

٨

Partial Fractions الكسور الجزئية

لها هي عملية تحويل كسر كبير إلى مجموع الكسور الصغيرة لتكون له.
 (أي هي عملية عكسية لتوحيد المقامات)

$$\frac{P(x)}{q(x)} \Rightarrow \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \frac{f_3(x)}{g_3(x)} + \dots$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

كسر كبير مطلوب
تقطيعه إلى كسور
صغيرة مجموعته
مع بعض

الكسور الصغيرة
المطلوبة

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

* شرط لإيجاد الكسور الجزئية:

① أن يكون بسط $P(x)$ ولقام $q(x)$ لكسر يكسّر عبارة عن
 - كثيرات حدود مثل $x^3 + 2x^2 - 4$

أي لا يوجد بهم جذر تربيعي ولا يوجد بهم كسور صغيرة مثل

$$x^3 + 2\sqrt{x} + 3 \Rightarrow \text{لا بد من إتمام هذا الجذر أولاً}$$

$$2x^4 + 5x^3 + \frac{3}{x} + 7 \Rightarrow \text{لا بد من إتمامه مع المقام ① أولاً}$$

كما يتفق لا حقا بالأمثلة.

* خطوات لإيجاد الكسور الجزئية:

① تأكد من أن درجة البسط أقل من درجة المقام

إذا لم تكن من درجة البسط أكبر من x في المقام

ولذا كان درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام فنحل قسمة مطولة

② حال المقام ① البسط صورة مع طرحه - أن

$$x^2 + 4 \Rightarrow$$

لا يمل

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

هنا القسمة على

لا يمل

* بعد تحليل المقام ستكون هناك ٣ طرق لحقاير (الأمثلة) الثانية

(1) لحقاير بة حقاير (أقواس) درجة أولى غير مكررة (يعني أس = ١)
الأمثلة = ١

Ex. $\frac{x^2+3}{(x-1)(x+3)(2x-4)}$ $\xrightarrow[\text{بالكل مرة}]{\text{نفرض كل}}$ $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{2x-4}$

حيث أن A, B, C ثوابت مجهولة مطلوب إيجادها لاحقاً...

(2) لحقاير بة حقاير درجة أولى بعضها مكرر (يعني بعض الأقواس أس أكبر من ١)

Ex. $\frac{3x-2}{(x+7)^3(x-2)(x+4)}$ $\xrightarrow[\text{بالكل مرة}]{\text{نفرض كل}}$ $= \frac{A}{(x+7)^3} + \frac{B}{(x+7)^2} + \frac{C}{(x+7)^1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+4}$

↓
مقدار درجة أولى
مكرر ٣ مرات

↓
درجة أولى
غير مكرر

↓
درجة أولى
غير مكرر

لثوابت A, B, C, D, E سيتم حسابها لاحقاً في الأمثلة

(3) لحقاير بة حقاير (درجة ثانية) لا تكرر وغير مكررة (يعني أقواس أس = ١)

Ex. : $\frac{x^2+x-2}{(x^2+4)(x^2+x+1)(x+3)}$ $\xrightarrow[\text{الحل}]{\text{نفرض كل}}$ $= \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{x+3}$

↓
مقادير درجة ثانية لا تكرر
وغير مكررة

↓
درجة ثانية
عادي

مجموعة سنتر شير
لخدمات الطلابية
تفدية الهندسة

(4) لحقاير بة حقاير درجة ثانية مكرر وبعضها مكرر

Ex. $\frac{3}{(x^2+1)^2(x+5)}$ $\xrightarrow[\text{الحل}]{\text{نفرض كل}}$ $= \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^1} + \frac{E}{x+5}$

↓
درجة ثانية
مكرر مرتين

ملاحظة على ما سبقه: ① إذا كان مقام درجة أولى فإنه ليس ثابت فقط

② إذا كان مقام درجة ثانية لا يزال فإنه ليس درجة أولى مثل $AX+B$...

③ إذا كان مقام درجة ثانية ويحل يبقى لازم حالة ولو حصل شئ بألة خطأ.

④ إذا كان مقام كل فإننا نكتب الخمس زى ما هو بنفس الأس ثم نكتبه أيضاً بس نقل الأس بمقدار واحد وهكذا حتى نصل بأس المقوس = 1.

⑤ إذا كان مقام درجة ثالثة أو رابعة أو ... يبقى لازم يتحلل علامة يبقى لأن ليس له حالة منه حالة الكسور الجزئية.

الخطوة ③ في مسألة الكسور الجزئية: حساب قيم الثوابت A, B, C, \dots

مجموعة من الخدمات التعليمية

Direct Method

* يوجد طريقتين لإيجاد الثوابت
① الطريقة المباشرة "مجرد النظر"

وهذه الطريقة تصلح للحالة الأولى كلها "مقامات درجة أولى غير مكررة"

الحالة الثانية "درجة الأولى مكررة" بتعريب الثابت لكل المقامات

واحد أكبر من مثال

$$\frac{x+1}{(x+2)^3(x+3)} = \frac{A}{(x+2)^3} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^1} + \frac{D}{x+3}$$

الطريقة المباشرة تعيب الثابت (D) لأن مقامه غير مكررة (حالة الأولى)

و " " (A) لأن مقامه مكرر (حالة الثانية) ومقام واحد

أ أكبر من 3 → 3 من المقوس

كيفية حساب الثابت
أضرب مقام (A) $x = -2$

$$A = \frac{(-2) + 1}{(-2+3)} = \frac{-1}{1} = -1$$

عوضنا في المقوس الأكبر الأسلى $x = -2$ مع إزالة A منه (حالة غير مكررة)

$$D \xrightarrow{\text{as the limit}} X = -3$$

$$\therefore D = \frac{-3+1}{(-3+2)^3} = \frac{-2}{(-1)^3} = \boxed{2}$$

#

* اءا لتوابء B, C و اءاءة لتوابء اءالة لئائء (ءرءة ئائب - طئر ءلرة)
 " " " " الرابوء (" " " " ءلرة)

Examples

قال

Factorize the following fractions into its Partial fractions.

مجموعه النشر شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\textcircled{1} \frac{2x^2 + 6}{x(x-1)(x-2)}$$

Solution

الحقار ممكن جاهر (طالة، الأمل)

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

ولهذه السّنوات جميعاً "توحيد الطريقة" مباشرة

$$A \xrightarrow{x=0} \sim A = \frac{2(0)^2 + 6}{(0-1)(0-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$B \xrightarrow{x=1} \therefore B = \frac{2(1)^2 + 6}{(1)(1-2)} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$C \xrightarrow{x=2} \therefore C = \frac{2(2)^2 + 6}{2(2-1)} = 7$$

$$\therefore \frac{2x^2 + 6}{x(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x} + \frac{\overset{+8}{-8}}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

ff

Ex ② $\frac{2x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x}$

Solution

$x^3 + x^2 - 2x$

8 به صه تحليل لتمام 8 نه صهجه الكبريه الثانيه

$= \frac{2x^2 + 6}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{2x^2 + 6}{x(x-1)(x+2)}$

$\begin{array}{r} x-1 \\ x+2 \end{array}$

$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

كل الثوابه عيبرد لنتظره للثوابت

$A|_{x=0} = \frac{6}{-2} = -3$

$B|_{x=1} = \frac{8}{(1)(3)} = \frac{8}{3}$

$C|_{x=-2} = \frac{14}{(-2)(-3)} = \frac{7}{3}$

مجموعه منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$\therefore \frac{2x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-3}{x} + \frac{8/3}{x-1} + \frac{7/3}{x+2} \quad \#$

Ex ③ $\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

الحل

Center Share

$x^3 - x^2 - x + 1$
عامل مشترك x^2

$= \frac{1}{x^2(x-1) - (x-1)} = \frac{1}{(x-1)[x^2 - 1]} = \frac{1}{(x-1)(x-1)(x+1)}$

عامل مشترك

يكل

د قس مكر
يبقى 8 م نكتب
 $(x-1)^2$

الحال الثانيه

$= \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$

A و C فسيكون عيبرد لنتظره (لثابته)

$A|_{x=1} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$

$C|_{x=-1} = \frac{1}{(-1-1)^2} = \frac{1}{4}$

لا يار B نقوس بتوحيده مقامات لطرف اليمين كا عين.

$$\therefore \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين بالقام (x-1)^2(x+1)}} A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2$$

نضرب القامات مع بعضنا : بسط = بسط

$$1 = \frac{1}{2}A(x+1) + B(x-1)(x+1) + \frac{1}{4}C(x-1)^2 \rightarrow (*)$$

لوضع x بأى رقم في الطرفين للوصول على B . Put $x=0$

$$\therefore 1 = \frac{1}{2}(0+1) + B(0-1)(0+1) + \frac{1}{4}(0-1)^2 \quad \text{--- } B = -\frac{1}{4}$$

$$1 = \frac{1}{2} - B + \frac{1}{4} \quad B = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{(x-1)} + \frac{1/4}{x+1} \quad \#$$

Ex ③ $\frac{x}{(x-2)^3}$ الحل

قام درجة أولى مكرر 3 مرات

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$= \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^1}$$

A فقل بحسب الطريقة المباشرة (مكرر مقامه هو المقوى، أي صده "أكبر من")

$$A|_{x=2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \frac{x}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين بالقام (x-2)^3}}$$

$$= \frac{A + B(x-2) + C(x-2)^2}{(x-2)^3}$$

لا يار B, C :

بوجه عام

$$\therefore \boxed{x = A + B(x-2) + C(x-2)^2} \rightarrow (*)$$

عندما نراه بسط الطرفين

ملاحظة: عند الحصول على معادلة (*) فإنها صالحة يمكن إكمال الحل

طريقة

Center Share

نضع x في أرقام

لإيجاد معاملات x المختلفة للطرفين

Put $x=0 \Rightarrow 0=2-2B+4C$
 $\Rightarrow 2C-B=-1 \rightarrow ①$

Put $x=1 \Rightarrow 1=2-B+C$
 $\Rightarrow C-B=-1 \rightarrow ②$

$\Rightarrow C=0$
 $B=1$

الآن $\frac{2}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2} + 0$

بمساواة معاملات أكبر x للطرفين (x^2)

$\Rightarrow 0=C$

بمساواة x^1 للطرفين

$\Rightarrow 1=B-4C \Rightarrow B=1$

وهو نفس النتيجة في الحالة

#

مجموعة منتقش
 خدمات الطلابية
 كلية هندسة

Ex ④: $\frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)}$

Solution Center Share

$= \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+4)}$

$= \frac{A(x+4) + B(x+3)(x+4) + C(x+3)^2}{(x+3)^2(x+4)}$

$A|_{x=-3} = \frac{2(-3)^2+16(-3)+29}{(-3+4)} \Rightarrow A=-1$
 $C|_{x=-4} = \frac{2(-4)^2+16(-4)+29}{(-4+3)} \Rightarrow C=-3$

بإيجاد B بتعويض المعاد

$\Rightarrow 2x^2+16x+29 = \frac{-1}{(x+3)^2} + B(x+3)(x+4) + \frac{-3}{(x+3)^2}$

Put $x=0 \Rightarrow 29 = -4 + 3B + 4 - 27 \Rightarrow B=5$

الآن $\frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{x+3} - \frac{3}{x+4}$ #

$$\frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)} = \frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{x+3} - \frac{3}{x+4} \quad \#$$

Ex: $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

لـ $\frac{1}{x-1}$ درجة أولى
غير مكررة

لـ $\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$ درجة ثانية
مكرر

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$A \rightarrow$ عند $x=1$ $\therefore A = \frac{1+15}{1+2+5} = 2$

$$= \frac{A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

بموجب المقادير

$$\therefore x^2+15 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)$$

Put $x=0$ ($0, 15$) $\therefore 15 = 5A - C$

$$\therefore C = -5$$

Put $x=-1$ ($-1, 16$) $\therefore 16 = 4A - 2C + 2B$

$$\therefore B = -1$$

$$\therefore \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1x-5}{x^2+2x+5} \quad \#$$

Ex: $\frac{(X-1)^2}{(X^2+1)^2} = \frac{AX+B}{(X^2+1)^2} + \frac{CX+D}{(X^2+1)^1}$

مقسوم عليه $(X^2+1)^2$ مقسم $(X^2+1)^1$ بقسمة

نتيجة القسمة

$$= \frac{(AX+B) + (CX+D)(X^2+1)}{(X^2+1)^2}$$

بمساواة البسط للطرفين :-

$$\frac{(X-1)^2}{(X^2+1)^2} = (AX+B) + (CX+D)(X^2+1)$$

$$X^2 - 2X + 1 = (AX+B) + (CX+D)(X^2+1)$$

بمساواة معاملات X^3 للطرفين :-

$\therefore 0 = C$

$1 = D$

$-2 = A + C$

$\therefore A = -2$

$\therefore 1 = B + D \quad \therefore B = 0$

$\therefore \frac{(X-1)^2}{(X^2+1)^2} = \frac{-2X}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{(X^2+1)}$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

Ex 12: Find the Partial fraction for

11

$$\frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15}$$

دعنا البسط أكبر من المقام

نقوم بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} X+3 \\ \hline \end{array}$$

$$= X+3 + \frac{9X+48}{X^2+2X-15}$$

$$\begin{array}{r} X^2+2X-15 \overline{) X^3+5X^2+3} \\ \underline{-(X^3+2X^2-15X)} \\ 3X^2+15X+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3X^2+15X+3 \\ \underline{-(3X^2+6X-45)} \\ 9X+48 \end{array}$$

الباقى 9X+48

$$\frac{9X+48}{X^2+2X-15} = \frac{9X+48}{(X+5)(X-3)} = \frac{A}{X+5} + \frac{B}{X-3}$$

$$A|_{X=-5} = \frac{9(-5)+48}{(-5-3)} = \frac{-3}{8}$$

بمجرد النظر

$$B|_{X=3} = \frac{9(3)+48}{(3+5)} = \frac{75}{8}$$

مجموعة منتظر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\frac{9X+48}{X^2+2X-15} = \frac{-3/8}{X+5} + \frac{75}{8(X-3)}$$

$$\therefore \frac{X^3 + 5X^2 + 3}{X^2 + 2X - 15} = X + 3 - \frac{3}{8(X+5)} + \frac{75}{8(X-3)}$$

[12]

Report

$$4x^2 - 4x + 16$$

$$x^3 + 4x \Rightarrow x(x^2 + 4) \Rightarrow \text{Complete--}$$

V.I.P.

Ex:

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{5}{x^2(x+2) + (x+2)}$$

كامل مشترك

$$= \frac{5}{(x+2)(x^2+1)}$$

مجموعة منتظر شير
لخدمات الطلاب
كلية الهندسة

حل على () معادلتين لمتغيرين غير مشتركين
← معادلتين لمتغيرين مشتركين

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$A \Big|_{x=-2} = \frac{5}{(-2)^2+1} = 1 \quad A \leftarrow \text{عبر دلتا}$$

* ليجاد B, C بتوحيد المقامات

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

* مساواة الجزئين للطرفين

$$\therefore 5 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2) \quad (*)$$

• Put $x=0$ $\therefore 5 = A + 2C$ $\boxed{C=2}$

• Put $\boxed{x=1}$

$\therefore 5 = 2A + 3B + 3C$

13

$\therefore 3B = -3 \quad \therefore \boxed{B = -1}$

$\therefore \frac{5}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{1}{x+2} + \frac{(-x+2)}{x^2+1} \quad \#$

Ex: $\frac{x^4}{x^4 - 25} \Rightarrow$ درجه بسط ناقص
درجه باقیمانده

OR $= \frac{(x^4 - 25) + 25}{x^4 - 25}$

$= 1 + \frac{25}{x^4 - 25}$

ع 1
 $\frac{x^4 - 25}{x^4 - 25} = 1$
 $\frac{25}{x^4 - 25}$

توضیح کجاست
اینجا انکسار

مجموعه سنتر شیر
بخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$\frac{25}{x^4 - 25} = \frac{25}{(x^2 - 5)(x^2 + 5)} = \frac{25}{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)}$

حل
لا يحل

$= \frac{A}{x - \sqrt{5}} + \frac{B}{x + \sqrt{5}} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5}$

A, B به مجرد انتظار ..

14

$$A \Big|_{x=\sqrt{5}} = \frac{25}{(\sqrt{5}+\sqrt{5})(5+5)} = \frac{25}{20\sqrt{5}}$$

$$B \Big|_{x=-\sqrt{5}} = \frac{25}{(-\sqrt{5}-\sqrt{5})(5+5)} = \frac{-25}{20\sqrt{5}}$$

بقوم في مقام ومساواة البسط منتهية بالحد ذاته

$$\therefore 25 = A(x+\sqrt{5})(x^2+5) + B(x-\sqrt{5})(x^2+5) + C(x+D)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

$$0 = A+B+C \quad \sim \quad \boxed{C=0}$$

الحد الثالث

$$25 = 5\sqrt{5}A - 5\sqrt{5}B - 5D$$

$$25 = 5\sqrt{5} \times \frac{25}{20\sqrt{5}} + 5\sqrt{5} \times \frac{25}{20\sqrt{5}} - 5D$$

$$\sim \boxed{D = -\frac{5}{2}}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\therefore \frac{x^4}{x^4-25} = 1 + \frac{25}{20\sqrt{5}(x-\sqrt{5})} - \frac{25/20\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} + \frac{-5/2}{x^2+5}$$

13

Ex:- جزر VIP.

$$\frac{6\sqrt{x} + 30}{x^3 - 1}$$

(15)

ملاحظة: الكسور الجزئية تتعامل مع الكسور التي بسطها كسرة حدود وحاصلها كثيرة حدود ولا يوجد جذور لذلك نقوم بإزالة هذه الجذور عن طريق:

فول بـ $y = \sqrt{x}$ للمختصر y

$$\therefore x = y^2 \quad \sim \quad x^3 = y^6$$

$$\therefore \frac{6\sqrt{x} + 30}{x^3 - 1} = \frac{6y + 30}{y^6 - 1} \Rightarrow \text{كل}$$

مجموعه منتظر شير
لخدمات الطلابية
نسبة الهندسة

$$= \frac{6y + 30}{(y^3 - 1)(y^3 + 1)}$$

مجموع مصنف (كل) $\frac{6y+30}{y^3-1}$ فرقته مصنف (كل)

$$= \frac{6y + 30}{(y-1)(y^2+y+1)(y+1)(y^2-y+1)}$$

$$= \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} + \frac{Cy+D}{y^2+y+1} + \frac{Ey+F}{y^2-y+1}$$

A, B بمحددات نظر:

$$A \Big|_{y=1} = \frac{6(1) + 30}{(1+1)(1+1)(1-1+1)} = 6$$

$$B \Big|_{y=-1} = \frac{6(-1) + 30}{(-1-1)((-1)^2 - 1 + 1)((-1)^2 + 1 + 1)} = -4$$

مجموعة منتير شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

بتعويض المقامات وحسابها البسط للطرفين:-

$$6y + 30 = A(y+1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

$$+ B(y-1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

$$+ (Cy+D)(y^2-1)(y^2-y+1)$$

$$+ (Ey+F)(y^2-1)(y^2+y+1) \Rightarrow (*)$$

لاحظ القويضة الثانية: $y^2+y+1 \rightarrow$ ف المقامات

ليدار C, D \leftarrow $y^2+y+1=0 \Rightarrow y^2 = -y-1$

عوضنا في (*)

$$\therefore 6y + 30 = 0 + 0 + (Cy+D)(-y-1-1)(-y-1-y+1) + 0$$

$$6y + 30 = (Cy+D)(-y-2)(-2y) = (Cy+D)(2y^2+4y)$$

$$6y + 30 = (Cy+D)(2(-y-1) + 4y)$$

$$= (Cy+D)(-2y-2+4y) = (Cy+D)(2y-2)$$

$$\begin{aligned} \therefore 6y+30 &= 2Cy^2 - 2Cy + 2Dy - 2D \\ &= 2C(-y-1) - 2Cy + 2Dy - 2D \end{aligned}$$

$$6y+30 = -2Cy - 2C - 2Cy + 2Dy - 2D$$

$$6y+30 = y(-4C+2D) + (-2C-2D)$$

* معادلات y للفرصة:

$$\therefore 6 = -4C + 2D \rightarrow (1)$$

$$\therefore 30 = -2C - 2D \rightarrow (2) \quad \text{* المعادلة للفرصة:}$$

$$\therefore \boxed{C = -6}, \boxed{D = -9} \quad \text{حل (1) و (2)}$$

$$y^2 - y + 1 = 0 \quad \text{معادلات } E, F$$

$$\therefore \boxed{y^2 = y - 1}$$

معادلة واحدة (*)

$$\begin{aligned} \therefore 6y+30 &= 0+0+0+(Ey+F)(y-1-1)(y-1+y+1) \\ &= (Ey+F)(y-2)(2y) = (Ey+F)(2y^2-4y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 6y+30 &= (Ey+F)(2(y-1)-4y) \\ &= (Ey+F)(-2y-2) \end{aligned}$$

$$\therefore 6y+30 = -2Ey^2 - 2Ey - 2Fy - 2F$$

$$6y+30 = -2Ey^2 + 2E - 2Ey - 2Fy - 2F$$

$$6y+30 = (-4E-2F)y + 2E-2F$$

$$6 = -4E - 2F \rightarrow (3) \quad : y \text{ كذا } \rightarrow$$

$$30 = 2E - 2F \rightarrow (4)$$

$$E = 4, F = -11$$

عوضه عن $y = \sqrt{x}$

$$\therefore \frac{6\sqrt{x}+30}{x^3-1} = \frac{6}{\sqrt{x}y-1} + \frac{-4}{\sqrt{x}y+1}$$

$$+ \frac{-6y\sqrt{x}-9}{x^2+y+1} + \frac{4y\sqrt{x}-11}{x^2-y+1}$$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

* Find the Partial Fractions of the Fraction:

$$\frac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

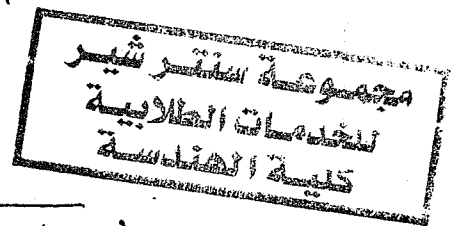
Solution

- درجة البسط (2) و درجة المقام (6) ، المقام كله حاصل ضرب عوامل

لافظ أنه عبارة عن مجموع مربعين ←

ولا حظ أيضاً أنه لا x في البسط ، المقام على صيغة x^2 فقط

يمكن نفع $x^2 = y$



$$\therefore \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{y - 2}{(y + 2)(y + 1)(y + 4)}$$

← أصبح المقام عبارة عن مجموع ثلاثة عوامل

$$= \frac{A}{y + 2} + \frac{B}{y + 1} + \frac{C}{y + 4}$$

$$A|_{y=-2} = \frac{-4}{(-1)(2)} = 2$$

$$B|_{y=-1} = \frac{-3}{(1)(3)} = -1$$

$$C|_{y=-4} = \frac{-6}{(-2)(-3)} = -1$$

$$\therefore \frac{y - 2}{(y + 2)(y + 1)(y + 4)} = \frac{2}{y + 2} + \frac{-1}{y + 1} + \frac{-1}{y + 4}$$

ثم نزيد y ونضع x^2

$$= \frac{2}{x^2 + 2} - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4}$$

#

• Solve حل بنظر عن فضاء

Find The Partial Fractions:

$$(1) \frac{x^2 + x + 4}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$(2) \frac{x^2}{(1-x)(1+x^2)^2}$$

$$(3) \frac{x^4}{x^3 + 1}$$

$$(4) \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$(5) g(y) = \frac{5y + 1 + \frac{2}{y}}{(y+2)(y^2+1)}$$

Center Share

مجموعة المتخصصين شير
بخدمات الطلابية
تلبية الاحتياجات

Center Share

مجموعة المتخصصين شير
بخدمات الطلابية
تلبية الاحتياجات

Center Share

Partial Fractions

الاسود الجزئية

* خطوات الحل ① تأكد انه درجة البسط أقل من درجة المقام
(ولو كانا درجة البسط ثم يكون أو تساوى درجة المقام

نفل قسم - عطولة (

② صلح الحاقی کو بسط حمورہ و افردہ انکسور الجزیہ

لے لانا کا یہ مقام درجہ اولیٰ ہے یعنی ایسا ثابت

لے " " " " " ثانیہ لایال " " درجہ اولی

مع الأخذ في الاعتبار ما ذكرناه بقوس قدر أم لا .

ex. $\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$ نظام درجه اول غير مكرر

ex. $\frac{7}{(x-3)(x+6)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+6)^2} + \frac{C}{(x+6)^1}$ بعضی ها فکر " " "

بعضی فکر //

ex. $\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$

الحقانية درجہ ثانیہ
الاسلام غیر مکرر

ex. $\frac{3x^2-4}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^1}$

درمیه تاشیه لا قتل
بعضی مکرر .

ثم توجه الثوابت ← اذا كانت لحقات درجة أولى غير مقدرة
أو درجة أولى مكررة واحدة أعلى من توجهها
بطريقة مجرد النظر (الطريقة المباشرة)

مجمع علماء الشريعة
بجامعة القاهرة
الدراسات الإسلامية
العلمية والفكرية

غير كده نفهم الحقائق ونأوى بسط للقرينة
ثم نضع X بأي أرقام أو نقارن الحاصلات للقرينة #

Examples

[1] M.T. 2015:

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$$

جواب Center Share

$$= \frac{x+4}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$$

A $\xrightarrow{x=2}$ $A = \frac{2+4}{(2+2)(2+1)} = \frac{6}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}$

↑
معامل A

B $\xrightarrow{x=-2}$ $B = \frac{(-2+4)}{(-2-2)(-2+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

C $\xrightarrow{x=-1}$ $C = \frac{-1+4}{(-1-2)(-1+2)} = \frac{3}{-3} = -1$

$$\therefore \frac{x+4}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{1/2}{x-2} + \frac{1/2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \quad \#$$

[2] Factorize the fraction $\frac{1}{(1-3x)^2(1+x^2)}$ into Partial fractions (2015 final)

$$\frac{1}{(1-3x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{(1-3x)^2} + \frac{B}{(1-3x)^1} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

↓
مقام مشترك

↓
مقام مشترك

↓
مقام مشترك

A $\xrightarrow{x=1/3}$ $A = \frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{10}$

لا يسار باقى لثوابت بوضع مقامات

$$= \frac{A(1+x^2) + B(1-3x)(1+x^2) + (Cx+D)(1-3x)^2}{(1-3x)^2(1+x^2)}$$

بجسالة البسط للفرصية:

$$\therefore 1 = \overset{\frac{9}{10}}{A}(1+x^2) + B(1-3x)(1+x^2) + (Cx+D)(1-3x)^2 \rightarrow (1-6x+9x^2)$$

مطابقة Coeff x^3 : $0 = -3B + 9C \rightarrow \textcircled{1} \rightarrow 3C - B = 0$

x^2 : $0 = \frac{9}{10} + B - 6C + 9D \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow B - 6C + 9D = -\frac{9}{10}$

x : $0 = -3B + C - 6D \rightarrow \textcircled{3}$

Const: $1 = \frac{9}{10} + B + D \rightarrow \textcircled{4} \therefore B + D = \frac{1}{10}$

$$B = \frac{9}{50}$$

$$C = \frac{3}{50}$$

$$D = -\frac{4}{50}$$

كل $\textcircled{3}, \textcircled{2}, \textcircled{1}$ حل

[3] 2016

$$\frac{2x^2+26}{(x^4+5x^2+4)(x^4+4x^2+3)}$$

$$(x^4+5x^2+4)(x^4+4x^2+3)$$

كل المتغيرات عبارة عن x^2 ومضاعفات

\therefore Put $x^2 = y \quad \therefore x^4 = y^2$

$$= \frac{2y+26}{(y^2+5y+4)(y^2+4y+3)} = \frac{2y+26}{(y+1)(y+4)(y+1)(y+3)}$$

$$= \frac{2y+26}{(y+4)(y+3)(y+1)^2}$$

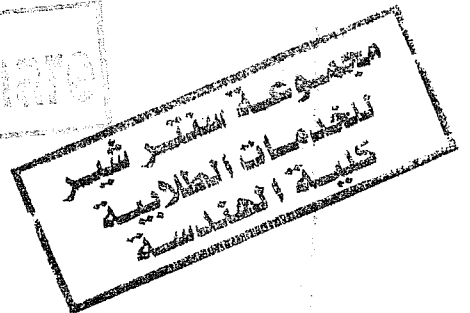
$$= \frac{A}{y+4} + \frac{B}{y+3} + \frac{C}{(y+1)^2} + \frac{D}{(y+1)}$$

أ، ب، ج. بمجرد النظر

$$A|_{y=-4} = \frac{-8+26}{(-4+3)(-4+1)^2} = \frac{18}{(-1)(9)} = -2$$

$$B|_{y=-3} = \frac{-6+26}{(-3+4)(-3+1)^2} = \frac{20}{1(4)} = 5$$

$$C|_{y=-1} = \frac{-2+26}{(-1+4)(-1+3)} = \frac{24}{6} = 4$$



ليبار D بقومنا بقامات

$$\frac{2y+26}{(y+4)(y+3)(y+1)^2} = \frac{\overset{-2}{A}(y+3)(y+1)^2 + \overset{5}{B}(y+4)(y+1)^2 + \overset{4}{C}(y+4)(y+3) + D(y+4)(y+3)(y+1)}{(y+4)(y+3)(y+1)^2}$$

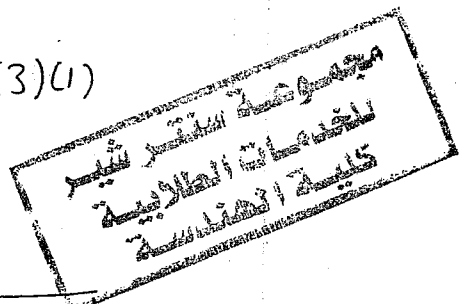
بمساواة بسط الطرفين

$$\therefore 2y+26 = -2(y+3)(y+1)^2 + 5(y+4)(y+1)^2 + 4(y+4)(y+3) + D(y+4)(y+3)(y+1)$$

Put $y=0 \rightarrow$ أي رقم لم يستعمله قبل

$$\therefore 26 = (-2)(3)(1) + 5(4)(1) + 4(4)(3) + D(4)(3)(1)$$

$$\therefore D = -3$$



$$\therefore \frac{2y+26}{(y+4)(y+3)(y+1)^2} = \frac{-2}{y+4} + \frac{5}{y+3} + \frac{4}{(y+1)^2} + \frac{-3}{y+1}$$

then put $y = x^2$

#

4 2014

$$\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{1}{x^2(x-1) - (x-1)} = \frac{1}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$$

مجرد نظر
A, C

$$A \xrightarrow{x=1} A = \frac{1}{(1+1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$C \Big|_{x=-1} = \frac{1}{(-1-1)^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

مجموعة أساتذتي شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

ليبدأ B بوجهي لخاصة ما واه اسط للفرص

$$1 = \overset{\frac{1}{2}}{A}(x+1) + B(x-1)(x+1) + \overset{\frac{1}{4}}{C}(x-1)^2$$

put x=0

$$\therefore 1 = \frac{1}{2} + B(-1)(1) + \frac{1}{4}(-1)^2 \quad \therefore \boxed{B = -\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} \quad \#$$

4

مجموعة أساتذتي شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

Center Share

Ex : $5y+1+\frac{2}{y}$

الحل

يوجد مقاماً صغيراً بسيطاً 8 بدونه، لنخلص منه أولاً
بالضرب * لبطا ومقامه

$$= \frac{5y^2+y+2}{(y)^2(y+2)(y^2+1)} = \frac{A}{(y)^2} + \frac{B}{y} + \frac{C}{y+2} + \frac{Dy+E}{y^2+1}$$

هذا القوس ممكن
نعتبر درجة أولى مكررة مرتين $\rightarrow \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y}$
وممكن نعتبر (y^2+1) بعين درجة ثانية غير مكررة $\rightarrow \frac{Ay+B}{y^2}$
والثانية صح #

ليأر A و C ← مجرد النظر : $A|_{y=0} = \frac{0+0+2}{(0+2)(0+1)} = 1$

$C|_{y=-2} = \frac{5(-2)^2+(-2)+2}{(-2)^2((-2)^2+1)} = \frac{20}{20} = 1$

مجموعتنا الشكر شير
لخدمات الطلابية
كلية الهندسة

لنصل على B و D و E بتوحيد المقامات :

$$= \frac{A(y+2)(y^2+1) + B.y.(y+2)(y^2+1) + C.y^2.(y^2+1) + (Dy+E).y^2(y+2)}{y^2(y+2)(y^2+1)}$$

بمساواة البسط للطرفين :

$$\therefore 5y^2+y+2 = A(y+2)(y^2+1) + B.y.(y+2)(y^2+1) + C.y^2.(y^2+1) + (Dy+E).y^2(y+2)$$

معاملات y^4 : $0 = B+1+D \Rightarrow B+D=-1$ ①

معاملات y^3 : $0 = 1+2B+E \Rightarrow 2B+E=-1$ ②

معاملات y^2 : $5 = 2+B+1+2E \Rightarrow B+2E=2$ ③

حل ② و ③ $\Rightarrow B = -4/3$
بالتعويض في ① $D = 1/3$
 $E = 5/3$

#

Ex(2) Find The Partial Fractions For:

$$\frac{x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 10}{(x^2 + 2x - 1)^2 (x - 3)}$$

□ Solution □

↓
عوامل القسمة

55 (4) 55 (4)

$$\frac{Ax+B}{(x^2+2x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x-1} + \frac{E}{x-3}$$

$$E/x=3 = \frac{59}{98}$$

← E نوجد بالحدس النظر :-

Report ← الحل

