

الهندسة التحليلية

تختص الهندسة التحليلية بدراسة المنحنى العام من الدرجة الثانية

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \rightarrow *$$

نقوم بتبسيط شكل المعادلة * عن طريق نقل ودوران المحاور

نقل ودوران المحاور Translation and Rotation the axis

① Translation the axis :- نقل المحاور

- لحذف حدود الدرجة الأولى يتم نقل المحاور إلى النقطة (a, b)

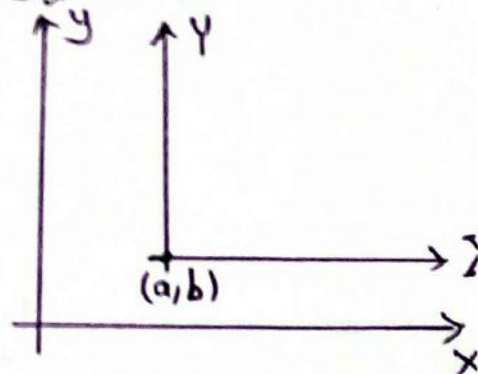
- لحذف الحد x والحد y من المعادلة * يتم نقل المحاور إلى النقطة (a, b)

- لحذف الحد x من المعادلة * يتم نقل المحاور إلى النقطة (a, 0)

- لحذف الحد y من المعادلة * يتم نقل المحاور إلى النقطة (0, b)

$$\begin{aligned} x &= X + a \\ y &= Y + b \end{aligned}$$

قوانين
نقل المحاور



* كيف يتم حساب الثوابت a, b ؟؟

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = 0 \rightarrow ①$$

تفاضل المعادلة * تفاضل جزئي
بالنسبة لـ x ثم التعويض عنه $x = a$
وعن $y = b$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} = 0 \rightarrow ②$$

تفاضل المعادلة * تفاضل جزئي
بالنسبة لـ y ثم التعويض عنه $x = a$ وعن $y = b$

[2]

وبحل المعادلتين ①، ② للحصول على الثوابت a, b Example ①: ^{حذف كلا من} Eliminate both x, y From the equation

$$x^2 + 5xy + y^2 - 19x - 22y + 26 = 0 \rightarrow (*)$$

Solution① ننقل المحاور إلى النقطة (a, b)

$$x = X + a$$

$$y = Y + b$$

② نوجد الثوابت a, b

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = 0$$

$$2X + 5Y - 19 \Big|_{(a,b)} = 0$$

$$2a + 5b - 19 = 0 \rightarrow ①$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} = 0$$

$$5X + 2Y - 22 \Big|_{(a,b)} = 0$$

$$5a + 2b - 22 = 0 \rightarrow ②$$

وبحل المعادلتين ①، ② بالآلة للحصول على الثوابت a, b

$$a = \frac{24}{7}$$

$$b = \frac{17}{7}$$

$$x = X + \frac{24}{7}$$

$$y = Y + \frac{17}{7}$$

③ بالتعويض في المعادلة (*)

$$\left(X + \frac{24}{7}\right)^2 + 5\left(X + \frac{24}{7}\right)\left(Y + \frac{17}{7}\right) + \left(Y + \frac{17}{7}\right)^2 - 19\left(X + \frac{24}{7}\right) - 22\left(Y + \frac{17}{7}\right) + 26 = 0$$

المعادلة الناتجة من نقل المحاور هي نفس المعادلة (*) بعد حذف حدود الدرجة الأولى واستبدال x بـ X واستبدال y بـ Y والحد المطلق يصبح K

$$X^2 + 5XY + Y^2 + K = 0$$

$$K = f(a, b) = f\left(\frac{24}{7}, \frac{17}{7}\right) = \left(\frac{24}{7}\right)^2 + 5\left(\frac{24}{7}\right)\left(\frac{17}{7}\right) + \left(\frac{17}{7}\right)^2 - 19\left(\frac{24}{7}\right) - 22\left(\frac{17}{7}\right) + 26$$

$$-22\left(\frac{17}{7}\right) + 26 = -30.2$$

(3)

$$X^2 + 5XY + Y^2 - 30.2 = 0 \neq$$

Example (2): Eliminate the first degree Terms From the equation $5X^2 + 5Y^2 - 6XY - 26Y + 22X + 29 = 0 \rightarrow \textcircled{*}$

Solution

ننقل المحاور للنقطة (a, b)

$$X = X + a, \quad Y = Y + b$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = 0$$

$$10X - 6Y + 22 \Big|_{(a,b)} = 0$$

$$10a - 6b = -22 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} = 0$$

$$10Y - 6X - 26 \Big|_{(a,b)} = 0$$

$$10b - 6a = 26 \rightarrow \textcircled{2}$$

وبحل المعادلتين $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ نأخذ

$$a = -1$$

$$b = 2$$

$$X = X - 1$$

$$Y = Y + 2$$

$$5(X-1)^2 + 5(Y+2)^2 - 6(X-1)(Y+2) - 26(Y+2) + 22(X-1) + 29 = 0$$

$$5X^2 + 5Y^2 - 6XY + K = 0$$

$$K = f(a, b) = f(-1, 2) = 5(-1)^2 + 5(2)^2 - 6(-1)(2)$$

$$-26(2) + 22(-1) + 29 = -8$$

$$5X^2 + 5Y^2 - 6XY - 8 = 0 \neq$$

خط المعادلة الناتجة لا

تحتوي على حدود الدرجة الأولى

Plc (3): Find the Point to which the origin must be translated to eliminate x & y From the equation

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 22y + 7 = 0$$

اوجد النقطة التي تنقل إليها المحاور لحذف الحد x والحد y من المعادلة

Solution

ننقل المحاور للنقطة (a, b)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = 0$$

$$4x + 4y - 4 \Big|_{(a,b)} = 0$$

$$4a + 4b - 4 = 0 \rightarrow ①$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} = 0$$

$$4x + 10y - 22 \Big|_{(a,b)} = 0$$

$$4a + 10b - 22 = 0 \rightarrow ②$$

وبحل المعادلتين ① ، ② بالآلة

$$a = -2$$

$$b = 3$$

the Point is $(a, b) = (-2, 3)$ ✕

• في نفس المسألة السابقة إذا طلب حذف الحد x من المعادلة ✕ يتم

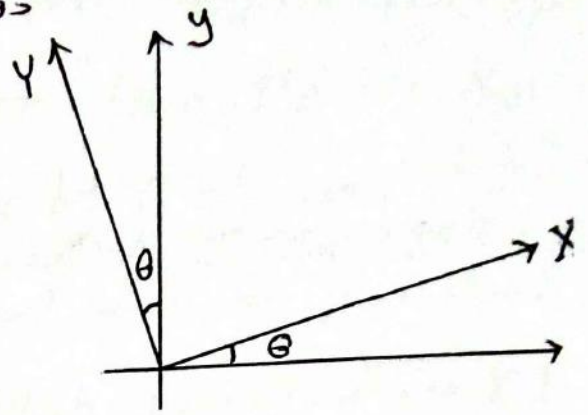
نقل المحاور إلى النقطة $(a, 0)$

• في نفس المسألة السابقة إذا طلب حذف الحد y من المعادلة ✕ يتم

نقل المحاور إلى النقطة $(0, b)$

Rotation the axis :-

دورات المحاور



- دوران المحاور يعمل على حذف الحدود الدرجة الأولى والثانية

قوانين الدوران

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \rightarrow ①$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \rightarrow ②$$

	x	y
X	$\cos \theta$	$\sin \theta$
Y	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

* المعادلات العامة من الدرجة الثانية

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \rightarrow *$$

* لا إيجاد الزاوية θ التي تدور بها المحاور لحذف الحد xy من المعادلة *

يتم التعويض بالمعادلة ① ، ② في المعادلة * نضع مساواة معامل

ال xy بالصفر لإيجاد الزاوية θ

* لا إيجاد الزاوية θ التي تدور بها المحاور لحذف الحد x^2 من المعادلة *

يتم التعويض بالمعادلة ① ، ② في المعادلة * نضع مساواة معامل

ال x^2 بالصفر لإيجاد الزاوية θ

* لا إيجاد الزاوية θ التي تدور بها المحاور لحذف الحد x من المعادلة

* يتم التعويض بالمعادلة ① ، ② في المعادلة * نضع مساواة معامل

ال x بالصفر لإيجاد الزاوية θ

Example 11:- Prove that the angle (θ) that the axis should be rotated to Eliminate the XY Term From the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0 \text{ is given by } \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$$

اثبت ان الزاوية θ التي يجب أن تدور بها المحاور لحذف الحد

$$XY \text{ من المعادلة هي } \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$$

solution

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \rightarrow ①$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \rightarrow ②$$

	X	Y
X	$\cos \theta$	$\sin \theta$
Y	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

بالتعويض ①، ② في *

$$a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + 2h(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) + b(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 + c = 0$$

وبمساواة معامل ال XY بالصفر لحذف الحد XY

$$-2a \cos \theta \sin \theta + 2h (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2b \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$-a \sin 2\theta + 2h \cos 2\theta + b \sin 2\theta = 0$$

$$(-a+b) \sin 2\theta = -2h \cos 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-2h}{-a+b} = \frac{2h}{a-b}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b} \quad \therefore \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right) \quad \#$$

14(2): Eliminate XY Term From the equation

$$3x^2 + 3xy - y^2 - 2x = 0 \rightarrow \textcircled{*}$$

Solution

$$a=3 \quad b=-1$$

$$2h=3$$

يتم دوران المحاور بزاوية θ لحذف الحد xy

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2h}{a-b} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{3}{3+1} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 18.4$$

$$\cos \theta = \cos(18.4) = 0.95$$

$$\sin \theta = \sin(18.4) = 0.32$$

	x	y
x	$\cos \theta$	$\sin \theta$
y	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta = 0.95X - 0.32Y \rightarrow \textcircled{1}$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta = 0.32X + 0.95Y \rightarrow \textcircled{2}$$

يتم التعويض بالمعادلة ①، ② في المعادلة *

$$3(0.95X - 0.32Y)^2 + 3(0.95X - 0.32Y)(0.32X + 0.95Y)$$

$$- (0.32X + 0.95Y)^2 - 2(0.95X - 0.32Y) = 0$$

$$3.517X^2 - 1.5Y^2 - 1.9X + 0.64Y = 0 \quad \#$$

لاحظ أن المعادلة الناتجة لا تحتوي على الحد xy

Example (3) what is the angle that the axes must rotate

For equation $ax+by+c=0$ becomes $X=\text{constant}$

and Find the value of this constant.

ما هي الزاوية التي تدور بها المحاور لتحويل المعادلة $ax+by+c=0$

إلى المعادلة $X=\text{constant}$ ؟ وما هو قيمة الثابت

المطلوب هو حذف الحد y باستخدام دورات المحاور

the solution

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \rightarrow ①$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \rightarrow ②$$

	x	y
X	$\cos \theta$	$\sin \theta$
Y	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

بالتعويض بالمعادلة ①، ② في المعادلة (*)

$$a[X \cos \theta - Y \sin \theta] + b[X \sin \theta + Y \cos \theta] + C = 0$$

$$[a \cos \theta + b \sin \theta]X + [b \cos \theta - a \sin \theta]Y + C = 0 \rightarrow ③$$

مساواة معامل Y بالصفر لحذف الحد Y من المعادلة (*)

$$b \cos \theta - a \sin \theta = 0$$

$$b \cos \theta = a \sin \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

لايجاد قيمة الـ Constant يسمح التعويض بالزاوية في المعادلة ③

$$X[a \cos \theta + b \sin \theta] = -C$$

$$X = \frac{-C}{a \cos \theta + b \sin \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad \begin{array}{c} \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta \\ a \end{array} \quad b$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$X = \frac{-C}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \text{const} \quad \# \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ex (4) :- Prove the equation $x^2 + y^2 = a^2$ does not change with rotating of the axes. البت أن معادلة الدائرة لا تتغير بدوران المحاور

Solution

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \rightarrow ①$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \rightarrow ②$$

	x	y
X	$\cos \theta$	$\sin \theta$
Y	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

بالتعويض ①, ② في المعادلة (*)

$$(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + (X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 = a^2$$

$$X^2 \cos^2 \theta + Y^2 \sin^2 \theta - 2XY \cos \theta \sin \theta + X^2 \sin^2 \theta + Y^2 \cos^2 \theta + 2XY \sin \theta \cos \theta = a^2$$

$$X^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + Y^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2$$

$$\text{ملاحظة } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \#$$

معادلة لا تتغير بدوران المحاور

Example (5) :- Prove that the equation $x dy - y dx = 0$ doesn't change by Rotation of Axis by an angle θ البت أن المعادلة لا تتغير بدوران المحاور

Solution

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \rightarrow ①$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \rightarrow ②$$

$$dx = dX \cos \theta - dY \sin \theta \rightarrow ③$$

$$dy = dX \sin \theta + dY \cos \theta \rightarrow ④$$

	x	y
X	$\cos \theta$	$\sin \theta$
Y	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

بالتعويض بالمعادلة ①, ②, ③, ④ في المعادلة (*)

$$y \sin \theta [dX \sin \theta + dY \cos \theta] - [X \sin \theta + Y \cos \theta] \quad (11)$$

$$[dX \sin \theta - dY \cos \theta] = 0$$

$$\cancel{\cos \theta \sin \theta dX} + X \cos^2 \theta dY - Y \sin^2 \theta dX - \cancel{Y \sin \theta \cos \theta dY}$$

$$\cancel{X \sin \theta \cos \theta dX} - Y \cos^2 \theta dX + X \sin^2 \theta dY + \cancel{Y \sin \theta \cos \theta dY} = 0$$

$$X(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) dY - Y(\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1) dX = 0$$

$$X dY - Y dX = 0 \quad \#$$

∴ المعادلة لا تتأثر بدوران المساور