النهايات . the Limits

مطلوب $\lim_{x \to x_0} f(x)$

"العدد الذي تقترب منه x"

بمعنى: عندما تقترب x من القيمة x_0 جدا"

فإلى أين تقترب قيمة الدالة $f(x)$

الحل ← عوض التعويض مباشر في الدالة $f(x)$ بكل $x \Leftarrow x_0$

إذا أعطى

- $+\infty$ النهاية غير موجودة #
- $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ نستخدم التبسيط (تحليل - اختصار) - قواعد النهايات
- قيمة معينة تكون هي النهاية ≠ صفة القيمة

(حفظ)

* قواعد النهايات . نهاية إثبات عند الصفر

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \rightsquigarrow \lim_{\square \to 0} \frac{\tan \square}{\square} = 1$

3) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = \text{Euler No.} = 2.71828$ عدد أويلر

4) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ عدد

5) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a.n} = e^a$

6) $\lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{g(x)} = e^M$ عدد ← قاعدة مهمة

where (1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ } شروط
(2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$
(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = M \longrightarrow \lim = e^M$

لاحظ الآتي

[1] $\lim_{X\to 0} \frac{\sin(aX)}{X} = a$

[2] $\lim_{X\to 0} \frac{\tan(aX)}{X} = a$

---

e = Euler Number عدد أويلر $= 2.71828$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{X\to X_0} [1+f(x)]^{g(x)}$$

إذا طلب

وكان

$\lim_{X\to X_0} f(x) = 0$

$\lim_{X\to X_0} g(x) = \infty$

شروط القاعدة

$\Rightarrow \lim f(x)\cdot g(x) = m$ أي عدد

$\therefore \lim (1+f(x))^{g(x)} = e^m$ #

لاحظ: النهايات تتوزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة والأسس

* $\lim_{X\to X_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{X\to X_0} f(x) \pm \lim_{X\to X_0} g(x)$

* $\lim_{X\to X_0} (f(x))^n = \left(\lim_{X\to X_0} (f(x))\right)^n$

* $\lim_{X\to X_0} (\ln f(x)) = \ln\left(\lim_{X\to X_0} f(x)\right)$

Examples:- Evaluate the following limits:-

1 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ ← توحيد المقامات

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \Rightarrow$ لقسمة البسط والمقام على n

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^1} = e$

طريقة أخرى:

$f = \frac{1}{n+1}$

$*\lim_{n\to\infty} f = \frac{1}{\infty} = 0$

$*\lim_{n\to\infty} g = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

$*\lim_{n\to\infty} f\cdot g$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ ÷n

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ ($\frac{1}{n}\to\frac{1}{\infty}=0$)

$\therefore \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e^1$

2 $\lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}\right)$

رمز خصائص دالة Ln:

$\ln(A)+\ln(B) = \ln(A\cdot B)$

$\ln(A)-\ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$\therefore \lim = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

يدل Ln ↔ Lim — تعويض مباشر

$= \ln\left[(1+\frac{1}{\infty})\right]_{\frac{1}{\infty}=0} = \ln(1) = 0$

$\lim(\ln f(x)) = \ln(\lim f(x))$

عكس خاصية

[3] $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\tan x}{x}\cdot x}$ ($\frac{\tan 5x}{5x} \to 1$, $\frac{\tan x}{x} \to 1$)

$= \frac{1*5}{1*1} = 5$

---

[4] $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right]^2$

$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ($\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \to 1$)

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

---

[5] $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^1$

($\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n \to e^1$ نظرية; $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^1$ لتعويض مباشر)

$= 1+\frac{1}{\infty} = 1+0 = 1$

$= e^1 \cdot 1 = e$

---

[6] $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+8}\right)^{x+4} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+8-8-2}{x+8}\right)^{x+4}$

$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-10}{x+8}\right)^{x+4}$ ($\frac{-10}{x+8} \to f(x)$, $x+4 \to g(x)$)

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{-10}{\infty} = 0$

(2) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty+4 = \infty$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-10(x+4)}{x+8}$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-10x-40}{x+8}$$

بالقسمة على x ذات أكبر أس

$(x^1) \leftarrow$ (5)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-10x}{x} - \frac{40}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{8}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-10 - \frac{40}{x}}{1 + \frac{8}{x}} \longrightarrow \text{تعويض مباشر}$$

$$= \frac{-10 - \frac{40}{\infty}\to 0}{1 + \frac{8}{\infty}\to 0} = \frac{-10}{1} = -10$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+8}\right)^{x+4} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

---

7 $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ← الأس دالة (دالة)

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\therefore \text{Put } \cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim \left[1 + \underbrace{(-2\sin^2\tfrac{x}{2})}_{f(x)}\right]^{\frac{1}{x^2}\ \to\ g(x)}$$

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (-2\sin^2\frac{x}{2}) = -2\sin(0) = 0$

2) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$

3) $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

(6)

$$\therefore \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

Solve $\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{3n}{5n^2 - 8n + 1}\right]^{4n-5}$$

$\hookrightarrow (1+f(x))^{g(x)}$, $g(x) \to \infty$, $f(x) \to 0$ بدون تحديد

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

Evaluate: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(1+x-\cos x)\right]^{\frac{1}{x}}$

Solution

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+1-\frac{\cos x}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{f}\right]^{\frac{1}{x}\to g}$$

$\Rightarrow$ Put $\cos x = 1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2(x/2)}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

($\sin\left(\frac{x}{2}\right)\to 0$, $\frac{1}{x}\to\frac{1}{2}$)

$\sin(0)=0$

مجموعة سنتر شير
للخدمات الطلابية
كلية الهندسة

$$\lim_{x\to 0} g = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} f\cdot g = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x} = \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(1+x-\cos x)\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}} \quad \#$$

2) $\lim_{X\to\pi} \frac{\sin 3X}{\sin 2X}$ (Solution)

$= \lim_{X\to\pi} \frac{\sin(2X+X)}{\sin(2X)} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(2X)\cos X + \sin(X)\cos 2X}{\sin 2X}$

$= \lim_{X\to\pi} \cos X + \lim_{X\to\pi} \frac{\sin X \cdot \cos(2X)}{\sin 2X}$

$= \cos(\pi) + \lim_{X\to\pi} \frac{\sin X \cdot \cos 2X}{2\sin X \cdot \cos X}$

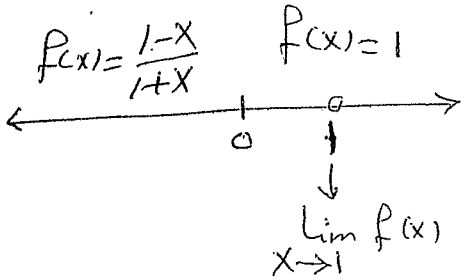
$= -1 + \lim_{X\to\pi} \frac{\cos 2X}{2\cos X} = -1 + \frac{\cos(2\pi)}{2\cos(\pi)}$ ($\cos(2\pi) \to 1$, $\cos(\pi) \to -1$)

$= -\frac{3}{2}$ #

3) $\lim_{X\to 0} \frac{1-X}{1-|X|}$ تعويض مباشر $= \frac{1-0}{1-0} = 1$ #

4) $\lim_{X\to 1} \frac{1-X}{1-|X|} = \frac{0}{0}$ $\Longrightarrow \because |X| = \begin{cases} X & X \geq 0 \\ -X & X < 0 \end{cases}$

$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1-X}{1-X} = 1 & X \geq 0 \\ \frac{1-X}{1+X} & X < 0 \end{cases}$



$\therefore \lim_{X\to 1} f(x) = \lim_{X\to 1} (1) = 1$ #

5) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ ⟵ الحل Put $\cos 2x = 1-2\sin^2(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2(x))}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1$

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

6) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^3+3x-1)}{x-2} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^3+3x-1)}{(x-2)}$$

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

$$= \frac{(2+2)(8+6-1)}{1} = (4)(13) = 52$$

7) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[1-\underbrace{\frac{3n}{5n^2-8n+1}}_{f}\right]^{\overbrace{4n-5}^{g}}}$ Solution

$$\lim_{n\to\infty} f = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{5n^2-8n+1} \quad \div n^2$$

مجموعة سنتر شير للخدمات الطلابية كلية الهندسة

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-3}{n}}{5 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{-3}{\infty}}{5 - \frac{8}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} g = \lim_{n\to\infty} 4n - 5 = 4(\infty) - 5 = \infty$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f.g = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n(4n-5)}{5n^2 - 8n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-12n^2 + 15n}{5n^2 - 8n + 1}$$

$\div n^2$

$$\therefore = \lim_{n\to\infty} \frac{-12 + \frac{15}{n}}{5 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{-12 + 0}{5 - 0 + 0} = \boxed{\frac{-12}{5}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{3n}{5n^2 - 8n + 1}\right]^{4n-5} = e^{\frac{-12}{5}} \quad \#$$

نظرية

if $g(x) \le f(x) \le h(x)$

and $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = k$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = k$

Evaluate $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(Solution)

$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

بالضرب في x

$\therefore -x \le x \sin\frac{1}{x} \le x$

بأخذ Lim للأطراف الثلاثة

$\therefore \lim_{x\to 0} -x \le \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x\to 0} x$

$= 0$ $\qquad$ $= 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ #

ها لبعض قوانين المثلثية

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

3. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
$= 1 - 2\sin^2(x)$
$= \cos^2 x - \sin^2(x)$

4. $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A)$

5. $\cos(A+B) = \cos(A)\cdot\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$

6. $\sin(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$

7. $\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

8. $\sin(A)\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

* أمثلة محلولة - (مهم للمراجعة):

* Evaluate the following Limits :

① $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{(x-1)}$ Solution

← تعويض مباشر

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1-1} = \frac{0}{0}$

⟸ ملاحظة: عند وجود جذور في البسط أو المقام ولتعويض المباشر

⟸ نقوم بالضرب * المرافق لطرح كمية غير معينة

$(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}) \xrightarrow{\text{مرافقة}} (\sqrt{x^2+1} \oplus \sqrt{2})$

$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{تعويض مباشر}} = \frac{1+1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ #

---

② $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6} = \frac{0}{0}$ ← عند وجود كثيرات حدود (حاول تحلل وتختصر) $x \to \infty$ ،

$= \lim_{x\to 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(5x+3)(x-2)}$ ← تعويض مباشر بقى

$2x-1$: $x \;\; 2$

$5x+3$: $x \;\; 2$

$= \frac{2(2)-1}{5(2)+3} = \frac{3}{13}$ #

③ $\lim_{x\to 2} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} x^2 & x>2 \\ \frac{1}{x} & x=2 \\ x-2 & x<2 \end{cases}$

الحل

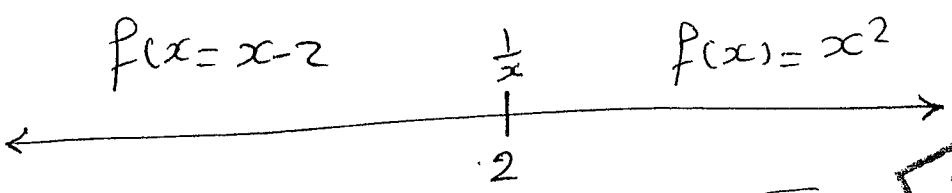
في حالة وجود دالة معرفة بأكثر من قاعدة ← مثلاً (ع) خط الأعداد

إذا كانت النهاية المطلوبة عند نقطة فاصل تعريف ← نوجد

النهاية اليمنى $(x\to 2^+)$ والنهاية اليسرى $(x\to 2^-)$

وإذا تساوى الناتج تبقى النهاية موجودة وتساوي هذا الناتج

وإذا اختلف الناتج ← النهاية غير موجودة (DNE):



اليمنى

$$* \lim_{x\to 2^+} = \lim_{x>2} = \lim_{x\to 2} x^2 = (2)^2 = \boxed{4}$$

اليسرى $\lim_{x\to 2^-} = \lim_{x<2} = \lim_{x\to 2} x-2 = 2-2 = \boxed{0}$

← النواتج مختلفة ← النهاية غير موجودة Doesn't Exist (DNE)

---

④ $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ لو عوضنا مباشر $h=0$ $= \frac{x^3-x^3}{0} = \frac{0}{0}$

تذكر تحليل فرق بين مكعبين

$x^3 - a^3 =$

$(x-a)(x^2+ax+a^2)$

البسط تحليل فرق بين مكعبين:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot[(x+h)^2 + x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2\right]}{h\,1}$$ → عوض صفر بعض $(h=0)$

$$= \frac{x^2 + x(x) + x^2}{1} = 3x^2 \quad \#$$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\cdot\tan(4x)}{x^2}$ الحل

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \cdot \frac{\tan(4x)}{x}$$

$$= (3)\cdot(4) = 12$$

نعوض

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(kx)}{x} = k$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{x} = m$

* Report. Solve (1) $\lim_{x\to 0} (1+4\sin(x))^{3/x}$

(2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos(x))^{8\tan(x)}$

مجموعة سنترشير للخدمات الطلابية كلية الهندسة