتلة M إلى موضع اتزانها A.

- أى جسم يميل إلى الوقوف فى موضع اتزانه.

- الجسم دائماً لكي لا يتوقف عن الاهتزاز فإنه يكون بحاجة إلى قوة استرداد تساعده على الرجوع دائماً إلى موضع الاتزانه .

⟸ درس هوك تلك القوة واستنتج لها علاقة رياضية :-

$$F_{restoring} = -\ K\ X \rightarrow$$ الإزاحة التي تم ستر الكتلة M

$F_{restoring}$ ← قوة الارجاع

K ← ثابت الزنبرك وهو يعتمد على نوع وشكل وعدد لفات الزنبرك .

$-$ ← تدل على انها قوة ارجاع .

- كلما اقتربت الكتلة من موضع اتزانها تقل قوة الارجاع حتى تصبح في موضع الاتزانه = صفر

$$X = 0 \longrightarrow F = -kx \longrightarrow F = 0$$

- ولكن بسبب كمية الحركة داخل الكتلة تظل في الحركة إلى الوضع المنضغط او المفكوك ويكون هناك قوة ارجاع في الوضع العكسي .

- اقصى قوة ارجاع عند B, C أي عند مكان سعة الاهتزازة .

$$F_{rmax} = -\ k\ r \longrightarrow$$ اقصى ازاحة "سعة الاهتزازة"

$$F \propto -X \longrightarrow$$ قوة الارجاع والإزاحة دائماً عكس بعض .

العجلة في الحركة التوافقية البسيطة

في الزنبرك لا يوجد أي قوة غير قوة الارجاع مؤثرة على الجسم

$$\Sigma \bar{F} = m\ \bar{a}$$ ⟸ من قانون نيوتن الثاني

$$-KX = m\ \bar{a} \qquad \bar{a} = \underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{Constant}} X \qquad \therefore \boxed{a \propto -X}$$

∴ في أي حركة توافقية بسيطة .

$$\boxed{\bar{a} = -c\ X}$$

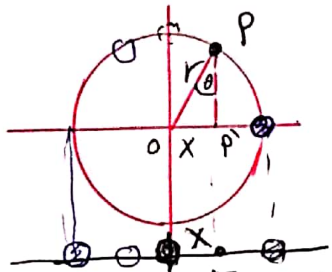
لابد أن تكون العجلة = حاصل ضرب مقدار ثابت * الإزاحة

مثال (1) (هام)

اثبت ان مسقط جسم يدور بسرعة زاوية ثابتة "w" على دائرة يكون عبارة عن حركة توافقية بسيطة على محور الدائرة إذا علمت ان الحركة مستمرة.

الحل

يتحرك جسم صغير على محيط دائرة حركة منتظمة بسرعة زاوية ثابتة.



- مسقط تلك الكرة على قطر الدائرة "$\grave{p}$" مع حركة الجسم سوف تتحرك يمين ويسار نقطة الأصل "o" دائماً ← مفروض حركة توافقية بسيطة

- هنحاول نثبت ان $\grave{p}$ تعمل حركة توافقية بسيطة حول "o" عن طريق اثبات ان

$a = -cx$

لاحظ ان

$x \rightarrow$ ازاحة مسقط الجسم عن o	السرعة الزاوية $\rightarrow w$
$r \rightarrow$ سعة الاهتزازة	طاقة الوضع $\rightarrow E_p$
$\theta \rightarrow$ الازاحة الزاوية	طاقة الحركة $\rightarrow E_k$

من الرسم

$$\sin\theta = \frac{x}{r} \qquad x = r\sin\theta$$

$\because$ السرعة الزاوية ثابتة $\theta = wt$

$$x = r\sin(wt)$$

العلاقة التي تربط الازاحة الخطية للمسقط $\grave{p}$ بالدوران "w"

تفاضل $\sin ▨$	$= \cos ▨ \,*$ تفاضل ▨
تفاضل $\cos ▨$	$= -\sin ▨ \,*$ تفاضل ▨

$$x = r\sin(wt)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = rw\cos(wt)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -rw^2\sin(wt)$$

$$= -w^2 r\sin(wt)$$

$$a = -w^2 x \qquad w = \text{constant} \qquad a = -cx$$

$\therefore$ الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة $\boxed{o}$

ايجاد السرعة والازاحة والعجلة للنقطة م عند بعض النقاط $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$

القوانين اللي بنعوض فيهم

$$x = r\sin(\theta) \quad , \quad v = \omega r\cos\theta \quad , \quad a = -\omega^2 x$$

بداية الحركة او بعد π منها

$\Rightarrow$ at $\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots$

$x = 0$

$a = 0$

$v = \pm v_{max} = r\omega \rightarrow$ الاشارة تدل على اتجاه الحركة

بعد ربع الحركة

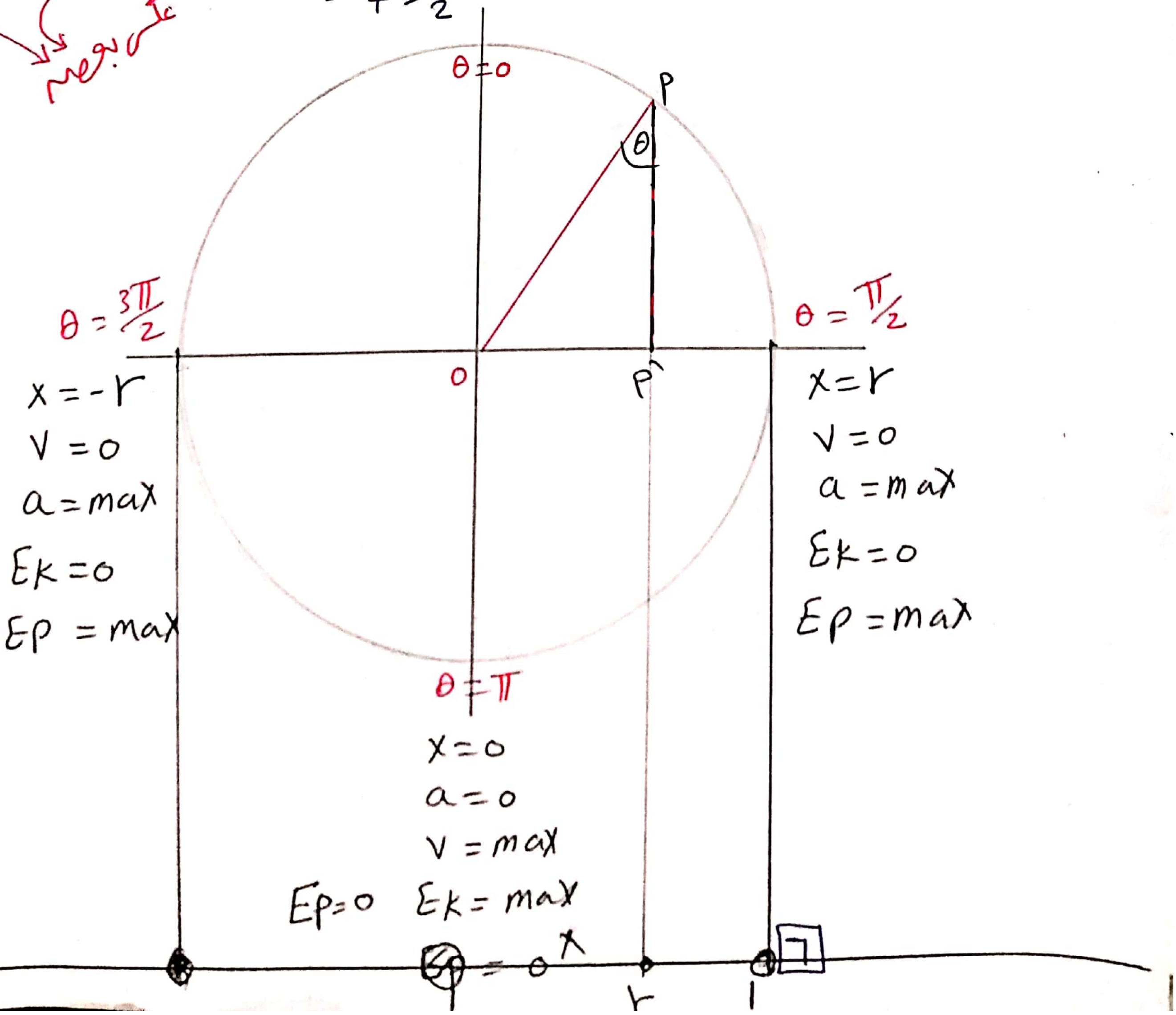
$\Rightarrow$ at $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

$x = \pm r \begin{cases} + & \frac{\pi}{2} \\ - & \frac{3\pi}{2} \end{cases} = \pm max$ سعة الاهتزازة

$v = 0$

$a = \mp a_{max} \begin{cases} - & \frac{\pi}{2} \\ + & \frac{3\pi}{2} \end{cases} = \mp \omega^2 r$

عكس بعض



مثال (٢) استنبط العلاقة بين الكميات التالية :- "أهم حاجة"

① معادلات العجلة (a) بدلالة الزمن الدوري (T) والإزاحة (x).

② " السرعة (V) " " " وسعة الاهتزازة والإزاحة.

③ " الإزاحة (X) " " " والسعة.

④ " الزمن الدوري (T) بالكتلة M.

الحل

[1] $w = \frac{2\pi}{T}$ $\quad a = -w^2 x = \frac{-4\pi^2}{T^2} x$ $\quad \boxed{a = F(T, X)}$

$$\boxed{a = -4\frac{\pi^2}{T^2} x} \; \#$$

[2] السرعة بدلالة (X, r, T) $\quad \boxed{V = F(T, r, x)}$

$$V = rw \cos(\theta)$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \longrightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{X}{r} \longrightarrow$$ من الرسم داخل الدائرة

$$V = wr\sqrt{1 - \frac{x^2}{r}} = \frac{2\pi}{T} r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$$

$$\boxed{V = \frac{2\pi}{T}\sqrt{r^2 - x^2}} \longleftarrow$$ حفظ

[3] الإزاحة بدلالة (X, T, r) $\quad \boxed{X = F(r, T, t)}$

$$\boxed{X = r\sin(wt) = r\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}$$

④ الزمن بدلالة الكتلة

$$\boxed{T = F(m)}$$

$$F = ma \qquad a = -w^2 x$$

$$F = m(-w^2 x) \qquad w = \frac{2\pi}{T}$$

$$F = -m \frac{4\pi^2}{T^2} x$$

$$T^2 = -\frac{4\pi^2 m x}{F}$$

مرفوض

$$T = \pm\left(- \frac{4\pi^2 m x}{F}\right)^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{mx}{F}}$$

مقبول

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{F/x}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

F/x ⟶ القوة المؤثرة على الجسم لكل وحدة ازاحات

K ⟶ ثابت الزنبرك

مثال (٣) استنتج علاقة الطاقة الحركة والوضع والطاقة الكلية لجسم يؤدي حركة توافقية بسيطة.

الحل

① طاقة الحركة E_k

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \frac{2\pi}{T}\sqrt{r^2 - x^2}$$ ⟶ من استنتاج سابق

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2$$

$$E_k = \frac{2m\pi^2}{T^2}(r^2 - x^2)$$

⟶ طاقة الحركة لجسم عند أي x "موضع"

طاقة الحركة عند موضع الاتزان

$$E_{k_{x=0}} = \frac{2m\pi^2}{T^2} r^2 = E_{k\,max}$$

اقصى قيمة حيثما عند موضع الاتزان

اقصى قيمة للسرعة ومن القانون أيضا.

طاقة الحركة عند موضع سعة الاهتزازة $X = r$

$$E_{k_{x=r}} = 0 = E_{k\,min} = \frac{2\pi^2 m}{T^2}(r^2 - r^2) = 0$$

٢ طاقة الوضع Ep

① طاقة الوضع تعتمد على الإزاحة.

② " " عند موضع اتزانه أي جسم = صفر

at $x=0$

$E_p=0$

٣ الطاقة الكلية

$E = E_k + E_p$ مجموع طاقتي الوضع والحركة

at $x=0$

$E_k = \frac{2m\pi^2}{T^2} r^2$ $\quad E_p = 0$

$E_{T\,x=0} = \frac{2m\pi^2}{T^2} r^2$

$\longrightarrow$ الطاقة الكلية عند $x=0$

ولكن الطاقة الكلية ثابتة على طول المسار "حركة توافقية بسيطة"

① عند أي نقطة

$$E_T = \frac{2m\pi^2}{T^2} r^2$$

② " " "

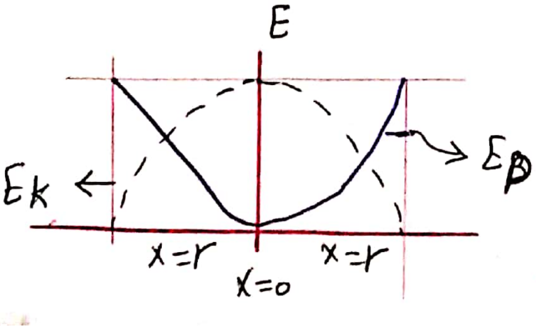
$$E_k = \frac{2m\pi^2}{T^2} (r^2 - x^2)$$

لإيجاد قانون عام لطاقة الوضع

$E_T = E_k + E_p \longrightarrow$ from ①, ②

$$\frac{2m\pi^2}{T^2} r^2 = \frac{2m\pi^2}{T^2}(r^2 - x^2) + E_p$$

$E_p = \frac{2m\pi^2}{T^2} x^2 \longrightarrow$ طاقة الوضع عند أي نقطة على المسار



رسم يوضح العلاقة بين جميع الطاقات

مثال (٤) ايمتى تتساوى طاقتي الوضع والحركة في الحركة التوافقية البسيطة ؟!!

الحل

$$E_k = E_p$$

$$\frac{2m\pi^2}{T^2}(r^2 - x^2) = \frac{2m\pi^2}{T^2} x^2$$

$$r^2 - x^2 = x^2$$

$$2x^2 = r^2$$

$$\boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} r}$$

مثال (٥) ايمتى تكون طاقة الحركة ضعف طاقة الوضع ؟!!

الحل

$$E_k = 2E_p$$

$$\frac{2m\pi^2}{T^2}(r^2 - x^2) = 2\,\frac{2m\pi^2}{T^2} x^2$$

$$r^2 = 3x^2$$

$$\boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} r}$$

مثال (٦) اثبت أن $\frac{1}{2}k = 2m\frac{\pi^2}{T^2}$

الحل

حركة توافقية بسيطة $a = -\omega^2 x$ قانون هوك $a = -\frac{k}{m} x$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega^2 m = k \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$k = m\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}k = \frac{2m\pi^2}{T^2}}$$

"الزنبرك"

"الحركة التوافقية البسيطة"

الحركة الاهتزازية ← هي حركة جسم حول موضع اتزانه

- ← اهتزازة محددة ← تتوقف بعد فترة
- ← " مجبرة ← تؤثر بقوة عليها
- ← حركة توافقية بسيطة ← تستمر إلى ما لا نهاية $E = c$

أي حركة توافقية بسيطة فيها ← $a = -c\,x$ → الإزاحة

← العجلة   (a ← العجلة ، c ← ثابت)

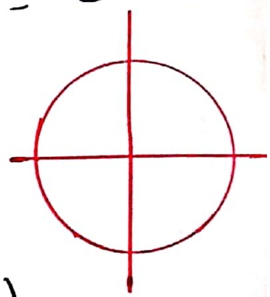
قانون هوك ← قوة الإرجاع على زنبرك

$$F = -k\,x$$

(k ← ثابت يعتمد على الزنبرك)

الإثباتات الهامة

① إثبات أن مسقط جسم بفعل حركة توافقية بسيطة



$x = r\sin\theta$

$x = r\sin(\omega t)$

$V = r\omega\cos(\omega t)$

$a = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 x$

$\omega^2 = c \qquad a = -c\,x$

∴ المسقط يؤدي حركة توافقية بسيطة. #

العلاقات الهامة

② $V \propto (T, r, x)$

$V = r\omega\cos\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \sin\theta = \frac{x}{r}$

$\cos\theta = \sqrt{1+\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}$

$V = r\,\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}$

$V = \frac{2\pi}{T}\sqrt{r^2-x^2}$

⑤ $T \propto (m)$

$F = ma = m(-\omega^2 x)$

$= m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,x$

$T^2 = \frac{-4\pi^2 m x}{F}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m x}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{F/x}}$

$\frac{F}{x} = k \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

③ E, E_k, E_p

$E_{k_x} = \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{r^2-x^2}\right)^2$

$= \frac{2m\pi^2}{T^2}(r^2-x^2) = E_k$

at $x=0$

$E_{k_{x=0}} = \frac{2m\pi^2}{T^2}r^2$

$E_p = 0$

$E_{T_x} = E_p + E_k = \frac{2m\pi^2}{T^2}r^2$

$E_{p_x} = E_T - E_k = \frac{2m\pi^2}{T^2}x^2$

④ أين الموضع الذي $E_p = E_k$

$\frac{2m\pi^2}{T^2}x^2 = \frac{2m\pi^2}{T^2}(r^2-x^2)$

$r^2 = 2x^2 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,r$