نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

القانون:-

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{(n)(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots$$

ولكن سنحاول قدر الإمكان استخدام الصيغة الأخرى للقانون وهي:-

$$(1+Z)^n = 1 + nZ + \frac{(n)(n-1)}{2!}Z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}Z^3 + \cdots$$

هذا القانون يطبق على حسب قيمة n

- (n) عدد صحيح موجب فإنه النظرية تطبق بدون شروط. ويكون عدد الحدود $= n+1$ وآخر حد هو (Z^n).
- (n) عدد سالب أو كسر $\pm$ فإنه شرط تطبيق النظرية هو $|Z|<1$ ويكون هناك عدد لا نهائي من الحدود

Examples: Find the EXPansion (مفكوك) of the following :-

(1) $(1+3X)^3 = 1 + \frac{3}{1!}(3X) + \frac{(3)(2)}{2!}(3X)^2$

$+ \frac{3(2)(1)}{3!}(3X)^3$

$= 1 + 9X + 27X^2 + 27X^3$

حيث $n = 3$ عدد صحيح موجب فطبقنا النظرية مباشرة

وأخذ $(3X)^3 = Z^n$ حيث $Z = 3X$

---

(2) $(2-3X)^3$

نحول إلى $(1+Z)^n$ بأخذ عامل مشترك (2)

$= \left[2\left(1 + \frac{-3}{2}X\right)\right]^3 = 2^3\left(1 + \underbrace{\left(\frac{-3}{2}X\right)}_{Z}\right)^{3 \to n}$

$= 2^3\left[1 + 3\left(\frac{-3X}{2}\right) + \frac{3*2}{2!}\left(\frac{-3X}{2}\right)^2 + \frac{3*2*1}{3!}\left(\frac{-3X}{2}\right)^3\right]$

$$= 8\left[1 - \frac{9}{2}x + \frac{27}{4}x^2 - \frac{27}{8}x^3\right]$$

$$= 8 - 36x + 54x^2 - 27x^3$$

(3) $(2+4x)^{-4}$

$= (2)^{-4}(1+(2x))^{-4}$

نفك بقى عادى :

$$= \frac{1}{2^4}\left[1 + \frac{(-4)}{1!}(2x) + \frac{(-4)(-5)}{2!}(2x)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[1 - 8x + 40x^2 \cdots\right]$$

عدد سالب $n = -4$

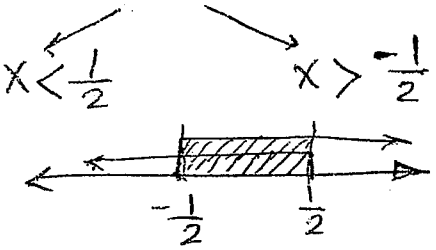
$Z = 2x$

يبقى لازم يحقق شرط

$|Z| < 1$ بحيث

$|2x| < 1$

$|x| < \frac{1}{2}$



الفترة اللى يكون فيها
الفكوك صحيح هى

$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

* Find the Expansion of $(1+x)^{-1}$ and from it Deduce the Expansion of $(1-x)^{-1}$

اوجد مفكوك $(1+x)^{-1}$ ومنه استنتج مفكوك $(1-x)^{-1}$ ←

Solution:

$$(1+X)^{-1} = \frac{1}{(1+X)}$$

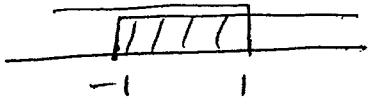
$$1 + \frac{-1}{1!}X + \frac{(-1)(-2)}{2!}X^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}X^3 + \dots$$

$n = -1$

شرط القانون

$|X| < 1$

$X < 1 \qquad X > -1$



$]-1, 1[$

$$(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - \dots$$ ← حفظ

وضع $-X$ بدل X

$$\therefore (1-X)^{-1} = \text{نستبدل } -X \text{ بـ } X \text{ هنا} = 1 - (-X) + (-X)^2 - (-X)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-X} = (1-X)^{-1} = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots$$ ← حفظ

---

* Expand $(1+X)^{-2}$ and from it Deduce The Expansion of $(1-X)^{-2}$

Solution:- $n = -2$

$$(1+X)^{-2} = 1 + \frac{(-2)}{1!}X + \frac{(-2)(-3)}{2!}X^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}X^3 + \dots$$

$|-X| < 1$ بدل

$|X| < 1$

$]-1, 1[$

زي السؤال

$\therefore (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$ حفظ

بدل $x \to (-x)$

$\therefore (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ حفظ

---

* Find the EXpansion of $\sqrt{x}$

if $|(x-1)| < 1$ solution

$(x-1) = z$

Solution $(x-1)$ = لو بدل بـ z لازم تكون أ

$\therefore \sqrt{x} = (x)^{1/2} = (1 + (x-1))^{1/2}$

z

أضفنا (1) وطرحناه

$\therefore n = 1/2$ فك عادى

$$(1+x-1)^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!}(x-1)$$

وهو قال إن $|x-1| < 1$ يعنى إشرط كدة مخصص

$$+ \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}(x-1)^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \dots$$

⑤

* find the Expansion of

$$\frac{1}{(1+X)^2}$$ if ① $|X|>1$ ② $|X|<1$

Solution:: $\frac{1}{(1+X)^2} = (1+X)^{-2}$

$n=-2$
∴ لابد من كتابة الشرط $|Z|<1$

① $|X|>1$ لاحظ

∴ لا يمكن إيجاد مفكوك لأن الشرط غير متحقق

طيب نعمل إيه : الحل سهل

عامل مشترك وطلعه برة القوس

"نخلي بالنا" ص X' موجودة فقط "تطلع بأس المقدار"

$$\therefore (1+X)^{-2} = (X)^{-2}\left(\frac{1}{X}+1\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{X^2}\left(1+\frac{1}{X}\right)^{-2} \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{X^2}\left[1+\frac{(-2)}{1!}\frac{1}{X}+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{1}{X}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{1}{X}\right)^3+\cdots\right]$$

∵ $|X|>1$
∴ $\left|\frac{1}{X}\right|<1$
∴ الشرط متحقق
نعمل عادي
$Z=\frac{1}{X}$ ،

② $|X|<1$ يعني الشرط محققة طول ما نفك

$$(1+X)^{-2} = 1 + \frac{(-2)}{1!}X + \frac{(-2)(-3)}{2!}X^2 + \cdots$$

$$= 1 - 2X + 3X^2 - \cdots$$

قاعدة عامة لتحقيق شرط الفك

"الكبير دائماً" نأخذه عامل مشترك"

مثلاً: لو X كبيرة جداً "$X \gg\gg 1$" نأخذ X كبير مشترك

لو X صغيرة جداً "$X \ll\ll 1$" ∴ الحد الأعلى هو الكبير

نأخذ عامل مشترك وبالتالي يتحقق الشرط اللازم للفك.

Ex: Expand $\sqrt[3]{2X+7}$ if

(1) $X \ll\ll 1$ صغيرة جداً

(2) $X \gg\gg 1$ كبيرة جداً

Solution :. $\sqrt[3]{2X+7} = (2X+7)^{1/3}$

① $X <<<$ صغيرة جداً

∴ نأخذ العدد (الكسر) 7 كعامل مشترك

$$= (7)^{1/3}\left(1+\frac{2X}{7}\right)^{1/3}$$

$\frac{2X}{7} \in Z$ ، $n \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{2X}{7}\right| < 1$ لأن X صغيرة

$$= \sqrt[3]{7}\left[1+\frac{(1/3)}{1!}\left(\frac{2X}{7}\right) + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!}\left(\frac{2X}{7}\right)^2 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!}\left(\frac{2X}{7}\right)^3 + \cdots\right]$$

② $X >>>$ كبيرة جداً

∴ نأخذ أكبر X كعامل مشترك (غالباً ما هي X^1)

ثم نأخذها كعامل مع بعض عامل مشترك

$$\therefore (2X+7)^{1/3} = (2X)^{1/3}\left(1+\frac{7}{2X}\right)^{1/3}$$

$\left|\frac{7}{2X}\right| < 1$ ولكن

لأن X كبيرة جداً وموجودة في المقام

$$= \sqrt[3]{2X}\left[1+\frac{(1/3)}{1!}\left(\frac{7}{2X}\right) + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!}\left(\frac{7}{2X}\right)^2 + \cdots\right]$$

⑧

* التي الثلاثة حدود الأولى لـ مفكوك

$\frac{3X-1}{(2X-1)^3}$

وأوجد الفترة التي يكون فيها المفكوك صحيحًا.

الحل

$$\frac{3X-1}{(2X-1)^3} = (3X-1)(2X-1)^{-3}$$

$$= (3X-1)(-1)^{-3}(1+(-2X))^{-3}$$

$$= (3X-1)\left[1 + \frac{-3}{1!}(-2X) + \frac{-3(-4)}{2!}(-2X)^2 + \dots\right]$$

$$= -(3X-1)\left[1 + 6X + 24X^2 + \dots\right]$$

الفترة التي يكون فيها المفكوك صحيحًا

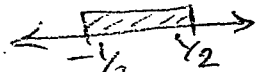
$|2X| < 1$

$2X < 1$ ، $2X > -1$

$\therefore X < \frac{1}{2}$

$\boxed{|-2X| < 1}$

$X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



* أوجد مفكوك

report

① $\frac{1}{\sqrt{9+X^2}}$

② $\frac{X}{(X-2)^2}$

Expand:: $\sqrt[3]{x^3+6} - \sqrt[3]{x^3+3}$

و $x >>>$ كبيرة جداً

← نأخذ أكبر x عامل مشترك

Solution::

$$\sqrt[3]{x^3+6} - \sqrt[3]{x^3+3}$$

$$= (x^3+6)^{1/3} - (x^3+3)^{1/3}$$

$$= (x^3)^{1/3}\left(1+\frac{6}{x^3}\right)^{1/3} - (x^3)^{1/3}\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^{1/3}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{6}{x^3}\right) + \frac{(1/3)(\frac{-2}{3})}{2!}\left(\frac{6}{x^3}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$x\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{x^3}\right) + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!}\left(3/x^3\right)^2 + \cdots\right]$$

لاحظ الشرط محقق في القوس الأول والثاني حيث x كبيرة

ومحصورة في الحكم #

* Ex: Expand $(1+X^2)^{-\frac{1}{2}}$ according to the Increasing Power of X (يعني عايز أس الـ X تزيد في الفكوك), then Prove that

$$\sqrt{3} = 2 - \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$(1+X^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(X^2)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(X^2)^3 + \cdots$$

$(-\frac{1}{2}) \to n$ — الأس الأول

$X^2 \to z$

أس الـ X بيزيد زي ما هو عايز

$$\therefore (1+X^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(X^2) + \frac{3}{8}(X^2)^2 - \frac{15}{48}(X^2)^3 + \cdots$$

الطلوب الأول.

لإثبات المطلوب الثاني نلاحظ أنه وضع $X^2 = \frac{1}{3}$

∴ نضع $X^2 = \frac{1}{3}$ في الطرفين

$$\therefore \left(1+\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{15}{48}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{15}{48}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1\cdot 5}{48}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$\therefore \sqrt{3} = 2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots \quad \#$$

أهم فروع الموضوع

← تطبيقات لنظرية ذات الحدين

① إيجاد قيمة تقريبية لمقدار معين :-

$(1+\boxed{})^n$ المعطى إلى ... ويحقق الشرط .

تفتح حساب بدون آلة حاسبة

Ex: find an approximat Value (قيمة تقريبية) for the following and Calculate the max. Value for the error القيمة العظمى للخطأ

(1) $\sqrt{50}$

Solution:

$$\sqrt{50} = (50)^{1/2} = (1+49)^{1/2}$$

$\rightarrow |49| > 1$ لا يحقق الشرط

$$= (49)^{1/2}\left(\frac{1}{49}+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 7\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2} \xrightarrow{\text{يحقق الشرط}} \left|\frac{1}{49}\right| < 1$$

$$= 7\left(1+(1/2)\left(\frac{1}{49}\right)+\frac{(1/2)(-1/2)}{2!}\left(\frac{1}{49}\right)^2+\ldots\right)$$

→ نهمل

$$\simeq 7.071$$

أكبر خطأ للخطأ هو أول حد أهملناه:

$$\text{max error} = \left| 7\left[\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} \left(\frac{1}{49}\right)^3 \right] \right|$$

$$= \checkmark$$

---

② $\sqrt{60} = (60)^{1/2} = (64-4)^{1/2}$

عدد نستطيع إيجاد جذره التربيعي بسهولة آلة حاسبة

$$= (64)^{1/2}\left(1+\frac{-4}{64}\right)^{1/2}$$

z

متحققة $\left|\frac{4}{64}\right| < 1$ شرط

$$= 8\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{64}\right) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}\left(\frac{-4}{64}\right)^2 + \cdots\right]$$

نفصل

$$\simeq 7.746$$

$$\text{max error} = \left| 8\left[\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} \left(\frac{-4}{64}\right)^3 \right] \right|$$

$$\simeq 1.5 \times 10^{-5}$$

$$= \left[1 + \frac{-23}{27}\right]^{1/6} \quad , \quad \left|\frac{-23}{27}\right| < 1$$

$$= 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{-23}{27}\right) + \frac{(1/6)(-5/6)}{2!}\left(\frac{-23}{27}\right)^2$$

$$\cong 0.808$$

---

⑤ $(340)^{1/3} = (343 - 3)^{1/3}$

$$= (343)^{1/3}\left(1 + \frac{-3}{343}\right)^{1/3}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-3}{343}\right) + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!}\left(\frac{-3}{343}\right)^2\right)$$

$$= 7$$

ملاحظة : إذا طلب حساب قيمة تقريبا لناتج لثلاث أرقام عشرية نكتب أول ثلاث حدود فقط في المتسلسلة

وهكذا حسب الرقم عشرية المطلوبة نكتب أول ثلاث أرقام بعد العلامة

ولو طلب أربع أرقام عشرية نكتب أربع حدود في المتسلسلة وهكذا

(3)

$$\sqrt[3]{\frac{41}{25}} = \left(\frac{41}{25}\right)^{1/3} = \left(\frac{25+16}{25}\right)^{1/3}$$

$$= \left(1+\frac{16}{25}\right)^{1/3} \qquad \left|\frac{16}{25}\right| < 1$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{16}{25}\right) + \frac{(1/3)(\frac{-2}{3})}{2!}\left(\frac{16}{25}\right)^2 \simeq 1.168$$

(7)

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(2)^{1/3}}{(3)^{1/2}} = \left(\left(\frac{(2)^{1/3}}{(3)^{1/2}}\right)^6\right)^{1/6}$$

$$= \left(\frac{(2)^2}{(3)^3}\right)^{1/6} = \left(\frac{4}{27}\right)^{1/6}$$

Very Important

② إيجاد مفكوك متسلسلة أكثر من حدين :-

Example:- Expand :

$$\frac{1}{X^2+3X+3} \quad \text{at} \quad \begin{matrix} ① \; X \lll \text{صغيرة} \\ ② \; X \ggg \text{كبيرة} \end{matrix}$$

Solution: $\frac{1}{X^2+3X+3} = (X^2+3X+3)^{-1}$

① $X \lll$ صغيرة

نأخذ الحد المطلق عامل مشترك لأنه هو الكبير

$$= (3)^{-1}\left(1+\left(\frac{X^2+3X}{3}\right)\right)^{-1} \quad \text{حيث} \left|\frac{X^2+3X}{3}\right| < 1$$

لأن X صغيرة جداً

$$= \frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)}{1!}\left(\frac{X^2+3X}{3}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(\frac{X^2+3X}{3}\right)^2+\cdots\right]$$

② $X \ggg$ كبيرة

نأخذ أكبر X كعامل مشترك وهو (X^2)

$$\therefore (x^2+3x+3)^{-1} = (x^2)^{-1}\left(1+\frac{3x+3}{x^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[1+\frac{(-1)}{1!}\left(\frac{3x+3}{x^2}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(\frac{3x+3}{x^2}\right)^2+\cdots\right]$$

$\left|\frac{3x+3}{x^2}\right|<1$ ، لأنه x كبيرة وأكبر من واحدة موجبة أو سالبة

1

② $(x^2+6x+2)^4$ at ① $x>>1$ كبيرة ② $x<<<$ صغيرة

Solution: $\frac{1}{(x^2+6x+2)^4} = (x^2+6x+2)^{-4}$

① at $x>>$ كبيرة

عامل مشترك x^2 :

$$= (x^2)^{-4}\left(1+\frac{6x+2}{x^2}\right)^{-4} \quad , \left|\frac{6x+2}{x^2}\right|<1$$

$$= \frac{1}{(x)^8}\left(1+\frac{(-4)}{1!}\left(\frac{6x+2}{x^2}\right)+\frac{(-4)(-5)}{2!}\left(\frac{6x+2}{x^2}\right)^2+\cdots\right)$$

② at $x<<$ صغيرة

نأخذ أكبر قوة (2) عامل مشترك

$$\Rightarrow (x^2+6x+2)^{-4} = (2)^{-4}\left(1+\frac{x^2+6x}{2}\right)^{-4}$$

$$, \left|\frac{x^2+6x}{2}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{16}\left[1+\frac{(-4)}{1!}\left(\frac{x^2+6x}{2}\right)\right.$$

$$\left. +\frac{(-4)(-5)}{2!}\left(\frac{x^2+6x}{2}\right)^2 + \cdots\right]$$

حل بارد EXPand

$$(x^3+3x^2+x+1)^{-2}$$

at $x >>>$ كبير

 $<<<$ صغير

Very Very ... Important:

3. إيجاد معاملات قوى X المختلفة

* Calculation of Coeffecient of X^r or In General X^r :

تذكر ① المعامل هو الرقم المضروب في الـ X المرفوعة

② $(1+Z)^n = 1 + {}^nC_1 Z + {}^nC_2 Z^2 + \cdots + {}^nC_r Z^r$

${}^nC_r = Z^r$ ← معامل :: coeffecient

n عدد صحيح موجب

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

③ $(1+Z)^{-n} = 1 - {}^nC_1 Z + \cdots + (-1)^r \, {}^{n+r-1}C_r \, Z^r$

عدد صحيح أو كسر

$\therefore$ Coeff. $Z^r = (-1)^r \, {}^{n+r-1}C_r$

ملاحظة :-

٤- إذا طلب معامل x^n لأي مقدار من الدرجة الرابعة

نحفظ ونص :

1) $(1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^r z^r$ (حفظ)

2) $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + 1 z^r$ (حفظ)

3) $(1+z)^{-2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots + (-1)^r (r+1) z^r + \cdots$ (حفظ)

4) $(1-z)^{-2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + (r+1) z^r$

← إذا كان القوس ليس من هذه الأقواس السابقة نعمل له قوانين السابقة

نستخدم القوانين

$$(1+z)^n = \cdots + \binom{n}{r} z^r$$

$$(1+z)^{-n} = \cdots + (-1)^r \binom{n+r-1}{r} z^r$$

← يمكن نستخدم القانون دة في حالة الأربع أقواس السابقة وسيعطي نفس النتائج.

← ملاحظة هامة : إذا طلب معامل x^n لكسر كبير نوجد الكسور الجزئية للكسر الأول ثم نوجد معامل x^n لكل كسر صغير ثم نجمع الناتج كلهم . (توجد على ما تم في المراجعة)

Examples:

① find coeffecient of X^{16} in the Expansion of $(1+X)^{20}$

Solution:

عاشر لقوى $\therefore (1+X)^n = 1 + C_1^n X + \cdots + C_r^n X^r$

$\therefore$ Coeff $X^{(r)} = C_r^n$

X^{16} مطلوب معامل

$\therefore r = 16$

$n =$ أس لقوس ←

$\therefore$ Coeff $X^{16} = C_{16}^{20} = \frac{20!}{16!\,(4)!} = 4845$

---

② Coeff. of X^8 from:-

$(3-5X^2)^{10}$ Solution

$(3)^{10}\left(1+\frac{-5}{3}X^2\right)^{10} = 3^{10}\left[\cdots + C_r^{10}\left(\frac{-5}{3}X^2\right)^r + \cdots\right]$

$= \cdots\cdots + (3^{10})\, C_r^{10}\, (\frac{-5}{3})^r\, X^{2r} + \cdots$

$\therefore 8 = 2r \quad (r=4)$ X^8 مطلوب جعل

$\therefore$ Coeff $x^8 = 3^{10}\ {}^{10}C_4 \left(\frac{-5}{3}\right)^4 = \checkmark$

(3) Find Coeff of x^4 in the Expansion $(1-2x)^{\frac{-1}{2}}$

Solution

$\therefore (1+z)^{(n)} = \text{----} + (-1)^r\ {}^{n+r-1}C_r\ z^r$

$(1-2x)^{(-1/2)} \rightarrow n = 1/2$

$= \text{---} + (-1)^r\ {}^{\frac{1}{2}+r-1}C_r\ (-2x)^r$

z

$= (-1)^r\ {}^{r-\frac{1}{2}}C_r\ (-2)^r\ x^r + \ldots$

$\sim r = 4$

x^4 مطلوب حدها

$\therefore$ Coeff $x^4 = (-1)^4\ {}^{4-1/2}C_4\ (-2)^4$

$(-1)^4 = +1$, $(-2)^4 = 16$

$= 16\ {}^{3.5}C_4 = 16 \frac{(3.5)!}{4!\ (3.5-4)!}$

$= 16 \frac{(3.5)(2.5)(1.5)(1/2)}{4!} = \checkmark$

* Find the Expansion of $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ Then find coeff. of x^r,

Center share

Solution: $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = (1+x)^2 (1-x)^{-2}$

$= (1+2x+x^2)\left[1+2x+3x^2+\cdots+(r+1)x^r\right]$

Center share

Center share

$= 1+2x+3x^2+\cdots(r+1)x^r$

$+ 2x+4x^2+6x^3+\cdots 2r x^r + 2(r+1)x^{r+1}$

$+ x^2+2x^3+\cdots\cdots (r-1)x^r + r x^{r+1} + (r+1)x^{r+2}$

$\therefore$ Coeff $x^r = (r+1)+(r-1)+2r$

$= 4r$

Put $r=8$ $\leftarrow$ x^8 لو طلب معامل

$= 4*8 = 32$ #

Find coefficient of x^n in the Expansion of: (9)

$$\frac{(1+2x)^5}{(1-x)^2}$$ solution

$$= (1+2x)^5 \cdot (1-x)^{-2}$$

$$= \left[1 + 5(2x) + \frac{(5)(4)}{2!}(2x)^2 + \frac{5*4*3}{3!}(2x)^3 + \frac{5*3*4*2}{4!}(2x)^4 + (2x)^5\right] \cdot \left[\text{------} + (1+r)x^r + \text{--}\right]$$

$$= [1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5] * [\text{--} + (1+r)x^r + \text{--}]$$

نحلل x^r في (صدام)

$$(1)(1+r) + 10(r) + 40(r-1) + 80(r-2) + 80(r-3) + 32(r-4)$$

نحلل x^n في (صدام) بدل $r \to n$

$$= 1 + n + 10n + 40(n-1) + 80(n-2) + 80(n-3) + 32(n-4)$$

= ←

---

report find coff. of x^n for: $\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ ← نزود بكسر الجزئية الأول

Ex: find ceffecient of x^n for:-

(12)

$$\frac{(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$$

Solution

لاحظ: $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$

نحول المقام الى نوع ... لازم التكرير لينتهي تكون حدين بالثنين فقط

$$\to = \frac{(1+x)(1-x)^2}{[(1-x)(1+x+x^2)]^2} = \frac{(1+x)(1-2x+x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= [1-2x+x^2+x-2x^2+x^3](1-x^3)^{-2}$$

قيمة ب $(1-z)^{-2}$ محفوظ

$$= [1-x-x^2+x^3][1+2x^3+3x^6+4x^9+\dots+(r+1)x^{3r}+\dots]$$

لا يوجد x^r ولكن يوجد x^{3r}

نوجد:

Coefficent $x^{3r} = (r+1)+(r)$ ← معامل x^{3r} × الحد الثابت ، معامل x^{3r-3} × معامل x^3

$$x^{3r+1} = (-1)(r+1)$$ ← معامل x^{3r} × معامل x

$$x^{3r+2} = (-1)(r+1)$$ ← معامل x^{3r} × معامل x^2

ويكون معامل x^n ممثل بالثلاث معاملات السابقة.

الجزء الأول
Sheet 2
1

5 Solve the following Inequalities.

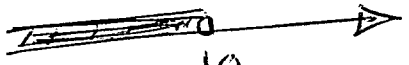
(1) $\frac{3X-4}{2} > 5X-7$

Solution

(*2)

$3X-4 > 10X-14$

$7X-10<0$ $\therefore 7X<10$ $\therefore X<\frac{10}{7}$



$\frac{10}{7}$

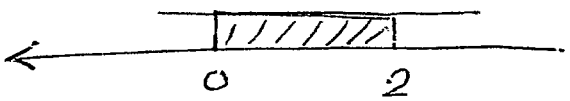
(2) $\frac{1}{|X-1|} > 1$ Solution

يطلب الطرفين وتغيير الـ ">" إلى "<" ؛

$|X-1| < 1$

$X-1<1$ $\therefore X<2$

$X-1>-1$ $\therefore X>0$



$X \in]0,2[$

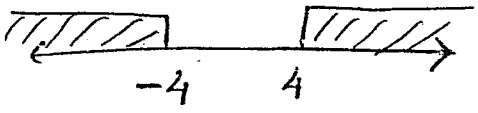
(3)

$$\left| |x| - 3 \right| > 1$$

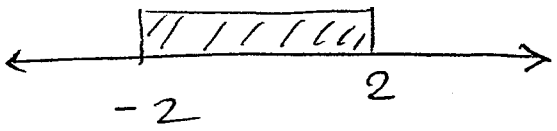
$|x| - 3 > 1$ ، $|x| - 3 < -1$

$|x| > 4$ ، $|x| < 2$

$x > 4$ ، $x < -4$ ، $x < 2$ ، $x > -2$



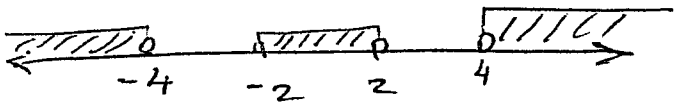
D_1



D_2

اتحاد

$D = D_1 \cup D_2$



---

6 Find Coeff. of x^n in the expansion of:

(i) $\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ Solution

بالضرب * مراقد مقام

$$\therefore \sqrt{\frac{(1+2x)(1+2x)}{(1-2x)(1+2x)}} = \frac{\sqrt{(1+2x)^2}}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1+2x}{(1-4x^2)^{1/2}}$$

$$= (1+2X)(1-4X^2)^{-1/2} \Rightarrow n = +\tfrac{1}{2} \; , Z = -4X^2$$

نستخدم القانون العام

لأنه مش بالشكل الأربع أقواس المحفوظة

$$= (1+2X)\left[\quad + (-1)^r \, {}^{n+r-1}C_r \, Z^r \right]$$

$$= (1+2X)\left[\text{-------} + (-1)^r \, {}^{r-1/2}C_r \, (-4)^r X^{2r} \right]$$

$$\therefore \text{Coeff. } X^{2r} = (1)(-1)^r \, {}^{r-1/2}C_r \, (-4)^r$$

الحد المطلق في القوس الأول — معامل X^{2r} في القوس الثاني

$$, \text{Coeff. } X^{2r+1} = (2)(-1)^r \, {}^{r-1/2}C_r \, (-4)^r$$

معامل X^1 — معامل X^{2r}

(ii) $$\frac{(1+2X)^5}{(1-X)^2} = (1+2X)^5 (1-X)^{-2}$$

$$= \left[1 + 5(2X) + \frac{5(4)}{2!}(2X)^2 + \frac{(5)(4)\cdot 3}{3!}(2X)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}(2X)^4 + (2X)^5 \right] \left[\text{----} + (r+1)X^r \right]$$

محفوظ

$$= [1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5][\cdots + (r+1)x^r]$$

$\therefore$ coeff $x^r = [r+1] + [10r] + [40(r-1)] + [80(r-2)]$
$+ [80(r-3)] + [32(r-4)]$

$\therefore$ coeff $x^n \rightarrow$ $n = r$ ضع

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$ $\quad n = -\frac{1}{2}$, $z = -x$

$$= \cdots\cdots + (-1)^r \, {}^{n+r-1}C_r \, z^r$$

$$+ (-1)^r \, {}^{r-\frac{1}{2}}C_r \, (-x)^r$$

$\therefore$ coeff $x^r = (-1)^r$ $(-1)^r$

$= {}^{r-\frac{1}{2}}C_r$ #

* Find Geffecient of x^n for $(x^2+x^3+x^4+x^5)^5$, find Geffecient of x^{20}.

Solution

$\because (x^2+x^3+x^4+x^5)^5 = (x^2)^5\,[1+x+x^2+x^3]^5$

أخذنا x^2 عامل مشترك تطلع من القوس بأسي 5

$= x^{10}\left[\dfrac{(1+x+x^2+x^3)(1-x)}{(1-x)}\right]^5 \rightarrow$ ضربنا $*\,1-x$ وقسمنا على $1-x$ علشان نعيد $(1+x+x^2)$ كما سبق

$= x^{10}\left[\dfrac{(1+x+x^2)(1-x)+x^3(1-x)}{(1-x)}\right]^5$

$= x^{10}\left[\dfrac{1-x^3+x^3-x^4}{1-x}\right]^5 = x^{10}\left[\dfrac{1-x^4}{1-x}\right]^5 = x^{10}\cdot[1-x^4]^5\cdot[1-x]^{-5}$

$[1-x^4]^5$ غير متصل ← نفكه عادي ، $[1-x]^{-5}$ متصل ← نفكه بقانون $(1+z)^n$

$= x^{10}\left[1-5x^4+\dfrac{(5)(4)}{2!}x^8-\dfrac{5(4)(3)}{3!}x^{12}+\dfrac{5.4.3.2}{4!}x^{16}-x^{20}\right]\cdot\left[\ldots+(-1)^r\,{}^{n+r-1}C_r\,z^r\right]$

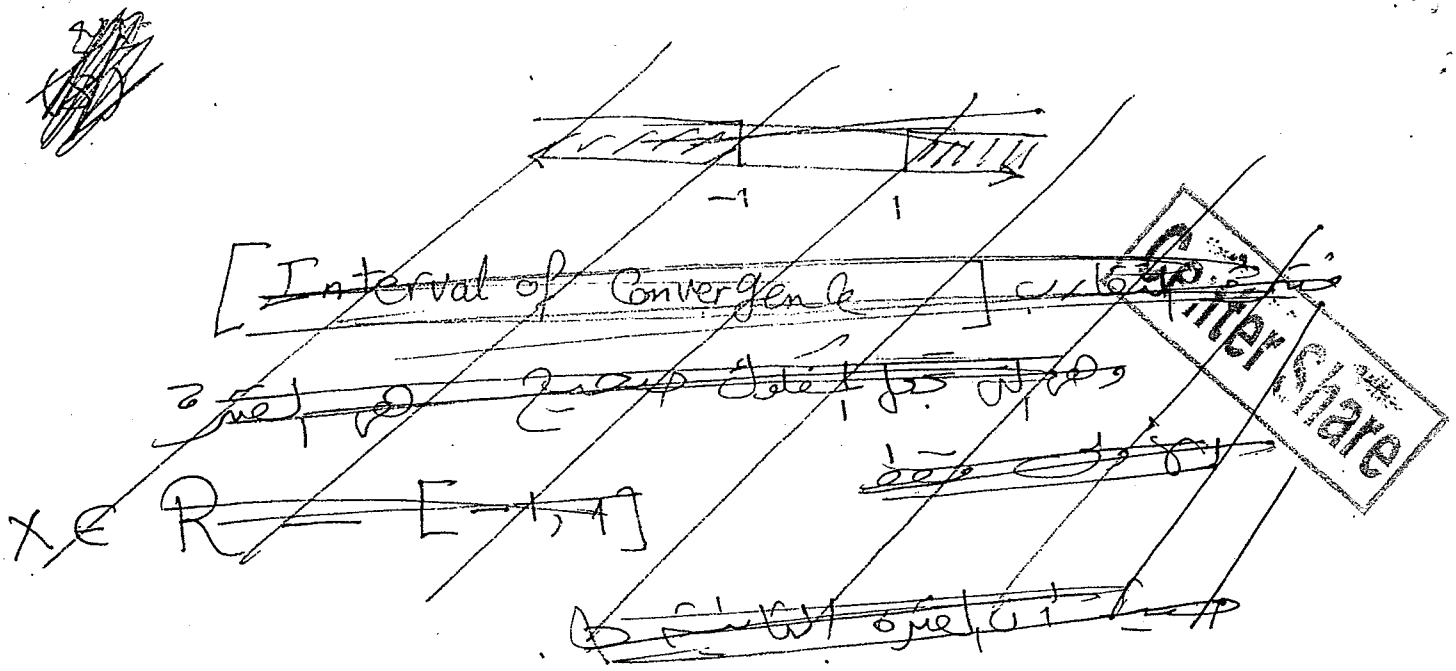
$n=5$, $z=-x$

$= x^{10}\left[1-5x^4+10x^8-10x^{12}+5x^{16}-x^{20}\right]\left[\ldots+(-1)^r\,{}^{5+r-1}C_r\,(-x)^r\right]$

$= \left[x^{10}-5x^{14}+10x^{18}-10x^{22}+5x^{26}-x^{30}\right]\cdot\left[\ldots {}^{r+4}C_r\cdot x^r\right]$

$\therefore$ Coeff. of x^r = $\underset{\text{معامل}}{{}^{r+4-10}C_{r-10}}\cdot\underbrace{(1)}_{x^{10}} + {}^{r+4-14}C_{r-14}\,(-5) + {}^{r+4-18}C_{r-8}\,(10) + {}^{r+4-22}C_{r-22}\,(-10) + {}^{r+4-26}C_{r-26}\,(5) + {}^{r+4-30}C_{r-30}\,(-1)$

Put $r=20$ ← x^{20} لإيجاد معامل



$x \in R = [-1, 1]$

---

[9] Evaluate Coeff. x^{30} & x^{29} from

Solution

$$f(x) = (x^2 + x^4 + \cdots + x^{12})^7$$

عامل مشترك

نضرب المقدار داخل القوس $(1-x^2)$

$$1 - x^6 = (1-x^2)(1+x^2+x^4)$$

$$\therefore f(x) = \frac{(x^2)^7 [1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}]^7 (1-x^2)^7}{(1-x^2)^7}$$

$$= x^{14} \left[(1+x^2+x^4)(1-x^2) + x^6 (1+x^2+x^4)(1-x^2) \right]^7$$

$$= x^{14} \left[1 - x^6 + x^6 (1-x^6) \right]^7$$

$$= \frac{x^{14}\left[1-x^{6}+x^{6}-x^{12}\right]^{7}}{(1-x^{2})^{7}} = x^{14}\cdot\left[1-x^{12}\right]^{7}\cdot\left[1-x^{2}\right]^{-7}$$

تفكيك عادي — قانون عام

$$= x^{14}\left[1-7x^{12}+21x^{24}\ 35x^{36}+35x^{48}-21x^{60}+7x^{72}-x^{84}\right]*$$

$$\left[\dots + (-1)^{r}\binom{n+r-1}{r} z^{r}\right]$$

حيث $n=7$ ، $z=-x^{2}$

$$=\left[x^{14}-7x^{26}+21x^{38}-35x^{50}+35x^{62}-21x^{74}+7x^{86}-x^{98}\right]\left[\dots+(-1)^{r}\binom{r+6}{r}(-1)^{r}x^{2r}\right]$$

$\therefore$ coeff $x^{2r} = (1)\binom{r-8/2}{r-14} + (-7)\binom{r-20/2}{r-26} + (21)\binom{r-32/2}{r-38}$

(معامل x^{14} ، معامل x^{r-14} ، معامل x^{26} ، معامل x^{r-26} ... وهكذا)

$+(-35)\binom{r-44/2}{r-50} + (35)\binom{r-56/2}{r-62} - 21\binom{r-68/2}{r-74}$

$-\binom{r-92}{r-98}$

لـ يـاريا معامل

نضع

$2r = 30$

$\therefore \boxed{r = 15}$

بالمثل لا نوجد معامل x^{2r+1} ⇐ لا يوجد لأن كل الحدود زوجية في القوسين #

فردية : عدد فردي