نظرية Equations Theorem المعادلات

هذا الباب بنقسم إلى :

1. نظرية الباقي : Remainder Theorem
2. طريقة هورنر للقسمة التركيبية : Horner's Method for Synthetic Division
3. العلاقة بين جذور معادلة ومعاملاتها.
4. يعطى معادلة ذو جذور معينة ويطلب تكوين معادلة أخرى لها علاقة بالمعادلة الأصلية.

① Remainder Theorem نظرية الباقي

لو يعطى معادلة $f(x)$ وعدد (٢) أو مقدار $(x-٢)$

ويطلب باقي القسمة عند قسمة $\frac{f(x)}{x-٢}$ (بدون ما تقسم)

الحل: الباقي $R = f(٢)$ ← قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=٢$

Ex① Using the Remainder theorem to find the Remainder if $f(x) = x^3+3x^2-4x-12$ is divided by $(x-2)$.

قسمته على ←

(Solution) نوجد باقي القسمة باستخدام نظرية الباقي عند $f(x)$ ← $x-2$ ← أصفاره $r=2$

$$R = f(r) = f(2) = (2)^3+3(2)^2-4(2)-12 = 0$$

لاحظ: إذا كان الباقي $(R) = 0$ فإن الرقم (٢)

يسمى جذر من جذور المعادلة ← لأنه يحققها #

ملاحظات هامة : (1) المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية لها جذران

- " " " " " الثالثة لها ٣ جذور وهكذا .

(2) إذا كان العدد المركب $a+ib$ أحد جذور المعادلة

∴ $a-ib$ أيضاً أحد جذور المعادلة .

(3) إذا كان $a+\sqrt{b}$ أحد جذور المعادلة فإن $a-\sqrt{b}$ أيضاً أحد جذورها .

Ex ②:- write (اكتب) down the Eq^n that has roots

$r_1 = 1+i$, $r_2 = 1-\sqrt{2}$

الحل

∵ $1+i$ جذر $\Longrightarrow$ ∴ $1-i$ أيضاً جذر

∵ $1-\sqrt{2}$ جذر $\longrightarrow$ ∴ $1+\sqrt{2}$ أيضاً جذر

∴ المعادلة هي

$$\therefore (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)=0$$

$$\therefore \left[x-1-i\right]\left[x-1+i\right]\left[x-1+\sqrt{2}\right]\left[x-1-\sqrt{2}\right]=0$$

$$\therefore \left[x^2 \cancel{-x} + \cancel{ix} \cancel{-x} + 1 \cancel{-i} - \cancel{ix} + \cancel{i} - \underset{-1}{\cancel{i^2}}\right]\left[x^2 - x - \cancel{\sqrt{2}x} - x + 1 + \cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + \cancel{\sqrt{2}x} - \cancel{\sqrt{2}} - 2\right]$$

$$\left[x^2-2x+2\right]\left[x^2-2x-1\right]=0$$

$$\therefore x^4-2x^3-x^2-2x^3+4x^2+2x+2x^2-4x-2=0$$

$$\boxed{\therefore x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0}$$

#

ملاحظة لو عندك معادلة

$x^2+3x+2=0$

$\boxed{\begin{matrix} x=-1 \\ x=-2 \end{matrix}}$

لو أرجع للمعادلة ثاني

من الجذور ∈

$(x+1)(x+2)=0$

* نظرية (طريقة) هورنر للقسمة التركيبية :

Horner's Method for synthetic division :-

هذه الطريقة توجد ناتج القسمة و باقي اذا قسم $f(x)$ على مقدار من الدرجة الأولى : $x-a$

وإذا لم يكن المقدار من الدرجة الأولى نحلله ونقسم على كل قوس على حدة كما سيلي :

Example 3: Find the quotient الناتج and the remainder الباقي if $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ =b is divis[ible] by قسمت على $(x+2)$

الحل

اصفار القوس هي $x=-2$

نكون جدول هورنر :- معاملات المقسوم $f(x)$

	x^4	x^3	x^2	x	const
-2	5	-3	2	-3	-1
		$+$	$+$	$+$	$+$
		-10	26	-56	118
	5	-13	28	-59	$\boxed{117}$

أي رقم ينزل تحت ينضرب * (-2)

معاملات الناتج

R الباقي

$\therefore$ الباقي $= R = 117$

الناتج $Q(x) = 5x^3 - 13x^2 + 28x - 59$

#

إذا كان المقسوم عليه عبارة عن قوسين تربيعي مثلاً نقوم بتحليله ونقسم على أحد الأقواس وناتج القسمة على القوس الآخر.

EX④: $\boxed{2013}$ Find the quotient & the Remainder of divis… of the eqn $5x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ by

$(x-2)(3x+1)$ (Solution.)

أصفاره $x=2$, $x=-\frac{1}{3}$

	x^4	x^3	x^2	x	Const
$-\frac{1}{3}$	5	-3	2	-3	1
		$-\frac{5}{3}$	$\frac{14}{9}$	$-\frac{32}{27}$	$\frac{113}{81}$
2	5	$-\frac{14}{3}$	$\frac{32}{9}$	$-\frac{113}{27}$	$\frac{194}{81}$
		10	$\frac{32}{3}$	$\frac{256}{9}$	
	5	$\frac{16}{3}$	$\frac{128}{9}$	$\boxed{\frac{655}{27}}$	

x^2 , x , Const

الناتج $Q = \dfrac{5x^2+\frac{16}{3}x+128}{3*1}$

معامل x في القوس الثاني ← 3 ، 1 → معامل x في القوس الأول

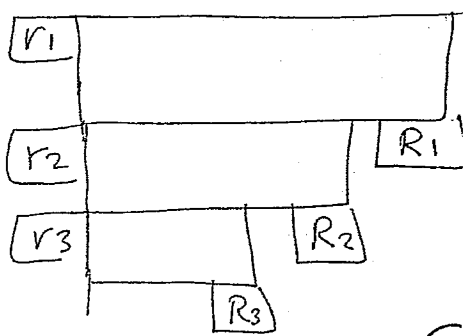
الباقي $\boxed{R = R_2(x-a)+R_1}$ فقط

$$= \frac{655}{27}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{194}{81} = \frac{655}{27}x+\frac{283}{27} \quad \#$$

لاحظ لو قسم على ٣ أقواس

$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

$$\boxed{R_{\text{الباقي بالعكس}} = R_3(x-r_2)(x-r_1) + R_2(x-r_1) + R_1}$$



Ex (5): Find the roots of the eqⁿ [Solve the eqⁿ]

$$X^3 - 9X^2 + 23X - 15 = 0$$

Using Horners Method.

الحل

ملاحظة: أحد جذور المعادلة هو أحد معاملات الحد المطلق (-15)

يعني الأرقام اللي تنضرب * بعضها تعطي -15 وهي

± 1 أو ± 15 أو ± 3 أو ± 5

العدد يكون جذر للمعادلة إذا حقق المعادلة (يعني يخلي $L.H.S = R.H.S = 0$)

$\therefore X = 1$

$$f(1) = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$$

تحقق المعادلة

$\therefore X = 1$ أحد الجذور

لإيجاد الجذرين الأخرين: نقسم المعادلة $f(x)$ على $X-1$

لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية وذلك لنوجد الجذرين الأخرين

	x^3	x^2	x	Const
1	1	-9	23	-15
		1	-8	15
	1	-8	15	$\boxed{0}$

$$X^2 - 8X + 15 = 0$$

ينتج

$X \quad -3$
$X \quad -5$

الباقي = 0 لأننا قسمنا على أحد الجذور

$X = 3$

$X = 5$

$\therefore$ الجذور الثلاثة هي

$X = 1$

$X = 3$

$X = 5$

#

القسمة التركيبية التامة : يعني نقسم المعادلة على مقدار من الدرجة الأولى عدد من المرات يساوي أعلى أس في الدالة $f(x) \leftarrow$ المقسوم.

Complet Synthetic division

لماذا

إذا طلب تغيير شكل الدالة $f(x)$ إلى قوى $(x-a)$

إذا طلب قيمة الدالة ومشتقاتها عند عدد

باقي ٧

EX 7 / 2013 Use Complete Synthetic division to find the Value of $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 1$ and it's derivatives at $x = 2$.

القسمة التركيبية التامة

قيمة

مشتقاتها

الحل

نقسم $f(x)$ على $x=2$ أربع مرات

	x^4	x^3	x^2	x	Cons
2	5	0	-3	-3	1
		10	20	34	62
	5	10	17	31	63
		10	40	114	
	5	20	57	145	
		10	60		
	5	30	117		
		10			
	5	40			

$145 \rightarrow f'(2)$

$117 \rightarrow \frac{f''(2)}{2!}$

$40 \rightarrow \frac{f'''(2)}{3!}$

$5 \rightarrow \frac{f''''(2)}{4!}$

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

$\therefore f(2) = 63$

$f'(2) = 145$

$\frac{f''(2)}{2!} = 117 \qquad \therefore f''(2) = 234$

$\frac{f'''(2)}{3!} = 40 \qquad \therefore f'''(2) = (3!) * 40 = 240$

$\frac{f''''(2)}{4!} = 5 \qquad \therefore f''''(2) = (4!)\,5 = 5 * 24 = 120$

#

Ex 8: write $f(x) = x^5 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$ in Power of $x+1$

Solution

5 مرات

نقسم $f(x)$ ع $\boxed{x=-1}$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	Const
-1	1	0	0	-3	5	-1
		-1	1	-1	4	-9
	1	-1	1	-4	9	$\boxed{-10}$
		-1	2	-3	7	
	1	-2	3	-7	$\boxed{16}$	
		-1	3	-6		
	1	-3	6	$\boxed{-13}$		
		-1	4			
	1	-4	$\boxed{10}$			
		-1				
	$\boxed{1}$	$\boxed{-5}$				

المعاملات للأقواس

$$f(x) = (x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 10(x+1)^3 - 13(x+1)^2 + 16(x+1) - 10 = 0$$

هي نفس المعادلة الأصلية ولكن بشكل آخر.

سيعطى معادلة لها جذور معينة ويطلب معادلة لها علاقة بجذور المعادلة الأصلية:

Ex 1*: if the eq^n $f(x) = x^4 - 3x + 2 = 0$ has roots r_i, $i = 1, 2, 3, 4$. find the eq^n that has roots $r_i - 2$

الحل

مطلوب معادلة جذورها تقل 2 عن جذور المعادلة الأصلية

$$y = x - 2$$

الجديد = القديم $- 2$

يعني نكتب $f(x)$ المعطاة على شكل قوى $x-2$ في

نزيل $x-2$ ← ونضع y لنحصل على المعادلة المطلوبة

$$\therefore f(x) = (x-2)^4 + 10(x-2)^3 + 32(x-2)^2 + 37(x-2) + 12 = 0$$

	x^4	x^3	x^2	x	Const
2	1	0	0	-3	2
		2	4	8	10
	1	2	4	5	12
		2	12	32	
	1	6	16	37	
		2	16		
	1	8	32		
		2			
	1	10			

نزيل $x-2$ ونضع y

$$\therefore f(y) = y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 37y + 12 = 0$$

معادلة جذورها $y = r_i - 2$

Ex (2)* if $f(x) = x^4 - 3x + 2 = 0$ has roots r_i find eqn that has roots $\dfrac{3}{r_i - 2}$

الحل ← كسر ∴ لابد من جعل البسط خالي من r_i

بالفعل البسط خالي من r_i

∴ نبدأ بالمقام ← (1) نوجد معادلة جذورها $r_i - 2$

$y = x - 2 \xrightarrow{\text{نفس}}$ Ex (1)* $\quad f(y) = y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 37y + 12 = 0$

$y = r_i - 2$

(2) نوجد المطلوب: معادلة جذورها

$$\boxed{z = \frac{3}{y}} = \frac{3}{r_i - 2}$$

$\therefore y = \frac{3}{z}$

$\therefore f(z) = \left(\frac{3}{z}\right)^4 + 10\left(\frac{3}{z}\right)^3 + 32\left(\frac{3}{z}\right)^2 + 37\left(\frac{3}{z}\right) + 12 = 0$

بالضرب z^4 للتبسيط

$$\boxed{\therefore f(z) = 81 + 270z + 288z^2 + 111z^3 + 12z^4 = 0}$$

المطلوب $\quad z = \frac{3}{r_i - 2}$

Ex ③* if $f(x) = x^4 - 3x + 2 = 0$ has roots r_i find the eqn that has roots $\frac{r_i - 5}{r_i - 2}$

الحل

لازم نعمل البسط خالي من r_i

$$\frac{r_i - 5}{r_i - 2} = \frac{r_i - 2 - 3}{r_i - 2} = 1 - \frac{3}{r_i - 2}$$

① نوجد معادلة جذورها $r_i - 2$ ← كافي ← ex ①*

$f(y) = y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 37y + 12 = 0$

② معادلة جذورها $\frac{3}{r_i - 2}$ ← كما سبق في ex ②*

$f(z) = 12z^4 + 111z^3 + 288z^2 + 270z + 81 = 0$

③ نوجد المطلوب: معادلة جذورها

$1 - \frac{3}{r_i - 2}$

$w = 1 - z \implies \therefore \boxed{z = 1 - w}$

11

Ex(4)

2015 if the roots of the eq^n $X^4-2X^2+5X-1=0$ are r_i, $i=1,2,3,4$. Find the eq^n whose roots are $\frac{1-r_i}{r_i}$

$\frac{1}{r_i}-1$

الحل

① لوجد معادلة جذورها : $\frac{1}{r_i}$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$y=\frac{1}{x}$

$\therefore x=\frac{1}{y}$

$\therefore f(y)=\left(\frac{1}{y}\right)^4-2\left(\frac{1}{y}\right)^2+5\left(\frac{1}{y}\right)-1=0$

$\boxed{f(y)=1-2y^2+5y^3-y^4=0}$ → $y=\frac{1}{r_i}$

② لوجد معادلة جذورها

$\frac{1}{r_i}-1$

$z=y-1$

$y=z+1$

$f(z)=1-2(z+1)^2+5(z+1)^3-(z+1)^4=0$

---

if $x^4+4x^2-x+6=0$ has roots r_i

حل بديل

find the eq^n that has roots $\frac{r_i+1}{r_i+3}$

$\frac{r_i+3+1-3}{r_i+3}=1-\frac{2}{r_i+3}$

Ex(5)*

* find The Eq^n that has a roots squares of The Roots of The eq^n:

$f(x) = x^3 + x + 1 = 0$ ⟸ أوجد معادلة جذورها مربعات جذور المعادلة

<u>Solution:</u> Put $y = x^2$

$\therefore y^2 = x^4$

وهكذا ولكن يوجد x^3 , x نتخلص منهم ونضع مكانهم (ايه؟)

⟸ نتخلص الأول من x^3 , x أى الـ x الفردية عن طريق :

(1-) $f(-x) = +(-x)^3 + (-x) + 1 = 0$

$$\boxed{f(-x) = -x^3 - x + 1 = 0}$$

نضرب طرفى المعادلة المعطاة $f(x)$ × المعادلة $f(-x)$

$\therefore f(x) \cdot f(-x) = 0$

$(x^3 + x + 1)(-x^3 - x + 1) = 0$

$\therefore -x^6 - x^4 + x^3 - x^4 - x^2 + x - x^3 - x + 1 = 0$

$\therefore -x^6 - 2x^4 - x^2 + 1 = 0$

$\therefore x^6 + 2x^4 + x^2 - 1 = 0$

(13)

نضع $y=x^2$ بعد :

$$\therefore f(y)=y^3+2y^2+y-1=0$$

Ex 6*

* if $f(x)=x^4+x^2-10x+1=0$ has a roots r_i, $i=1,2,3,4$ find the $E q^n$ That has a roots

$$\frac{1}{r_i^2-1}$$

(Solution)

⇐ إذا أعطى $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ خلى البسط خالى من r_i

⇐ إنزل للمقام وابدأ اشتغل كما يلى :

① نوجد معادلة جذورها r_i^2 $\therefore$ $(y=x^2)$

نتخلص من x الفردية وذلك عن طريق ضرب $f(x).f(-x)$

$$\therefore (x^4+x^2-10x+1)(x^4+x^2+10x+1)=0$$

$$\therefore (x^8+x^6+\cancel{10x^5}+x^4)+(x^6+x^4+\cancel{10x^3}+x^2)$$
$$+(\cancel{-10x^5}-\cancel{10x^3}-100x^2-\cancel{10x})+x^4+x^2+\cancel{10x}+1=0$$

$$\therefore x^8+2x^6+3x^4-99x^2+1=0$$

$y=x^2$

$$\therefore f(y)=y^4+2y^3+3y^2-99y+1=0 \to r_i^2=y$$

② نوجد معادلة جذورها تقل بمقدار 1 عن جذور $f(y)$

$$\underset{y}{(r_i^2)} - 1$$

$$\boxed{\therefore Z = y - 1}$$

نقسم المعادلة $f(y)$ على $(y-1)$ أولاً لنحصل على شكل
على هيئة $(y-1) \Leftarrow$ (4 مرات)

1	1	2	3	-99	1	
		1	3	6	-93	
1	1	3	6	-93	-92	R_0
		1	4	10		
	1	4	10	-83		R_1
		1	5			
	1	5	15			R_2
		1				
	1	6				
	R_4	R_3				

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\therefore f(y) = 1(y-1)^4 + 6(y-1)^3 + 15(y-1)^2 - 83(y-1) - 92 = 0$$

Then Put $\boxed{y-1 = Z}$

$$\therefore f(Z) = Z^4 + 6Z^3 + 15Z^2 - 83Z - 92 = 0$$

جذورها $\Leftarrow$ $r_i^2 - 1 = Z$

③ نوجد معادلة جذورها $\dfrac{1}{r_i^2 - 1} \rightarrow \dfrac{1}{Z}$

Put $\omega = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{\omega}$

$\therefore f(\omega) = \frac{1}{\omega^4} + 6\left(\frac{1}{\omega}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 - 83\left(\frac{1}{\omega}\right) - 92 =$

$* \ \omega^4$

$\therefore f(\omega) = 1 + 6\omega + 15\omega^2 - 83\omega - 92\omega^4 =$

المعادلة العكسية الى جذورها $\frac{1}{ri^2-1}$

Arthmatic Series : المتتابعة الحسابية *

تكون على الشكل

$\dots, a-2r, a-r, a, a+r, a+2r, \dots$

Geometric Series : المتتابعة الهندسية *

شكلها

$\dots, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2, \dots$

حيث a, r مجاهيل عندنا في حل المعادلات

سيكون مطلوب ايجادهم

17

مطلوب << إوجد المعادلة التي جذورها -- >>

من Ex: 1* to 6* السابقة

تزيد أو تقل بمقدار C عن المعادلة المعلومة

Put

$y = x \underset{\text{تقل}}{\overset{\text{تزيد}}{\pm}} C$

* الحل: قسمة تركيبية

تامة على C ثم

نزل $x - c$ وضع

y مكانها

تساوي مقلوب جذور المعادلة المعلومة

الحل

Put

$y = \frac{1}{x}$

$\boxed{\therefore x = \frac{1}{y}}$

ملاحظة: إذا وجد المقدار على هيئة $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

يجب أن يكون البسط خالي من r_i أولاً ...

تساوي مضاعفات جذور المعادلة المعلومة

الحل

Put

$y = nx$

$\boxed{\therefore x = \frac{y}{n}}$

تساوي مربعات جذور المعادلة المعلومة

الحل ⇐ يجب ألا تحتوي المعادلة على

$\ldots, x^5, x^3, x$

لذلك يتم حذفهم عن طريق:

• خلي $f(x) = 0$

$\boxed{f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots = 0}$

• تكون المعادلة

$\boxed{(x + r_1)(x + r_2) \ldots = 0}$

• نضرب المعادلتين في بعض

$\therefore (x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2) \ldots = 0$

Then Put $\boxed{x^2 = y}$

] العلاقة بين الجذور والمعاملات :

let $\overset{n}{4}$

$$\boxed{X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0}$$ has roots r_1, r_2, r_3

$\boxed{1}$ حاصل ضرب الجذور = $(-1)^n$ * الحد المطلق

حفظ

$\therefore (-1)^4 (a_0) = r_1 r_2 r_3 r_4$

$\boxed{2}$ حفظ مجموع الجذور = $(-1)^{n-1}$ معامل X^{n-1}

$$-a_3 = (a_3)(-)^{\overset{4-1=3}{n-1}} = r_1+r_2+r_3+r_4$$

$\boxed{3}$ مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى = $(-1)^{n-2}$ * معامل X^{n-2}

حفظ

$$(a_2)(-1)^2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4$$

المتتابعة الهندسية Geometris Series

$$---, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m} \xrightarrow{*m} a, am, am^2, ---$$

المتتابعة الحسابية Arthmatic Series:

$$---, a-2m \xrightarrow{+m} a-m, a, a+m, a+2m, ---$$

يعطي معادلة فيها معاملات مجهولة ويعطي علاقة بين الجذور ويطلب جذور المعادلة وقيم المجاهيل ← لابد من استخدام قوانين العلاقة بين الجذور والمعاملات السابقة.

2016 if two roots of the eqn $X^4+6X^3+rX^2+SX+$ are real حقيقية and equal twice يساوا ضعف the other two roots الجذرين الأخرين. Solve the eqn and find r, S

الحل

إذا كان جذرين من جذور المعادلة حقيقية ويساوا ضعف الجذرين الأخرين. حل المعادلة وهات r, S

let the roots are r_1, r_2 و

$2r_1$ و $2r_2$ ضعف الأولتين

(1) حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n \times$ الحد المطلق

$\therefore 2r_1^2 \; 2r_2^2 = (-1)^4 (36)$ $\div 4$

$r_1^2 r_2^2 = 9$ $\therefore \boxed{r_1 r_2 = \pm 3}$ (1)

(2) مجموع الجذور $= -$ معامل X^{n-1}

$\therefore 3r_1 + 3r_2 = -6$ $\div 3$

$r_1 + r_2 = -2 \rightarrow$ (2) $\boxed{\therefore r_1 = -2 - r_2}$

$\therefore r_1 r_2 = 3$

$\therefore (-2-r_2)r_2 = 3$

$\therefore +r_2^2 + 2r_2 + 3 = 0$

$r_2 =$ تخيلي → مرفوضة

or $r_1 r_2 = -3$

$(-2-r_2)r_2 = -3$

$-r_2^2 - 2r_2 + 3 = 0$

$r_2 = 1$ $r_2 = -3$

$\therefore r_1 = -3$ $r_1 = 1$

$\therefore$ The roots are 1 و -3 و
2 و -6 بالضعف

* لإيجاد r و S

$\because$ $x=1$ جذر كحقق المعادلة $\therefore$

$\therefore$ $1+6+r+S+36=0$ $\boxed{\therefore r+S=-43}$ ③

$x=2$ جذر $\therefore$ $16+48+4r+2S+36=0$ $\boxed{\therefore 2r+S=-S}$

$\therefore r=-7$ $S=-36$

#

*EX②: Find the roots جذور of the eqn: $x^3-3x^2-6x+8=0$ if the sum of two of it's roots (مجموع جذرين) equal to 5

أوجد جذور المعادلة إذا كان مجموع جذرين من جذورها = 5

الحل

نفرض الجذور r_1 و r_2, r_3

let $\boxed{r_1+r_2=5} \rightarrow \boxed{1}$

$\because$ مجموع الجذور = — معامل x^{n-1} = — معامل x^2

$\therefore r_1+r_2+r_3=-(-3)=+3 \rightarrow \boxed{2}$

$\therefore 5+r_3=3$ $\therefore \boxed{r_3}=3-5=\boxed{-2}$ #

$\because$ حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n * \text{الحد المطلق}$:

$\therefore r_1 r_2 r_3=(-1)^3(8)=-8$

$\therefore r_1 r_2(-2)=-8$ $\therefore \boxed{r_1 r_2=\frac{-8}{-2}=4} \rightarrow$

from $\boxed{1}$ $\boxed{r_2=5-r_1}$ $\therefore r_1(5-r_1)=4$

$\therefore 5r_1-r_1^2=4$

$5r_1 - r_1^2 = 4 \qquad \therefore 5r_1 - r_1^2 - 4 = 0$

$r_1^2 - 5r_1 + 4 = 0$

$(r_1 - 1)(r_1 - 4) = 0$

$\therefore r_1 = 1 \qquad$ or $\quad r_1 = 4$

$\therefore r_2 = 5 - r_1 = 5 - 1 = 4 \qquad r_2 = 5 - 4 = 1$

∴ الجذور هي

$1, 4, -2$

Ex③

* if The Eq$^{\underline{n}}$: $x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 52 = 0$ has a roote $= 3 + 2i$, find The other Roots and The value of a, b

"إذا كانت المعادلة لها جذر $3+2i$ أوجد باقي الجذور وقيم a,b"

$\boxed{\text{Solution}}$ ∵ $3+2i$ جذر ∴ $(3-2i)$ جذر

المعادلة من الدرجة الرابعة: أي لها أربعة جذور عندنا $\underline{2}$ باقي $\underline{2}$ نفرضهم $\underline{r_1}$ و $\underline{r_2}$

∴ مجموع الجذور $= x^{n-1}$ معامل $(-)$

$\therefore r_1 + r_2 + 3 + \cancel{2i} + 3 - \cancel{2i} = -(-3) = 3$

$\boxed{r_1 + r_2 = -3} \longrightarrow (1)$

. حاصل ضرب الجذور = الحد المطلق × $(-1)^n$

∴ $r_1 r_2 (3+2i)(3-2i) = (-1)^4 \cdot (-52)$

∴ $r_1 r_2 (9+4) = -52 \longrightarrow (2)$

from 1 ∴ $r_2 = -3 - r_1$

عوض في (2)

∴ $r_1(-3-r_1) = \frac{-52}{13} = -4$

∴ $-3r_1 - r_1^2 + 4 = 0$

$r_1^2 + 3r_1 - 4 = 0$

$r_1 = 1$ or $r_1 = -4$

$\downarrow$

∴ $r_2 = -3-1 = -4$ or $r_2 = -3+4 = 1$

∴ الجذور هي

$(2 \pm 3i)$, (1), (-4)

* لإيجاد قيم ∴ a, b

جذران للمعادلة

∴ $1, -4$ ∴ يحققان المعادلة

∴ $f(1) = 0$ ∴ $1 - 3 + a + b - 52 = 0$ ∴ $\boxed{a+b=54}$

∴ $f(-4) = 0$ ∴ $(-4)^4 - 3(-4)^3 + a(-4)^2 + b(-4) - 52 = 0$

∴ $16a - 4b = 396 \rightarrow (4)$ ∴ $a = \frac{153}{5}$, $b = \frac{117}{5}$ بحل (3) مع (4)

Ex(4): if the roots of the eqn $x^3-7x^2+cx-8=0$ in the form of a Geometric Series "Progression" متتابعة هندسية

find it's roots وجد جذورها and the value of c وقيمة c

الحل

معادلة من الدرجة الثالثة يعني لها 3 جذور نفرضهم على شكل متتابعة هندسية

$\frac{a}{m}, a, a.m$

(1) حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n$ (الحد المطلق / 1)

$\frac{a}{\cancel{m}} \cdot a \cdot a\cancel{m} = (-1)^3(-8) = +8 \longrightarrow a^3 = 8$ $\boxed{a=2}$

(2) مجموع الجذور = − معامل x^{n-1} / معامل x^2

$\therefore \frac{a}{m} + a + am = -(-7) = +7$

$\therefore \frac{2}{m} + 2 + 2m = +7$ (بالضرب $*m$)

$\therefore 2 + 2m + 2m^2 = 7m$

$2m^2 - 5m + 2 = 0 \Longrightarrow$ 2m, −1; m, −2

أو حلها بالآلة الحاسبة

$(2m-1)(m-2) = 0$

$m = +\frac{1}{2}$ $\quad$ من (1) $\boxed{a=2}$ $\quad$ $m = 2$

$\therefore$ الجذور: $\frac{a}{m} = \frac{2}{+\frac{1}{2}} = +4$

$a = 2$

$a.m = 2(+\frac{1}{2}) = +1$

$\therefore$ الجذور هي

$\frac{a}{m} = \frac{2}{2} = 1$

$a = 2$

$a.m = 2(2) = 4$

$\therefore$ الجذور هي $\boxed{1, 2, 4}$

للحصول على c: $\because x=1$ جذر للمعادلة $\therefore$ تحققها

$\therefore (1)^3 - 7(1)^2 + c(1) - 8 = 0$ $\quad \therefore 1-7+c-8=0$ $\quad \boxed{\therefore c = 14}$

EX(5)

* Find the roots of the eqn: $X^4 + X^3 - 16X^2 - 4X + 48 = 0$ if the Product (حاصل ضرب) for two of it's roots جذرين من جذورها equal to 6.

الحل

المعادلة المعطاة إذا كان حاصل ضرب جذرين من جذورها $= 6$.

المعادلة من الدرجة الرابعة :. لها ٤ جذور نفرضهم r_1, r_2, r_3, r_4

نفرض $\boxed{r_1 r_2 = 6} \rightarrow \boxed{1}$

من علاقة الجذور بالمعاملات ① حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n *$ الحد المطلق

$$\therefore \underbrace{r_1 r_2}_{6} r_3 r_4 = (-1)^4 (48) = +48$$

$$6 \cdot r_3 r_4 = 48$$

$$\boxed{\therefore \quad r_3 r_4 = \frac{48}{6} = 8} \rightarrow \boxed{2}$$

② مجموع الجذور $= -$ معامل $X^{n-1} = -$ معامل X^3

$$\boxed{\therefore r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -1} \longrightarrow \boxed{3}$$

* مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى $= (-1)^{n-2}$ معامل $X^{n-2} = \cancel{(-1)^2}$ معامل X^2

$$\therefore \underbrace{r_1 r_2}_{6} + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \underbrace{r_3 r_4}_{8} = +(-16)$$

$$6 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + 8 = -16$$

$$\boxed{\therefore r_1 (r_3 + r_4) + r_2 (r_3 + r_4) = -30} \rightarrow \boxed{4}$$

from $\boxed{3}$ $\quad r_3 + r_4 = -1 - (r_1 + r_2)$

$$\therefore r_1 [-1 - r_1 - r_2] + r_2 [-1 - r_1 - r_2] = -30$$

$$\therefore \cancel{+} r_1 \cancel{+} r_1^2 \cancel{+} r_1 r_2 \cancel{+} r_2 \cancel{+} r_1 r_2 \cancel{+} r_2^2 = \cancel{+} 30$$

$$\therefore r_1 + r_2 + 2 \underbrace{r_1 r_2}_{6} + r_2^2 = 30$$

from $\boxed{1}$ $\quad r_1 = \frac{6}{r_2}$

$$\therefore \frac{6}{r_2} + r_2 + 12 + r_2^2 = 30 \qquad * \; r_2$$

$$\boxed{\therefore r_2^3 + r_2^2 - 18 r_2 + 6 = 0} \xrightarrow{\text{نوجد}} \quad \text{ثم } r_1 \quad \text{ثم } r_3 \text{ ثم } r_4$$

حل آخر للمثال السابق (مهم)

$\therefore\ \boxed{r_1 r_2 = 6} \rightarrow \boxed{1}$

$\because$ حاصل ضرب الجذور = $(-1)^n$ * الحد المطلق

$(48)(-1)^4 =$

$\therefore\ r_1 r_2 r_3 r_4 = +48$

$\underbrace{r_1 r_2}_{6}\ r_3 r_4 = 48$

$6\, r_3 r_4 = 48 \Longrightarrow \boxed{\therefore\ r_3 \cdot r_4 = \frac{48}{6} = 8} \rightarrow \boxed{2}$

المعادلة $\boxed{1}$ بتقول إنه $r_1 \cdot r_2 = 6$ يعني r_2, r_1 هما أحد عوامل المقدار 6 $\Rightarrow \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6$

طيب عايزين نعرف r_1 بكام ، كذلك r_2 بكام

لـ الرقم اللي يحقق المعادلة $f(x)$ يبقى هو الجذر ..

$f(+1) = 1 - 1 - 16 - 4 - 48 \neq 0$

$f(+2) = 16 + 8 - 64 - 8 + 48 = 0 \Longrightarrow \boxed{\therefore\ r_1 = +2}$

$\boxed{\therefore\ r_2 = \frac{6}{r_1} = \frac{6}{2} = +3}$

بالمثل: $r_3 r_4 = 8$ يعني r_4, r_3 أحد عوامل

المقدار 8 $\Rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$f(+4) = 256 + 64 - 256 - 16 + 48 \neq 0$

$f(-4) = 256 - 64 - 256 + 16 + 48 = 0 \quad \boxed{\therefore\ r_3 = -4}$

$\therefore\ r_4 = \frac{8}{r_3} = \frac{8}{-4} = \boxed{-2}$

$\therefore$ الجذور هي

$\#\ \boxed{2, 3, -2, -4}$

$\Leftarrow$ أسهل من الحل السابق ..

تابع نظرية المعادلات

الحلول العددية للمعادلات الجبرية ▪ Numerical Methods for Solving Non Linear Eq^{n}

من المعروف أن جذر المعادلة هو الرقم الذى يحقق المعادلة

$Y = F(x)$

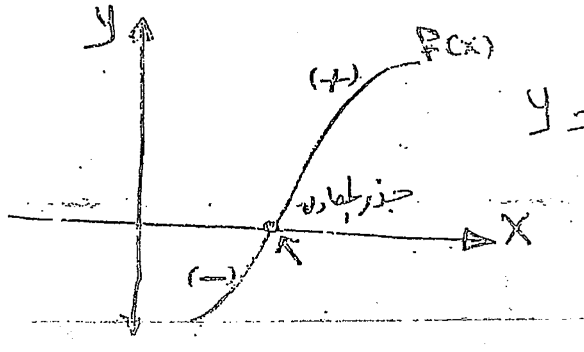
أى نحصل على $\boxed{X}$ أى هو قيمة $\Leftarrow$ التى تجعل $\boxed{Y=0}$

- من المعادلات السابقة في الحساب يعطى معادلة ونطلب جذورها ← الحل موجود في معاملات الحد المطلق
- نعوض في المعادلة بالرقم الذى يحقق ليكون جذر نقسم عليه...

- أما إذا كانت كل الأعداد لا تحقق المعادلة فإن المعادلة لا تحل بالطريقة الجبرية بل يتم حلها عددية.

- وقد يعطى معادلة غير خطية مثل $F(x) = \sin x + e^{x}$ ونطلب حلها نقوم بحلها عددياً أيضاً.

- والطريقة العددية توصل لقيمة جذور المعادلة لقيمة تقريبية. (أى أنه ليس الجذر مضبوط ولكنه قريب جداً من الحل الصحيح)

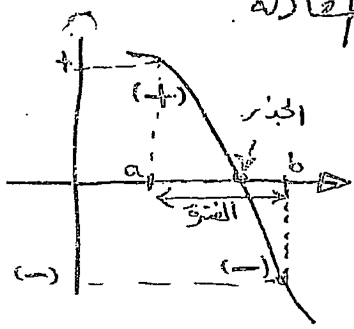


- الحل النهائي هو قيمة X التى تجعل $Y = 0$

* لحل مسألة معطاة عدديا نتبع الخطوات التالية :-

① نحدد فترة الجذر واقع بداخلها [a,b]

وذلك عن طريق : التعويض بقيم لـ X في المعادلة



حتى تتغير $f(x)$ من موجب إلى السالب

والعكس (تكون أول قيمتين لـ X هي [a,b])

② نفرض قيمة ابتدائية للجذر المطلوب ولتكن (X_0)

ونأخذها منتصف الفترة [a,b]

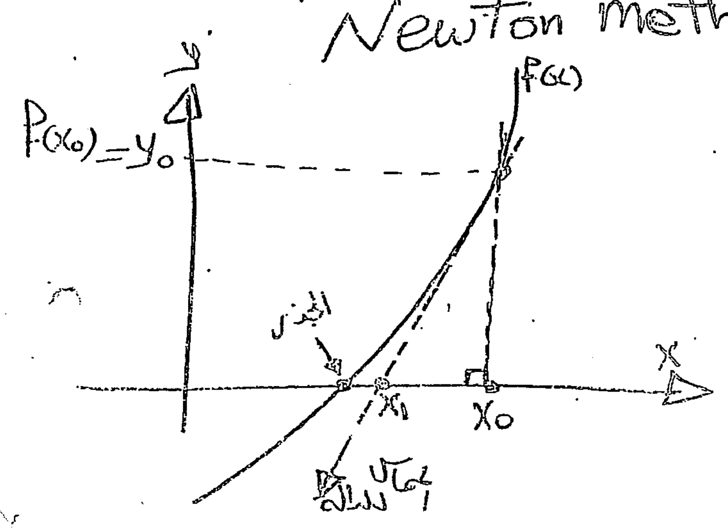
$$X_0 = \frac{b+a}{2}$$

③ نوجد قيمة أفضل للجذر أي أقرب للجذر الفعلي

أي نقوم بعمل تحسين لـ X_0 لتصل إلى رقم أقرب للحقيقة

وذلك عن طريق الطرق العددية الآتية :-

1 طريقة نيوتن "Newton method"



نفرض أن نقطة تقاطع المماس

لمنحنى الدالة $f(x)$

عند النقطة $(X_0 , f(X_0))$ مع محور X

هي جذر المعادلة الأقرب للصحيح

(X_1)

وتكون نقطة تقاطع الميل مع محور X هي النقطة X_1

إحداثيها $(X_1, 0)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = المشتقة الأولى = الميل ∴

$$\therefore f'(X_0) = \frac{f(X_0)}{X - X_0} = \frac{0 - f(X_0)}{X_1 - X_0}$$

مجموعة ستتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\therefore X_1 - X_0 = -\frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$$

$$\therefore \boxed{X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}}$$ ← قيمة أقرب للجذر

وبنفس الطريقة نقوم بعمل مماس آخر من عند النقطة X_1 يقطع هنا محور X عند نقطة (X_2) وهي قيمة أقرب من X_1 وهكذا نكرر هذه العملية n مرة

$$\therefore \boxed{X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}}$$ ← القانون المستخدم لتحسين الجذر

حفظ

$n = 0, 1, 2, 3, \dots\dots$

أي إيجاد قيمة أقرب للجذر .

Examples: Using Newton Method to Solve:

① $x^3 - 3x + 1 = 0$ Solution

$f(x) = x^3 - 3$

نوجد فترة يقع خلالها الجذر

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow +ve$

$x = 1 \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow -ve$

∴ الإشارة لـ $f(x)$ تغيرت خلال تغير x من ٠ إلى ١

$\therefore [a, b] = [0, 1]$ $\therefore x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ * القانون

$, n = 0, 1, 2, \ldots$

$\because f(x) = x^3 - 3x + 1$ $\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$

نعوض في القانون

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

$n = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 1}{3x_0^2 - 3} =$

$$= 0.5 - \frac{(1/2)^3 - 3(1/2) + 1}{3(1/2)^2 - 3} = 0.333$$

$\boxed{n=1}$ $\therefore X_2 = X_1 - \dfrac{x_1^3 - 3x_1 + 1}{3x_1^2 - 3}$

$\therefore X_2 = 0.333 - \dfrac{(0.333)^3 - 3(0.333) + 1}{3(0.333)^2 - 3} = 0.347$

$\boxed{n=2} \rightarrow X_3 = X_2 - \dfrac{x_2^2 - 3x_2 + 1}{3x_2^2 - 3}$

$= 0.347 - \dfrac{(0.347)^3 - 3(0.347) + 1}{3(0.347)^2 - 3} = 0.3473$

$\therefore X \cong 0.3473$ القيم تقترب من بعض

---

(2) $f(x) = 2^x - 5x + 2$ solution

$f(0) = 1 - 0 + 2 = 3$ +ve

$f(1) = 2 - 5 + 2 = -1$ −ve $\rightarrow [a,b] = [0,1]$

$x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\because f(x) = 2^x - 5x + 2$

$f'(x) = 2^x . \ln(2) - 5$

$\therefore \boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{2^{x_n} - 5x_n + 2}{2^{x_n} \ln(2) - 5}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\underline{n=0}$ $\therefore$ $X_1 = x_0 - \dfrac{2^{x_0} - 5x_0 + 2}{2^{x_0} \ln 2 - 5}$

$X_1 = 0.5 - \dfrac{2^{0.5} - 5(0.5) + 2}{2^{0.5} \ln 2 - 5} = 0.727$

$\underline{n=1}$ $\therefore$ $X_2 = X_1 - \dfrac{2^{X_1} - 5X_1 + 2}{2^{X_1} \ln 2 - 5}$

$\therefore X_2 = 0.727 - \dfrac{2^{0.727} - 5(0.727) + 2}{2^{0.727} \ln 2 - 5} = 0.732$

$\underline{n=2}$ $\therefore X_3 = X_2 - \dfrac{2^{X_2} - 5X_2 + 2}{2^{X_2} \ln 2 - 5} = 0.732$

$\therefore \boxed{X \simeq 0.73}$

$\boxed{3}$ $f(x) = X^{X^2} - 6 = 0$ Solution

$f(1) = 1^{1^2} - 6 = -5$ (-ve)

$f(2) = 2^{2^2} - 6 = 16 - 6 = 10$ +ve

$\rightarrow [a,b] = [1,2]$

$x_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

نجيب المشتقة الأولى $\leftarrow f'(x)$

$$f(x) = x^{x^2} - 6 = u - 6 \qquad \Rightarrow u = x^{x^2}$$

$$\ln u = \ln x^{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = u'$$

$$\frac{1}{u} \cdot u' = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (2x)$$

$$\therefore f'(x) = x^{x^2}\left[x + 2x\ln x\right] \Leftarrow u' = x^{x^2}\left[x + 2x\ln x\right]$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{x_n^2} - 6}{x_n^{x_n^2}\left[x_n + 2x_n \ln x_n\right]}$$

$\underline{n=0} \Rightarrow$ $$x_1 = x_0 - \frac{x_0^{x_0^2} - 6}{x_0^{x_0^2}\left[x_0 + 2x_0 \ln x_0\right]} = 2.019$$

$\underline{n=1} \Rightarrow$ $$x_2 = x_1 - \frac{x_1^{x_1^2} - 6}{x_1^{x_1^2}\left[x_1 + 2x_1 \ln x_1\right]} = 1.884$$

$\underline{n=2} \Rightarrow$ $$x_3 = x_2 - \frac{x_2^{x_2^2} - 6}{x_2^{x_2^2}\left[x_2 + 2x_2 \ln x_2\right]} = 1.798$$

$n=3 \Rightarrow$ $$x_4 = x_3 - \frac{x_3^{x_3^2} - 6}{x_3^{x_3^2}\left[x_3 + 2x_3 \ln x_3\right]} = 1.773$$

$$\boxed{\therefore x \simeq 1.773}$$

3 الطريقة التكرارية البسيطة :

Simple Itterative Method :

معطى $x_0 = 0$

نجعل أحد الـ X منفرداً في طرف مساوياً لـ X ات في الطرف الآخر

وتكون المعادلة المعطاة على الشكل

$$\boxed{X = \Phi(x)}$$

أحد X ات   باقي X ات

بشرط $\boxed{|\Phi'(x_0)| < 1}$ لازم يتحقق

وإذا لم يتحقق نختار في طرف المعادلة الآخر هو $\Phi(x)$ جديد ونطبق عليها الشرط

الحل :

$$X_{n+1} = \Phi(x_n) \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

يعني

$n = 0 \rightarrow X_1 = \Phi(x_0)$

$n = 1 \rightarrow X_2 = \Phi(x_1)$

وهكذا

* Examples:- Using simple Itterative method to Evaluate a root to the eqn:

$f(x) = x^3 - 7x + 4 = 0$ (Solution)

ﺧ كل الطرق نجيب الاول

$f(0) = +4$

$f(1) = 1 - 7 + 4 = -2$ $\longrightarrow [0,1]$ $\therefore x_0 = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = \boxed{x^3 - 7x + 4 = 0}$

let $7x = x^3 + 4$

$\therefore x = \frac{1}{7}(x^3 + 4) \longrightarrow \phi(x)$

بس لازم نحقق الشرط الاول

$\phi'(x) = \frac{1}{7}(3x^2)$ $\therefore |\phi'(x_0)| = \left|\frac{1}{7}(3(\frac{1}{2})^2)\right| = 0.107 < 1$

الشرط متحقق .

$\therefore \boxed{x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{1}{7}(x_n^3 + 4)}$

$n=0$ $x_1 = \frac{1}{7}(x_0^3 + 4) = \frac{1}{7}((\frac{1}{2})^3 + 4) = 0.589$

$n=1$ $x_2 = \frac{1}{7}(x_1^3 + 4) = \frac{1}{7}((0.589)^3 + 4) = 0.6007$

$n=2$ $x_3 = \frac{1}{7}(x_2^3 + 4) = \frac{1}{7}((0.6007)^3 + 4) = 0.602$

$\therefore x \simeq 0.602$ #

② $\sin(x) + \frac{x}{2} - 1 = 0$ (Solution)

$f(0) = \sin(0) + 0 - 1 = -1$

$f(1) = \sin\left(1 \times \frac{180}{\pi}\right) + \frac{1}{2} - 1 = 0.34$

$\rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

let $\frac{x}{2} = 1 - \sin(x)$

$x = 2(1 - \sin x) \rightarrow \phi(x)$

نشوف هل الشرط محقق أم لا

$\phi'(x) = 2(-\cos x)$

$|\phi'(x_0)| = 2\left|\cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{180}{\pi}\right)\right| = 1.755 > 1$

الشرط مش متحقق

∴ نرجع للـ (أ) ونختار X تانية غير الأولى :

$\because \sin(x) + \frac{x}{2} - 1 = 0$

$\therefore \sin(x) = 1 - \frac{x}{2}$

$\therefore x = \sin^{-1}\left[1 - \frac{x}{2}\right] \rightarrow \phi(x)$

$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$

$\phi'(x_0) = \frac{-1/2}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1/2}{2}\right)^2}} = 0.756 < 1$

الشرط محقق

* تابع الحلول العددية للمعادلات الجبرية *

Golden Section Search Method:-

هذه الطريقة تشبه طريقة (Bisection) ولكن نقوم بتقسيم الفترة [a,b] إلى ثلاث أجزاء كما بالرسم.. →

a V W b

$$\boxed{\begin{aligned} V &= a + (b-a)K_1 \\ W &= a + (b-a)K_2 \end{aligned}}$$

احفظ

$K_1 = 0.382$

$K_2 = 0.618$

ونوجد بعد ذلك

$f(a)$ و $f(b)$, $f(v)$, $f(w)$

ونقوم بحذف أحد الفترات على حسب إشارة الدالة f

مثال ex. →

$f(a)$ + , $f(v)$ − , $f(w)$ − , $f(b)$ −

a V W b

∴ نحذف الفترة (w-b) ونشتغل على باقي الفترة وهي

a ——— w

↓

يبقى اسمها b الجديدة

← نقوم بتقسيم هذه الفترة الجديدة مرة أخرى ونوجد V, W جديدة

— ونشوف إشارة $f(a), f(b), f(v), f(w)$ ونزيل أحد الفترات ونشتغل على باقي الفترة وهكذا ...

$$\therefore \phi(x_n) = \boxed{x_{n+1} = \sin^{-1}\left(1 - \frac{x}{2}\right)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$n = 0$ $\quad \therefore x_1 = \phi(x_0) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{x_0}{2}\right) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1/2}{2}\right)$

$$\therefore x_1 = 48.59^\circ * \frac{\pi}{180} = \underline{0.8481}$$

لتحويل لراد

$n = 1$ $\quad \therefore x_2 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{x_1}{2}\right) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.8481}{2}\right)$

$$x_2 = 35.17 * \frac{\pi}{180} = 0.613$$

$n = 2$ $\quad x_3 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.613}{2}\right) = 43.88 * \frac{\pi}{180} = 0.766$

$n = 3$ $\quad x_4 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.766}{2}\right) = 38.1 * \frac{\pi}{180} = 0.665$

$n = 4 \Rightarrow x_5 = \sin^{-1}\left(1 - \frac{0.665}{2}\right) = 41.87 * \frac{\pi}{180} = 0.73$

$$\therefore x \simeq 0.73$$