质点运动

2021年8月31日星期二 下午8:28

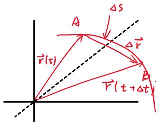
质点、位移、速度、加速度

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

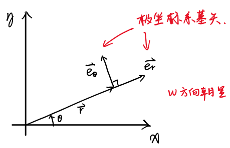
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

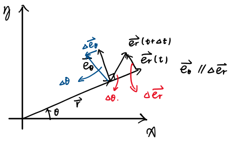
$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$



平面极坐标描述





$\vec{e_\theta} \parallel \Delta\vec{e_r}$

重要公式：

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{e_r}(t+\Delta t) - \vec{e_r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e_r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e_\theta} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} = \vec{\omega}\times\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e_\theta}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}(-\vec{e_r}) = -\dot{\theta}\vec{e_r} = \vec{\omega}\times\vec{e_r}$$

整理得：

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e_\theta} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e_r} = -\dot{\theta}\vec{e_r}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e}$$

会推导.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

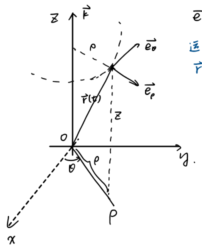
$$= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r(\dot{\theta})^2\vec{e_r}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$$

柱坐标



$$\vec{e_\rho}\times\vec{e_\theta} = \vec{k}$$

运动方程

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$= \rho(t)\cdot\vec{e_\rho}(t) + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho(t)\vec{e_\rho}(t) + z(t)\vec{k})}{dt}$$

$$= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \dot{z}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

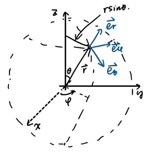
$$= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{k}$$

球坐标



$$\vec{e_r}\times\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi}$$

运动方程

$$\vec{r} = r(t)\vec{e_r}$$

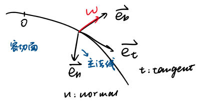
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

r方向　$\vec{e_\theta}$方向.　$\vec{e_\varphi}$方向.

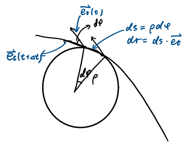
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r\vec{e_r} + r\Delta\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta\Delta\varphi\vec{e_\varphi}}{\Delta t}$$

$$= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$

自然坐标



$$\boxed{曲率\ \kappa = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|}$$



$$\frac{d\vec{e_t}}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e_n} \qquad \frac{d\vec{e_n}}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e_t}$$

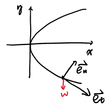
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{切线单位向量}\cdot\frac{ds}{dt} = v\vec{e_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e_t} + v\frac{d\vec{e_t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e_t} + v\dot{\varphi}\vec{e_n}$$

$\dot{\varphi} = \frac{v}{\rho_K}$ 曲率半径.

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{切向加速度}\vec{e_t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{e_n}}_{径向加速度}$$

例题 1.1



直角坐标系

$y^2 = 2px$ 对t求导.

$$\begin{cases} 2y\cdot\dot{y} = 2p\dot{x} \\ \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{-cy}{\sqrt{p^2+y^2}} \\ \dot{y} = -\frac{cp}{\sqrt{p^2+y^2}} \end{cases}$$

$$\vec{v} = i\dot{x} + j\dot{y}$$

$$\vec{a} = i\ddot{x} + j\ddot{y}$$

极坐标系.

$$(r\sin\theta)^2 = 2pr\cos\theta$$

$$r\sin^2\theta = 2p\cos\theta$$

对t求导

$$\begin{cases} \dot{r}\sin^2\theta + 2r\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta} = -2p\sin\theta\cdot\dot{\theta} \\ v = c = \sqrt{(\dot{r})^2+(r\dot{\theta})^2} \end{cases}$$

由公式得

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} \end{cases}$$

自然坐标系.

$$\vec{v} = c\vec{e_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = c\frac{d\vec{e_t}}{dt} = c\cdot\vec{\omega}\times\vec{e_n} = \frac{c^2}{\rho}\vec{e_n}$$

求曲率半径 ρ

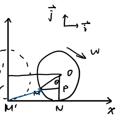
$$\rho = \frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$y' = \frac{p}{y},\quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

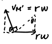
$$\frac{dy}{dx} = \tan\varphi = \frac{p}{y}.$$

$$\rho = -\frac{p}{\sin^3\varphi}$$

例题 2



一： $OO' = rwt$



$\vec{V_0} = rw$

$\vec{V_M} = \vec{V_0} + \vec{V_{M'}}$

$= rw\vec{i} + rw\sin\theta\vec{j} - rw\cos\theta i$

$= r\dot{\theta}(1-\cos\theta)\vec{i} + r\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

二： $\vec{r_M} = \overrightarrow{M'M}$

$= (\overline{M'N} - \overline{MP})\vec{i} + \overline{NP}\vec{j}$

$= r(\theta - \sin\theta)\vec{i} + r(1-\cos\theta)\vec{j}$ 作图可得车轮线.

$\vec{V_M} = \dfrac{d\vec{r_M}}{dt} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta)\vec{i} + r\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

$\vec{a_M} = \dfrac{d\vec{V_M}}{dt} = r\dot{\theta}^2\sin\theta\vec{i} + r\dot{\theta}^2\cos\theta\vec{j}$

$|\vec{a_M}| = r\dot{\theta}^2$

牛顿力学

2021年9月3日星期五　　上午9:11

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} = m\vec{a}$$

常用微分方程 —牛二

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$$

直角坐标系：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases}$$

平面极坐标系：

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

自然坐标系

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = F_t \\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$$

例题 3.

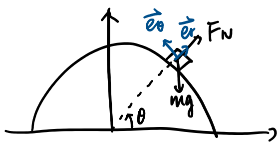
$$\begin{cases} m\dot{\vec{v}}_y = m\vec{g} - b\vec{v}_y \\ m\dot{\vec{v}}_x = -b\vec{v}_x \end{cases}$$

初值 $t=0$ 时 $\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} \\ x = y = 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} v_x = v_0 e^{-\frac{bt}{m}} \\ v_y = (v_{0y} + \frac{mg}{b})e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}. \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{mv_{0x}}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) \\ y = (\frac{mv_{0y}}{b} + \frac{m^2g}{b^2})(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) - \frac{mgt}{b}. \end{cases}$$

例题 4.



平面直角坐标

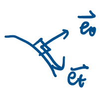
$$\begin{cases} F_N\sin\theta - mg = m\ddot{y} = F_N\frac{y}{R} - mg. \\ F_N\cos\theta = m\ddot{x} = F_N\frac{x}{R} \\ \text{约束条件}\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

极坐标

$$\begin{cases} F_N - mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ -mg\cos\theta = \underbrace{m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\vec{e}_\theta\text{方向.}} \\ \text{约束条件：}\ r = R \end{cases}$$

→ $-\vec{e}_\theta$ 方向

自然坐标.



$$\begin{cases} m\dot{v}_t = mg\cos\theta \\ m\frac{v^2}{\rho} = mg\sin\theta - F_N. \\ \text{约束条件：}\ \rho = R \end{cases}$$

$\longrightarrow m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mg\cos\theta$

S增大，θ减小，相反变化.

$ds = -Rd\theta.$

$mv_t dv_t = mg\cos\theta\, ds = -mg\cos\theta R d\theta$

$\frac{1}{2}mv_t^2 = -mRg\sin\theta + C$

$v=0$ 时 $\theta = \frac{\pi}{2}$

$v_t^2 = 2Rg(1-\sin\theta).$

$F_N = mg(3\sin\theta - 2)$

$\therefore\ \theta < \arcsin\frac{2}{3}$

功能关系

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_t^2 = mg(1-\sin\theta) \\ m\frac{v^2}{\rho} = mg\sin\theta - F_N \\ \text{约束方程}\ \rho = R \end{cases}$$

质点力学定理

动量 $\vec{p} = m\vec{v}$

动量定理. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$I = \int \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$

力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

角动量定理 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

动能 $T = \frac{1}{2}mv^2$

动能定理 $\vec{F}\cdot d\vec{r} = dT$

$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta T$

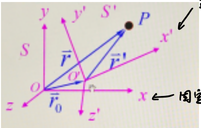
保守力 $\begin{cases} \nabla\times\vec{F} = 0 \\ \oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$

$dT = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz) = -dV$

转动参考系

2021年9月7日星期二　　上午10:15

运动坐标系



固定坐标系

$$\begin{cases}\vec r=\vec r_0+\vec r' \\ t=t'\end{cases}\Rightarrow \vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec r_0}{dt}+\frac{d\vec r'}{dt}=\vec v_0+\frac{d\vec r'}{dt}$$

$$\begin{cases}\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k \\ \vec r'=x'\vec i'+y'\vec j'+z'\vec k'\end{cases}\Rightarrow \frac{d\vec r'}{dt}=\frac{d(x'\vec i'+y'\vec j'+z'\vec k')}{dt}$$

$$=\dot x'\vec i'+\dot y'\vec j'+\dot z'\vec k'+x'\frac{d\vec i'}{dt}+y'\frac{d\vec j'}{dt}+z'\frac{d\vec k'}{dt}$$

其中 $\frac{d\vec i'}{dt}=\vec\omega\times\vec i'$　$\frac{d\vec j'}{dt}=\vec\omega\times\vec j'$　$\frac{d\vec k'}{dt}=\vec\omega\times\vec k'$

表示只对大小求导

$$\Rightarrow \frac{d\vec r'}{dt}=\frac{\tilde d\vec r'}{dt}+\vec\omega\times\vec r'$$

一般都有 $\frac{d}{dt}=\frac{\tilde d}{dt}+\vec\omega\times$

速度

平动牵连速度　　转动牵连速度

$$\vec V=\vec V_0+\vec V'+\vec\omega\times\vec r'$$

绝对速度

$$=\vec V_t+\vec V'$$

牵连速度　　S系中观察者看P点速度（相对速度）

加速度

$$\vec a=\frac{d\vec v}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec v_0+\vec v'+\vec\omega\times\vec r')=\frac{d\vec v_0}{dt}+\frac{d\vec v'}{dt}+\frac{d(\vec\omega\times\vec r')}{dt}$$

其中
$$\begin{cases}\frac{d\vec v'}{dt}=\frac{\tilde d\vec v'}{dt}+\vec\omega\times\vec v'=\vec a'+\vec\omega\times\vec v' \\ \frac{d(\vec\omega\times\vec r')}{dt}=\frac{\tilde d(\vec\omega\times\vec r')}{dt}+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')\end{cases}$$

$$=\frac{\tilde d\vec\omega}{dt}\times\vec r'+\vec\omega\times\frac{\tilde d\vec r'}{dt}+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$$

$$=\dot{\vec\omega}\times\vec r'+\vec\omega\times\vec V'+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$$

$$\vec a=\frac{d\vec v_0}{dt}+\vec a'+\vec\omega\times\vec v'+\dot{\vec\omega}\times\vec r'+\vec\omega\times\vec v'+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$$

绝对加速度

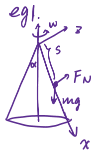
$$=\underbrace{\vec a_0+\dot{\vec\omega}\times\vec r'+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')}+\underbrace{2\vec\omega\times\vec v'}+\vec a'$$

$$=\vec a_t+\vec a_k+\vec a'$$

牵连加速度　与 $\vec v'$ 无关

科里奥利加速度
由 $\vec\omega$，$\vec v'$ 共同作用，即
参考系转动和质点相对运动共同作用引起的.

eg1.



以圆锥为参考系

$$\begin{cases}\vec r'=x\vec i \\ \vec v'=\dot x\vec i \\ \vec a'=\ddot x\vec i \\ \vec\omega=\omega(-\cos\alpha\,\vec i+\sin\alpha\,\vec k)\end{cases}$$

外力

支持力分量

$$\vec F=m\vec g+F_y'\vec j+F_z'\vec k$$

$$=mg\cos\alpha\,\vec i+F_y'\vec j+(F_z'-mg\sin\alpha)\vec k$$

惯性力

$\omega x\sin\alpha\,\vec j$

$$\vec F_{int}=-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')-2m\vec\omega\times\vec v'$$

$m\omega^2x\sin\alpha$　×（水平向右单位向量）

$$=m\omega^2x\sin\alpha(\sin\alpha\,\vec i+\cos\alpha\,\vec k)-2m\omega\dot x\sin\alpha\,\vec j$$

$$m\vec a'=\vec F+\vec F_{int}$$

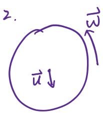
$$=(mg\cos\alpha+m\omega^2x\sin^2\alpha)\vec i+(F_y'-2m\omega\dot x\sin\alpha)\vec j+(F_z'-mg\sin\alpha+m\omega^2x\sin\alpha\cos\alpha)\vec k$$

分量方程

$$\begin{cases}m\ddot x=mg\cos\alpha+m\omega^2x\sin^2\alpha \\ 0=F_y'-2m\omega\dot x\sin\alpha \\ 0=F_z'-mg\cos\alpha+m\omega^2x\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

＋初始条件　$t=0$ 时　$x=0$，$\dot x=0$

eg2.



(a) 地面惯性系.

$\vec r=\vec r_0+\vec u t$　$\dot r=u$　$\ddot r=0$

$$\vec a=(\ddot r-r\dot\theta^2)\vec e_r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\vec e_\theta$$

$$=-r\omega^2\vec e_r+2u\omega\vec e_\theta$$

(b) 圆盘非惯性系.

惯性力 $\vec F_{int}=-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')-2m\vec\omega\times\vec v'$

$$=-m\vec\omega\times(\omega r\vec e_\theta)$$

$$=m\omega^2r\cdot\vec e_r-2m\omega u\,\vec e_\theta$$

$$m\vec a=\vec F+\vec F_{int}$$

$$\vec F=-\vec F_{int}=-m\omega^2r\vec e_r+2mu\omega\vec e_\theta$$

质点组力学

2021年9月11日星期六　　下午11:30

动量守恒

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}$$

外力

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)}$$

if $\vec{F}^{(e)} = 0$ 　 $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{constant}$

角动量守恒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i}^{(e)} = \vec{M}$$

动能定理

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$dT = \sum_i \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i} = \sum_i \vec{F_i}^{(e)} \cdot d\vec{r_i} + \sum_i \vec{F_i}^{(in)} \cdot d\vec{r_i}$$

能量守恒

$$dT = -dV$$

$$d(T+V) = 0$$

$$E = T + V = \text{constant}$$

质心与质心参考系

质心位置矢量 $\vec{r_c} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \dfrac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r_i}$

跟随质心一起平动的参考系简称质心系

$$\vec{r_i} = \vec{r_i} - \vec{r_c} + \vec{r_c} = \vec{r_i}' + \vec{r_c}$$

动量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\dot{r_i}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\dot{r_i}}' + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\dot{r_c}} = m\vec{\dot{r_c}} = \text{constant}$$

动量守恒

可视为质量集中于质点

$$\sum_i m_i \vec{r_c} = \sum_i m_i \vec{r_i}$$

$$\sum_i m_i \vec{r_i}' = \sum_i m_i \vec{r_i} - \sum_i m_i \vec{r_c} = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{r_i}' = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{v_i}' = 0$$

角动量

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_c} + \vec{r_i}') \times m_i (\vec{v_c} + \vec{v_i}')$$

$$= \vec{r_c} \times m\vec{v_c} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}' \times m_i \vec{v_i}' = \vec{L_c} + \vec{L}'$$ ← 角动量集中于质点

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L_c}}{dt} + \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}^{(e)} = \sum_i (\vec{r_i}' + \vec{r_c}) \times \vec{F_i}^{(e)} = \vec{r_c} \times \vec{F}^{(e)} + \underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \times \vec{F_i}^{(e)}}_{=\vec{M}'}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'$$

$$\frac{d\vec{L_c}}{dt} = \frac{d(\vec{r_c} \times m\vec{v_c})}{dt} = \vec{r_c} \times m\vec{a_c} = \vec{r_c} \times \vec{F}^{(e)}$$

动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v_c} + \vec{v_i}')(\vec{v_c} + \vec{v_i}')$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \underbrace{\vec{v_c} \cdot \sum_i m_i \vec{v_i}'}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

$$= T_c + T'$$

$T = T_c + T'$ ← 柯尼西定理

$$= T_c + T'$$

$$T = T_c + T'$$ ← 柯尼西定理.

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T'$$

$$dT = \frac{1}{2} M \vec{v_c} \cdot d\vec{v_c} + dT' \quad = \sum_i (\vec{F_i}^{(e)} + \vec{F_i}^{(i)})\, d\vec{r_i}$$

$$= \frac{1}{2} M \frac{d\vec{v_c}}{dt} \cdot d\vec{r_c} + dT' \quad = \sum_i (\vec{F_i}^{(e)} + \vec{F_i}^{(i)})(d\vec{r_c} + d\vec{r_i})$$

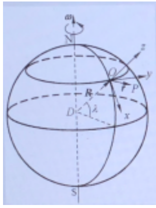
$$= \sum_i \vec{F_i}^{(e)} d\vec{r_c} + dT' \qquad \sum_i \vec{F_i}^{(i)} = 0$$

质心系动能定理

$$dT' = \sum_i \vec{F_i}^{(e)} \cdot d\vec{r_i}' + \sum_i \vec{F_i}^{(i)} \cdot d\vec{r_i}'$$

地球自转效应

2021年9月12日星期日　　下午9:31



质点运动

O点平动速度

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{R}$$

$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0 = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

质点P加速度

近似为0

$$\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{\approx 0} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{a}$$

$$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{a}$$

eg1. 质点受力

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}_0 + \vec{F}_{int}$$

自转的惯性离心力

方向向里　　方向向里.

$$= \vec{F} + m\vec{g}_0 - \underline{m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})} - \underline{2m\vec{\omega}\times\vec{v}}$$

$$= \vec{F} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

表观重力 (实际重力).

运动方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda. \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases}$$

$t=0$ 时　$x=y=0$, $z=h$, $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$

解
$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda & ① \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) & ② \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda & ③ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda \\ \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\lambda \end{cases}$$

代入②式得

$$\ddot{y} = -2\omega(2\omega y\sin^2\lambda - gt\cos\lambda + 2\omega y\cos^2\lambda)$$

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y - 2\omega gt\cos\lambda = 0. \quad ④$$

先解　$\ddot{y} + 4\omega^2 y = 0.$

$a^2 + 4\omega^2 = 0.$

$a_1 = -2\omega i$

$a_2 = 2\omega i$

齐次方程通解　$y = C_1\cos 2\omega t + C_2\sin 2\omega t$

④式有一特解　$y = \frac{1}{2\omega}gt\cos\lambda.$

故解得　$y = C_1\cos 2\omega t + C_2\sin 2\omega t + \frac{1}{2\omega}gt\cos\lambda$

$t=0$ 时　$y=\dot{y}=0.$

$\dot{y} = -2\omega C_1\sin 2\omega t + 2\omega C_2\cos 2\omega t + \frac{1}{2\omega}g\cos\lambda$

$2\omega C_2 + \frac{g\cos\lambda}{2\omega} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2}$

$\dot{x} = 2\omega\sin\lambda\left(C_1\cos 2\omega t - \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{1}{2\omega}gt\cos\lambda\right)$

$t=0$ 时　$\dot{x}=0$

$2\omega\sin\lambda C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$

$$\underline{y = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{1}{2\omega}gt\cos\lambda}$$

$$\dot{x} = \frac{-g\cos\lambda\sin\lambda}{2\omega}\sin 2\omega t + gt\sin\lambda\cos\lambda$$

$$\underline{x = \frac{g\cos\lambda\sin\lambda}{4\omega^2}\cos 2\omega t + \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda\cos\lambda - \frac{g\sin\lambda\cos\lambda}{4\omega^2}}$$

$$\dot{z} = -gt - \frac{g\cos^2\lambda}{2\omega}\sin 2\omega t + gt\cos^2\lambda$$

$$\underline{z = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{g\cos^2\lambda}{4\omega^2}\cos 2\omega t + \frac{1}{2}gt^2\cos^2\lambda - \frac{g\cos^2\lambda}{4\omega^2} + h}$$

对 ω 作泰勒展开

$$1 + \cancel{\frac{-2t\sin 2\omega t}{1!}}\omega + \frac{-4t^2\cancel{\cos 2\omega t}}{2!}\omega^2 + \cancel{\frac{+8t^3\sin 2\omega t}{3!}}\omega^3 + \frac{16t^4\cancel{\cos 2\omega t}}{4!}\omega^4$$

$$x = \frac{g\cos\lambda\sin\lambda}{4\omega^2}(\cos 2\omega t - 1) + \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda\cos\lambda.$$

$$= \frac{g\cos\lambda\sin\lambda}{4\omega^2}\left(\cancel{-2\omega^2t^2} + \frac{4}{6}t^4\omega^4\right) + \cancel{\frac{1}{2}gt^2\sin\lambda\cos\lambda}$$

$$= \frac{1}{6}g\cos\lambda\sin\lambda\,\omega^2t^4$$

$$y = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{1}{2\omega}gt\cos\lambda$$

$$= \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2}\left(\cancel{\frac{2t}{1!}\omega} - \frac{8t^3}{3!}\omega^3\right) + \cancel{\frac{1}{2\omega}gt\cos\lambda}$$

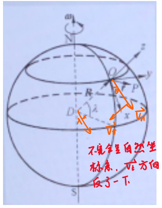
$$= \frac{1}{3}g\omega t^3\cos\lambda$$

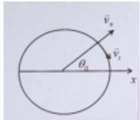
$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{3}g\omega^2t^4 \approx h - \frac{1}{2}gt^2$$

eg2. 竖直上抛从后落下.

$t=0$ 时　$x=y=z=0$, $\dot{x}=\dot{y}=0$, $\dot{z}=v_0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda)(+F_N(t)) \end{cases}$$





eg3.

$$\vec{\omega} = \omega_n\vec{e}_n + \omega_t\vec{e}_t + \omega_z\vec{e}_z = \omega_n\vec{e}_n + \omega_t\vec{e}_t + \omega\sin\lambda\,\vec{e}_z$$

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$= F_N\vec{e}_z - mg\vec{e}_z - 2m(\omega_n\vec{e}_n + \omega_t\vec{e}_t + \omega\sin\lambda\vec{e}_z)\times v\vec{e}_t$$

$$= F_N\vec{e}_z - mg\vec{e}_z + 2m\omega_n v\,\vec{e}_z - 2m\omega\sin\lambda\,v\vec{e}_n$$

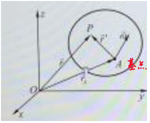
$$= (F_N - mg + 2m\omega_n v)\vec{e}_z - 2m\omega v\sin\lambda\,\vec{e}_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = -\frac{v^2}{\rho} = -2\omega v\sin\lambda \\ a_z = 0 = \frac{F_N}{m} - g + 2\omega_n v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 \\ \rho = \frac{v_0}{2\omega\sin\lambda} \\ F_N = mg - 2mv\omega_n \end{cases}$$

其中 $\vec{\omega}_n = -\cos\lambda\cos\theta\,\vec{\omega}$

刚体运动学

2021年9月10日星期五　上午9:14



$\vec r = \vec r_A + \vec r'$

$\vec v = \dot{\vec r} = \dot{\vec r}_A + \dot{\vec r}' = \vec v_A + \dot{\vec r}' = \underbrace{\vec v_A}_{\text{随基点平动速度}} + \underbrace{\vec\omega\times\vec r'}_{\text{绕动速度}}$

纯转动

在转动参考系中

$\vec a = \vec a_0 + \dot{\vec\omega}\cdot\vec r' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') + 2\vec\omega\times\vec v' + \vec a'$!!

在刚体中 $\vec r'$ 为定值 $\Rightarrow \vec v' = 0 \Rightarrow \vec a' = 0$

$\vec a = \dot{\vec v}_A + \dot{\vec\omega}\cdot\vec r' + \vec\omega\cdot\dot{\vec r}' = \vec a_A + \dot{\vec\omega}\times\vec r' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$

刚体的定轴运动

角速度　$\vec\omega = \frac{d\varphi}{dt}\vec e_z = \dot\varphi\vec e_z$

$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega\times\vec r$

加速度　$\vec a = \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times\dot{\vec r}$

$= \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$

平面平行运动

$\vec v = \vec v_A + \vec\omega\times\vec r'$

$\vec a = \vec a_A + \dot{\vec\omega}\times\vec r' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$

瞬心.

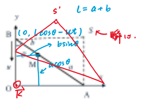
任一时刻 $\vec v = 0$ 的点

瞬心位置 P_0，则任一点A速度 $\vec v_A = \vec\omega\times\overrightarrow{P_0A}$

例1 求M点速度和加速度

见教材例5.1 (pp.118-119)

刚体作平面平行运动



质点法（自己求解）：

$r_M = b\sin\theta i + a\cos\theta j$

$v_M = \frac{dr_M}{dt}$

$a_M = \frac{dv_M}{dt}$

$-u = (l\cos\theta)'$

$u = l\sin\theta\cdot\dot\theta$ ← 应为正值.

$\dot\theta = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}$

$\ddot\theta = -\frac{u}{a+b}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\dot\theta$

$= -\frac{u^2}{(a+b)^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$

i, j 是地面参考系. 不在转动坐标系.

$\vec\omega = 0.$

$\vec v_M = \frac{d\vec r_M}{dt} = b\cos\theta\cdot\dot\theta\,\vec i + b\sin\theta\underbrace{\frac{d\vec i}{dt}}_{=0} - a\sin\theta\cdot\dot\theta\,\vec j + a\cos\theta\underbrace{\frac{d\vec j}{dt}}_{=0}$

$= \frac{u}{(a+b)\sin\theta}(b\cos\theta\vec i - a\sin\theta\vec j) + b\sin\theta\,\vec\omega\times\vec i + a\cos\theta\,\vec\omega\times\vec j$

$= \frac{u}{a+b}(b\cot\theta\vec i - a\vec j)$

$\vec a_M = \frac{d\vec v_M}{dt} = \frac{u}{a+b}\left(-b\csc^2\theta\cdot\frac{u}{(a+b)\sin\theta}\vec i\right)$

$= \frac{-u^2 b}{(a+b)^2\sin^3\theta}\vec i$

基点法：以B为基点　($\vec\omega$ 方向向外)

$$\begin{cases} r_M' = b\sin\theta\vec i - b\cos\theta\vec j \\ \vec v_B = -u\vec j \\ \vec a_B = 0 \\ \vec\omega = \dot\theta\vec k \end{cases}$$

$\vec v_M = \vec v_B + \vec\omega\times\vec r_M'$

$= -u\vec j + \dot\theta\vec k\times(b\sin\theta\vec i - b\cos\theta\vec j)$

$= -u\vec j + \frac{u}{(a+b)\sin\theta}(b\sin\theta\vec j + b\cos\theta\vec i)$

$= \frac{-ua}{a+b}\vec j + \frac{ub}{a+b}\cot\theta\vec i$

$\vec a_M = \vec a_B + \dot{\vec\omega}\times\vec r' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$

$= \ddot\theta\vec k\times(b\sin\theta\vec i - b\cos\theta\vec j) + \dot\theta\vec k\times[\dot\theta\vec k\times(b\sin\theta\vec i - b\cos\theta\vec j)]$

$= \ddot\theta(b\sin\theta\vec j + b\cos\theta\vec i) + \dot\theta\vec k\times[\dot\theta b\sin\theta\vec j + \dot\theta b\cos\theta\vec i)$

$= -\frac{u^2}{(a+b)^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\cancel{b\sin\theta\vec j} + b\cos\theta\vec i) + \frac{u^2 b\sin\theta}{(a+b)^2\sin^3\theta}(-\vec i) + \cancel{\frac{u^2 b\cos\theta}{(a+b)^2\sin^3\theta}\vec j}$

$= \frac{u^2 b(-\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{(a+b)^2\sin^3\theta}\vec i$

$= \frac{-u^2 b}{(a+b)^2\sin^3\theta}\vec i$

以A为基点

$$\begin{cases} r_M' = -a\sin\theta\vec i + a\cos\theta\vec j \\ \vec v_A = 0 \\ \vec a_A = \quad \text{← 这个不太好弄.} \\ \vec\omega = -\dot\theta\vec k \end{cases}$$

$\alpha = \pi - \theta$

$\omega_\alpha = -\omega_\theta$

道理都是一样的.

瞬心法.

$\vec\omega = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}\vec k$

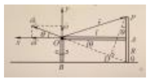
$\vec v_A = \vec\omega\times\overrightarrow{SA} = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}\cdot(a+b)\cos\theta\,[\vec k\times(-\vec j)]$

$= u\cot\theta\,\vec i$

$\vec v_M = \vec\omega\times\overrightarrow{SM} = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}\vec k\times(-a\sin\theta\vec i - b\cos\theta\vec j)$

$= \frac{u}{a+b}(b\cot\theta\vec i - a\vec j)$

刚体的定点运动



$\vec\omega_t = \vec\omega + \vec\omega' = \omega'\vec i + \omega\vec j$

$v_Q = \vec\omega_t\times\overrightarrow{OQ} = (\omega'\vec i + \omega\vec j)\times(-l\vec i - R\vec j)$

$= (\omega l - \omega' R)\vec k = 0$ ← 无滑滚动

$\omega' = \frac{l}{R}\omega$

$\vec\omega_t = \frac{l}{R}\omega\vec i + \omega\vec j$

$\vec v_P = \vec\omega_t\times\overrightarrow{OP} = \left(\frac{l}{R}\omega\vec i + \omega\vec j\right)\times(-l\vec i + R\vec j) = 2l\omega\vec k$

$\dot{\vec\omega}_t = \vec\omega\times\vec\omega_t = \omega\vec j\times\left(\frac{l}{R}\omega\vec i + \omega\vec j\right) = -\frac{l}{R}\omega^2\vec k$

$\vec a_P = \dot{\vec\omega}_t\times\overrightarrow{OP} + \vec\omega_t\times(\vec\omega_t\times\overrightarrow{OP})$

$= 3l\omega^2\vec i - \frac{l^2}{R}\omega^2\vec j$

利用瞬时轴求解

OQ 为瞬时轴

三角关系　$\omega : \omega' = R : l$

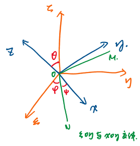
$\omega : \omega_t = R : \sqrt{R^2 + l^2}$

$\vec v_P = \omega_t\cdot PD = 2l\omega$

向轴加速度　$|\vec\omega_t\times(\vec\omega_t\times\overrightarrow{OP})| = \omega_t^2 PD = 2l\omega^2/\sin\theta$

转动加速度无法用瞬时轴计算

欧勒角



学方程

$\omega_x = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi$

$\omega_y = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi$

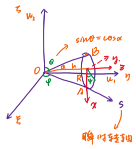
$\omega_z = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi$

$\omega_\xi = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi$

$\omega_\eta = \dot\theta\sin\varphi - \dot\psi\sin\theta\cos\varphi$

$\omega_\zeta = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$

习题 5.4



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = -\dot\psi\vec{e}_z + \dot\varphi\vec{e}_\zeta$$

$$= -\dot\psi\sin\theta\,\vec{e}_s + \underbrace{(\dot\varphi - \dot\psi\cos\theta)}_{=0}\vec{e}_\zeta$$ 无滑滚动

$$= -\dot\psi\sin\theta\,\vec{e}_s$$

$$= -\dot\psi\sin\theta\,(\tan\theta\vec{k} + \vec{i})$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}\times\vec{OB}$$

$$= -\dot\psi\sin\theta\,(\tan\theta\vec{k} + \vec{i})\times(-R\vec{i} + h\vec{k})$$

$$= 2\dot\psi h\cos\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{OB} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OB})$$

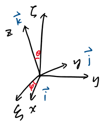
$$= \dot{\vec{\omega}}\times\vec{OB} + \vec{\omega}\times\vec{v}_B$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ 的两种算法

$$\left\{\begin{aligned} &= \frac{d(-\dot\psi\tan\theta\,\vec{e}_s)}{dt} = -\dot\psi\tan\theta\,(\underbrace{\dot\psi\vec{e}_z}_{\vec{\omega}_2}\times\vec{e}_s) \\ &= \frac{\tilde{d}\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega}_2\times\vec{\omega} = \vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_1 = \dot\varphi\,\vec{e}_\zeta\times\left(\frac{-\dot\psi}{\cos\theta}\vec{k}\right) \end{aligned}\right\} = -\dot\psi^2\tan\theta\,\vec{j}$$

代入得 $\vec{a}_B = \dot\psi^2 h\,(1 + 2\cos^2\alpha)(\cot\alpha\,\vec{i} - \vec{k})$

例题 5.13.



$$\vec{e}_\zeta = \sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

初始角速度

$$\vec{\omega} = \omega_0\vec{e}_\xi = \omega_0\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \dot\theta\vec{i} + \dot\varphi\vec{e}_\xi + \dot\psi\vec{k}$$

刚体特征量

2021年9月21日星期二　　下午2:18

动量

$$\vec{p} = m\vec{v}_c$$

角动量

$$\vec{L} = I\cdot\vec{\omega} = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

惯性张量

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

惯量张量分量

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2) = \int (y^2+z^2)\ dm$$
$$I_{yy} = \sum_i m_i(y_i^2+x_i^2) = \int (z^2+x^2)\ dm$$
$$I_{zz} = \sum_i m_i(y_i^2+x_i^2) = \int (x^2+y^2)\ dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i = \int yzdm$$
$$I_{zx} = I_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = \int zxdm$$
$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i y_i x_i = \int xydm$$

转动惯量

方向余弦

$$J_L = [\alpha\ \ \beta\ \ \gamma]\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

惯量主轴

特殊方向的轴使 $\vec{L}$ 与 $\vec{\omega}$ 同向.

求法：I 特征根对应的特征向量

刚体的动能

$$T = \sum \frac{1}{2} m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum\vec{r}\times m\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I\cdot\vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha\ \ \beta\ \ \gamma]\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\omega^2$$

一般运动：科尼希定理.

$$T = T_c + T' = \underbrace{\frac{1}{2} m v_c^2}_{\text{平动动能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\omega\cdot I_c\cdot\omega}_{\text{转动动能}}$$

平面平行运动

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c\omega^2$$

刚体的重力势能

$$U = \sum m_i g y_i = mgy_c$$

虚功原理

2021年9月28日星期二　　上午10:11

定常约束．非定常约束．
(无t)　　(有t)
完整约束．不完整约束．

1、实位移 =位移

- 满足动力学方程（牛顿第二定律）和初始条件
- 满足约束条件
- 经过时间间隔 dt才能有位移 $d\vec{r}$
- 在dt内质点的真实位移 $d\vec{r}$只有一个
- 真实位移可以是有限大 $\Delta\vec{r}$，也可以是无限小$d\vec{r}$

2、虚位移

定义：质点在满足当时约束条件下一切可能的无限小位移，称为该时刻质点的虚位移．

- "当时"，在某时刻讨论问题，即虚位移是在一确定时刻发生的，是不需要时间的．瞬时
- "一切可能"，虚位移包括一切可能的无限小位移，故有多个甚至无穷多个．
- "无限小"，虚位移是一级无穷小位移．
- 虚位移通常用 $\delta\vec{r}$表示，在直角坐标系中，

$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$　　$\delta x, \delta y, \delta z$称为坐标变分

二、虚功和广义力

1、虚功

定义：想象力在虚位移上所作的功．

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}$$

- 虚功有功的量纲，但没有能量转化过程与之联系．
- 虚位移的多种可能导致虚功也有多种可能．
- 虚功可以和实功完全不同．

2、主动力的虚功

设系统由n质点组成，对于第i个质点，$\vec{F}_i$表示第i个质点受到的主动力之和，$\vec{F}_{Ri}$表示第i个质点受到的被动力(或约束力)之和，$\delta\vec{r}_i$表示第i个质点的虚位移，则系统所有主动力的虚功之和为

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i$$

应用广义坐标来表达(可由此定义广义力)：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \quad i = 1, 2\ldots n \quad (已计及\delta t = 0)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$

3、广义力

定义广义力：$\boxed{Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2\ldots s)}$

虚功即可表成：$\delta W = \sum_{\alpha} Q_\alpha\delta q_\alpha$

又可得到广义力：$\boxed{Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2\ldots s)}$

以上即为广义力的两种计算途径，同时要注意：广义力与实际力的区别，广义力可能没有力的量纲

4、有势系下的广义力表示

主动力均为有势力的力学系统称为有势系．

设体系有n个质点，这时体系一定有势函数：

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n, t)$$

体系所有主动力都可表示成此势函数对相应坐标的负梯度，因此第i个质点受到的主动力为

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\therefore F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \qquad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

将F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}代入广义力的定义式中

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

$$\boxed{\therefore Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s}$$

三、理想约束

对被动力(或约束力)的虚功，考虑一种特殊情况：即作用于力学系统的所有约束力在任意虚位移上的虚功之和为零．

即系统是非耗散的．

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{Ri}\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

则这种约束称为理想约束．

四、虚功原理(微分形式的变分原理)

受有完整、理想、稳定约束并处于静止状态的力学系统，保持[静]平衡的必要[充分]条件是作用于该系统的全部主动力的虚功之和为零．

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

这就是虚功原理的数学表示．

几点说明：

(1) 普适性．

(2) 虚功原理中所说的平衡问题是指惯性系中的平衡，因此针对稳定的约束．

(3) 利用虚功原理求解理想约束力系的平衡问题时，无需考虑约束力，只需求出主动力的虚功之和，这是一个很大的优点．

(4) 这同时也是一个缺点：由于虚功原理的方程中不出现约束力，因此不能由虚功原理求出约束力．这时候通过释放约束或用不定乘子法，可以求出约束力

五、广义平衡方程

将虚功原理化为以广义坐标表述的形式：

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha = 0$$

在完整系中，广义坐标及其变分都是相互独立的，所以

根据线性代数的理论，δq_α前面的系数应分别等于零．

广义平衡方程：$Q_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s$

虚功原理又可叙述为：对于受完整、稳定、理想约束的力学系统，保持静平衡的必要充分条件是所有的广义力都为零．

对于主动力均为有势力的有势系：

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

所以，广义平衡方程又表示为

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s$$

理想约束情形

① 约束在光滑线．面上 $\begin{cases} 静止时：约束力\ \vec{N}\cdot d\vec{r_i} = 0 \\ 运动时：\vec{N}\cdot d\vec{r_i} \neq 0 \end{cases}$

② 固定点约束或曲面上纯滚动约束．接触点 $\delta\vec{r_p} = 0$

③ 接触约束：一对力的两施力者相对虚位移与作用力垂直．

④ 刚性约束：一对力两施力者无相对虚位移．

虚功原理的3种表示方法

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\cdot\delta\vec{r_i} = 0$$

$$Q_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, 2\cdots, s$$

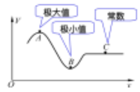
$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2\cdots s$$

六、平衡的稳定性(仅讨论在保守场情形)

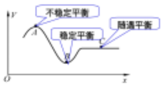
1. 质点在一维保守力场中的静平衡及其稳定性

势能具有稳定值（极大值、极小值或常值）是质点的静平衡条件．

$$\frac{dV}{dx} = 0$$



静平衡 $\begin{cases} 稳定的静平衡 \\ 不稳定的静平衡 \\ 随遇平衡 \end{cases}$



$\left.\frac{dV}{dx}\right\vert_B = 0$	$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right\vert_B > 0$	稳定的静平衡条件
$\left.\frac{dV}{dx}\right\vert_A = 0$	$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right\vert_A < 0$	不稳定的静平衡条件
$\left.\frac{dV}{dx}\right\vert_D = 0$	$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right\vert_D = 0$	考虑更高阶导数，平衡稳定性待定
$V\vert_{near\ C} = const$		随遇的静平衡条件

虚功原理应用

七、虚功原理的应用

例1(参见教材例6-1, pp.175-177) 如图所示，匀质杆OA，质量为m_1，长为l_1，能在竖直平面内绕固定的光滑铰链O转动，此杆的A端用光滑铰链与另一根质量为m_2，长为l_2的匀质杆AB相连，在B端有一水平作用力$\vec{F}$，求处于静平衡时，两杆与铅垂线的夹角φ_1和φ_2．

1、判断约束类型

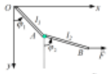
是否完整约束？是否理想约束？

2、判断自由度

A、B两点的位置，　4个变量

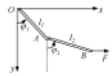
$\overline{OA} = l_1, \overline{AB} = l_2$

$s = 4 - 2 = 2 \quad q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$



实际上对于本例，我们很容易直接判断自由度并选择广义坐标

首先选择 φ_1 为坐标参量，只要φ_1确定，则杆OA的位置完全确定；在此基础上，再选择 φ_2 为参量，只要 φ_2 确定，则杆AB的位置又可以完全确定．



因此该体系的自由度 = 2，φ_1，φ_2 即可作为广义坐标

3、分析受力(主动力)　$m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, \vec{F}$

4、由虚功原理　$m_1\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_1 + m_2\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_2 + \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_3 = 0$

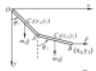
5、建立坐标系(必须是静止坐标系)

$m_1 g\delta y_1 + m_2 g\delta y_2 + F\delta x_3 = 0$

6、写出坐标变换方程

$$\begin{cases} y_1 = \frac{l_1}{2}\cos\varphi_1 \\ y_2 = l_1\cos\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\cos\varphi_2 \\ x_3 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta y_1 = -\frac{l_1}{2}\sin\varphi_1\delta\varphi_1 \\ \delta y_2 = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - \frac{l_2}{2}\sin\varphi_2\delta\varphi_2 \\ \delta x_3 = l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2 \end{cases}$$



$$\left(F\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}m_1 g\sin\varphi_1 - m_2 g\sin\varphi_1\right)l_1\delta\varphi_1$$

$$+\left(F\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}m_2 g\sin\varphi_2\right)l_2\delta\varphi_2 = 0$$

由于$\delta\varphi_1$和$\delta\varphi_2$互相独立

$$\begin{cases} (F\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}m_1 g\sin\varphi_1 - m_2 g\sin\varphi_1)l_1 = 0 \\ (F\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}m_2 g\sin\varphi_2)l_2 = 0 \end{cases}$$　广义平衡方程

可求出系统处于静平衡时φ_1，φ_2所满足的方程：

$$\begin{cases} \tan\varphi_1 = \frac{2F}{(2m_2 + m_1)g} \\ \tan\varphi_2 = \frac{2F}{m_2 g} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arctan\frac{2F}{(2m_2 + m_1)g} \\ \varphi_2 = \arctan\frac{2F}{m_2 g} \end{cases}$$

应用虚功原理解题的主要步骤是：

(1)明确系统的约束类型，看是否满足虚功原理所要求的条件；

(2)正确判断系统的自由度，选择合适的广义坐标；

(3)建立合适的静止的惯性坐标系，并能写出普通直角坐标和广义坐标之间的变换关系方程；

(4)分析并图示系统受到的主动力；

(5)通过坐标变换方程，将虚功原理化成 $\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha = 0$ 的形式，进而得出广义平衡方程 $Q_\alpha = 0, \alpha = 1, 2, \cdots, s$．

(6)对有势系，求出系统的势能V后，可通过 $\partial V/\partial q_\alpha = 0$ $\alpha = 1, 2, \cdots, s$ 得广义平衡方程；

(7)求解广义平衡方程

(8)可能的话，讨论体系平衡的稳定性条件

eg 2.

eg 3.

建立惯性坐标系

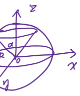
$$\vec{F_T}\, d\vec{r_B} - \vec{F_T}\, d\vec{r_D} + \vec{P}\, d\vec{r_C} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{r_B} = -l\sin\alpha \\ \vec{r_D} = l\sin\alpha \\ \vec{r_C} = -2l\cos\alpha + d\cot\alpha \end{cases}$$

$$2\vec{F_T}(-l\cos\alpha\, d\alpha) + \vec{P}(2l\sin\alpha - d\csc^2\alpha)\, d\alpha = 0$$

$$-2F_T l\cos\alpha + 2Pl\sin\alpha - Pd\csc^2\alpha = 0$$

$$F_T = P\tan\alpha\left(\frac{d}{2l}\csc^3\alpha - 1\right)$$



$l_0.\ k.\ \sigma$

自由度为1，坐标选 α

重力势能 $V_g = l_0\sigma\cdot g\cdot R\cos\alpha$

弹性势能 $V_s = \frac{1}{2}k(2\pi R\sin\alpha - l_0)^2$

$$V = V_g + V_s = l_0\sigma g R\cos\alpha + 2\pi^2 k R^2\sin^2\alpha + \frac{1}{2}k l_0^2 - k\cdot 2\pi R l_0\sin\alpha$$

$$Q_\alpha = -\frac{dV}{d\alpha} = l_0\sigma g R\sin\alpha - 4\pi^2 k R^2\sin\alpha\cos\alpha + 2k\pi R l_0\cos\alpha$$

令 $Q_\alpha = 0$

$$l_0\sigma g\sin\alpha - 4\pi^2 k R\sin\alpha\cos\alpha + 2k\pi l_0\cos\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha = \frac{l_0\sigma g\sin\alpha + 2k\pi l_0\cos\alpha}{2\pi^2 k R}$$

拉格朗日方程

2021年10月12日星期二　上午10:47

$$F_i + F_{Ni} - m\ddot{r} = 0$$

主动力　约束力　达朗贝尔惯性

对于理想约束来说

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ni}\cdot\delta\vec{r_i} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i (F_i - m_i\ddot{r}_i)\,\delta r_i = 0$$

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (3\text{-}2)$$

—— 动力学普遍方程

—— 也称达朗贝尔-拉格朗日方程

—— 也称第一类拉格朗日方程

任意瞬时作用于具有理想、双面约束的系统上的主动力与惯性力在系统的任意虚位移上的元功之和等于零。

说明：这里考虑的是动力学问题，体系在惯性系中并不平衡，约束也可以是非稳定的，(3-2)式只能解决在约束面内的运动，跟随约束面的运动与约束有关，不过一般跟随约束的运动是已知的。

2.拉格朗日(Lagrange)方程

对于存在约束的体系，动力学普遍方程中各坐标变量的变化相互不独立，因此可以应用类似虚功原理的处理方法，得到达朗贝尔-拉格朗日方程的广义坐标形式 -------- 拉格朗日方程。

当然，我们也可从更基本的哈密顿原理出发，直接推导 ------ 拉格朗日方程，后面再提。

前面已有：$Q_k - \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, s)$

动能 $\frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s) \qquad (3\text{-}3)$$

此即基本形式的拉格朗日方程，或称为第二类拉格朗日方程，适用于理想、完整体系。

势能与速度无关

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}_{=0}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0$$

广义力

引入拉格朗日函数　$L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$

得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s) \qquad (3\text{-}4)$$

这就是保守力系的拉格朗日方程，简称为拉氏方程，这里需要注意：拉格朗日方程中的动能和势能都必须用独立的广义坐标来表达，在这样的意义下，才把L称为体系的拉格朗日函数。

3.拉格朗日方程的简单应用

对于只具有完整约束、自由度为 s 的系统，可以得到由 s 个拉格朗日方程组成的方程组。

应用拉格朗日方程，一般应遵循以下步骤：

- 首先，要判断约束性质是否完整、理想，主动力是否有势，决定采用哪一种形式的拉格朗日方程。
- 其次，要确定系统的自由度，选择合适的广义坐标 (可能需要写出体系中各质点直角坐标和广义坐标之间的变换关系)。
- 按照所选择的广义坐标，写出系统的动能、势能或广义力(可先写出动能、势能为各质点速度和坐标变量的表示式，然后必须改写为广义坐标的表述)。
- 将动能或拉格朗日函数、广义力代入拉格朗日方程。
- 求解运动方程并讨论。

例2：见教材例6.5 (pp.191-193)

第一类约束

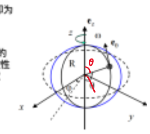
解：

1、系统的约束为完整理想约束，同时约束是不稳定的，主动力(重力)是有势力。

2、由于圆环的约束，系统只有一个自由度，广义坐标选择为 $q = \theta$，z 轴为转轴。

注意：广义坐标 θ 只是描述质点(系)相对于圆环(约束)的运动，而圆环(约束)本身的运动是已知的，其位置由角 φ 表示，$\varphi = \int \omega dt$，所以 φ 不是广义坐标。

3、考虑建立一个惯性系oxyz，z 轴即为圆环的转轴。



下面我们将会看到，在计算质点(系)的速度或动能的时候，必须是相对于惯性系，所以可能要包含约束运动的贡献

坐标变换关系为：

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi = R\sin\theta\cos\omega t \\ y = R\sin\theta\sin\varphi = R\sin\theta\sin\omega t \\ z = +R\cos\theta \end{cases}$$

牵连速度

$$v = \frac{\tilde{d}\vec{R}}{dt} + \vec{w}\times\vec{R} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + Rw\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(R^2w^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = mgz = mgR\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(R^2w^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2) + mgR\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2w^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \end{cases}$$

应用拉氏方程：

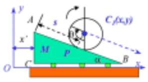
$$\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2w^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = w^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta$$

例3：见教材例6.6 (pp.193-195)

本题有两个难点：确定系统的自由度和广义坐标；写出系统的动能



本系统包括两个物体：斜面和转动圆柱.

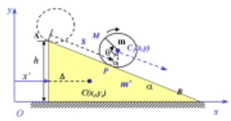
建立固定坐标系 xoy

斜面作一维平动，可以采用斜面上任何一点代表其运动，可选质心，显然只需要一个广义坐标即可描述其位置，取为 x' (斜面侧边AC到某一固定直线---oy轴---的距离)

圆柱作平面平行运动，原则上有三个自由度（两个描述质心，一个描述转动），但圆柱是在斜面上运动，当斜面位置确定时，圆柱实际上相当于沿一条直线作纯滚动的情况，其自由度因受到一维约束和纯滚动约束应该显著减少

根据圆柱沿一条直线作纯滚动的经验：选用 θ (相对于某一固定垂线转过的角度) 作为广义坐标，应该足以确定圆柱在斜面上的位置.

因此我们选择两个广义坐标 x', θ，它们完全能够确定体系的位置，所以体系的自由度为 2，下面从广义坐标的变换完全证明了这一点.



建立普通坐标和广义坐标之间的变换方程：

$$x = x' + s\cos\alpha + r\sin\alpha,$$
$$y = h - s\sin\alpha + r\cos\alpha$$
$$x_c = x' + \Delta,$$
$$y_c = const$$

纯滚动约束 $\begin{cases} V_{c_1} = r\dot{\theta} \\ S = r(\theta - \alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' + \dot{s}\cos\alpha = \dot{x}' + r\dot{\theta}\cos\alpha \\ \dot{y} = -\dot{s}\sin\alpha = -r\dot{\theta}\sin\alpha \\ \dot{x}_c = \dot{x}' \\ \dot{y}_c = 0 \end{cases}$$

圆柱平动动能　转动动能　斜面动能

动能 $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)$，$J \to \frac{1}{2}mr^2$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}'^2 + m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

势能 $V = mgy + m'gy_c = -mgr\theta\sin\alpha + constant$

$$L = T - V$$
$$= \frac{m+M}{2}\dot{x}'^2 + m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\theta\sin\alpha + constant$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = (m+M)\dot{x}' + m\dot{\theta}r\cos\alpha \\ \dfrac{\partial L}{\partial x'} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right)}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x'} = 0$$

x方向动量守恒

$$\Rightarrow (m+M)\ddot{x}' + m\ddot{\theta}r\cos\alpha = 0 \Rightarrow (m+M)\dot{x}' + mr\dot{\theta}\cos\alpha = 0 \leftarrow \text{初始条件}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}'r\cos\alpha + \dfrac{3}{2}mr^2\dot{\theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = mgr\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}'r\cos\alpha + \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} = mgr\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}' = \dfrac{-2mg\sin\alpha\cos\alpha}{3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{2g(m+M)\sin\alpha}{r[3M - (3 - 2\cos^2\alpha)m]} \end{cases}$$

$$\ddot{x}' = \frac{d\dot{x}'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{x}'}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}\dfrac{d\dot{x}'}{d\theta} = \dfrac{-2mg\sin\alpha\cos\alpha}{3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m} \\ \dot{\theta} = -\dfrac{(M+m)\dot{x}'}{mr\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}d\dot{x}'^2 = \frac{2m^2gr\sin\alpha\cos^2\alpha}{(m+M)[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}d\theta$$

积分得

$$\dot{x}'^2 = \int_{\alpha}^{2n\pi+\alpha} \frac{4m^2gr\sin\alpha\cos^2\alpha}{(m+M)[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}d\theta$$

$$\vec{v} = -\dot{x}'\vec{i} = -\vec{i}\sqrt{\frac{8n\pi m^2gr\sin\alpha\cos^2\alpha}{(m+M)[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}}$$

同理 $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\theta}^2}{dt} = \dfrac{2g(m+M)\sin\alpha}{r[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}$

$$\frac{1}{2}d\dot{\theta}^2 = \frac{2g(M+m)\sin\alpha}{r[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}d\theta$$

积分得

$$\dot{\theta}^2 = \int_{\alpha}^{2n\pi+\alpha} \frac{4g(m+M)\sin\alpha}{r[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}d\theta = \frac{8n\pi g(M+m)\sin\alpha}{r[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}$$

$$W = -\dot{\theta}\vec{k} = \vec{k}\sqrt{\frac{8n\pi g(m+M)\sin\alpha}{r[3M + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}}$$

拉格朗日初积分

2021年10月17日星期日　　下午10:42

① 循环积分

对有势系统，当 L 函数不显含某一广义坐标 q_j 时，

q_j 称为循环坐标

此时有 $\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$

由拉格朗日方程得 $\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=p_j=\text{constant}$

由初始条件决定
也称为广义积分

② 能量积分（广义能量守恒）

(2) 能量积分（广义能量守恒）

分析力学中的保守系和矢量力学中保守系不一定完全一样，
我们仅限于讨论理想、完整、保守系

条件

系统主动力有势，L 函数不显含时间 t（$\frac{\partial L}{\partial t}=0$）这时候有另一个运动积分：（广义）能量积分：

$$\sum_{j=1}^{s}(p_j\dot{q}_j)-L=h=\text{常量}$$

约束稳定 ⇒ 机械能守恒
$h=T+V=E$

约束非稳定 ⇒ 广义能量守恒
$h=T_2-T_0+V\neq E$

即记 $\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\cdot\dot{q}_j-L=h$

即 $\sum \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j}{\partial t}-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0}=0$

即 $\sum \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j}{\partial t}=0$

即 $\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\cdot\dot{q}_j=\text{const}$

不与t有关

?

结论:

1. 存在广义能量积分的条件是：L 不显含时间t

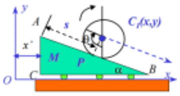
2. 稳定约束下，坐标变换不显含时间 t，L的能量积分h 就是机械能

3. 非稳定约束下，坐标变换显含时间 t，L的能量积分h 就是广义能量

4. 在矢量力学中保守系的机械能守恒；在分析力学的保守系中，虽然约束是理想的，主动力是保守的，但约束力(在非稳定约束时)可以做功，因此机械能可以不守恒，这时候只有初积分--广义能量

对例3的初积分：

$$L=T-V=\frac{m+m'}{2}\dot{x}'^2+m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha+\frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2+mgr\theta\sin\alpha+\text{const}$$



L有循环坐标 x'　　$\frac{\partial L}{\partial x'}=0$

广义动量积分：　$p_{x'}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}=(m+m')\dot{x}'+mr\dot{\theta}\cos\alpha=\text{const}$

条件1

L不显含t:　$\frac{\partial L}{\partial t}=0$

条件2

稳定约束(变换关系中不显含 t):　　$T=T_2$

difference

能量积分(机械能守恒):　　$T+V=\text{const}$

$$\frac{m+m'}{2}\dot{x}'^2+m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha+\frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2-mgr\theta\sin\alpha=\text{const}$$

运动微分方程:
$$\begin{cases}(m+m')\ddot{x}'+mr\ddot{\theta}\cos\alpha=0\\ m\ddot{x}'r\cos\alpha+\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}-mgr\sin\alpha=0\end{cases}$$

拉格朗日方程导出的形式

运动微分方程的初积分:
$$\begin{cases}(m+m')\dot{x}'+mr\dot{\theta}\cos\alpha=0\\ \frac{m+m'}{2}\dot{x}'^2+m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha+\frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2=mgr(\theta-\alpha)\sin\alpha\end{cases}$$

原则上可以用两个初积分(一阶)代替前面的两个二阶微分方程

例6 质量为 m 的质点在保守场 V(r) 中运动，试用拉格朗日方法求系统的运动微分方程和相应的初积分。

解：体系为质点，自由度数　$s=3$。

质点受力为有心力：　$\vec{F}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r=-F(r)\frac{\vec{r}}{r}$

容易证明质点作平面运动(有心力，力矩为零，角动量守恒，质点在垂直于角动量的平面内运动)，自由度　$s=2$，所以采用极坐标　　为广义坐标

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$$

法一：

有心力运动微分方程：

$$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r) & ①\\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta=0 & ②\end{cases}$$

$=\frac{m}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \Rightarrow r^2\dot{\theta}=\text{constant}=h$

角动量守恒.

机械能守恒方程

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E \quad ③$$

三式选二即可解.

法二：拉格朗日方程.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\end{cases}$$

其中 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\\ \frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial V}{\partial r}\end{cases}$　$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}\\ \frac{\partial L}{\partial \theta}=0\end{cases}$

运动微分方程 $\begin{cases}m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+\frac{\partial V}{\partial r}=0\\ \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt}=0\end{cases}$

运动方程的初积分 $\begin{cases}\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E\\ mr^2\dot{\theta}=h\end{cases}$

多自由度系统小振动

2021年10月19日星期二　　上午10:31

§ 4-4 多自由度系统的小振动

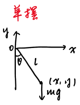
1. 振动的分类:

➢振动在宏观领域、工程技术和微观领域都大量存在，如固体物理中讲的晶格振动；光学中讲的分子振动光谱等.

➢振动可以分为：单自由度和多自由度(有限和无限)；自由振动、阻尼振动和受迫振动；线性振动和非线性振动等.

➢本节限于讨论：完整、理想、稳定约束的保守系统在其平衡位置附近的小振动问题

单摆



切线方向

$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

动能：$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

势能：$V = mgl(1-\cos\theta)$

$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0$

即 $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

小振动

$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ，$\sin\theta \approx \theta$

$L \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

解得　$\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$　简谐振动

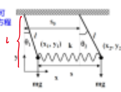
$\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}$

4. 耦合摆

以耦合摆为例说明两个自由度的小振动的处理方法

分析:
这是一个完整理想和保守系统,可以方便应用拉氏方法得出运动方程并进一步解决问题.

容易看出系统的自由度=2, 选 θ_1 和 θ_2 为广义坐标



$(x_1, y_1) = (l\sin\theta_1,\ l - l\cos\theta_1)$

$(x_2, y_2) = (s_0 + l\sin\theta_2,\ l - l\cos\theta_2)$

$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$

$s = \sqrt{(s_0 + l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1)^2 + (l\cos\theta_2 - l\cos\theta_1)^2}$

$U_G = mgl(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$U_k = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2$

$V = U_G + U_k$

$L = T - V = \frac{1}{2}ml(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(s - s_0)^2$

<u>小振动解</u>

但我们很容易从物理分析知道:体系有一个稳定的平衡位置,假定耦合摆在平衡位置附近作小振动,我们就可以应用小振动近似,对体系的物理量(包括动能,势能,拉氏函数,运动方程等)在平衡位置附近作泰勒展开,因此得到一个容易求解的线性微分运动方程,小振动解就是该方程的解,下面的求解过程包括了处理非线性力学系在平衡位置附近作微振动的主要方法.

小振动 近似

$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ，$\sin\theta \approx \theta$　　近似至一阶 θ

$s = \sqrt{(s_0 + l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1)^2 + (l\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2}$

$\approx s_0 + l(\theta_2 - \theta_1)$

$V \approx \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2$

$L = T - V$

$= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

假设有特解

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$ 代入得

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)A_1 - \frac{k}{m}A_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}A_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$ 时，方程有非零解

$\Rightarrow \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 = \pm\frac{k}{m}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \end{cases}$$

对 $\omega_1 = \sqrt{g/l}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega_1^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A_1^{(1)} = A_2^{(1)}$$

对 $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega_2^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A_1^{(2)} = -A_2^{(2)}$$

通解：$\begin{cases} \theta_1 = A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2 = A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$

$A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, φ_1, φ_2 由初始条件确定。

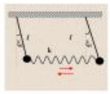
根据初始条件的不同,可以得到不同的振动解:

(1) $t = 0$ 时，$\theta_1 = \theta_2 = A$，$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$，
则 $A_1^{(1)} = A$，$\varphi_1 = 0$，$A_1^{(2)} = 0$，$\varphi_2 = 0$.
通解：$\theta_1 = A\cos\omega_1 t$，$\theta_2 = A\cos\omega_1 t$，⇐两个单摆完全同步.

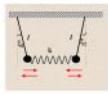
(2) $t = 0$ 时，$\theta_1 = A$，$\theta_2 = -A$，$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$，
则 $A_1^{(1)} = 0$，$\varphi_1 = 0$，$A_1^{(2)} = A$，$\varphi_2 = 0$.
通解：$\theta_1 = A\cos\omega_2 t$，$\theta_2 = -A\cos\omega_2 t$，⇐两个单摆反相振动.

(3) $t = 0$ 时，$\theta_1 = A$，$\theta_2 = 0$，$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$，
则 $A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = A/2$，$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

通解：$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \\ \theta_2 = \frac{1}{2}A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = A\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \end{cases}$



(a) 同步振动
简正频率为 ω_1



(b) 反相振动
简正频率为 ω_2

讨论(I):

➢本例有两种整体振动方式—简正模式:一种代表两个单摆同步振动,频率为 ω_1;另一种代表两个单摆反相振动,频率为 ω_2

➢一般情况下,耦合摆的振动对应于两种简正模式(振动方式)同时存在,体系的合振动不一定是周期性的

➢只有一种简正模式振动时,体系的振动是周期性的

5. 多自由度小振动的一般处理方法

下面应用分析力学的方法处理一般的小振动

假设系统的自由度为 s,取为广义坐标 $q_1, q_2, \dots q_s$,并将各广义坐标的零点取在平衡位置处,同时选择势能的零点于平衡位置处,即 $V(0)=0$

势能的表达式:

对于稳定约束,变换方程不显含 t，势能可写成 $V(q)$,也不显含 t

平衡位置 $q_j = 0$　$(j = 1, 2, \cdots s)$ 附近势能的泰勒展开：

$V = V_0 + \sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 q_j q_k + \text{高阶项}$

平衡位置：$\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0 = 0$，　并取 $V_0 = 0$

记 $c_{jk} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 = \text{常数}$　　$\Rightarrow$　$V = \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k$

稳定平衡要求在平衡位置处势能有严格的极小值

$V = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 q_j q_k = \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k > 0$

$V > 0$ 的二次型是正定的

动能的表达式:

对于稳定约束,变换方程不显含 t，动能可写成广义速度的二次齐次函数

$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = T_2$　　其中 $a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$

在平衡位置 $q_j = 0$　$(j = 1, 2, \cdots s)$ 附近对 a_{jk} 作展开：

$a_{jk} = (a_{jk})_0 + \sum_l \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l}\right)_0 q_l + \text{高阶项} \approx (a_{jk})_0 = \text{常数}$

$\Rightarrow$　$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$　(可以证明T也是正定的)

系统作小振动时的拉氏函数:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k$$

体系在平衡位置附近的运动方程组:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_k (a_{jk}\ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0 \qquad (j = 1, 2 \cdots s)$$

小振动的解及本征频率:

设解的形式为：$q_j = A_j\cos(\omega t + \varphi)$　$(j = 1, 2 \cdots s)$

代入运动方程得线性方程组：

$\sum_k (-\omega^2 a_{jk} + c_{jk})A_k = 0$　$(j = 1, 2 \cdots s)$

非零解的充要条件是 A_k 系数行列式为零，即

$\left|-\omega^2 a_{jk} + c_{jk}\right| = 0$　$(j = 1, 2 \cdots s)$　⇐　本征方程

上式是 ω^2 的s次方程, 可以证明当T和V都正定时一定有 $\omega^2 > 0$，因此可求得 ω^2 的s个正根或 ω 的s个正根
(可以有重根)

本征值(频率)：ω_1，ω_2，ω_3　$\cdots$　ω_s(正的实数);
特解：$q_j^{(l)} = A_j^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$　$(j = 1, 2 \cdots s)$

∵ 将 ω_l 代入线性方程组，只能得到s-1个独立方程，
可以解出　$\frac{A_j^{(l)}}{A_1^{(l)}}(j = 2, 3 \dots s)$，
$A_1^{(l)}$ 可任意，如 $A_1^{(l)} = 1$，这时 $A_j^{(l)}(j = 1, 2 \dots s;\ l = 1, 2 \cdots s)$
都将确定，共有 s^2 个

通解：$q_j = \sum_{l=1}^{s} c_l A_j^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$　$(j = 1, 2 \cdots s)$
通解中 c_l，$\varphi_l(l = 1, 2 \dots s)$，共有 2s 个待定常数，
它们可由初始条件决定。

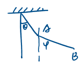
讨论(III):

➢本征频率反映了系统的整体振动特性，由通解看出每个广义坐标都可能包含所有特征频率的振动.

➢只有广义坐标为简正坐标时,每个坐标才对应一个特征频率.

➢简谐振动是小振动解的特例,如不是小振动,线性近似一般不成立;但若势能在平衡位置有极小值,则在一定范围内体系仍有振动特性,但不是简谐振动

eg.



$T = \frac{1}{2}mv_A$

$V = mgl$

$L = T - V =$

$$\begin{cases} \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}{dt} \\ \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{cases}$$

$A(l\sin\theta, -l\cos\theta)$

$B(l\sin\theta + l\sin\varphi, -l\cos\theta - l\cos\varphi)$

$v_A^2 = (l\cos\theta\cdot\dot\theta)^2 + (l\sin\theta\cdot\dot\theta)^2 = (\dot\theta l)^2$

$v_B^2 = (l\cos\theta\cdot\dot\theta + l\cos\varphi\cdot\dot\varphi)^2 + (l\sin\theta\cdot\dot\theta + l\sin\varphi\cdot\dot\varphi)^2$

$= l^2[\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)]$

$^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + ml^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)$

$(-2\cos\theta - \cos\varphi)$

$ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + ml^2\dot\theta\dot\varphi + mgl(2\cos\theta + \cos\varphi)$

$- \frac{\partial L}{\partial\theta} = 2ml^2\ddot\theta + (ml^2\dot\varphi\theta\varphi)' + ml^2\ddot\varphi - (ml^2\dot\theta\dot\varphi\varphi)' = 0$

$) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = ml^2\ddot\varphi + (ml^2\dot\theta\theta\varphi)' + ml^2\ddot\theta - (ml^2\dot\theta\dot\varphi\theta)' = 0$

$$\begin{cases} 2l\ddot\theta + l\ddot\varphi + 2g\sin\theta = 0 \\ l\ddot\varphi + l\ddot\theta + g\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

$+ \dot\varphi\theta\varphi + \dot\varphi = \dot\theta\dot\varphi\varphi$ $\qquad \frac{2\dot\theta}{\dot\varphi} = \cancel{\varphi(\dot\theta\dot\varphi - \dot\varphi\theta)}\ \varphi(\dot\theta - \theta).$

$+ \dot\theta\theta\varphi + \dot\theta = \dot\theta\dot\varphi\theta$ $\qquad \frac{\dot\varphi}{\dot\theta} = \dot\theta\theta(\varphi - \varphi)$

$\dot\theta = \frac{\dot\varphi\theta\varphi + \dot\varphi}{\dot\varphi\varphi - 2}$

$\dot\varphi + \frac{\dot\varphi\theta^2\varphi^2 + \dot\varphi\theta\varphi + \dot\varphi\theta\varphi + \dot\varphi}{\dot\varphi\varphi - 2} = \frac{\dot\varphi^2\theta^2\varphi + \dot\varphi^2\theta}{\dot\varphi\varphi - 2}$

$\dot\varphi^2\varphi - 2\dot\varphi + \dot\varphi\theta^2\varphi^2 + 2\dot\varphi\theta\varphi\ \cancel{+\dot\varphi\theta\varphi} + \dot\varphi = \dot\varphi^2\theta^2\varphi + \dot\varphi^2\theta$

哈密顿原理

2021年10月22日星期五　上午8:57

§ 4-5 哈密顿原理

➢前面从动力学普遍方程出发得到拉格朗日方程，实际上仍然是以牛顿定理为基础的，是一种与牛顿力学完全等价的表达方式.

➢现在从哈密顿原理出发，也完全可以导出拉格朗日方程和正则方程，并建立整个分析力学的体系.

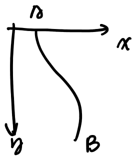
➢哈密顿原理是更普遍的原理，这也说明科学的统一和和谐.

➢哈密顿原理是变分积分原理，首先要了解数学上的泛函和变分问题.

105

一、变分问题的欧勒方程

最速落径问题



$mgy = \frac{1}{2}mv^2$

$v = \sqrt{2gy}$

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{dt}dx = \sqrt{2gy}$

$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$

所需时间

$$T = \int_{x_A}^{x_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$　根据欧勒方程

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\right] - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = C_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{C_1}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{cases}$$

现在的任务是寻找一个函数，使泛函 $T[y(x)]$ 取极值.

可以证明泛函 $T[y(x)]$ 取极值的条件是其变分为零，即 $\delta T = 0$.

变分算符和微分算符的运算相似

泛函 $T[y(x)]$ 的普遍形式为: $T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)dx$

$$\delta T = \delta\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\delta f(y,y',x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right)dx$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y dx = 0$$

$\because$ $\delta y_A = \delta y_B = 0$，且 δy 是任意的，(这属于不动边界变分条件)

$\therefore$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\Leftarrow$ 欧勒方程

三. 哈密顿原理

由最小作用原理导出运动方程需通过数学上称为变分的方法，通常假定变分路径由每一时刻坐标变量的一个独立的小变化($\delta q(t)$)构成，时间的变分为零($\delta t=0$)，即等时变分．等时变分下的最小作用原理一般称为哈密顿原理．

假定拉格朗日量可以表示为q, q̇, t的函数，即 L(q, q̇, t)

定义哈密顿作用函数：$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)dt$　(适用完整保守力系)

哈密顿原理：在 t_1 和 t_2 时间内，如果 $q(t_1)$和$q(t_2)$相同，在约束所允许的各种可能的运动 $q(t)$ 中，由动力学规律所决定的真实运动可由作用函数取极值的条件为：$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)dt = 0$ 给出。

$\because$ $\delta q_\alpha|_{t_1} = \delta q_\alpha|_{t_2} = 0$，且 δq_α 是任意的

$\therefore$ $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right) = 0$　$(\alpha = 1,2...s)$

对完整非保守力系：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}[\delta T(q_j,\dot q_j,t) - \sum Q_j\delta q_j]dt = 0,$$

可导出拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$　j=1,2,...s

111

三. 哈密顿原理的意义

➢哈密顿原理在理论上具有特别重要的意义，只要适当引进拉格朗日函数（对相互作用需要建立模型得到势函数或力函数，进而得到拉格朗日函数），就容易推广应用方程和正则方程，并建立整个分析力学的体系.

➢哈密顿原理是作为公理提出的，并未推证，它的正确性由原理演绎出的推论在实践中检验而得到证实.哈密顿原理原理可以完全独立于牛顿定律，并且适用范围远超牛顿运动定律.

➢哈密顿原理在解决实际问题时并没有什么优势.

112

哈密顿原理

2021年10月26日星期二　　下午4:44

§ 5-1 广义动量和相空间

1. 广义动量和相空间

定义广义动量　$p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \ldots s$

由q_α 和 p_α 组成的空间称作相空间，因而相空间是2s维空间，q_α 和 p_α称作共轭变量

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

$$p_\alpha = p_\alpha(q, \dot{q}, t) \qquad \alpha = 1, 2 \ldots s$$

由此可解：$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q, p, t) \qquad \alpha = 1, 2 \ldots s$

2. 哈密顿函数

我们前面定义过一个函数：$-L + \sum_{\alpha=1}^{s} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \equiv h = -L + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha$

前面已经证明 h 实际是 L在不显含时 t 的初积分，在某些情况下 h 甚至就有机械能的意义

现在更进一步地把 h 定义为(当我们选择广义坐标和广义动量作为独立变量时)系统的特性函数----哈密顿函数

$$H = h = -L[q, \dot{q}(q, p, t), t] + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha(q, p, t) = H(q, p, t)$$

判断
是不是含t

注意只有在把广义速度换成广义动量后，H 才能被称为哈密顿函数

§ 5-2 正则方程

1.由拉格朗日方程推导正则方程

统计物理、电动力学和量子力学等理论物理学科中对力学的描述更多的是采用哈密顿正则方程的形式。

根据哈密顿函数的定义

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{s} (\dot{q}_\alpha dp_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha) - dL$$

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} (\dot{p}_\alpha dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{s} (\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

另外根据哈密顿函数是 q，p，t 的函数：

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

比较上述二式，由于都是 dq_α 和 dp_α 独立的，于是有：

$$\boxed{\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

这就是著名的哈密顿正则方程

函数 $H = -L + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha$ 称为哈密顿函数

形式优美、简洁对称!

这是2s个一阶常微分方程的方程组，结合初始条件求解，从而完全确定力学系的运动状态

3. 能量积分

哈密顿正则方程在一定条件下也可以给出能量积分

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

若**H**不中不显含**t**：$\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = h$

H中不显含***t***，表明体系具有时间上的均匀性，能量(或广义能量)守恒. 根据约束稳定与否约束分别讨论。

(a) 稳定约束

$$T = T_2 \qquad \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha = 2T$$

$$H = -L + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = -(T - V) + 2T$$

$H = T + V = E = \text{const}$

对于完整的保守力学体系来说，若*H*不显含*t*，而且体系受稳定约束时，体系的*H*是能量积分，这时体系的机械能守恒。

(b) 不稳定约束

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \qquad \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 2T_2 + T_1$$

4. 循环积分

若 ***H*** = ***H*** (q_1, …, q_s; p_1, …, p_s; t) 中不显含某个p_i或某个q_i，即p_i，q_i为循环坐标，则由哈密顿方程立即得到

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow q_i = \text{const}$$

拉格朗日函数的初积分和哈密顿函数的初积分有密切关系：
事实上如果拉格朗日函数不显含t或有循环坐标q_i，哈密顿函数也有同样的性质，所以它们具有相同的循环坐标和初积分

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

但二者也有区别：拉格朗日函数的的循环坐标对应一个广义动量守恒，体系自由度 s 不变；而哈密顿函数的的循环坐标导致其共轭广义动量为常数，因而减少一对独立变量，自由度减少 s → s-1 .

讨论：

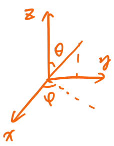
对于简单问题，应用正则方程完全没有优势；但正则方程具有理论的普适性

正则方程还提供另外一种解决问题的方式：通过正则变换寻找更多的哈密顿函数的初积分，这完全是可能的，因为我们使用了更多的广义坐标(动量)变量

正则方程似乎表明：只要写出系统哈密顿函数H，就可以通过积分的方法完全确定力学系统的运动状态(所谓经典力学确定论)；但我们也应该看到，对某些系统写出H有困难，即使给出也不一定可以积分，对那些不可积系统，可能出现随机混沌现象

6. 应用举例

例1 在球坐标系写出一个自由质点在势场 V(r) 中的哈密顿函数***H***



解：体系为自由质点，无约束，自由度数$s=3$，选择球坐标系(即为本题的广义坐标)

$(r\sin\varphi\cos\theta, \ r\sin\varphi\sin\theta, \ r\cos\varphi)$

$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$

$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \end{cases}$$

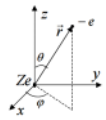
自由质点，无约束，保守系 ⇒ H为机械能

$H = T + V$

或定义 $H = -L + \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi$

****例2** 应用哈密顿正则方程求核外电子的运动规律。设电子的电量为$-e$，原子核带电为Ze，Z为原子序数

采用球坐标为广义坐标，电子受到核的库仑力作用，是保守力，可以用势函数表示：



$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{a}{r}$$

同前题，无约束(稳定)，H可以表示为：

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} \right) - \frac{a}{r}$$

根据哈密顿正则方程可以得到运动方程：

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{a}{r^2}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}$$

$\dot{p}_\varphi = 0 \Leftrightarrow$ **φ** 是循环坐标：$p_\varphi = C$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

以上就是根据哈密顿正则方程得到的电子在核力场中的(共六个)运动方程，对此问题其求解并不简单，但在更复杂的问题中可显示其优势.

由上述方程变换可得：

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{a}{r^2} \qquad \dot{\varphi} = \frac{C}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{C^2}{mr^3\sin^2\theta} + \frac{a}{r^2} = 0}$$

$$\boxed{\dot{p}_\theta = \frac{C^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}}$$

可见电子的运动与 φ 无关，故可知电子在一平面内运动，正如所料，因电子受有心力，可令此平面为 $\varphi = 0$ 的平面，

那些不可积系统，可能出现随机混沌现象

由上述方程变换可得:

$$m\ddot{r} = m r\dot{\theta}^2 + m r \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 - \frac{a}{r^2} \qquad \dot{\varphi} = \frac{C}{m r^2 \sin^2\theta}$$

$$\boxed{m\ddot{r} - m r\dot{\theta}^2 - \frac{C^2}{m r^3 \sin^2\theta} + \frac{a}{r^2} = 0}$$

$$\boxed{\dot{p}_\theta = \frac{C^2 \cos\theta}{m r^2 \sin^3\theta}}$$

可见电子的运动与 φ 无关，故可知电子在一平面内运动，正如所料，因电子受有心力，可令此平面为 $\varphi = 0$ 的平面，则 $\dot{\varphi} = 0, C = 0$ 。

最终得到电子在平面内的运动方程(同以前的二维结果)为:

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{r} - m r\dot{\theta}^2 + \frac{a}{r^2} = 0 \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m r^2\dot{\theta}) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{a}{r^2} \\ & m r^2\dot{\theta} = \text{const} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = h$$

$$r = \frac{\dfrac{h^2}{k^2}}{1 + \dfrac{Ah^2}{k^2}\cos\theta} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cdot\cos\varphi}$$

在上面的例子中(包括行星的开普勒运动，带电粒子在静电库仑场中的运动等)，都可看作是自由粒子在有心力场中的运动，容易根据角动量定理证明是平面运动，自由度最多为 **2**，因此可以直接选择二维极坐标系就可完全描述:

势场: $V(r)$

$$V = -\frac{k^2}{r} \quad \begin{cases} k^2 = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} & \text{电子在 Ze 的库仑场中} \\ k^2 = GMm & \text{质点在 M 的引力场中} \end{cases}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$