

# アルゴリズム

コンピュータのプログラムの作成においてアルゴリズムは中心的な役割を果たしますが、線形代数の解法においてアルゴリズムの考え方が発展してきました。連立方程式の解を求める方法もGaussの消去法や掃き出し法と呼ばれるアルゴリズムが活躍します。ここでは、掃き出し法を学習しながら、線形代数の基本変形を理解します。

## Gauss-Jordanの消去法

ここでは、変数の個数と式の個数が同じ場合について、掃き出し法のひとつであるGauss-Jordanの消去法を学習します。ちなみにGauss-Jordanの消去法とGaussの消去法とは異なったアルゴリズムです。Gaussの消去法は前進消去と後退代入の2つのアルゴリズムで構成されていますが、Gauss-Jordanの消去法は前進消去だけのアルゴリズムになっています。まずは、単純で分かりやすいGauss-Jordanの消去法について学習します。

掃き出し法の基本的な考え方は、1つの式に含まれる変数の個数を減らすような計算を繰り返し行い、最終的には1変数の1次式を求めます。1変数の1次式は、 $ax = b$ という形式なので $a \neq 0$ であれば $x = \frac{b}{a}$ として変数の値が一意的に求まります。

まず、次の例題を通してGauss-Jordanの消去法を説明します。

### 【例題3】

次の連立一次方程式の解となる $x, y, z$ を求めよ。

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4z = -6 & \cdots (1) \\ 3x - y - 4z = -7 & \cdots (2) \\ -2x - y + 2z = 6 & \cdots (3) \end{cases}$$

ただし、 $x, y, z \in \mathbb{R}$ とする。

### 【例題3の解答】

Gauss-Jordanの消去法の沿って解いていきます。まず、変数 $x$ を最初の式だけに残すことを考えます。式(1)全体を定数2で割ります。すると連立方程式は次のように変化します。

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3 & \cdots (1') = (1) \div 2 \\ 3x - y - 4z = -7 & \cdots (2) \\ -2x - y + 2z = 6 & \cdots (3) \end{cases}$$

式(1)以外は変化していませんが、掃き出し法の理解を深めるために、この後も3つの式を併記していきます。次に式(2)および式(3)から変数 $x$ を消去します。すなわち、式(2)から式(1')を3倍した式を引き、また式(3)に式(1')の2倍を足します。

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3 & \cdots (1') \\ 2y + 2z = 2 & \cdots (2') = (2) - 3 \times (1') \\ -3y - 2z = 0 & \cdots (3') = (3) + 2 \times (1') \end{cases}$$

これで、変数 $x$ は式(1')だけになりました。今度は変数 $y$ について同様の処理を行います。戦略としては、式(2')のみに変数 $y$ を残して、他の式から変数 $y$ を消去します。そのために、式(2')の変数 $y$ の係数で式全体を割ります。

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3 & \cdots (1') \\ y + z = 1 & \cdots (2'') = (2') \div 2 \\ -3y - 2z = 0 & \cdots (3') \end{cases}$$

式(1')変数 $y$ を消去するために、式(1')に式(2'')を足します。また式(3')変数 $y$ を消去するために、式(3')に式(2'')を3倍にした式を足します。

$$\begin{cases} x - z = -2 & \cdots (1'') = (1') + (2'') \\ y + z = 1 & \cdots (2'') \\ z = 3 & \cdots (3'') = (3') + 3 \times (2'') \end{cases}$$

これにより、式(3'')は変数 $z$ だけになり、しかも値が確定しました。式(1'')から変数 $z$ を消去するために式(3'')を足します。また、式(2'')から式(3'')を引くことにより変数 $z$ を消去します。

$$\begin{cases} x & = & 1 & \cdots (1''') = (1'') + (3'') \\ y & = & -2 & \cdots (2''') = (2'') - (3'') \\ z & = & 3 & \cdots (3'') \end{cases}$$

これでGauss-Jordanの消去法が完了して、 $(x, y, z) = (1, -2, 3)$ という解が得られました。

### 基本変形

掃き出し法においては、基本変形と言われる3種類の操作を連立方程式に適用します。

- 基本変形1：2つの式の入替える
- 基本変形2：1つの式にある定数を掛ける
- 基本変形3：1つの式に別の式のある定数倍した式を足す

例題における式変形の操作は、これらの基本変形だけで済んでいます。上記例題では基本変形1は使われていませんが、もし最初の式(1)が変数 $x$ を含んでいない場合に式(1)と変数 $x$ を含んだ式と交換します。適切な連立方程式の問題ならば、どの変数も必ずどこかの式に組み込まれているので交換する式が見つかるはずです。例えば、式(2)を最初に持ってきます。この式の記載順序の変更は問題の解には全く影響を与えませんので、式の記載順序は自由に交換することができます。

このように基本変形では、元の連立方程式の解を維持しながら式を単純化します。それでは、Gauss-Jordanの消去法を3変数の連立一次方程式で説明します。

## Gauss-Jordanの消去法の一般的な説明

次の連立方程式について, Gauss-Jordanの消去法によるアルゴリズムを示します.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

ここで, 各パラメータ $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ を定数とし, 各 $x_i$ も実数の範囲で考えるものとします.

### Step-1 : 基本変形1により1行目の式を特定する

$a_{11}, a_{21}, a_{31}$ の中からゼロでない値を特定し, 仮に $a_{k1} \neq 0$ ならば,  $k$ 行目の式と1行目の式を交換します. この結果の連立方程式の記号を振り直せば次のようになります.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots (3) \end{cases}, a_{11} \neq 0$$

### Step-2 : 基本変形2により1行目の式の $x_1$ の係数を1にする

$a_{11} \neq 0$ なので1行目の式全体を $a_{11}$ で割ります. ここで係数および定数を $a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ と置き直します.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 & \cdots (1') \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

### Step-3 : 基本変形3により2行目と3行目の式から $x_1$ の消去する

式(2)から式(1')の $a_{21}$ 倍を引いて $x_1$ 項を消去します. 同様に式(3)から式(1')の $a_{31}$ 倍を引いて $x_1$ 項を消去します. ここで係数および定数を $a'_{22} = a_{22} - a_{21}a'_{12}, a'_{23} = a_{23} - a_{21}a'_{13}, b'_2 = b_2 - a_{21}b'_1, a'_{32} = a_{32} - a_{31}a'_{12}, a'_{33} = a_{33} - a_{31}a'_{13}, b'_3 = b_3 - a_{31}b'_1$ と置き直します.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 & \cdots (1') \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 & \cdots (2') \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 & \cdots (3') \end{cases}$$

### Step-4 : 基本変形1により2行目の式を特定する

係数 $a'_{22}$ と $a'_{32}$ を見てゼロでない行を2行目にします. 行を入替えた場合は, 係数の記号を再度振り直します.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 & \cdots (1') \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 & \cdots (2') \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 & \cdots (3') \end{cases}, a'_{22} \neq 0$$

ただし, 係数 $a'_{22}$ と $a'_{32}$ の両方ともゼロである場合もあります. ここでは, どちらかがゼロでない仮定の下で説明します.

**Step-5 : 基本変形2により2行目の式の $x_2$ の係数を1にする**

$a'_{22} \neq 0$ なので2行目の式全体を $a'_{22}$ で割ります．ここで係数および定数を $a''_{23} = \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, b''_2 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$ と置き直します．

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 & \cdots (1') \\ x_2 + a''_{23}x_3 = b''_2 & \cdots (2'') \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 & \cdots (3') \end{cases}$$

**Step-6 : 基本変形3により1行目と3行目の式から $x_2$ を消去する**

式(1')から式(2'')の $a'_{12}$ 倍を引いて $x_2$ 項を消去します．同様に式(3')から式(2'')の $a'_{32}$ 倍を引いて $x_2$ 項を消去します．ここで係数および定数を $a''_{13} = a'_{13} - a'_{12}a''_{23}, b''_1 = b'_1 - a'_{12}b''_2, a''_{33} = a'_{33} - a'_{32}a''_{23}, b''_3 = b'_3 - a'_{32}b''_2$ と置き直します．

$$\begin{cases} x_1 + a''_{13}x_3 = b''_1 & \cdots (1'') \\ x_2 + a''_{23}x_3 = b''_2 & \cdots (2'') \\ a''_{33}x_3 = b''_3 & \cdots (3'') \end{cases}$$

**Sep-7 : 基本変形2により3行目の $x_3$ の係数を1にする**

ここで $a''_{33} \neq 0$ を仮定します．式(3'')全体を $a''_{33}$ で割ります．そして定数を $b'''_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$ と置きます．

$$\begin{cases} x_1 + a''_{13}x_3 = b''_1 & \cdots (1'') \\ x_2 + a''_{23}x_3 = b''_2 & \cdots (2'') \\ x_3 = b'''_3 & \cdots (3''') \end{cases}$$

**Step-8 : 基本変形3により1行目と2行目の式から $x_3$ を消去する**

式(1'')から式(3''')の $a''_{13}$ 倍を引いて $x_3$ 項を消去します．同様に式(2'')から式(3''')の $a''_{23}$ 倍を引いて $x_3$ 項を消去します．ここで定数を $b'''_1 = b''_1 - a''_{13}b'''_3, b'''_2 = b''_2 - a''_{23}b'''_3$ と置きます．

$$\begin{cases} x_1 = b'''_1 & \cdots (1''') \\ x_2 = b'''_2 & \cdots (2''') \\ x_3 = b'''_3 & \cdots (3''') \end{cases}$$

以上で連立方程式の解 $(x, y, z) = (b'''_1, b'''_2, b'''_3)$ が求まりました．

以上がGauss-Jordanの消去法の一般的な説明です．ここは3変数による3つの一次方程式からなる連立方程式について説明しましたが， $n$ 変数の $n$ 個の連立一次方程式についても全く同様に進めることが出来るアルゴリズムです．ただし，アルゴリズムの途中で $a_{kk} \neq 0$ を仮定しましたが，当然 $a_{kk} = 0$ となる場合もあります．その場合は，連立方程式の解についての概念を拡張する必要があります．このことについての説明は，少し先の話となります．