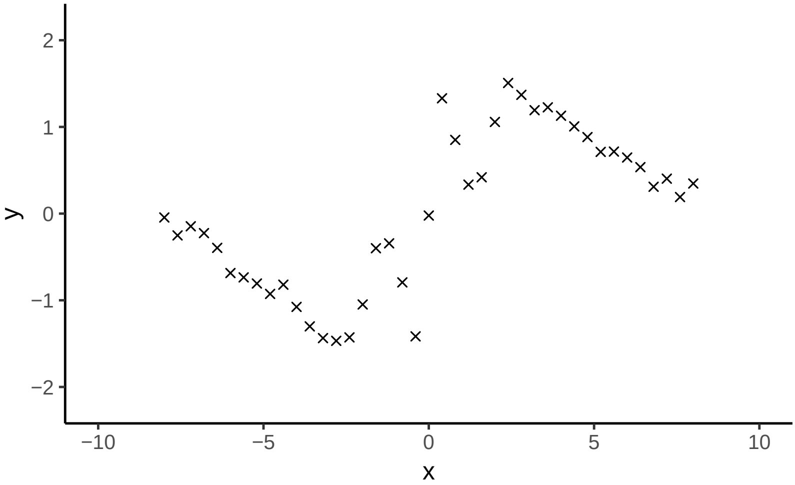
# Gaussian Processes

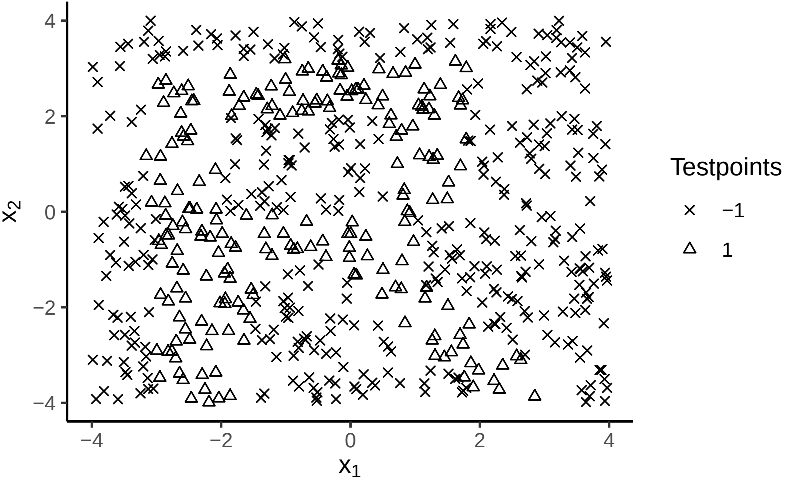
Budjan, Haas, Klumpp, Reitze

Datum: 22. Februar 2019

# Regression und Klassifikation



# Regression und Klassifikation



# Einführung zu Gaußschen Prozessen

- Stochastischer Prozess: $f : \Omega \times X \to Z$, $(\omega, x) \mapsto f_x(\omega)$ wobei $f_x(\omega)$ messbar in $\omega$ für alle $x \in X$.

# Einführung zu Gaußschen Prozessen

- Stochastischer Prozess: $f : \Omega \times X \to Z$, $(\omega, x) \mapsto f_x(\omega)$ wobei $f_x(\omega)$ messbar in $\omega$ für alle $x \in X$.
- Anschaulich: Stochastischer Prozess ist Zufallsvariable mit Werten $f_x$ in Funktionenraum

# Einführung zu Gaußschen Prozessen

- Stochastischer Prozess: $f : \Omega \times X \to Z$, $(\omega, x) \mapsto f_x(\omega)$ wobei $f_x(\omega)$ messbar in $\omega$ für alle $x \in X$.
- Anschaulich: Stochastischer Prozess ist Zufallsvariable mit Werten $f_x$ in Funktionenraum
- Ein Gaußscher Prozess ist ein stochastischer Prozess $(f_x)_{x \in X}$ wobei für jede endliche Teilmenge $Y \subset X$, $(f_x)_{x \in Y}$ multivariat normal verteilt ist.

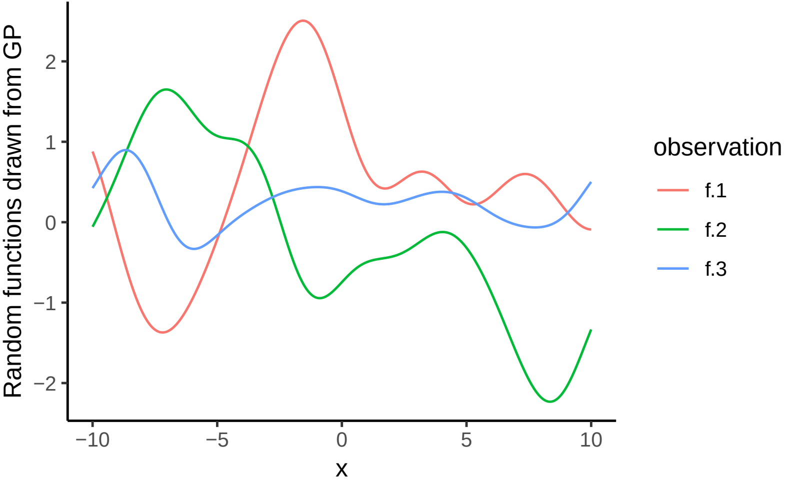
# Einführung zu Gaußschen Prozessen

- Stochastischer Prozess: $f : \Omega \times X \to Z$, $(\omega, x) \mapsto f_x(\omega)$ wobei $f_x(\omega)$ messbar in $\omega$ für alle $x \in X$.
- Anschaulich: Stochastischer Prozess ist Zufallsvariable mit Werten $f_x$ in Funktionenraum
- Ein Gaußscher Prozess ist ein stochastischer Prozess $(f_x)_{x \in X}$ wobei für jede endliche Teilmenge $Y \subset X$, $(f_x)_{x \in Y}$ multivariat normal verteilt ist.
- Wird charakterisiert durch $m(x) = \mathbb{E}(f(x))$ und $k(x, x') = \mathrm{Cov}(f(x), f(x'))$

# Einführung zu Gaußschen Prozessen

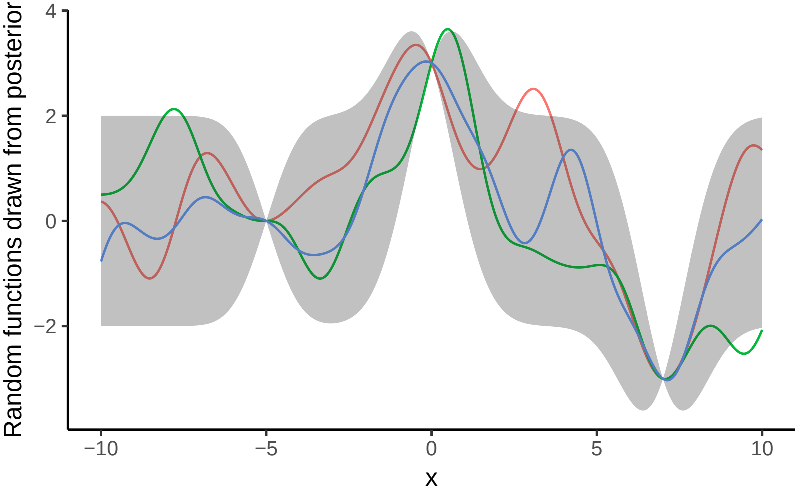
Im Folgenden: $X = \mathbb{R}^d$ und $m(x) = 0$

Beispiel für k: $k(x, y) = \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\ell}\right)$ 3 Beobachtungen eines Gausschen Prozess' mit dieser Covarianzfunktion (l = 1)



# Einführung zu Gaußschen Prozessen

3 Beobachtungen eines Gausschen Prozess' mit dieser Covarianzfunktion ($l = 1$), bedingt auf die Datenpunkte (-5,0), (0,3), (7, -3)



# Theorie zu Regression

Gemeinsame Verteilung für Datenpunkte $(X, f(X))$ und Testpunkte:

$$\begin{pmatrix} f(X) \\ f(X_*) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} K(X,X) & K(X,X_*) \\ K(X_*,X) & K(X_*,X_*) \end{pmatrix}\right)$$

$K(X,X)_{i,j} = k(X_i, X_j)$
Bedingte Verteilung:

$$f(X_*)|f(X), X, X_* \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

$$\mu = K(X,X_*)K(X,X)^{-1}f(X)$$

$$\Sigma = K(X_*,X_*) - K(X_*,X)K(X,X)^{-1}K(X,X_*)$$

# predict Algorithmus

Annahme: $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

Inputs: $X$ (inputs), $y$ (targets), $\sigma_n^2$ (noise),
$K$ (covariance funtion), $X_*$ (test input)

\# 1 $\quad L = \text{cholesky}(K(X, X) + \sigma_n^2 I)$
\# 2 $\quad \alpha = \text{solve}(L^\top, \text{solve}(L, y))$
\# 3 $\quad \bar{f}(X_*) = K(X, X_*)^\top \cdot \alpha$
\# 4 $\quad v = \text{solve}(L, K(X, X_*))$
\# 5 $\quad \overline{\mathrm{V}}(\bar{f}(X_*)) = K(X_*, X_*) - v^\top v$

return: $\bar{f}(X_*)$, $\overline{\mathrm{V}}(\bar{f}(X_*))$

# predict Algorithmus

Annahme: $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

Inputs: $X$ (inputs), $y$ (targets), $\sigma_n^2$ (noise),
$K$ (covariance funtion), $X_*$ (test input)

$$
\begin{array}{ll}
\# \ 1 & L = \text{cholesky}(K(X,X) + \sigma_n^2 I) \\
\# \ 2 & \alpha = \text{solve}(L^\top, \text{solve}(L, y)) \\
\# \ 3 & \bar{f}(X_*) = K(X, X_*)^\top \cdot \alpha \\
\# \ 4 & v = \text{solve}(L, K(X, X_*)) \\
\# \ 5 & \overline{\mathbb{V}}(\bar{f}(X_*)) = K(X_*, X_*) - v^\top v
\end{array}
$$

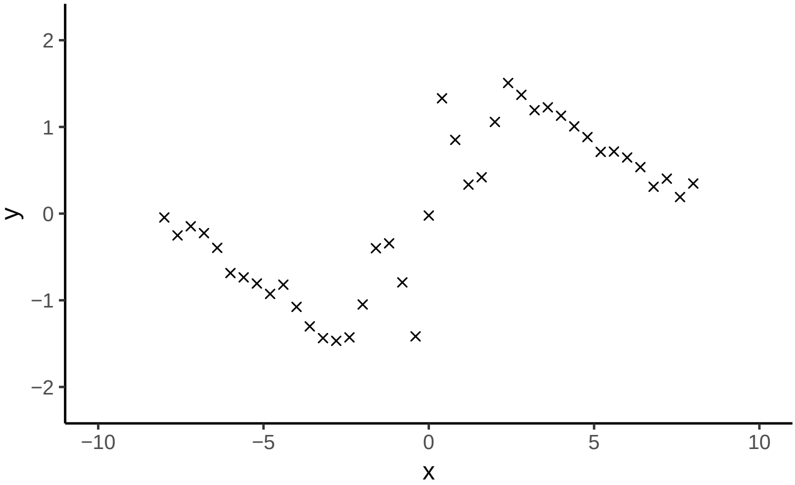
return: $\bar{f}(X_*)$, $\overline{\mathbb{V}}(\bar{f}(X_*))$

# GPR

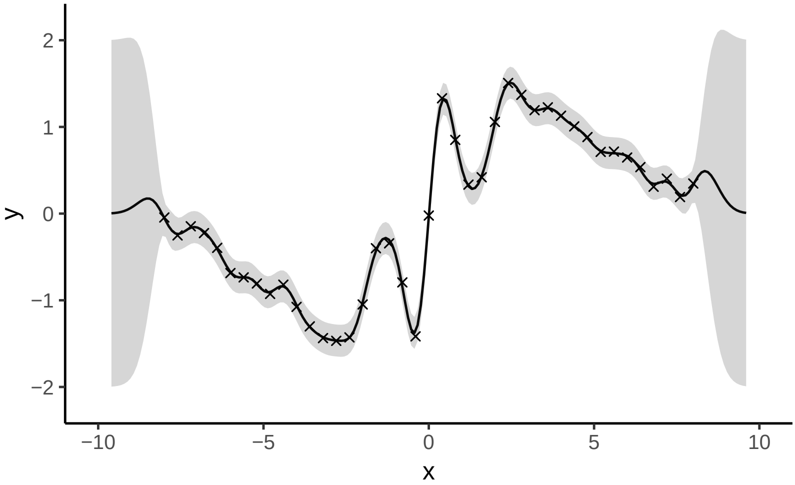
`GPR$new(X, y, noise, cov_func)`

- R6 Klasse
- Methoden
  - `$predict`
  - `$plot`
  - `$plot_posterior_draws`
  - `$plot_posterior_variance`
- Unterklassen für häufig auftretende Kovarianzfunktionen, die lediglich Parametereingabe erfordern

# Regression



# Regression



# Optimierung der Hyperparameter

Suchen Kovarianzfunktion, die beobachtete Daten am besten erklärt

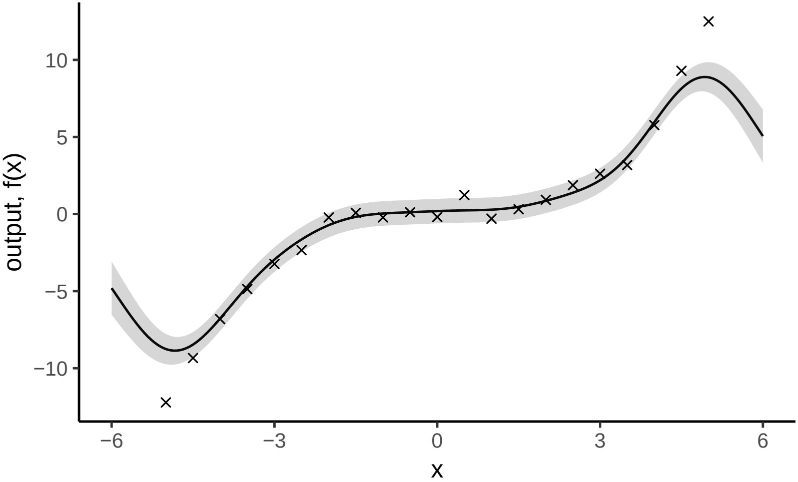
Methode: Maximiere Log-Likelihood der beobachteten Daten nach der Kovarianzfunktion $k$

# fit()

```
fit(X, y, noise, cov_names)
```

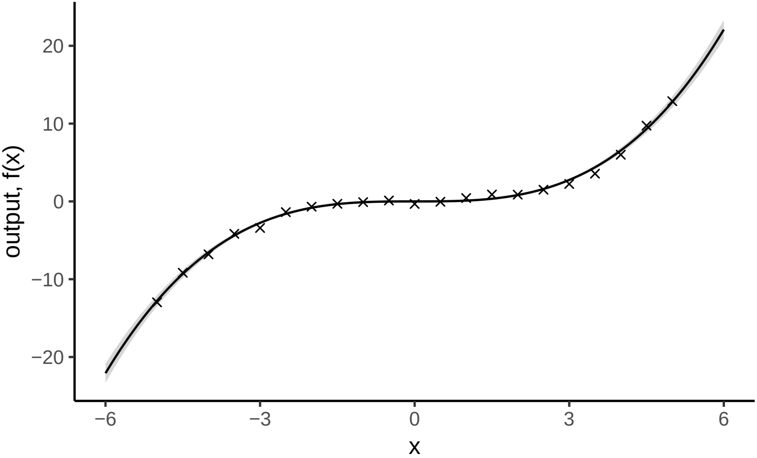
- Gibt die beste Kovarianzfunktion mit optimalen Parametern zurück
- Nutzen Newton-Methode, `optim()`
- Error handling bei numerischen Problemen der Cholesky Zerlegung

# Gewählte Kovarianzfunktion




```
## The chosen covariance function is sqrexp
```

# Optimierte Kovarianzfunktion



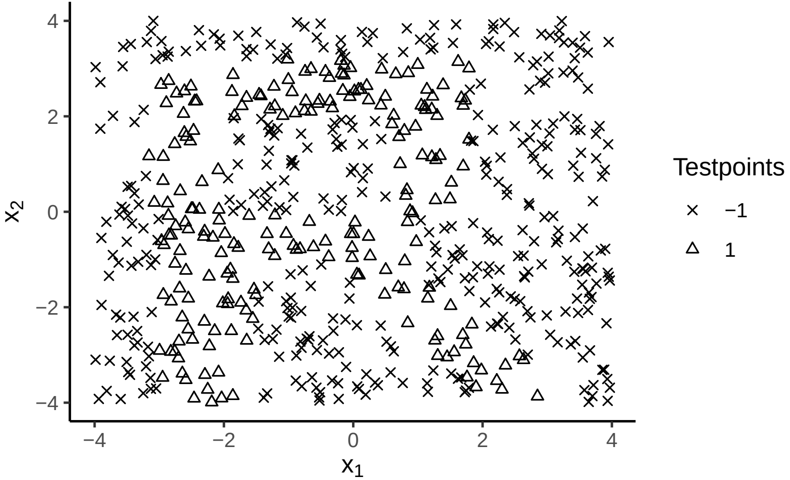

```
## The optimal covariance function is polynomial
```

# GP Classification

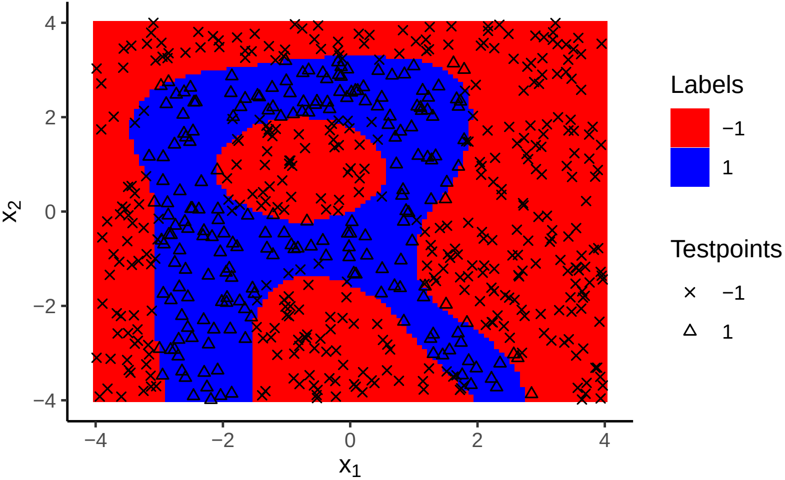
```
GPC$new(X, y, cov_fun, epsilon)
```

- R6 Klasse
- Methoden `$predict_class`, `$plot`
- Effizienz durch Vektorisierung

# Klassifikation



# Klassifikation

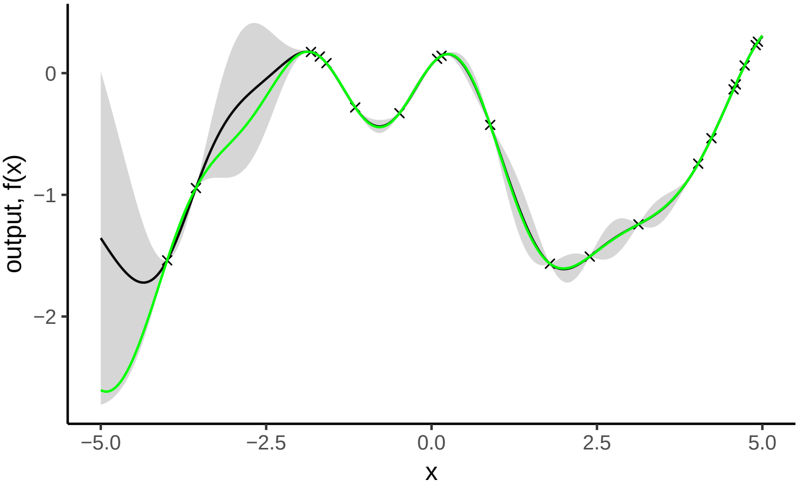


# Simulation

Framework, um Qualität von GP Methoden für verschiedene Daten zu testen

- `simulate_classification(func, limits, training_size)`
- `simulate_regression(func, limits, training_size)`
- `simulate_regression_gp(actual_cov, limits, training_size)`

# Simulation Beispiel



# Shiny App