

سنتر فیوشر

Subject: استارنگا "اعدادی"

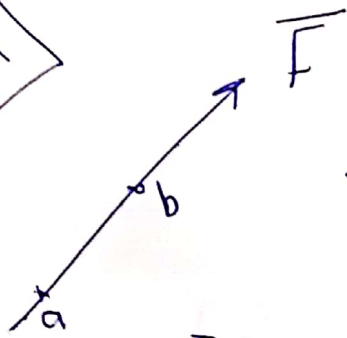
Chapter: البریج

Mob: 0112 3333 122

0109 3508 204

استاتيكا الجسيمات

① عند ثابت قوة F على شكل متجه



$$\vec{ab} = b - a$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \hat{ab}$$

متجه الوحدة \hat{ab} طول المتجه \vec{F} مقدار القوة

$$\hat{ab} = \frac{\vec{ab}}{|\vec{ab}|} = \cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}$$

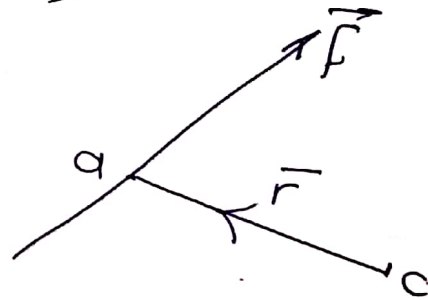
α, β, γ زوايا بين المتجه على محاور x, y, z

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

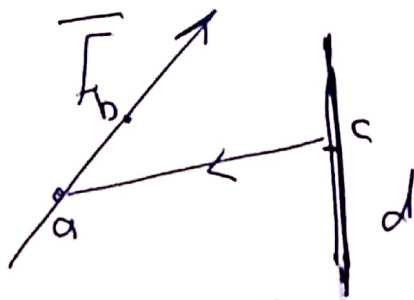
② عند قوة حول نقطة

$$M_c = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r} = a - c$
نقطة العزم \rightarrow نقطة عن القوة



عزم قوة حول خط زهر



$$M_c = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{\vec{cd}}{|\vec{cd}|} = \hat{cd}$$

متجه \hat{cd}

$$M_{cd} = M_c \cdot \hat{cd}$$

مبدأ معة قوة . ① نعت القوة في صفة معة

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{R} = (R_x)\vec{i} + (R_y)\vec{j} + (R_z)\vec{k}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

معيار المعة

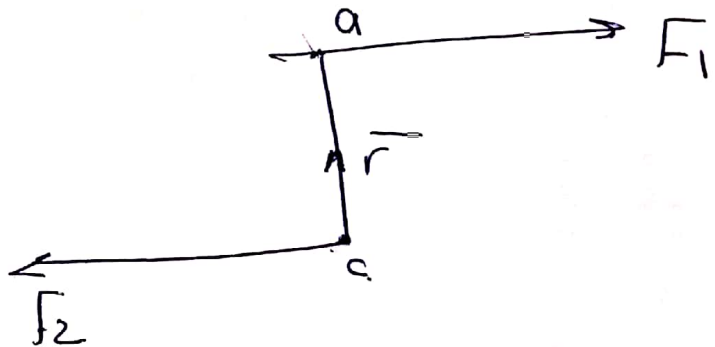
الزاد

فوق معة معة المعة

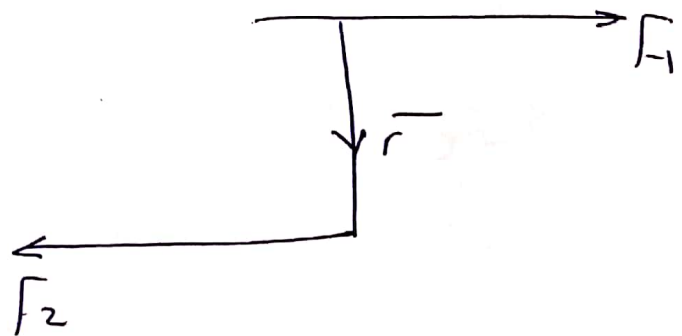
معة معة لا معة

خط معة ليرة على استقامة معة

$$M = \vec{r} \times \vec{F}_1$$



$$M = \vec{r} \times \vec{F}_2$$

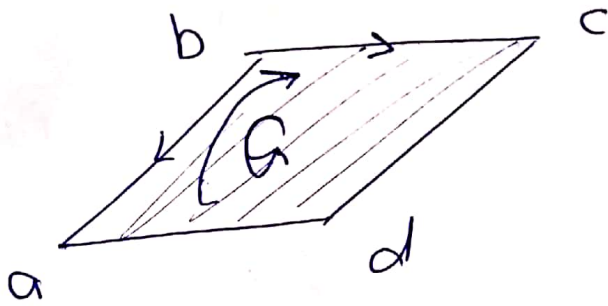


* معة معة معة معة معة معة

$$M = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

معة معة معة

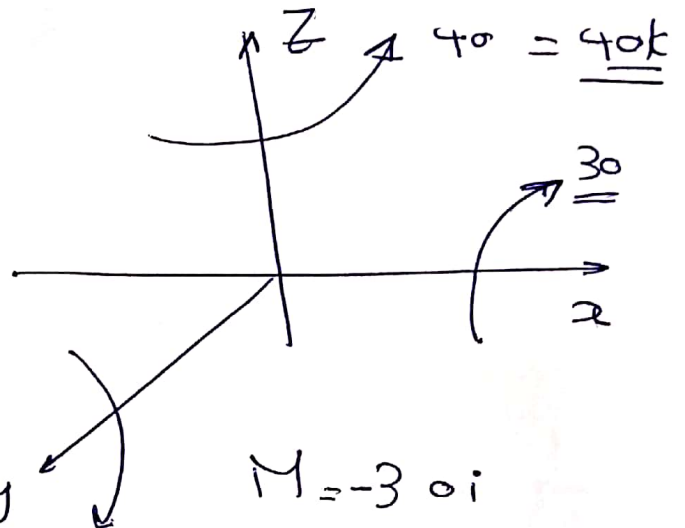
نحسب العزم الحرفي لكل متجه



$$\vec{G} = |\vec{G}| \cdot \hat{n}$$

لـ مقدار العزم
متجه الوحدة المحوي

$$\hat{n} = \frac{\vec{bc} \times \vec{ba}}{|\vec{bc} \times \vec{ba}|}$$



$$-20 \underline{J} = 20$$

اختزال القوى

① متجهات القوى

② متجهات العزم حول النقطة المطلوبة

∴ القوى تختزل إلى قوى [المحصلة] وازدواج

[عزم القوى حول النقطة]

→ Son

ثابت القوة So

المسألة
 $a(4, 3, 2), \quad \overrightarrow{ab} = (1, 0, 3)$

عبر القوة في كل مسج . اوجد مركبات القوة في اتجاه
 x, y, z

$$\overrightarrow{ab} = -3i - 3j + k$$

$$|ab| = \sqrt{9 + 9 + 1} = \sqrt{19}$$

$$\hat{ab} = \frac{\overrightarrow{ab}}{|ab|} = -\frac{3}{\sqrt{19}}i - \frac{3}{\sqrt{19}}j + \frac{1}{\sqrt{19}}k$$

$$\vec{F} = So [\hat{ab}]$$

$$= \frac{So}{\sqrt{19}} (-3i - 3j + k)$$

مركبات القوة

$$F_x = -\frac{150}{\sqrt{19}},$$

$$F_y = -\frac{150}{\sqrt{19}},$$

$$F_z = \frac{50}{\sqrt{19}}$$

مع اذونات $R = 50\text{ N}$ ولات تضع ذوايات
مع المحاور الثلاث بعد مركبات القوة

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$3 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{k}$$

$$\vec{R} = \frac{50}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$R_x = \frac{50}{\sqrt{3}},$$

$$R_y = \frac{50}{\sqrt{3}}, \quad R_z = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$R_x = R \cos \alpha, \quad R_y = R \cos \beta, \quad R_z = R \cos \gamma$$

اذونات F_y وضع ذوا 45° مع محور x
 60° مع محور z . ولات مركبات القوة في اتجاه z
بعد $|F|$ ابع مركبات القوة في اتجاه x z
عنه سحب F

$$F_y = 200$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{1}{2} + \cos^2 \beta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$F_y = |F| \cos \beta$$

$$\therefore |F| = \underline{\underline{400 \text{ N}}}$$

$$F_x = |F| \cos \alpha = 200\sqrt{2}$$

$$F_y = |F| \cos \beta = 200$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

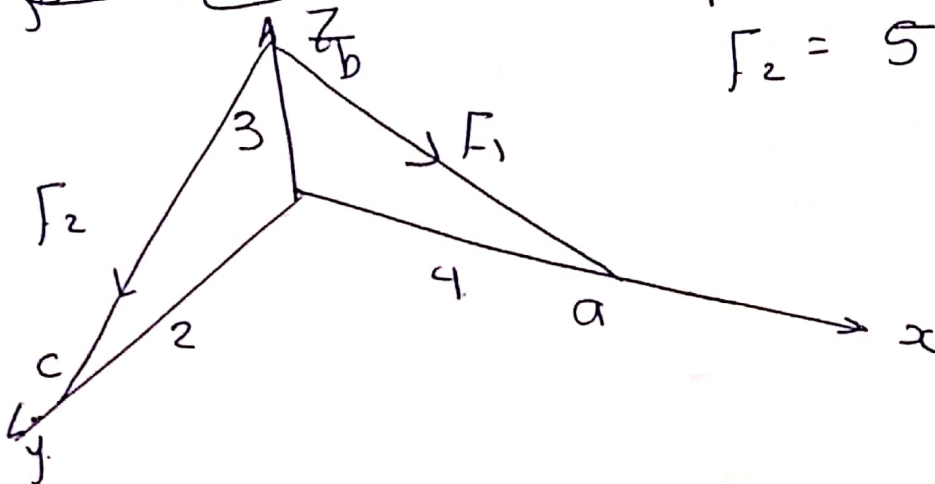
$$= 200\sqrt{2} \hat{i} + 200 \hat{j} + 200 \hat{k}$$

تؤثر القوة

في موضع: $F_1 = 50 \text{ N}$

$$F_2 = 5\sqrt{13} \text{ N}$$

في كلت القوة



$$a(4, 0, 0)$$

$$b(0, 0, 3)$$

$$c(0, 2, 0)$$

$$\vec{F}_1 = 50 \left[\frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{5} \right] = -40\mathbf{i} + 30\mathbf{k}$$

$$\vec{F}_2 = 5\sqrt{13} \left[\frac{2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{13}} \right] = 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$$

$$R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -40\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

$$\text{مقدار } R = \sqrt{1600 + 100 + 225} = \sqrt{1925}$$

اذاً القوة

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-40}{\sqrt{1925}}$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{10}{\sqrt{1925}}$$

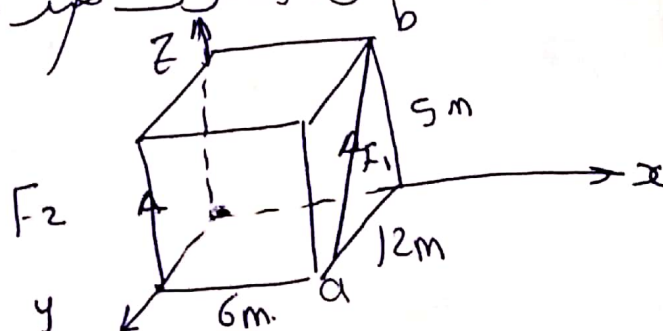
$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{15}{\sqrt{1925}} \quad \#$$

نوى القوة

$$F_2 = 50\text{ N}$$

$$F_1 = 26\text{ N}$$

كما هو الحال في جميع اجزاء القوى عند نقطة



(2)

$$\vec{F}_2 = 50 \text{ k}$$

$$a(6, 12, 0)$$

$$b(6, 0, 5)$$

$$\vec{F}_1 = \cancel{26} \left(\frac{-12\text{j} + 5\text{k}}{\cancel{13}} \right)$$

$$\vec{F}_1 = -24 \text{ j} + 10 \text{ k}$$

المرحلة

$$\vec{R} = -24 \text{ j} + 60 \text{ k}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(24)^2 + (60)^2} = 12\sqrt{29}$$

الزاوية المرحلة

$$\cos \alpha = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{-24}{12\sqrt{29}}$$

$$\cos \theta = \frac{60}{12\sqrt{29}}$$

* عند القوة حول نقطة θ هو

$$M_o = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & -24 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix}$$

(1)

$$M_0 = 120i - 60j - 144k - 600i$$

$$= -480i - 60j - 144k \quad \#$$

لوطيب اختزال القوة ومعدلات خلط القوة [البريتية]

① صات المرات

$$\vec{R} = R_x i + R_y j + R_z k$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{C} \quad ②$$

$$\frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} \begin{cases} = 0 & \text{المجموعة} \\ \neq 0 & \text{فئة ومرة} \end{cases}$$

④ لا زدرع

المجموعة كافي قوة

\vec{R} زادرع [بريتية]

$$P = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}$$

⑤ الخطوة

معدلات المحاور الزاوية

$$\vec{M}_0 - P\vec{R} = \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_0 - P\vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

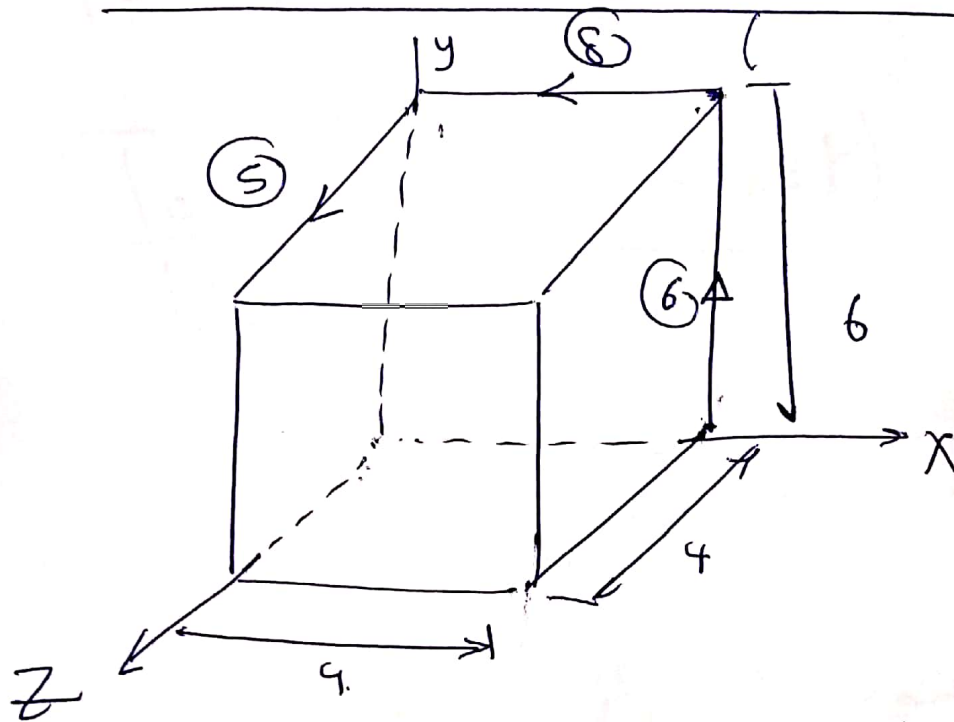
لوطيب نقط تقاطع
البريتية محور

$$y = z$$

⑥

لو طلب نظام تقاطع البرية مع محور xz

$$y = 0$$



أثبتت قوة الموضعية لكل اختزال المجموع إلى
محطة برية ، بعد خطوطه بعد مصادرات المحاور
التي هي

$$F_1 = 5k$$

$$F_2 = -8i$$

$$F_3 = 6j$$

$$R = -8i + 6j + 5k$$

$$|R| = \sqrt{64 + 36 + 25} = 5\sqrt{5}$$

$$M_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_0 = 30i + 48j + 24k$$

$$M_0 = 30i + 72k$$

الاجزء

$$\frac{M_0 \cdot \bar{R}}{|R|} = \frac{(30i + 72k) \cdot (-8i + 6j + 5k)}{5\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-240 + 0 + 360}{5\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}} \neq 0$$

الاجزء \equiv قوة R وازدواج عز $\frac{24}{\sqrt{5}}$

الخطوة

$$\frac{\bar{R} \cdot M_0}{|R|^2} = p = \frac{24}{25} = 0.96$$

معادلات التوازن

~~$$M_0 - pR$$~~
$$M_0 - p\bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

$$M_0 - 0.96\bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ -8 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$M_0 - 0.96\bar{R} = (5y - 6z)i - (5x + 8z)j + (6x + 8y)k$$

(11)

$$30i + 72k - 0.96(-8i + 6j + 5k)$$

$$= (5y - 6z)i - (5x + 8z)j + (6x + 8y)k$$

مادّة معادلات i

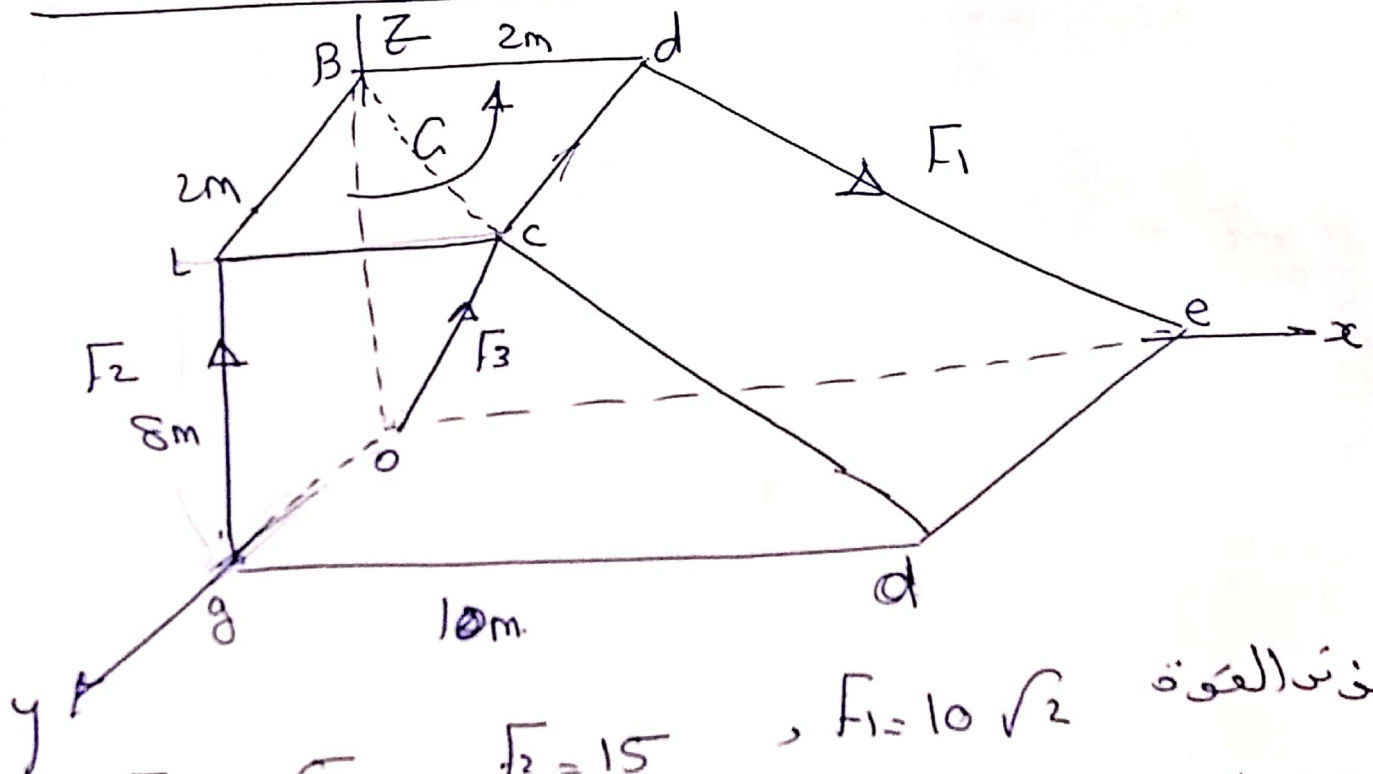
$$5y - 6z = 37.68$$

مادّة معادلات j

$$+5x + 8z = +5.76$$

مادّة معادلات k

$$6x + 8y = 76.8$$



نؤخذ القوة $F_1 = 10\sqrt{2}$ ، $F_2 = 15$ ، $F_3 = 20\sqrt{19}$
 كما يتخذ زووج $G = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$ في الوجه $Lcd\beta$

موضح . اختزل المومنت الى نقطة يرمز اليها
 الخطوة ومعدلات المحاور المركزية

©

ابعد عزم العتوق \vec{r} حول الخط LC

او بدات الوجه OBC

$$\begin{array}{ccc} a(10, 2, 0) & \xrightarrow{\quad} & e(10, 0, 0) \\ & b(0, 0, 8) & \\ & L(0, 2, 8) & c(2, 2, 8) \\ g(0, 2, 0) & & \\ d(2, 0, 8) & & \end{array}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{10\cancel{\sqrt{2}} (8\vec{i} - 8\vec{k})}{8\cancel{\sqrt{2}}} = 10\vec{i} - 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = 15\vec{k}$$

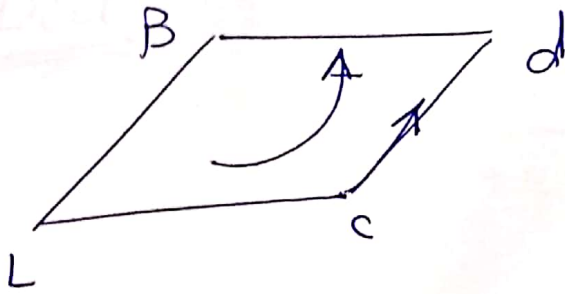
$$\vec{r}_3 = \frac{20\sqrt{19} (2\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k})}{\sqrt{4 + 4 + 64}} = \frac{20\sqrt{19} (\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})}{\sqrt{19}}$$

$$= 20\vec{i} + 20\vec{j} + 80\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \\ &= 30\vec{i} + 20\vec{j} + 85\vec{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{30^2 + 20^2 + (85)^2} = 5\sqrt{341}$$

(12)



$$\overline{cd} \times \overline{cl} = k$$

$$\overline{a} = 40k$$

$$M_o = \overline{r}_1 \times \overline{f}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{f}_2 + \dots \quad \overline{a} \text{ العزم}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 8 \\ 10 & 0 & -10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} + 40k$$

$$= 100\hat{j} + 30\hat{i} + 40k$$

$$\overline{M}_o = 30\hat{i} + 100\hat{j} + 40k \quad \#$$

الازدواج

$$\frac{\overline{M}_o \cdot \overline{R}}{|\overline{R}|} = \frac{(30\hat{i} + 100\hat{j} + 40k) \cdot (30\hat{i} + 20\hat{j} + 8\hat{k})}{5\sqrt{341}}$$

$$= \frac{900 + 2000 + 3400}{5\sqrt{341}} = \frac{6300}{5\sqrt{341}}$$

(٤)

الزادج

$$= \frac{1600}{\sqrt{341}}$$

المطوية

$$\frac{\overline{M_0} \cdot \overline{R}}{|\overline{R}|^2} = \frac{320}{341} = 0.938$$

معادلة المحاور الرئيسية

$$M_0 - P \overline{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 30 & 20 & 85 \end{vmatrix}$$

$$100j + 30i + 40k - 0.938(30i + 20j + 85k)$$

$$= (85y - 20z)i + (30z - 85x)j + (20x - 30y)k$$

ماتر معادلات

$$85y - 20z = 30 - 30(0.938)$$

$$30z - 85x = 100 - 20(0.938)$$

$$20x - 30y = 40 - (0.938)(85)$$

معادلات
المحاور الرئيسية

١٥

اياد عزم القوة F_1 حول L_c

$$M_c = \vec{r} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= 20\hat{i} + 20\hat{k}$$

$$\vec{r}_{cd} = -\hat{i}$$

عزم القوة حول خط

$$M_{CL} = -\hat{i} \cdot (20\hat{i} + 20\hat{k})$$

$$= -20 \quad \#$$

$$\vec{ob} = 8\hat{k}$$

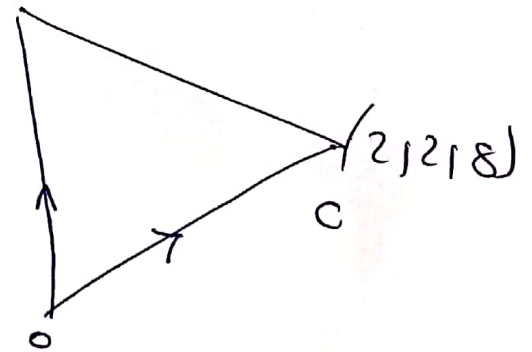
$$\vec{oc} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\vec{ob} \times \vec{oc} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -16\hat{i} + 16\hat{j}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 16^2} = 8\sqrt{2} \quad \#$$

$B(0,0,8)$



17