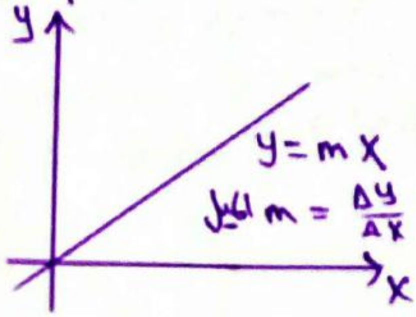
الجزء الأول

1

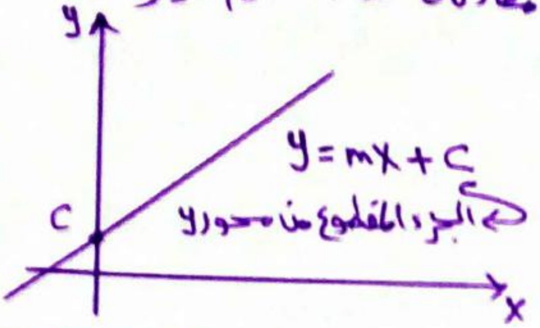
المعادلة المزدوجة لزوج من المستقيمات
Double equation of line Pair

• ملاحظات هامة جداً :-

1 معادلة خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (0,0)

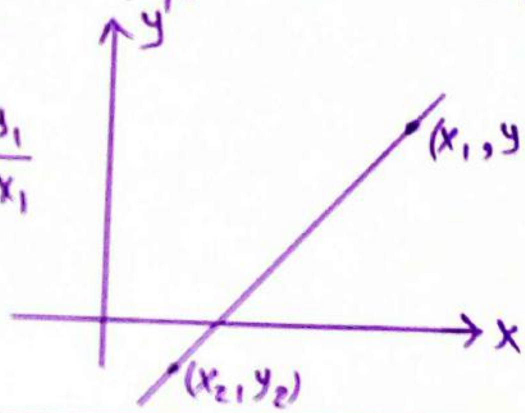


2 معادلة خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل:

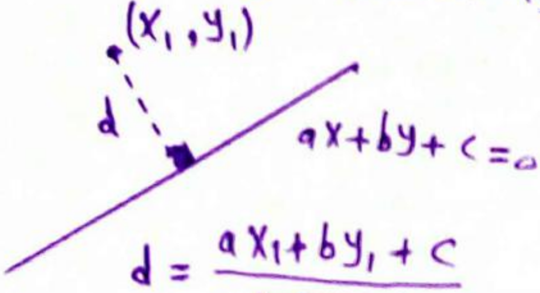


3 معادلة خط مستقيم بدلالة نقطتين عليه:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



4 البعد العمودي بين نقطة وخط مستقيم:



$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

*** المعادلة المزدوجة لخطين مستقيمين يمرات بنقطة الأصل :-**

→ معادلة المستقيم الأول $y = m_1 x \Rightarrow \frac{y}{x} = m_1$

→ معادلة المستقيم الثاني $y = m_2 x \Rightarrow \frac{y}{x} = m_2$

→ المعادلة المزدوجة $(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \rightarrow ⊛$$

المعادلة ⊛ معادلة متجانسة من الدرجة الثانية تمثل المعادلات المزدوجة لخطين مستقيمين يمرات بنقطة الأصل

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \div x^2$$

$$a + 2h\left(\frac{y}{x}\right) + b\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

القانون العام

$$AX^2+BX+C=0$$

$$X=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

شرط أن المعادلة تمثل خطين مستقيمين يمران بالنقطة $(0,0)$ هو $h^2-ab \geq 0$

$$\frac{y}{x}=\frac{-2h\pm\sqrt{4h^2-4ab}}{2b}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

$$m_1=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}, \quad m_2=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

$$m_1+m_2=\frac{-2h}{b}, \quad m_1 m_2=\frac{a}{b}$$

الزاوية بين الخطين

*** angle Between two lines :-**

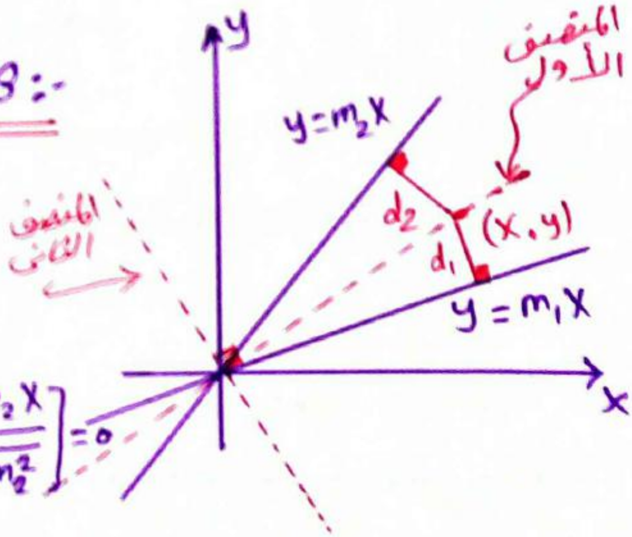
$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{1+m_1m_2}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{4h^2}{b^2}-\frac{4a}{b}}}{1+\frac{a}{b}}$$

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

المعادلة المزدوجة لمنصفات الزوايا

*** Double equation of bisectors of θ :-**



$$\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}=\pm\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

$$\left[\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}-\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}\right]\left[\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}+\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}\right]=0$$

$$\frac{(y-m_1x)^2}{1+m_1^2}-\frac{(y-m_2x)^2}{1+m_2^2}=0$$

$$\frac{(1+m_2^2)(y-m_1x)^2-(1+m_1)^2(y-m_2x)^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}=0$$

$$(1+m_2^2)(y-m_1x)^2-(1+m_1^2)(y-m_2x)^2=0$$

$$(1+m_2^2)(y^2+m_1^2x^2-2m_1xy)-(1+m_1^2)(y^2+m_2^2x^2-2m_2xy)=0$$

$$x^2(m_1^2+\cancel{m_1^2m_2^2}-m_2^2-\cancel{m_1^2m_2^2})+y^2(1+m_2^2-1-m_1^2)$$
$$-2xy(m_1+m_1m_2^2-m_2-m_2m_1^2)=0$$

$$(x^2-y^2)\cancel{(m_1-m_2)}(m_1+m_2)-2xy\cancel{(m_1-m_2)}(1-m_1m_2)=0$$

$$(x^2-y^2)(m_1+m_2)-2xy(1-m_1m_2)=0$$

$$(x^2-y^2)\left(\frac{-2h}{b}\right)-\cancel{2}xy\left(1-\frac{a}{b}\right)=0$$

$$\frac{h}{b}(x^2-y^2)+xy\left(1-\frac{a}{b}\right)=0$$

$$h(x^2-y^2)+xy(a-b)=0$$

$$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$$

المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية θ

الخلاصة

• المعادلة المزدوجة لخطين مستقيمين يمران بالنقطة $(0,0)$:-

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \rightarrow ⊛$$

• كيف يتم ايجاد معادلة كل خط :-

يتم قسمة المعادلة ⊛ على x^2 والتحليل بالقانون العام

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \quad \div x^2$$

$$a+2h\left(\frac{y}{x}\right)+b\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-2h\pm\sqrt{4h^2-ab}}{2b}=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

• كيف يتم ايجاد الزاوية بين الخطين :-

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

• المعادلة المزدوجة لمنصفات الزوايا :-

$$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$$

Example(1) Prove that the equation $5x^2+6xy-3y^2=0$ represent two lines then find اثبت ان المعادلة تمثل خطين

(a) the equation of each line اوجد معادلة كل خط

(b) the angle between them اوجد الزاوية بين الخطين

(c) Double equation of bisectors of θ المعادلة المزدوجة لمنصفات الزوايا

Solution

$a=5 \qquad 2h=6 \qquad b=-3$

$h=3$

$h^2-ab=9+15=24>0$

∴ المعادلة تمثل خطين مستقيمين

(a) $5x^2+6xy-3y^2=0 \quad \div x^2$ يتم القسمة على x^2 لايجاد معادلة كل خط

$$5+6\frac{y}{x}-3\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-6\pm\sqrt{36+3*4*5}}{-6}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-6+\sqrt{96}}{-6}$$

$$=-0.63$$

$$y=-0.63x$$

$$y+0.63x=0$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-6-\sqrt{96}}{-6}$$

$$=2.63$$

$$y=2.63x$$

$$y-2.63x=0$$

(b) $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$

$$=\frac{2\sqrt{9+15}}{5-3}$$

$$=2\sqrt{6}$$

$$\theta=78.5^{\circ}$$

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{a-b}=\dfrac{xy}{h}$

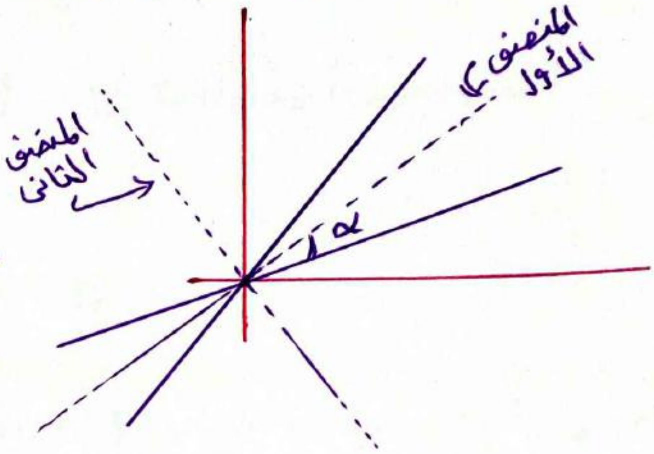
$$\frac{x^2-y^2}{5+3}=\frac{xy}{3}$$

$$\frac{x^2-y^2}{8}=\frac{xy}{3}$$

Example(2): Find the double equation of line pair passing the (0,0) and make an angle α with the line $x+y=0$

اوجد المعادلات المزدوجة لزوج المستقيمات اللى بيمروا بالنقطة $(0,0)$

ويصنعوا زاوية α مع المستقيم $x+y$



Solution

المعادلة المطلوبة هي $ax^2+2hxy+by^2=0 \rightarrow (*)$

والمطلوب إيجاد الثوابت a, b, h

$\therefore$ معادلة المنصف الأول $x+y=0$

$\therefore$ معادلة المنصف الثاني $x-y=0$

المعادلة المزدوجة للمنصفات $x^2-y^2=0$

$(x-y)(x+y)=0$

$$x^2-y^2=0 \rightarrow ①$$

قانون المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية

$$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$$

$$x^2-y^2=\frac{a-b}{h}xy \rightarrow ②$$

بمقارنة ① بـ ②

$$\frac{a-b}{h}xy=0 \Rightarrow \frac{a-b}{h}=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b} \rightarrow ③$$

قانون الزاوية بين الخطين

$$\tan\theta=\tan 2\alpha=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}=\frac{2\sqrt{h^2-a^2}}{2a}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}$$

$a\tan 2\alpha=\sqrt{h^2-a^2}$ بالتربيع

$$a^2\tan^2 2\alpha=h^2-a^2$$

$a^2\tan^2 2\alpha + a^2 = h^2$ علماً $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$a^2\sec^2 2\alpha = h^2$

$\boxed{h = \pm a \sec 2\alpha} \rightarrow ④$

بالتعويض بالمعادلة ③ , ④ في ⊛

$a x^2 \pm 2a\sec 2\alpha\, xy + a y^2 = 0$

$x^2 \pm 2\sec(2\alpha)\, xy + y^2 = 0$ #

Example (3) :- Prove that the equation $x^2 + 2xy\sec\alpha + y^2 = 0 \rightarrow ⊛$ always represents two real lines and the angle between them is α. Find the double equation of the bisectors to this angle

اثبت ان المعادلة ⊛ تمثل خطين والزاوية بينهما α واوجد المعادلة المزدوجة لمنصفات الزوايا بينهما.

Solution

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad 2h = 2\sec\alpha$

$h = \sec\alpha$

الشرط $h^2 - ab = \sec^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha \geq 0$ #

∴ المعادلة ⊛ تمثل زوج من المستقيمات

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{2} = \sqrt{\tan^2\alpha} = \tan\alpha$$

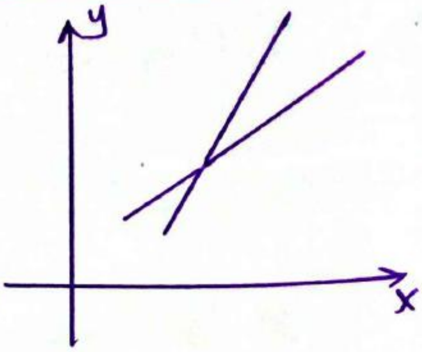
$\theta = \alpha$ #

المعادلة المزدوجة للمنصفات

$$\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$$

$$\frac{x^2-y^2}{1-1} = \frac{xy}{\sec\alpha} \qquad x^2 - y^2 = 0 \ \#$$

* المعادلة المزدوجة لخطين مستقيمين لا يمرات بنقطة الأصل :-



→ معادلة المستقيم الأول :- $y = m_1 x + c_1$ ←

→ معادلة المستقيم الثانى :- $y = m_2 x + c_2$ ←

→ المعادلة المزدوجة للخطين :- $(y - m_1 x - c_1)(y - m_2 x - c_2) = 0$

بعد فك المعادلة

$$\boxed{ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0} \rightarrow (**)$$

* ماهو شرط المعادلة (**) لكى تمثل خطين مستقيمين :-

$$by^2 + 2(hx+g)y + (ax^2 + 2fx + c) = 0$$

$$y = \frac{-2(hx+g) \pm \sqrt{4(hx+g)^2 - 4b(ax^2+2fx+c)}}{2b}$$

$$y = \frac{-(hx+g) \pm \sqrt{(hx+g)^2 - b(ax^2+2fx+c)}}{b}$$

المميز $= (hx+g)^2 - b(ax^2+2fx+c) =$ مربع كامل

$x^2(h^2 - ab) + 2x(hg - bf) + (g^2 - bc) =$ مربع كامل

المميز $= 4(hg - bf)^2 - 4(h^2 - ab)(g^2 - bc) = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix} = 0$$

← شرط المعادلة (**) تمثل خطين مستقيمين لا يمرات بالنقطة $(0,0)$

ملاحظات هامة :-

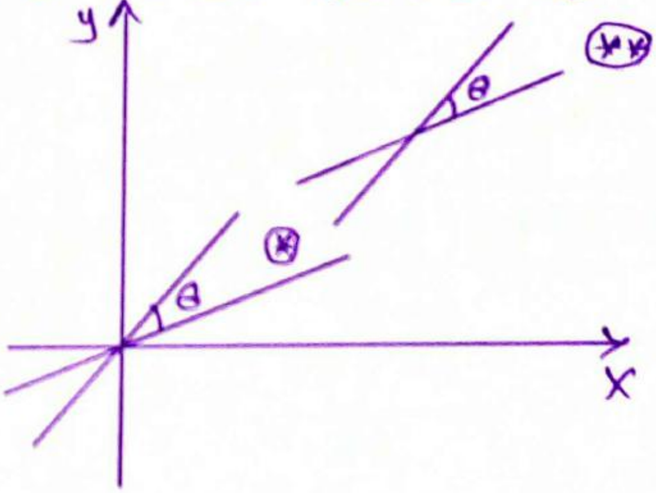
1 الخطين $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ متوازيان اذا كان

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

2 المعادلة $ax^2+2hxy+by^2=0 \rightarrow (*)$ تمثل خطين يمران بالنقطة $(0,0)$

والمعادلة $ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0 \rightarrow (**)$ تمثل خطين مستقيمان لا يمران بالنقطة $(0,0)$

3 الخطين التى تمثلها المعادلة $(*)$ // يوازوا الخطين التى تمثلها المعادلة $(**)$



4 الزاوية بين الخطين التى تمثلها المعادلة $(**)$ هى نفس الزاوية بين الخطين التى تمثلها المعادلة $(*)$

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

5 المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية بين الخطين التى تمثلها المعادلة $(**)$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Example(1) Prove that the equation represent two lines

$$12x^2+7xy-10y^2+13x+45y-35=0 \rightarrow (**)$$ then find

(A) the equation of each line • معادلة كل خط

(B) the angle Between them • الزاوية بين الخطين

(C) the Double equation of Bisectors of θ • المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية

(D) intersection Point Between them • نقطة تقاطع الخطين

Solution

$a=12$, $b=-10$, $h=\frac{7}{2}$

$f=\frac{13}{2}$, $g=\frac{45}{2}$, $c=-35$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12 & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} & -10 & \frac{45}{2} \\ \frac{13}{2} & \frac{45}{2} & -35 \end{vmatrix}$$

$$=12\left[350-\left(\frac{45}{2}\right)^2\right]-\frac{7}{2}\left[\frac{-7*35}{2}-\frac{13*45}{4}\right]$$

$$+\frac{13}{2}\left[\frac{7*45}{4}+\frac{10*13}{2}\right]=0$$

∴ المعادلة تمثل خطين #

(A) لايجاد معادلة كل خط

يتم أولاً ايجاد الخطين اللى يمروا (0,0) من المعادلة المتجانسة (*)

$$12x^2+7xy-10y^2=0 \rightarrow (*) \div x^2$$

$$12+7\left(\frac{y}{x}\right)-10\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$$

القانون العام

$$Ax^2+Bx+C=0$$

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-7\pm\sqrt{49+4*10*12}}{-20}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-7\pm 23}{-20}$$

$\frac{y}{x}=\frac{-7+23}{-20}$ | $\frac{y}{x}=\frac{-7-23}{-20}$

$\frac{y}{x}=\frac{-4}{5}$ | $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$

$4x+5y=0$ | $3x-2y=0$

الخطين التى تمثلها المعادلة (*) //

الخطين التى تمثلهما المعادلة (**)

∴ الخطين هما

$$4x+5y+\alpha=0$$

$$3x-2y+\beta=0$$

نقارن المعاملات لايجاد الثوابت

$(4X+5y+\alpha)(3X-2y+\beta) =$

$12X^2+7Xy-10y^2+13X+45y-35$

$C.o.X: \; 4\beta+3\alpha = 13 \rightarrow ①$

$C.o.y: \; 5\beta-2\alpha = 45 \rightarrow ②$

وبحل المعادلتين ① ، ②

$\alpha = -5 \qquad \beta = 7$

$$\begin{cases} 4X+5y-5=0 \\ 3X-2y+7=0 \end{cases}$$ الخطين #

(B) $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b} = \dfrac{2\sqrt{(3.5)^2+120}}{12-10}$

$= 11.5$

$\theta = \tan^{-1}(11.5) = 85^\circ$ #

(C)

$$\frac{\text{معادلة الخط الأول}}{\sqrt{(\;)^2+(\;)^2}} = \pm \frac{\text{معادلة الخط الثاني}}{\sqrt{(\;)^2+(\;)^2}}$$

$$\frac{4X+5y-5}{\sqrt{(4)^2+(5)^2}} = \pm \frac{3X-2y+7}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2}}$$ #

(D) نحل الخطين لايجاد التقاطع

$4X+5y-5=0$

$3X-2y+7=0$

$X=-1.1 \;,\quad y=1.8$

$(-1.1, 1.8)$ #

Example(2) prove that the equation represent two lines

$2X^2+2y^2-4Xy+8X-8y-17=0 \rightarrow (**)$

then find

(A) the equation of each line

(B) the angle Between them

(C) the Double equation of Bisectors of θ

(D) the intersection Point between them

Solution

$a=2 \;,\; b=2 \;,\; h=-2$

$f=4 \;,\; g=-4 \;,\; C=-17$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{2} & \overset{\ominus}{-2} & \overset{\oplus}{4} \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}$$

$=2[-34-16]+2[34+16]$

$+4[8-8]=0$

∴ المعادلة تمثل خطين مستقيمين

#

(A)

$$2x^2+2y^2-4xy=0 \rightarrow (*) \div x^2$$

$$2+2\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\frac{y}{x}=\frac{4\pm\sqrt{16-4*2*2}}{4}=1$$

$$\left.\begin{aligned} x-y&=0 \\ x-y&=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ خطين يمروا بالأصل

الخطين للمعادلة (*) // الخطين للمعادلة (**)

$$(x-y+\alpha)(x-y+\beta)=$$

$$x^2+y^2-2xy+4x-4y-\frac{17}{2}$$

$$c.o.x:\ \alpha+\beta=4 \rightarrow (1)$$

$$c.o.y:\ -\alpha-\beta=-4$$

$$\alpha\beta=-8.5 \rightarrow (2)$$

Solving (1), (2)

$$\alpha=4-\beta$$

$$(4-\beta)\beta=-8.5$$

$$4\beta-\beta^2+8.5=0$$

$$\beta^2-4\beta-8.5=0$$

$$\beta=5.53 \Rightarrow \alpha=-1.53$$

$$\beta=-1.53 \Rightarrow \alpha=5.53$$

الخطين هما

$$\begin{cases} x-y-1.53=0 \\ x-y+5.53=0 \end{cases} \#$$

(B) $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{4-4}}{4}=0$$

$$\theta=0 \ \#$$

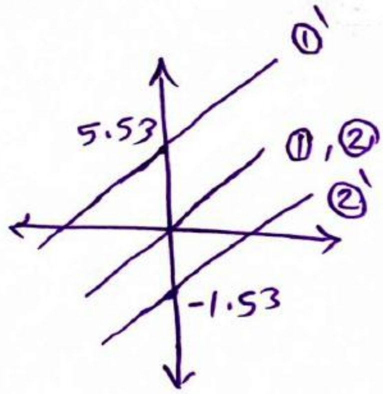
(C) معادلات منصفات الزوايا

$$\frac{x-y-1.53}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{x-y+5.53}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}$$

$$\frac{x-y-1.53}{\sqrt{2}}=\pm\frac{x-y+5.53}{\sqrt{2}} \ \#$$

(D) $x-y-1.53=0$

$$x-y+5.53=0$$

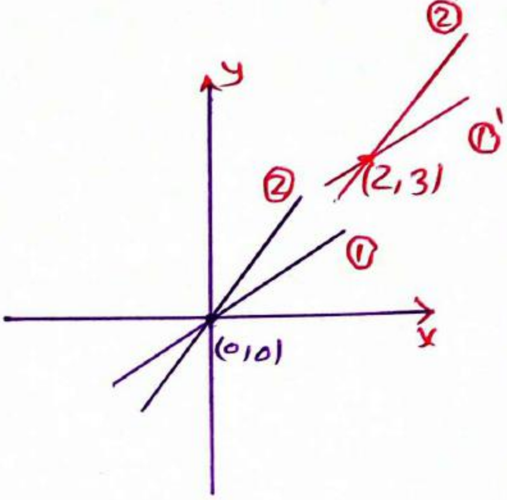


لا يوجد تقاطع بين الخطين لأنهما متوازيين #

Example (3) :- Find the equation of the double lines Passing through $(2,3)$ and Parallel to the two lines $2x^2-5xy+y^2=0$ $\rightarrow ⊛$

اوجد المعادلة المزدوجة للخطين اللى بيمروا (2,3) ويوازوا الخطين للمعادلة ⊛

Solution



• نوجد أولاً الخطين اللى بيمرو (0,0)

$$2x^2-5xy+y^2=0 \quad \div x^2$$

$$2-5\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$$

$$\frac{y}{x}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times 2}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{5+\sqrt{17}}{2}=4.56 \qquad \Bigg\| \qquad \frac{y}{x}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}=0.438$$

$$4.56x-y=0 \qquad \Bigg\| \qquad 0.438x-y=0$$

. الخطين اللى بيمرو بالنقطة (2,3) // الخطين للمعادلة ⊛

$$4.56x-y+\alpha=0 \qquad\qquad 0.438x-y+\beta=0$$

النقطة (2,3) تحقق المعادلة — النقطة (2,3) تحقق المعادلة

$$4.56(2)-3+\alpha=0 \qquad\qquad 0.438(2)-3+\beta=0$$

$$\alpha=-6.12 \qquad\qquad \beta=2.124$$

∴ المعادلة المزدوجة للخطين هى [اضرب الخطين فى بعض]

$$(4.56x-y-6.12)(0.438x-y+2.124)=0 \ \#$$

بحيث يمثل

Example (4) Find K such that the following equation represent

خطين

two lines $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y + K = 0$ then find

معادلة كل خط

(A) the equation of each line

الزاوية بين الخطين

(B) the angle Between them

Mid Term 2019

المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية

(C) the double equation of Bisectors of θ

Solution

$$a = 1 \ , \ b = 4 \ , \ h = \frac{-5}{2} \ , \ f = \frac{1}{2} \ , \ g = 1 \ , \ c = K$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 1 & -2.5 & 0.5 \\ -2.5 & 4 & 1 \\ 0.5 & 1 & K \end{vmatrix} = 0$$

$$1(4K - 1) + 2.5(-2.5K - 0.5) + 0.5(-2.5 - 2) = 0$$

$$4K - 1 - 6.25K - 1.25 - 2.25 = 0$$

$$-2.25K = 4.5 \qquad \therefore K = -2 \ \#$$

(A) أولاً نوجد الخطين اللى بيمروا (0,0)

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \ \div x^2$$

$$1 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 * 4}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5+3}{8} = 1 \qquad \Big\| \qquad \frac{y}{x} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x - y = 0 \qquad \qquad x - 4y = 0$$

الخطين للمعادلات ※ // الخطين للمعادلات ※※

$$(x-y+\alpha)(x-4y+\beta) = x^2-5xy+4y^2+x+2y-2$$

c.o.x: $\beta+\alpha = 1 \rightarrow (1)$

c.o.y: $-\beta-4\alpha = 2 \rightarrow (2)$

Solving (1), (2)

$\beta = 2 \qquad \alpha = -1$

الخطين
$$x-y+2=0 \quad \#$$
$$x-4y-1=0 \quad \#$$

(B) $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b} = \dfrac{2\sqrt{(-2.5)^2-4}}{4+1}$

$= \dfrac{3}{5}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) = 30.96^{\circ}$ #

(C)

$$\frac{\text{معادلة الخط الأول}}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}} = \pm \frac{\text{معادلة الخط الثاني}}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}}$$

$$\frac{x-y+2}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}} = \pm \frac{x-4y-1}{\sqrt{(1)^2+(-4)^2}}$$

$$\frac{x-y+2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x-4y-1}{\sqrt{17}} \quad \#$$

المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية

Example (5):- Find the equation
اوجد معادلة الخطين
of the two lines passing through
مجموع الميلين
(0,0) if the sum of it's two
slopes equal to (-1) and the
حاصل ضرب الميلين
product of it's two slopes
equal to (-6)

Solution

$y = m_1 x$ معادلة الخط الأول

$y = m_2 x$ معادلة الخط الثانى

المعادلة المزدوجة

$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$

$m_1 + m_2 = -1 \rightarrow ①$

$m_1 m_2 = -6 \rightarrow ②$

بحل ① , ②

$m_2 = -1 - m_1 \rightarrow ③$

بالتعويض ③ فى ②

$m_1(-1 - m_1) = -6$

$m_1 + m_1^2 = 6$

$m_1^2 + m_1 - 6 = 0$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = -3$

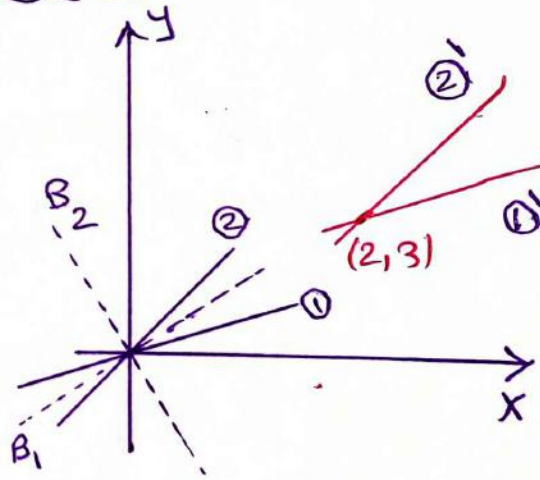
$m_1 = -3 \qquad m_2 = 2$

$(y - 2x)(y + 3x) = 0$ #

المعادلة المزدوجة للخطين

Example (6) if one bisector to the
احد منصفات الزوايا بين الخطين
angle between the two lines
هو
$2x^2 - 5xy + by^2 = 0$ is $x - y$ Find
اوجد المنصف الآخر
the other bisectors and the
وقيمة الـ b
value of b. Find also the two
واوجد المعادلة المزدوجة للخطين اللى يمروا (2,3)
fold equation of the two lines
passing through (2,3)

Solution



$B_1 : x - y = 0$

$y = x$

$m_1 = 1$

$B_1 \perp B_2$

$m_1 m_2 = -1$

$m_2 = -1$

$y = m_2 x$

$y = -x$

$x + y = 0$ # المنصف الآخر other bisectors

المعادلة المزدوجة للمنصفات

$(x-y)(x+y) = 0$

$x^2 - y^2 = 0 \rightarrow ①$

قانون المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية للخطين المارين (0,0)

$$\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$$

$$x^2 - y^2 = \frac{a-b}{h} xy \rightarrow ②$$

بمقارنة ① ب ②

$$\frac{a-b}{h} xy = 0$$

$$\frac{a-b}{h} = 0$$

$a - b = 0$

$a = b = 2$ ※

لايجاد المعادلة المزدوجة للخطين المارين (2,3) نوجد أولاً معادلة الخطين المارين (0,0)

$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \quad \div x^2$

$$2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4*2*2}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4}$$

$\frac{y}{x} = \frac{2}{1}$	$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$
$2x - y = 0$	$x - 2y = 0$

الخطين اللى بيمروا (2,3) // الخطين اللى بيمروا (0,0)

$2x - y + \alpha = 0$	$x - 2y + \beta = 0$
(2,3) تحقق المعادلة	(2,3) تحقق المعادلة
$4 - 3 + \alpha = 0$	$2 - 6 + \beta = 0$
$\alpha = -1$	$\beta = 4$
$2x - y - 1 = 0$	$x - 2y + 4 = 0$

∴ المعادلة المزدوجة للخطين اللى بيمروا بالنقطة (2,3) هي

$(2x - y - 1)(x - 2y + 4) = 0$

#

اوجد المعادلة المزدوجة للخطين

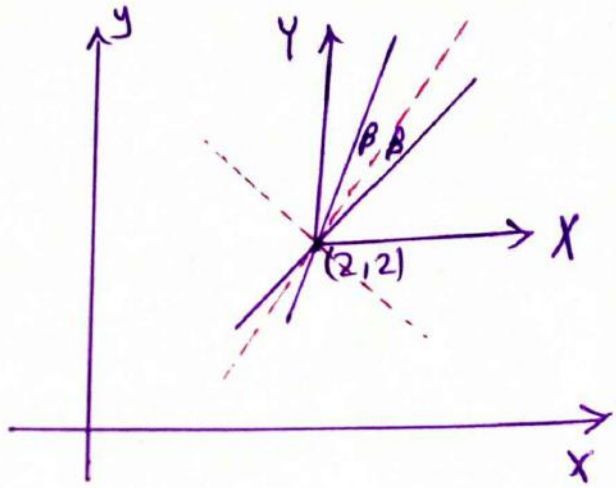
Example (7): Find the double equation of the two lines inclined

يصنعوا زاوية β مع الخط $x+y=4$ ويمروا بالنقطة $(2,2)$

by an angle β on the line $x+y=4$ and Pass through the Point $(2,2)$

if $\beta = 30$

Solution



للتسهيل ننقل المحاور للنقطة $(2,2)$

$x = X+2 \rightarrow ①$ $\quad y = Y+2 \rightarrow ②$

$X = x-2$ $\quad Y = y-2$

لذلك $(2,2)$ تعتبر نقطة الأصل للمحاور X, Y

• المعادلة المزدوجة للخطين المارين $(2,2)$ بالنسبة للمحاور X, Y

$$aX^2+2hXY+bY^2=0 \rightarrow (*)$$

• المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاوية بين الخطين بالنسبة لـ X, Y

$$\frac{X^2-Y^2}{a-b} = \frac{XY}{h}$$

$$X^2-Y^2 = \frac{a-b}{h} XY \rightarrow ①$$

• معادلة المنصف الأول بالنسبة لـ X, Y

$x+y=4$

$X+2+Y+2=4$

$X+Y=0 \qquad Y=-X \qquad m=-1$

معادلة المنصف الثاني بالنسبة لـ X, Y

$Y=X \qquad X-Y=0 \qquad m_1 m_2 = -1, m_2 = 1$

• المعادلة المزدوجة لمنصفات الزاويتين

$$X^2 - Y^2 = 0 \to ②$$

وبمقارنة ①، ②

$$\frac{a-b}{h} X Y = 0$$

$$\frac{a-b}{h} = 0 \qquad \boxed{a = b}$$

• الزاوية بين الخطين

$$\tan\theta = \tan 2\beta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{h^2 - a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}$$

$$a \tan 2\beta = \sqrt{h^2 - a^2}$$ بالتربيع

$$a^2 \tan^2 2\beta = h^2 - a^2$$

$$h^2 = a^2 + a^2 \tan^2 2\beta = a^2(1 + \tan^2 2\beta)$$

$$h^2 = a^2 \sec^2 2\beta \qquad \boxed{h = \pm a \sec 2\beta}$$

بالتعويض من ⊛ لقيم a, b, h

$$a X^2 \pm 2a \sec(2\beta) X Y + a Y^2 = 0$$

$$X^2 \pm 2 \sec(2\beta) X Y + Y^2 = 0$$

وبالتعويض بمعادلات النقل

$$\boxed{(X-2)^2 \pm 2(X-2)(Y-2)\sec(2\beta) + (Y-2)^2 = 0} \#$$

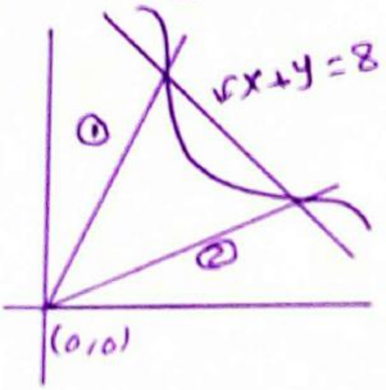
عدد هذه بين $\beta = 30$

2

Example (8): اوجد المعادلة المزدوجة للخطين obtain the double equation of the two lines اللى هيمروا (0,0) Passing through the origin and the Points of ونقاط تقاطع الخط مع المنحنى intersection between the line $x+y=8$ and the curve

$$x^2+4y^2-84x-32y+76=0 \to (*)$$

Solution



المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية تمثل خطين يمرو بـ (0,0) لذلك يتم تحويل (*) إلى معادلة متجانسة كالاتى

$$\frac{x+y}{8}=1 \to (1)$$

يتم التعويض (1) فى (*) لتحويلها إلى معادلة متجانسة من الدرجة الثانية

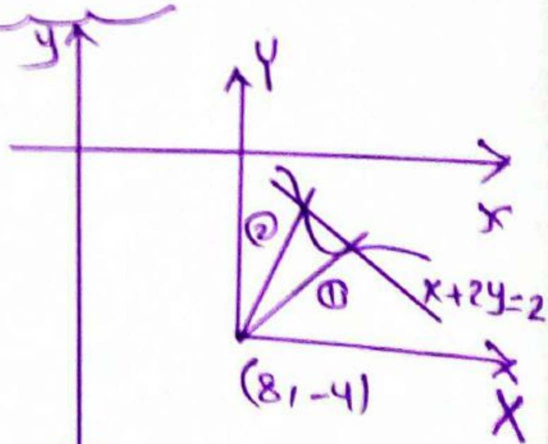
$$x^2+4y^2-84x\left(\frac{x+y}{8}\right)-32y\left(\frac{x+y}{8}\right)+76\left(\frac{x+y}{8}\right)^2=0$$

المعادلات المزدوجة للخطين اللى بيمروا بـ (0,0)

Example (9): obtain the double equation of the two lines Passing through $(8,-4)$ and the Point of intersection between the line $x+2y=2$ and the curve $x^2+5xy+5y^2$

$$+4x-8y+7=0 \to (*)$$

Solution



ننقل المحاور إلى (8,-4)

$x=X+8 \qquad X=x-8 \to (1)$

$y=Y-4 \qquad Y=y+4 \to (2)$

معادلة المنحنى بالنسبة للمحاور X, Y

$$(X+8)^2+5(X+8)(Y-4)+5(Y-4)^2+4(X+8)$$

$$-8(Y-4)+7=0 \rightarrow \circledast$$

معادلة الخط $x+2y=2$ بالنسبة للمحاور X, Y

$$X+8+2Y-8=2$$

$$X+2Y=2$$

$$\frac{X+2Y}{2}=1$$

المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية

$$(X+8)^2+5(X+8)(Y-4)+5(Y-4)^2$$

$$+4(X+8)\left(\frac{X+2Y}{2}\right)-8(Y-4)\left(\frac{X+2Y}{2}\right)$$

$$+7\left(\frac{X+2Y}{2}\right)^2=0$$

فك و عوض بعد كده

$$X=x-8$$

$$Y=y+4$$