Examples

Prove that

$$\boxed{1}\quad \sum_{r=1}^{\infty \text{ أو } n} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Solution

~~① at n=1~~

العلاقة المطلوب إثباتها هي :

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

① at $\boxed{n=1}$

$$\left.\begin{aligned} L.H.S. &= \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\ R.H.S &= 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

العلاقة صحيحة عند $n=1$

② at $\boxed{n=k}$ Let

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

③ at $\boxed{n=k+1}$ R.T.P

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$L.H.S. = \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}}_{\text{From ②}} + \underbrace{\frac{k+1}{(k+2)!}}_{\text{تنزل كما هي}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+2)(k+1)!}\right]$$

عامل مشترك

$$\boxed{(n+1)! = (n+1)\, n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!}\left[1 - \frac{k+1}{k+2}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{\cancel{k}+2-\cancel{k}-1}{(k+2)}\right]$$

اختصرناها

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{1}{k+2}\right] = 1 - \frac{1}{(k+2)} = R.H.S \quad \#$$

Ex 2 $\frac{8}{3*5} - \frac{12}{5*7} + \frac{16}{7*9} + \cdots$ to n terms

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$$

Solution

الحد العام من L.H.S. مش مكتوب : نستنتجه أولاً

العلاقة هي :

$$\frac{8}{3*5} - \frac{12}{5*7} + \frac{16}{7*9} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot (n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

① at $n=1$ $\quad L.H.S = \frac{(-1)^{2} \cdot 4 \cdot (2)}{3*5} = \frac{8}{15}$

$$R.H.S = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{1}}{2+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n=1$

② let $\boxed{n=k}$

$$\frac{8}{3*5}-\frac{12}{5*7}+\frac{16}{7*9}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4\cdot(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}$$

③ at $\boxed{n=k+1}$ R.T.P.

$$\frac{8}{3*5}-\frac{12}{5*7}+\frac{16}{7*9}+\cdots+\frac{(-1)^{k+2}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k}}{2k+5}$$

$$L.H.S=\boxed{\frac{8}{3*5}-\frac{12}{5*7}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}}$$

from (2)

المقابلة هو

$$+\frac{(-1)^{k+2}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

بنزل زي ما هو

$$=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+3)}+\frac{(-1)^{k+2}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}+\frac{(-1)^{k-1}\,\cancel{(-1)^3}^{\,-1}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

لاحظ: $(-1)^{k+2}=(-1)^{k-1}\cdot(-1)^{3}$

في حالة الضرب بنجمع الأسس ولو الأسس مجمعة ممكن نوزع عادي

$$\therefore L.H.S = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}\left[1 - \frac{4(k+2)}{2k+5}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}\left[\frac{2k+5-4k-8}{(2k+5)}\right]$$ = توحيد المقامات

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}\left[\frac{-2k-3}{2k+5}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k}}{\cancel{2k+3}} \cdot \frac{\cancel{2k+3}}{2k+5} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k}}{2k+5}$$

$$= R.H.S \quad \#$$

Ex. $\boxed{3}$ Prove ~~that~~ $7 + 3^{2n}$ is divisible by (8) $\forall\ n \geq 1$

(اثبت أن $7+3^{2n}$ تقبل القسمة على 8 لكل قيم $n \geq 1$)

الحل

لكي تقبل القسمة على 8 لابد أن يكون ناتج القسمة عدد صحيح أي أن

$\boxed{\text{المقسوم = عدد صحيح * المقسوم عليه}}$

* at $n = 1$ $\qquad \dfrac{7 + 3^{2(1)}}{8} =$ ناتج عدد صحيح + (الباقي = 0) $\qquad$ مطلوب إثبات أن

لاحظ: 5 لا تقبل القسمة على 2 لأن $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ الباقي $\neq 0$

$\because \dfrac{7 + 3^2}{8} = \dfrac{7+9}{8} = \dfrac{16}{8} = 2 \rightarrow$ عدد صحيح

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n=1$

* at $n = k$ let $\dfrac{7 + 3^{2k}}{8} = r$ عدد صحيح Integer number

يعني

* $\boxed{7 + 3^{2k} = 8r}$

* at $n = k+1$ R.T.P. $\dfrac{7 + 3^{2(k+1)}}{8} =$ أي عدد صحيح وليكن $= M$

يعني مطلوب إثبات

$\boxed{7 + 3^{2k+2} = 8M}$

$L.H.S. = 7 + 3^{2k+2} = 7 + 3^{2k} \cdot 3^2 = 7 + 3^{2k} \cdot 9$

من رقم ② نوجدها فقط حيث أن المقدار السابق مش موجود كله في ②
فنأخذ اللي موجود وخلاص

$\because 3^{2k} = 8r - 7$

$\therefore L.H.S. = 7 + (8r-7) \cdot 9$

$= 7 + 72r - 63$

$= 72r - 56 = 8\,[9r - 7]$ عدد صحيح

$= 8\,[\text{عدد صحيح}] = 8 \cdot M = R.H.S$

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n المختلفة

Ex: Prove that:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \quad , \quad n>1$$

Solution

① $n=2$ $\quad L.H.S=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1.707$

$$R.H.S=\sqrt{2}=1.4$$

$$\therefore L.H.S > R.H.S$$

② $\boxed{n=k}$ let

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

③ $n=k+1$ R.T.P.

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}>0$$

$$L.H.S=\boxed{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{k}}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}$$

العلاقة رقم ② بتقول ان
دة كبير عن $\sqrt{k}$

∴ لو شلناه وحطينا مكانه $\sqrt{k}$ فإن الـ L.H.S. يكون أكبر منه

$$\therefore L.H.S>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}$$

$$L.H.S > \frac{\sqrt{k^2+k} \cancel{+1} - k \cancel{-1}}{\sqrt{k+1}}$$

$$L.H.S > \frac{\sqrt{k^2+k} - k}{\sqrt{k+1}} \qquad k \rightarrow \sqrt{k^2}$$

$$L.H.S > \frac{\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2}}{\sqrt{k+1}}$$

$\because \sqrt{k^2+k} > \sqrt{k^2}$ و $\sqrt{k+1} > 0$

دائماً الجذر يطلع موجب

$\therefore R.H.S > 0$

$$\boxed{\therefore L.H.S > 0}$$

* Report :- Prove that :-

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ (تم حله سابقاً)

(*) Prove that : to n termes

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Proof :- (1) let $\boxed{n=1}$

$$L.H.S.=\frac{1}{1*3}=\frac{1}{3}$$

$$R.H.S=\frac{1*\cancel{2}}{\cancel{2}*3}=\frac{1}{3}$$

L.H.S = R.H.S

(2) at $\boxed{n=K}$ let $\boxed{\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\dots+\frac{K^2}{(2K-1)(2K+1)}=\frac{K(K+1)}{2(2K+1)}}$

افترض أن صحيحة مع استخدامه
في رقم (3)

(3) at $\boxed{n=K+1}$ مطلوب إثبات أن

$$\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\dots+\frac{K^2}{(2K-1)(2K+1)}+\frac{(K+1)^2}{(2K+1)(2K+3)}=\frac{(K+1)(K+2)}{2(2K+3)}$$

from (2)

$$L.H.S.=\frac{K(K+1)}{2(2K+1)}+\frac{(K+1)^2}{(2K+1)(2K+3)}$$

$$\therefore L.H.S = (k+1)\left[\frac{k(2k+3)+2k+2}{2(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{2k^2+3k+2k+2}{2(2k+1)(2k+3)}\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{\cancel{(2k+1)}(k+2)}{2\cancel{(2k+1)}(2k+3)}\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

Report ②: Prove that:

$$S_n = \frac{1^2}{1*3} + \frac{2^2}{3*5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

* Prove that Using Mathematical Induction

اثبت بالاستنتاج الرياضي أن

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Proof :- (1) at $\boxed{n=1}$ L.H.S. $= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^1$

R.H.S. $= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

(2) at $\boxed{n=k}$ نفترض أن العلاقة الآتية صحيحة :

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$$

(3) at $\boxed{n=k+1}$ نريد أن نثبت أن العلاقة الآتية صحيحة

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos (k+1)x & -\sin (k+1)x \\ \sin (k+1)x & \cos (k+1)x \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^k}_{\text{From (2)}} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\therefore L.H.S. = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

where :-

$$A = \cos kx \cdot \cos x - \sin kx \cdot \sin x = \cos(k+1)x$$

$$B = -\cos kx \cdot \sin x - \sin kx \cdot \cos x = -\sin(k+1)x$$

$$C = \sin kx \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos kx = \sin(k+1)x$$

$$D = -\sin kx \cdot \sin x + \cos kx \cdot \cos x = \cos(k+1)x$$

$$\therefore L.H.S = \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix} = R.H.S.$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

∴ لاحظ

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \sin B \cdot \cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

* Strong Math. Induction "S.M.I.P."

ذكرنا من قبل مبادئ الاستنتاج الرياضي، فإذا وجد على سبيل
المثال المصطلح الرياضي (العلاقة) $C(n)$ حيث n عدد ينتمي للأعداد الطبيعية

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$

* لإثبات صحة هذا المصطلح نقوم بنفس الخطوات السابقة

① نثبت صحة العلاقة عند $\boxed{n=1}$

② نفرض صحة العلاقة عند $\boxed{n=K}$

③ نثبت صحة العلاقة عند $\boxed{n=K+1}$ باستخدام ②.

Examples [1] for the forbinus Method, has the recurence relation $f_0 = f_1 = 1$ و $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Use "S.M.I.P." To Prove that:

$$f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

"Solution"

مطلوب إثبات أن $f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ حيث أن العلاقة الرياضية هي
$C_n = f_n$
وهي تسمى "recurence relation" لطريقة حل معادلات تفاضلية "فيما بعد"

طريقة الحل:

① at $n=0$ $\quad C_0 = f_0 = \overset{\text{معطى}}{1} = L.H.S$

$R.H.S. = \left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1$ $\quad$ ∴ العلاقة صحيحة عند $n=0$

at $n=1$ $\quad L.H.S. = f_1 = 1$ ← معطى

$R.H.S = \left(\frac{7}{4}\right)^1$ $\quad 1 < \frac{7}{4}$ ∴ صحيحة عند $\boxed{n=1}$

② at $n=k$ let افرض $\boxed{f_k \le \left(\frac{7}{4}\right)^k}$

③ at $n=k+1$ R.T.P. $\boxed{f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}}$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

dsf أعطى لاحظ

ضع

$n = k+1$

$\therefore f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$

$\therefore f_k \le \left(\frac{7}{4}\right)^k$

$, \; f_{k-1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$

سننزل الصغير ونضع بدلاً منه مقدار كبير

$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$

$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^1 + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$

$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left[\frac{7}{4} + 1\right]$

$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{11}{4} = \frac{44}{16}\right) \longrightarrow$ عند إضافة أي رقم للبسط يجعل R.H.S هو الكبير زي ما هو وتكون أيضاً

$f_{k+1} \le$

ضفنا 5

$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{44+5}{16}\right)$

$f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{49}{16}\right)$ $\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{7}{4}\right)^2$

$\boxed{\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}}$ وهو المطلوب إثباته

//

[2] Prove that $n! \geq n^2 \quad \forall\, n \geq 4$

الحل

① at $\underline{\underline{n=4}}$

$L.H.S. = 4! = 4.3.2.1 = 24$

$R.H.S = (4)^2 = 16$

$\therefore L.H.S > R.H.S$ at $n=4$

② $n=k$ let $\boxed{k! \geq k^2}$, $k \geq 4$

③ at $n=k+1$ R.T.P. $(k+1)! \geq (k+1)^2$

$L.H.S. = (k+1)! = \underbrace{(k+1)}\ \underbrace{(k)!}_{\text{from ②}}$

$L.H.S. \geq (k+1)\ k^2$

نعوض أكبر

$\because k^2 > (k+1) \quad \forall\, k \geq 4$

$\therefore L.H.S \geq (k+1)(k+1)$

$L.H.S \geq (k+1)^2$

[3] $(1+x)^n \geq 1+nx \quad , \quad x \geq -1 \quad , \forall \; n \in N$

الحل

① at $n=1$

$L.H.S = 1+x$

$R.H.S = 1+x$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

لو جه علامة تساوي في المتباينة

② $n=k$ let $\boxed{(1+x)^k \geq 1+kx}$

③ at $n=k+1$ R.T.P. $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$$L.H.S = (1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{\text{نشيله ونضع الأكبر منه في ②}} (1+x)^1$$

$\therefore L.H.S \geq (1+kx) \cdot (1+x)$

$L.H.S \geq 1+x+kx+kx^2$

$L.H.S \geq 1+(k+1)x + \underbrace{kx^2}$

الكبير $\leftarrow$ L.H.S

$\therefore$ عند إزالة جزء من الكبير يظل LHS أكبر أيضاً عن الشيء الصغير

$\therefore L.H.S \geq 1+(k+1)x$

---

report. Prove that: $3n^5+5n^3+7n$ is divisible by 15 $\forall \; n \in N$.

Center Share
Center Share
Center Share

* if $S_0 = 0$, $S_1 = 4$, $\boxed{S_n = 6S_{n-1} - 5S_{n-2}}$ ⊛

معطيات

Using (S.M.I.P.) to Prove that: $\boxed{S_n = 5^n - 1}$, $\forall n \geq 2$

Proof: at $n=2$ L.H.S $= S_2 = 6\underset{4}{\cancel{S_1}} - 5\underset{0}{\cancel{S_0}} = 24$ عوضنا في ⊛

R.H.S $= 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ L.H.S = R.H.S at $n=2$

at $n=k$ let: $S_k = 5^k - 1$

(S.M.I.P) $S_{k-1} = 5^{k-1} - 1$

at $n=k+1$ R.T.P. $S_{k+1} = 5^{k+1} - 1$

L.H.S $= S_{k+1} = 6S_k - 5S_{k-1}$ هاتها من ⊛

$= 6[5^k - 1] - 5[5^{k-1} - 1]$

$= 6\cdot 5^k - 6 - 5^k + 5$

$= 5\cdot 5^k - 1 = 5^{k+1} - 1$ R.H.S #

report: Prove that using (M.I.), $\cos(n\theta)$ is a Polynomial شيء of degree (n) in X $\boxed{x \text{ في}}$ where $X = \cos\theta$. Proof

$$\boxed{P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 = 0}$$

لاحظ أن كثيرة الحدود من الدرجة n في المتغير X تكون على الشكل

Prove that using (M.I.):

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n$$

$\boxed{\text{Proof}}$

* at $n=1$ $\quad L.H.S = 1^2 = 1$ عوض ع الحد العام وشوفه هيوقفك عند أى حد

$L.H.S = 1^2 \therefore 1^2 =$ الحد الأول . ف هذا المثال وقفنا عند الحد الأول

عوضنا مباشرة $R.H.S = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1$

$\therefore L.H.S. = R.H.S$ $\quad n=1$ العلاقة صحيحة عند $\therefore$

* at $n=K$: let نفرض : $1^2+2^2+3^2+\dots+K^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$

نضع $n=K$ ف العلاقة المعطاة

فرضنا ان العلاقة صحيحه وسنستخدمها ف الخطوة الثالثة لازم

3* at $n=K+1$: Require To Prove (R.T.P.) مطلوب اثبات

ضع $n=K+1$ بين الأقواس $\quad 1^2+2^2+3^2+\dots+(K+1)^2=\frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$

$2(K+1)+1 = 2K+2+1 = 2K+3$

ف الخطوة الثالثة "دائماً" نأخذ L.H.S لوحدة ونشتغل عليه وناول نوصله للـ R.H.S

$\therefore L.H.S = 1^2+2^2+3^2+\dots+(K+1)^2$

نقف بعد حدود قبله نكتب بعض

$$= \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+(K)^2}_{\text{موجودين ف الخطوة ② } \therefore \text{ نضع قيمتها}}+\underbrace{(K+1)^2}_{\text{زيادة ينزل زى ماهو}}$$

$$= \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}+(K+1)^2 = (K+1)\left[\frac{K(2K+1)}{6}+\frac{(K+1)}{1}\right]$$

$$= (K+1)\left[\frac{K(2K+1)+6(K+1)}{6}\right] = (K+1)\left[\frac{2K^2+K+6K+6}{6}\right]$$ جمع المتشابه ,

$$=(K+1)\left[\frac{2K^2+7K+6}{6}\right] = \frac{(K+1)(2K+3)(K+2)}{6} = R.H.S$$

يحلل

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n #

Prove that: $\sum_{r=1}^{n} r\cdot(r!) = (n+1)! - 1$

الحل : فك الأول

ضع $r=1$ وعوض + $r=2$ وعوض + --- + $r=n$ وعوض

$$\boxed{\ldots) + 2*(2!) + 3*(3!) + \cdots + (n)*(n)! = (n+1)! - 1}$$

$\boxed{1}$ L.H.S. $= 1*1! = 1$
R.H.S $= (2)! - 1 = 1$ } العلاقة صحيحة عند $n=1$

let

$$\ldots!) + 2*(2!) + 3*(3!) + \cdots + k*(k!) = (k+1)! - 1$$

$= k+1$ R.T.P.

$$\ldots 2(2!) + 3\cdot(3!) + \cdots + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$$

$$\underbrace{1! + 2\,2! + 3\,3! + \cdots + k(k)!}_{\text{from (2)}} + \underbrace{(k+1)(k+1)!}_{\text{كما هي}}$$