Examples

Prove that

1. $$\sum_{r=1}^{\infty \text{ أو } n} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Solution

~~① at n=1~~

العلاقة المطلوب إثباتها هي :

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

① at $\boxed{n=1}$

$$L.H.S. = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$R.H.S = 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

العلاقة صحيحة عند $n=1$

② at $\boxed{n=k}$ Let

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

③ at $\boxed{n=k+1}$ R.T.P

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$L.H.S. = \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}}_{\text{From ②}} + \underbrace{\frac{k+1}{(k+2)!}}_{\text{تترك كما هو}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+2)\,(k+1)!} \right]$$

عامل مشترك

صح

$$\boxed{\text{مهم}}$$
$$(n+1)! = (n+1)\; n!$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!} \left[1 - \frac{k+1}{k+2} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{\cancel{k}+2-\cancel{k}-1}{(k+2)} \right]$$

اختصرناها

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{1}{k+2} \right] = 1 - \frac{1}{(k+2)} = R.H.S$$

\#

$\boxed{Ex\ 2}$ $\frac{8}{3*5} - \frac{12}{5*7} + \frac{16}{7*9} + \cdots$ to n terms

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$$

Solution

الحد العام من L.H.S. مش مكتوب نستنتجه أولاً

العلاقة هي:

$$\frac{8}{3*5} - \frac{12}{5*7} + \frac{16}{7*9} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot (n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

① at $n=1$ $L.H.S = \frac{(-1)^{2} \cdot 4 \cdot (2)}{3*5} = \frac{8}{15}$

$$R.H.S = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{1}}{2+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n=1$

② $\boxed{n=k}$ let

$$\frac{8}{3*5}-\frac{12}{5*7}+\frac{16}{7*9}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4\cdot(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}$$

③ at $\boxed{n=k+1}$ R.T.P.

$$\frac{8}{3*5}-\frac{12}{5*7}+\frac{16}{7*9}+\cdots+\frac{(-1)^{k+2}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k}}{2k+5}$$

$$L.H.S=\boxed{\frac{8}{3*5}-\frac{12}{5*7}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}}$$

from (2)

اللي قبله هو

$$+\frac{(-1)^{k+2}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

بنزل من الأس

$$=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+3)}+\frac{(-1)^{k+2}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}+\frac{(-1)^{k-1}\,\cancel{(-1)^{3}}^{\,-1}\cdot 4\cdot(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

حالة الضرب بنجمع الأسس ولو الأسس مجمعة ممكن نوزع عادي

نلاحظ $(-1)^{k+2}=(-1)^{k-1}(-1)^{3}$

$$\therefore LHS = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}\left[1 - \frac{4(k+2)}{2k+5}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}\left[\frac{2k+5-4k-8}{(2k+5)}\right]$$ = وحد مقامات

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k+3}\left[\frac{-2k-3}{2k+5}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k}}{\cancel{2k+3}} \cdot \frac{\cancel{2k+3}}{2k+5} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{k}}{2k+5}$$

$$= RHS \quad \#$$

Ex. $\boxed{3}$ Prove ~~that~~ $7 + 3^{2n}$ is divisible by (8) $\forall\ n \geq 1$

(اثبت أن $7+3^{2n}$ تقبل القسمة على 8

لكل قيم $n \geq 1$)

الحل

نحن نقبل القسمة على 8 لابد أن يكون ناتج القسمة

عدد صحيح أي أن $\boxed{\text{المقسوم = عدد صحيح * المقسوم عليه}}$

مطلوب إثبات أن

* at $n = 1$

$$\frac{7+3^{2(1)}}{8} = \text{ناتج عدد صحيح} + (\text{الباقي}=0)$$

$$\because \frac{7+3^2}{8} = \frac{7+9}{8} = \frac{16}{8} = 2 \rightarrow \text{عدد صحيح}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n=1$

لاحظ:
لا تقبل القسمة على 2
5
2
لأن
$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$
الباقي $\neq 0$

* at $n = k$ let $\frac{7+3^{2k}}{8} = r$. عدد صحيح Integer number

يعني

* $$\boxed{7+3^{2k} = 8r}$$

* at $n = k+1$ R.T.P. $\frac{7+3^{2(k+1)}}{8} = \text{عدد صحيح} = M$ أي وليكن

يعني مطلوب إثبات

$$\boxed{7+3^{2k+2} = 8M}$$

$$L.H.S. = 7+3^{2k+2} = 7+3^{2k}\cdot 3^2 = 7+3^{2\cdot k}\cdot 9$$

من رقم ② نوجدها فقط حيث أن الاختصار السابقة مش موجود كله في ②
فنأخذ اللي موجود وخلاص

$$\because 3^{2k} = 8r-7$$

$$\therefore L.H.S. = 7+(8r-7)\cdot 9$$
$$= 7+72r-63$$
$$= 72r-56 = 8[9r-7]$$

عدد صحيح

$$= 8[\text{عدد صحيح}] = 8\cdot M = R.H.S$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n أنتهى

Ex: Prove that:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \quad \text{و} \quad n>1$$

Solution

① $n=2$ $\quad L.H.S=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1.707$

$R.H.S=\sqrt{2}=1.4$

$\therefore L.H.S>R.H.S$ ✓✓

② $\boxed{n=k}$ let

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

③ $n=k+1$ R.T.P.

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}>0$$

$$L.H.S=\boxed{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{k}}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}$$

العلاقة رقم ② بتقول ان
دة أكبر عن $\sqrt{k}$

$\therefore$ لو شلناه وحطينا مكانه $\sqrt{k}$ فإن الـ L.H.S يكون أكبر منه

$$L.H.S>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}$$

$$L.H.S > \frac{\sqrt{k^2+k} \cancel{+1} - k \cancel{-1}}{\sqrt{k+1}}$$

$$L.H.S > \frac{\sqrt{k^2+k} - k}{\sqrt{k+1}} \qquad k \rightarrow \sqrt{k^2}$$

$$L.H.S > \frac{\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2}}{\sqrt{k+1}}$$

$\because \sqrt{k^2+k} > \sqrt{k^2}$ و $\sqrt{k+1} > 0$

دائماً الجذر لعدد موجب

$\therefore R.H.S > 0$

$$\boxed{\therefore L.H.S > 0}$$

* Report :- Prove that :-

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ (تم حله سابقاً)

(*) Prove that : to n termes

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Proof :- ① let $\boxed{n=1}$

$$L.H.S.=\frac{1}{1*3}=\frac{1}{3}$$

$$R.H.S=\frac{1*\cancel{2}}{\cancel{2}*3}=\frac{1}{3}$$

L.H.S = R.H.S

② at $\boxed{n=K}$ let $$\boxed{\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\dots+\frac{K^2}{(2K-1)(2K+1)}=\frac{K(K+1)}{2(2K+1)}}$$

افترض أنها صحيحة مع استكمال

من رقم ③

③ at $\boxed{n=K+1}$ مطلوب إثبات أن

$$\boxed{\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\dots+\frac{K^2}{(2K-1)(2K+1)}}+\frac{(K+1)^2}{(2K+1)(2K+3)}=\frac{(K+1)(K+2)}{2(2K+3)}$$

from ②

$$L.H.S.=\frac{K(K+1)}{2(2K+1)}+\frac{(K+1)^2}{(2K+1)(2K+3)}$$

$$\therefore L.H.S = (k+1)\left[\frac{k(2k+3)+2k+2}{2(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{2k^2+3k+2k+2}{2(2k+1)(2k+3)}\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{\cancel{(2k+1)}(k+2)}{2\cancel{(2k+1)}(2k+3)}\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

Report(2): Prove that:

$$S_n = \frac{1^2}{1*3} + \frac{2^2}{3*5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

* : Prove that Using Mathematical Induction

اثبت بالإستنتاج الرياضي أن

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

Proof :- ① at $\boxed{n=1}$ $L.H.S. = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^1$

$R.H.S. = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

$\therefore L.H.S. = R.H.S.$

② at $\boxed{n=k}$ نفترض أن العلاقة الآتية صحيحة

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$$

③ at $\boxed{n=k+1}$ نريد أن نثبت أن العلاقة الآتية صحيحة

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos (k+1)x & -\sin (k+1)x \\ \sin (k+1)x & \cos (k+1)x \end{pmatrix}$$

$$\because L.H.S. = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^k}_{\text{From ②}} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\therefore L.H.S. = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

where :-

$$A = \cos kx \cdot \cos x - \sin kx \cdot \sin x = \cos(k+1)x$$

$$B = -\cos kx \cdot \sin x - \sin kx \cdot \cos x = -\sin(k+1)x$$

$$C = \sin kx \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos kx = \sin(k+1)x$$

$$D = -\sin kx \cdot \sin x + \cos kx \cdot \cos x = \cos(k+1)x$$

$$\therefore L.H.S = \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix} = R.H.S.$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم n

حفظ :.

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \sin B \cdot \cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

* Strong Math. Induction "S.M.I.P."

ذكرنا من قبل مبادئ الاستقراء الرياضي، فإذا وجد على سبيل

المثال اصطلح رياضي (العلاقة) $C(n)$ حيث n عدد ينتمي للأعداد الطبيعية
$N = \{1, 2, 3, \dots\}$

* لإثبات صحة هذا الاصطلاح نقوم بنفس الخطوات السابقة

① نثبت صحة العلاقة عند $\boxed{n=1}$

② نفرض صحة العلاقة عند $\boxed{n=k}$

③ نثبت صحة العلاقة عند $\boxed{n=k+1}$ باستخدام ②.

Examples [1] For the forbinus Method, has the recurence relation $f_0 = f_1 = 1$ و $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Use "S.M.I.P." To Prove that:

$$f_n \le \left(\frac{7}{4}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

"Solution"

مطلوب إثبات أن $f_n \le \left(\frac{7}{4}\right)^n$ حيث أن العلاقة الرياضية هي $C_n = f_n$

وهي تسمى "recurence relation" لطريقة حل معادلات تفاضلية "فيما بعد"

طريقة الحل:

① at $n=0$ $\quad C_0 = f_0 = \overset{\text{معطى}}{1} = L.H.S$

$R.H.S. = \left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1$

∴ العلاقة صحيحة عند $n=0$

at $n=1$ $\quad L.H.S. = f_1 = 1$ ← معطى

$R.H.S = \left(\frac{7}{4}\right)^1$

$1 < \frac{7}{4}$ ∴ صحيحة عند $\boxed{n=1}$

② at $n=k$ let إفرض $\boxed{f_k \le \left(\frac{7}{4}\right)^k}$

③ at $n=k+1$ R.T.P. $\boxed{F_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}}$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

لاحظ: شرط

ضع $n = k+1$

$$\therefore f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

$\therefore f_k \le \left(\frac{7}{4}\right)^k$, $f_{k-1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$

سنزيل الصغير ونضع بدلا منه مقدار كبير

$$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

$$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^1 + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

$$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left[\frac{7}{4}+1\right]$$

$$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4} = \frac{44}{16}\right) \longrightarrow$$

عند إضافة أي رقم للبسط يجعل R.H.s هو الكبير زي ما هو وتكون أيضاً $F_{k+1} \le$

$$\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{44+5}{16}\right)$$

ضفنا 5

$$f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{49}{16}\right) \qquad \therefore F_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\boxed{\therefore f_{k+1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}}$$

وهو مطلوب إثباته

//

2 Prove that $n! \geq n^2 \quad \forall\, n \geq 4$

الحل

① at $n = 4$

$L.H.S. = 4! = 4.3.2.1 = 24$

$R.H.S = (4)^2 = 16$

$\therefore L.H.S > R.H.S$ at $n = 4$

② $n = k$ let $\boxed{k! \geq k^2}$, $k \geq 4$

③ at $n = k+1$ R.T.P. $(k+1)! \geq (k+1)^2$

$L.H.S. = (k+1)! = (k+1)\,(k)!$

From ②

$L.H.S. \geq (k+1)\; k^2$

نعوض بالأكبر

$\because k^2 > (k+1) \quad \forall\, k \geq 4$

$\therefore L.H.S \geq (k+1)\,(k+1)$

$L.H.S \geq (k+1)^2$

[3] $(1+x)^n \geq 1+nx \quad , \; x \geq -1 \quad , \forall \; n \in N$

الحل

① at $n=1$

$L.H.S = 1+x$

$R.H.S = 1+x$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

لو جه علام تساوي في إثبات يبقى صح

② $n=k$ let $\boxed{(1+x)^k \geq 1+kx}$

③ at $n=k+1$ R.T.P. $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$L.H.S = (1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{\text{نشيله ونضع الأقل منه في ②}} (1+x)^1$

$\therefore L.H.S \geq (1+kx) \cdot (1+x)$

$L.H.S \geq 1+x+kx+kx^2$

$L.H.S \geq 1+(k+1)x + \underbrace{kx^2}$

L.H.S > الكبير

عند إزالة جزء من الكبير يظل L.H.S أكبر أيضاً عن الشئ الصغير

$\therefore L.H.S \geq 1+(k+1)x$.

---

report. Prove that: $3n^5+5n^3+7n$ is divisible by 15 $\forall \; n \in N$.

* : if $S_0 = 0$, $S_1 = 4$ و $\boxed{S_n = 6S_{n-1} - 5S_{n-2}}$ (*)

معطيات

Using (S.M.I.P.) to Prove that: $\boxed{S_n = 5^n - 1}$, $\forall n \geq 2$

Proof: at $n=2$ $L.H.s = S_2 = 6\cancel{S_1} - 5\cancel{S_0} = 24$ عوضنا في (*)

$R.H.s = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ L.H.s = R.H.s at n = 2

at $n=K$ let: $S_K = 5^K - 1$

وماهيلو (S.M.I.P) كأنه يكي

$S_{K-1} = 5^{K-1} - 1$

at $n=k+1$ R.T.P. $S_{k+1} = 5^{k+1} - 1$

$L.H.s = S_{k+1} = 6S_k - 5S_{k-1}$ هاتها من (*)

$= 6[5^k - 1] - 5[5^{k-1} - 1]$

$= 6\cdot5^k - 6 - 5^k + 5$

$= 5\cdot5^k - 1 = 5^{k+1} - 1$ R.H.s #

report: Prove that using (M.I.), $\cos(n\theta)$ is a Polynomial كثيرة حدود of degree (n) in X في x where $X = \cos\theta$. Proof

$$\boxed{P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_0 = 0}$$

لاحظ أن كثيرة الحدود من درجة n في المتغير X تكون بالشكل

Prove that using (M.I.):

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\, n$$

Proof

* at $n=1$ $\quad L.H.s = 1^2 = 1$ عوض ع الحد العام وشوف

$L.H.s = 1^2 \therefore 1^2 =$ الحد الأول وقفنا عند ع هذا المثال هيوقفك عند أي حد .

عوض مباشرة $R.H.s = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$

$\therefore L.H.s. = R.H.s$ $\quad$ العلاقة صحيحة عند $n=1$

---

* at $n=k$: let $\quad$ افرض : $1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

نضع $n=k$ ع العلاقة المعطاة

فرضنا إن العلاقة صحيح وسنستخدمها ع الخطوة الثالثة لزوم

3* at $n=k+1$: Require To Prove (R.T.P) مطلوب إثبات

ضع $n=k+1$ بين الأقواس $\quad 1^2+2^2+3^2+\dots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$2(k+1)+1 = 2k+2+1 = 2k+3$

ع الخطوة الثالثة نأخذ L.H.s لوحدة ونشتغل عليه وتحاول نوصله لل R.H.S.

$\therefore L.H.s = 1^2+2^2+3^2+\dots+(k+1)^2$

تقف نعوض عنه صدود قبلة نكتب بعضهم

$$= \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+(k)^2}_{\text{موجودة ع الخطوة ② : نضع قيمتها}} + \underbrace{(k+1)^2}_{\text{زيادة ننزل زي ما هو}}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{(k+1)}{1}\right]$$

مدلتماما ,

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{2k^2+7k+6}{6}\right] = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} = R.H.s$$

حلل

العلاقة صحيحة لجميع n #

Prove that: $\sum_{r=1}^{n} r.(r!) = (n+1)! - 1$

الحل : فك الأول

ضع $r=1$ وعوضه + $r=2$ وعوضه + --- + $r=n$ وعوضه

$$\boxed{\ldots) + 2*(2!) + 3*(3!) + \cdots + (n)*(n)! = (n+1)! - 1}$$

1) L.H.S. $= 1*1! = 1$

R.H.S $= (2)! - 1 = 1$

العلاقة صحيحة عند $n=1$

let

$\ldots!) + 2*(2!) + 3*(3!) + \cdots + k*(k!) = (k+1)! - 1$

$= k+1$ R.T.P.

$2(2!) + 3.(3!) + \cdots + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$1! + 2\,2! + 3\,3! + \cdots + k(k)! + (k+1)(k+1)!$

from (2)