線形結合により生成する部分空間

ベクトル空間$\mathbf{V}$から適当に数個の要素を採用します．これを$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$とします．そして，これらの線形結合で求まる集合を$\mathbf{W}$とします．

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathbf{v}_i,\ a_i \in K \right\}$$

すなわち，$\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ならば，$a_1, a_2, \cdots, a_r \in K$が存在して

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r$$

と表されます．この集合はベクトル空間$\mathbf{V}$上の演算を引き継いでベクトル空間の条件を満たしています．このベクトル空間$\mathbf{W}$をベクトル$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$により生成される部分空間，あるいは張られる部分空間と言います．

線形結合による部分空間の例

3次元の実数ベクトル空間$\mathbb{R}^3$に含まれる線形部分空間を幾つか作成します．

2次元の部分空間

3次元の実数ベクトル空間$\mathbb{R}^3$から $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選び，この2つのベクトルによって張られる空間を$\mathbf{W}_2$とします．

$\mathbf{W}_2$は$\mathbb{R}^3$の線形部分空間です．すなわち，$\mathbf{W}_2 \subset \mathbb{R}^3$となっています．

この部分空間の任意の要素$\mathbf{w} \in \mathbf{W}_2$は，2つの実数$s, t \in \mathbb{R}$によって次のように表されます．

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} s+t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{W}_2$は，2次元の線形部分空間となります．

$\mathbf{W}_2$に属さない要素を確認します． $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします．この要素が$\mathbf{W}_2$に含まれないことを示します．

ここでは背理法を使います．仮に$\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2$であると仮定します．すると

$$\begin{pmatrix} s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立する$s, t \in \mathbb{R}$が存在しなければなりません．ベクトルの2項目および3項目から，$s = 1$および$t = 1$が得られます．すると$s + t = 2$となり，1項の$s + t = 0$と矛盾します．よって，$\mathbf{u} \notin \mathbf{W}_2$であることが分かりました．

1次元の部分空間

3次元の実数ベクトル空間$\mathbb{R}^3$から $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ を選び，この2つのベクトルによって張られる空間を$\mathbf{W}_1$とします．

$\mathbf{W}_1$は$\mathbb{R}^3$の線形部分空間になっていますが，その次元は1次元です． $\mathbf{v}_1$と$\mathbf{v}_2$の線形結合を作ると，その理由が分かります． 2つの実数$s, t \in \mathbb{R}$を用いて，

$$s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2t \\ 2(s-2t) \\ -3(s-2t) \end{pmatrix}$$

となります．ここで，$u = s - 2t$と置くと，

$$s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 = u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

となり，最初に採用した2つのベクトルが線形従属であり，この部分集合$\mathbf{W}_1$は1次元であることが分かります．

部分空間の共通部分

$\mathbf{V}$をベクトル空間とし，$\mathbf{W}_1$および$\mathbf{W}_2$をその線形部分空間とする．このとき，$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$の共通部分集合$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$も$\mathbf{V}$の部分空間になる．

証明

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$とすると，定義により$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_1$かつ$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_2$である．

$s, t \in K$に対して，$\mathbf{z} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$と置く． $\mathbf{W}_1$が線形部分空間であるため，$\mathbf{z} \in \mathbf{W}_1$である．同様に，$\mathbf{W}_2$が線形部分空間であるため，$\mathbf{z} \in \mathbf{W}_2$である．

したがって，$\mathbf{z} \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$が成り立ちます．

部分空間の合併集合

$\mathbf{V}$をベクトル空間とし，$\mathbf{W}_1$および$\mathbf{W}_2$をその線形部分空間とする．このとき，$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$の合併集合$\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$が$\mathbf{V}$の部分空間になるとは限らない．

事例

2次元の実数ベクトル空間$\mathbb{R}^2$において，次の2つの線形部分空間を考えます．

$$\mathbf{W}_1 = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \mathbf{W}_2 = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

このとき，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，ともに$\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$に含まれています．

ところが，その和 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$は$\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$に含まれていません．

部分空間の和集合

$\mathbf{V}$をベクトル空間とし，$\mathbf{W}_1$および$\mathbf{W}_2$をその線形部分空間とする．
このとき，$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$の和集合$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$を$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$の任意の要素から線形結合で生成される集合として定義する．

> $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2\}$

このとき，$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$の和集合$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$も$\mathbf{V}$の部分集合になる．

証明

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$とすると定義により，$\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in \mathbf{W}_1$および$\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{W}_2$があって，$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ および
$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$となります．

そこで，$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2)$ であり，$\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \in \mathbf{W}_1$ かつ
$\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \in \mathbf{W}_2$ である．

したがって，$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$が成り立ちます．

部分空間の包含関係

ベクトル空間$\mathbf{V}$の線形部分空間を$\mathbf{W}_1$および$\mathbf{W}_2$としたとき，次の包含関係が成立します．

> $\{\mathbf{0}\} \subset (\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) \subset \mathbf{W}_i \subset (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) \subset \mathbf{V}$

部分空間の次元

ベクトル空間$\mathbf{V}$の線形部分空間$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$の次元について，次の式が成り立ちます．

> $\dim \mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2 = \dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) + \dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$

証明

$\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) = r$とすると，r個の基底$\{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_r\}$が存在します.

$(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) \subset \mathbf{W}_1$ であるので，$\dim \mathbf{W}_1 = r + s$となる非負の整数 s があり，$\mathbf{W}_1$の基底を $\{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_r, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_s\}$ とすることができます.

同様に，$(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) \subset \mathbf{W}_2$ であるので，$\dim \mathbf{W}_2 = r + t$となる非負の整数 t があり，$\mathbf{W}_2$の基底を $\{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_r, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_t\}$ とすることができます.

$\mathbf{W}_1$の基底と$\mathbf{W}_2$の基底を合わせれば，線形部分空間$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$を構成することができます．しかし，基底$\{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_r\}$は$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$で重複するので，$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$の基底は，$\{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_r, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_t\}$ となります．よって，$\dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = r + s + t$となります.

この説明の中の青字の次元により，

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) + \dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) &= (r + s + t) + r \\ &= (r + s) + (r + t) \\ &= \dim \mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2\end{aligned}$$

となります.