

# 空中机器人

课程简介
【主要内容】介绍空中机器人的基本概念和理论，培养空中机器人设计、实践能力，产生空中机器人研究兴趣。
【教师】任沁源，高飞。
【内容概要】 <div><div>1. 绪论</div><div>2. 动态模型</div><div>3. 控制基础</div><div>4. 导航基础</div><div>5. 运动规划技术</div><div>6. 感知技术</div><div>7. 集群技术</div></div>
【成绩考核】 <div><div>1. 实验课程报告：40%</div><div>2. 期末：30%，开卷</div><div>3. MOOC：20%</div><div>4. 平时点到：10%</div></div>
【答疑】课间提问、预约答疑、电子邮件等均可。
<div><div>Tips</div><div><div>1. 任沁源老师上本科生课不点名。</div><div>2. 高飞老师上的部分会比较难，偏数理。</div></div></div>

1 绪论（主讲：任沁源） .....	2
2 动态模型（主讲：任沁源） .....	7
3 控制基础（主讲：任沁源） .....	10
4 导航基础（主讲：任沁源） .....	11
5 模型预测控制 (MPC)（主讲：高飞） .....	12
6 路径规划（主讲：高飞） .....	24
7 运动动力学规划 (Kinodynamic Planning)（主讲：高飞） .....	46
8 轨迹优化（主讲：高飞） .....	63
9 期末复习 .....	69

§ 1 绪论 (主讲: 任沁源)

1.1 发展简史 .....	2
1.2 定义与形态 .....	2
1.3 应用 .....	3
1.4 低空经济 .....	3
1.5 展望/技术挑战 .....	4
1.6 课程内容分解 .....	4
1.7 名词解释 .....	5

1.1 发展简史

- 1. 关于 “飞翔”：代达罗斯和伊卡洛斯。
- 2. 人类历史上 “飞翔” 的里程碑：美国华盛顿航空航天博物馆 “莱特兄弟” 特馆。
- 3. 空中机器人的诞生与发展

第一架无人驾驶飞机的尝试 - 第一架可复用无人驾驶飞行器 - 复仇武器 1 号 - MQ 捕食者无人机 - 全球鹰项目 - 民用无人机

1.2 定义与形态

1.2.1 固定翼

固定翼飞行器靠螺旋桨或者涡轮发动机产生的推力作用飞机向前飞行的动力，主要升力来自机翼与空气的相对运动。飞行高度高，速度快，载重大。常用于运输、测绘等领域。

一般的固定翼无人机系统由五个主要部分组成：（1）机体结构（2）航电系统（3）动力系统（4）起降系统（5）地面控制站。

1.2.2 旋翼型 (课程主要要求)

旋翼升力平衡重力；改变旋翼的转速控制飞行器的平稳和姿态；可以悬停，或在一定速度范围内任意飞行；可视为一个空中飞行平台。

操控简单、可靠性高、模块易替换；常用于智能交通、航拍等领域。

1.2.3 扑翼型

smartBird 内翼具有较大的刚性，外翼具有较大的柔性，具有优秀的空气动力学性能和强大的灵活性，可以实现自主启动、飞行和降落

1.2.4 气囊型

### 1.2.5 伞翼型

### 1.2.6 复合翼型

## 1.3 应用

### 1.3.1 无人机派送

1. 优点：效率的提高，人力资源的节省。
2. 缺点：开发无人机的费用，载重能力，续航能力。

### 1.3.2 消费级无人机

1. 大疆“晓” Spark 无人机
2. 零度智控 ZT-3V

## 1.4 低空经济

### 1.4.1 概念

在低空空域内，以无人机为主导，各种有人和无人驾驶航空器的研发、制造、运营和服务为核心，带动相关产业融合发展的综合性经济形态。

### 1.4.2 政策

1. 2016 年，国务院印发《关于促进通用航空业发展的指导意见》，首次从国家层面明确了发展低空经济的重要性。
2. 2019 年，民航局发布《民用无人驾驶航空器经营性飞行活动管理办法》，进一步规范了无人机商业运营。
3. 2021 年 2 月，低空经济写入《国家综合立体交通网规划纲要》。
4. 2023 年

### 1.4.3 发展历史

1. 20 世纪初：莱特兄弟的第一架动力飞机开启了航空时代，主要用于短途运输、农业喷洒和空中摄影等。
2. 20 世纪 50~60 年代：直升机开始广泛应用于医疗救援、石油勘探等领域。
3. 2006 年：美国联邦航空管理局（FAA），首次批准商用无人机飞行许可。
4. 2013 年：无人机产业呈现井喷态势，以大疆创新为代表的企业迅速崛起。
5. 2020 年：新冠疫情的暴发意外成为低空经济发展的催化剂。无人机在防疫物资运输、公共场所消毒、远程测温等方面发挥了不可替代的作用。

6. 2021 年：中国低空经济市场规模已突破 4000 亿元，无人机企业超过 1 万家，从业人员超过 100 万人。深圳、成都、长沙等超市纷纷布局低空经济产业集群，竞相打造“无人机之都”。

#### 1.4.4 发展现状

2021 年以来，我国低空经济进入快速培育阶段，产业发展迎来新契机。我国低空经济市场规模达到 5059.5 亿元，预计 2026 年将超过 1 万亿元，至 2035 年有望达到 3.5 万亿元。

#### 1.4.5 发展挑战

1. 设施建设进展缓慢
2. 市场体系发展落后
3. 管理体系建设亟待完善
4. 关键核心技术仍然薄弱
  - (1) 成熟度低：在航空发电机、航空系统、锂电池等技术仍然缺乏自主创新，且多数零件依赖于进口。
  - (2) 智能化水平低：现有低空无人机系统存在智能化水平低，难以处理突发事件或不确定位置任务与环境。

### 1.5 展望/技术挑战

飞控系统、导航系统、动力系统、无人机中的人工智能。

### 1.6 课程内容分解

#### 1.6.1 动态模型

1. 坐标的表示和变换
2. 多旋翼空中机器人动态模型
  - 螺旋桨拉力模型
  - 多旋翼的拉力与力矩模型
  - 多旋翼空中机器人运动模型
3. 固定翼空中机器人动态模型

#### 1.6.2 控制基础

1. 遥控飞行 (Remote Control Flying)：航向、速度、高度等参数由地面**操作人员**通过通信数据链路遥控控制。
2. 程控飞行 (Autopilot Flying)：航向、速度、高度等参数根据**预先制定**的规划航线还有机载计算机控制系统。
3. 自主飞行 (Autonomous Flying)： **机载计算机控制系统**能够感知环境的变化自动进行**实时**路径规划，并进行相应的姿态、航向、速度、高度等参数控制。

4. 自动控制的基本原理（反馈控制）：根据实际状态与期望状态之间的偏差值对被监测的参数（状态）进行控制，使偏差值减小直至消失。
5. 无人机飞行控制要求：稳（稳定性）、准（准确性）、快（快速性）。

### 1.6.3 导航基础

1. 定义：将运载体从起始点引导到目的地的技术或方法称为**导航（Navigation）**。
2. 3 大问题：我在哪里？（定位）我要去哪里？我如何去？
3. 状态估计
  - 空中机器人的定位是靠机载传感器和计算设备，计算出自身所在位置和姿态，所以定位的本质是**状态估计问题**。
  - 单一传感器的估计：视觉、激光……
  - 多传感器融合的估计：卡尔曼滤波……
4. 系统功能
  - (1) 测量定位：感知运载体的姿态、位置、速度、方向等信息。
  - (2) 航行决策：决定运载体运动的方向、速度。
  - (3) 路径规划：确定运载体从当前位置到达目的地的可行路径或最优路径。
5. SLAM (Simultaneous Localization and Mapping)
  - (1) 定位 (Localization)
  - (2) 建图 (Mapping)

### 1.6.4 运动规划

1. 定义：空中机器人生成满足机器人运动学和动力学的安全运动指令，并使其完成给定导航任务，即基本地从 A 点到 B 点的运动。
2. 规划方法
  - 搜索式规划
  - 采样式规划

## 1.7 名词解释

### 1.7.1 速度表示

1. **真空速 (TAS)**：飞机相对于空气的运动速度，是考虑了空气密度影响的速度。
2. **指示空速 (IAS)**：折算到海平面高度的真空速，忽略了空气密度的变化，又称表速，是空速管测出的速度，也是表征飞机升力的速度。
3. **地速**：飞机相对于地面运动速度的水平分量，是真空速与风速水平分量的矢量和。
4. **垂直速度**：飞机相对于地面运动速度的垂直分量，即升降速度。

## 1.7.2 马赫

1. 定义：马赫是表示速度的量词，1 马赫即 1 倍音速。
2. 马赫数  $< 1$  者为亚音速，马赫数  $> 5$  左右为超音速。

## 1.7.3 激波

飞机飞行 -> 对空气产生扰动，扰动（以扰动波的形式）以音速传播，积聚。

## 1.7.4 马赫锥

超音速飞行时，激波后的空气压力和温度急剧下降，导致水汽冷凝，形成雾化现象。

## 1.7.5 高超飞行器

1. 分类：高超音速巡航导弹、高超音速飞机、航天飞机。
2. 高超飞行器采用的超音速冲压发动机被认为是继螺旋桨和喷气推进之后的“第三次动力革命”。
3. 代表：X-43A、X-51。

特点：复杂的气动特性；用超燃冲压发动机；飞行器机体与发动机一体化；飞行器机体与推进系统和飞行器结构动态之间耦合强；飞行器模型非线性度高；飞行器飞行高度、速度跨度大；飞行环境复杂，瞬间多变；气动特性和气热特性变化剧烈；控制精度高，末制导难度大。

## 1.7.6 飞行包线

以速度作为横坐标，以高度作为纵坐标，把各个高度下的速度上限和下限画出来，这样就构成了一条边界线，称为飞行包线，飞机只能在这个线确定的范围内飞行。

## 1.7.7 气动布局

飞机外部总体形态布局与位置安排称作气动布局。

1. 常规布局：特点是有主机翼和水平尾翼，大的主机翼在前，小机翼也就是水平尾翼在后，有一个或者两个垂直尾翼



常规



变后掠翼



无尾布局

2. 变后掠翼布局：主翼的后掠角度可以改变，高速飞行可以加大后掠角，相当于飞鸟收起翅膀，低速飞行时减小后掠角，展开翅膀。

3. 无尾布局：没有水平尾翼，无尾布局大大减少了空气阻力，无尾布局的缺点是低速性能不好，这影响到飞机的低速机动性能和起降能力。另外无尾布局因为只能依靠主翼控制飞行，所以稳定性也不理想。

4. 鸭式布局：这种气动布局其实就是无尾布局加个鸭翼。有了这个鸭翼，无尾布局的缺点得到明显改善，高速飞行时更加稳定，起降距离明显缩短，甚至机动性能比常规布局更加出色。



5. 飞翼布局：只有飞机翅膀的布局，看上去只有机翼，没有机身，机身和机翼融为一体。无疑这种布局是空气动力效率最高的布局，因为所有机身结构都是机翼，都是用于产生升力，而且最大程度地降低了阻力。空气阻力最小所以雷达波反射自然也是最小，所以飞翼布局是隐身性能最好的气动布局。飞翼布局的最大缺陷是操控性能极差，完全依赖电子传感控制机翼和发动机的矢量推力。

6. 前掠翼布局：这种布局的特点是主翼前掠而不是后掠，因为机翼前掠致命的稳定性问题导致这种技术一直只停留在研发阶段，没有得到实际应用。

### 1.7.8 主动控制 (ACT)

1. 在飞行器设计的初始阶段，考虑控制系统对飞行器总体设计的影响，充分发挥飞行控制的潜力的一种技术。
2. 代表：YF-16，第一种采用主动控制技术的飞机。



§ 2 动态模型（主讲：任沁源）

2.1 飞行器的坐标系与姿态 ..... 7

2.1.1 飞行器运动描述 ..... 7

2.1.2 惯性坐标系 ..... 7

2.1.3 坐标转换 ..... 7

2.1.4 飞行器的姿态表示 ..... 7

2.1.5 欧拉角变化率与机体角速度的关系 ..... 7

2.1.6 四元数 ..... 7

2.2 四旋翼飞行器动力学基础 ..... 7

2.2.1 飞行器运动动力学基础 ..... 7

2.2.2 控制系统介绍 ..... 8

2.1 飞行器的坐标系与姿态

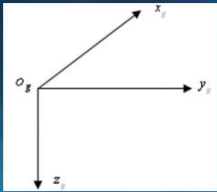
2.1.1 飞行器运动描述

常见飞行器可以抽象为一个刚体。描述任意时刻的空间运动需要六个自由度：三个质心运动和三个角运动

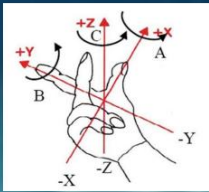
2.1.2 常见坐标系

1.惯性坐标系

$O_g$  为地面任意点,  $O_g x_g$  为水平面任意方向,  $O_g z_g$  垂直地面指向地心,  $O_g x_g y_g$  符合右手规则。



地面坐标系常用于指示飞机的方位  
近距离导航和航迹控制



右手规则

2. 地球中心坐标系 (ECEF): ECEF坐标系与地球固联, 且随着地球转动。图中O即为坐标原点, 位置在地球质心。X轴通过格林尼治线和赤道线的交点, 正方向为原点指向交点方向。Z轴通过原点指向北极。Y轴与X、Z轴构成右手坐标系。

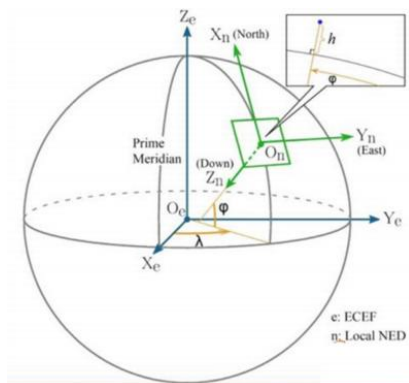
3. WGS-84坐标系: WGS-84坐标系的X轴指向BIH(国际时间服务机构)1984.0定义的零子午面 (Greenwich)和协议地球极(CTP)赤道的交点。Z轴指向CTP方向。Y轴与X、Z轴构成右手坐标系。(有了GPS输



出的海拔高度我们还是要用气压计等其它设备来辅助定高——GPS测的不是很高，地球是椭球，会有轴的偏移，轴的倾斜会导致GPS测的高度有20m左右的误差)

#### 4. NED坐标系

NED坐标系是在导航计算时使用的坐标系，向量分别指向北，东，地，因此NED坐标系也经常称为“**北东地坐标系**”



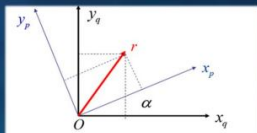
5. 机体坐标系：**机体坐标系与飞行器固联**，坐标系符合右手法则，**原点在飞行器重心处**，X轴指向飞行器机头前进方向，Y轴由原点指向飞行器右侧，Z轴方向根据X、Y轴由右手法则确定（四旋翼的机体坐标系可以任意确定，因为都可以通过坐标变化转到标准的坐标系。为了计算方便，可以以重心为原点，以任意一个轴为x轴，根据右手定则确定坐标系）

### 2.1.3 坐标转换

$$L_{qp} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

#### 平面坐标系各轴间的转换

两个平面坐标系  $Ox_p y_p$  和  $Ox_q y_q$  间的夹角为  $\alpha$ 。则其转换矩阵为：



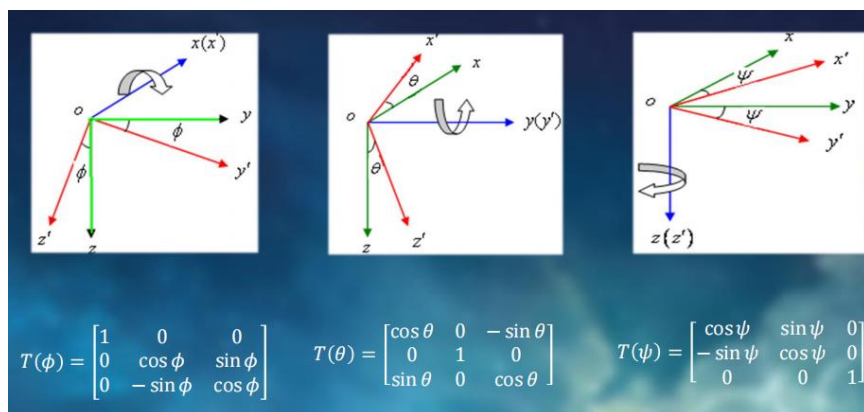
顺时针旋转的转换矩阵

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

#### 转换矩阵

- 互为转置阵；  $L_{pq} = (L_{qp})^T$
- 互为逆阵；  $L_{pq} = (L_{qp})^{-1}$
- 正交阵；  $(L_{pq})^T = (L_{pq})^{-1}$
- 传导性。  $L_{pr} = L_{pq} L_{qr}, L_{rp} = L_{rq} L_{qp}$

#### 基元旋转



## 2.1.4 飞行器的姿态表示

欧拉角表示形式：

**横滚角 $\phi$** ：飞机对称平面与通过飞机机体纵轴的铅垂平面间的夹角，右滚为正；

**俯仰角 $\theta$** ：机体轴与地平面（水平面）之间的夹角，飞机抬头为正；

**偏航角 $\psi$** ：机体轴在水平面上的投影与地轴之间的夹角，以机头右偏为正。

## 2.1.5 欧拉角变化率与机体角速度的关系

05 欧拉角变化率与机体角速度的关系 浙江大学·控制学院

机体旋转的角速率为  ${}^b\omega = [\omega_{x_b} \ \omega_{y_b} \ \omega_{z_b}]^T$

那么  ${}^b\omega = \dot{\psi} \cdot {}^b k_3 + \dot{\theta} \cdot {}^b n_2 + \dot{\phi} \cdot {}^b b_1$

因此有

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

进一步可以得到

$$\dot{\Theta} = W^b \omega$$

其中

$$\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad W = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}^T$$

$\theta = \pm\pi/2$   
奇异性问题

旋转矩阵 浙江大学·控制学院

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_z(\psi)} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 = e_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_y(\theta)} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 = k_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_x(\phi)} \begin{bmatrix} b_1 = n_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$R_b^e = (R_e^b)^{-1} = (R_e^b)^T = R_z^{-1}(\psi)R_y^{-1}(\theta)R_x^{-1}(\phi) = R_z(-\psi)R_y(-\theta)R_x(-\phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

在奇异情况下，人为设定  $\phi = 0$

由旋转矩阵反求欧拉角

$$R_b^e = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\tan(\psi) = \frac{r_{21}}{r_{11}} \quad \psi = \arctan \frac{r_{21}}{r_{11}}$$

$$\sin(\theta) = -r_{31} \quad \theta = \arcsin(-r_{31})$$

$$\tan(\phi) = \frac{r_{32}}{r_{33}} \quad \phi = \arctan \frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$\theta = \pm\pi/2$   
奇异性问题

## 2.1.6 四元数

### 1. 四元数的定义

四元数一般用向量的形式表示为  $q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_v \end{bmatrix}$ , 其中  $q_0$  为四元数的标量部分,

$q_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$  为四元数的向量部分

对于一个实数  $s$ ,

其四元数表示形式为  $q = \begin{bmatrix} s \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}$ ,

对于一个纯向量  $v$ , 其四元数表示形式为  $q = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$ 。

欧拉角  $\xrightarrow{\text{ZYX}}$  四元数

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) - \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) - \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) \end{bmatrix}$$

四元数  $\xrightarrow{\quad}$  欧拉角

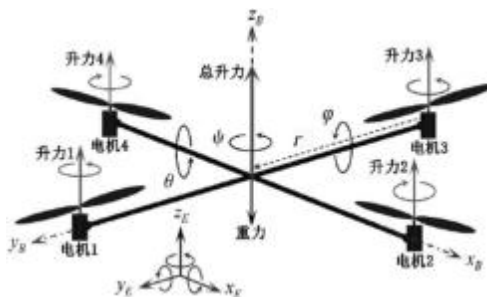
$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \arcsin \left[ \frac{2(q_0 q_2 - q_1 q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right] \\ \arctan \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{bmatrix}$$

请自行阅读四元数相关知识

## 2.2 四旋翼飞行器动力学基础

### 2.2.1 飞行器运动动力学基础

以四旋翼飞行器为例, 其动力来源是由四个固定在交叉机臂上的螺旋桨提供的。以“十”字型架构为例, 在空中飞行时的受力示意图如下图。





我们仅考虑  $z$  轴方向上的受力情况。每个螺旋桨通过旋转产生升力，升力的大小与旋转角速度正相关。若绘制出二者曲线，可以发现，其基本构成二次关系，即

$$F_i = K_F \omega_i^2 \quad (1)$$

螺旋桨旋转时受到一个阻力矩，也可近似得出，阻力矩与旋转角速度也基本构成二次关系，即

$$M_i = K_M \omega_i^2 \quad (2)$$

这样我们给定飞行器自身重力，即可根据二次关系图像得出每个螺旋桨所需提供的的最小升力，由此得到电机所提供的旋转速度。

1. 螺旋桨升力:  $K_F \omega_i^2 = \frac{1}{4}mg$

2. 力矩:  $T_i = K_M \omega_i^2$

对飞行器受力分析， $z$  轴方向所受合力：

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - m g_{\approx} \quad (3)$$

合力矩：

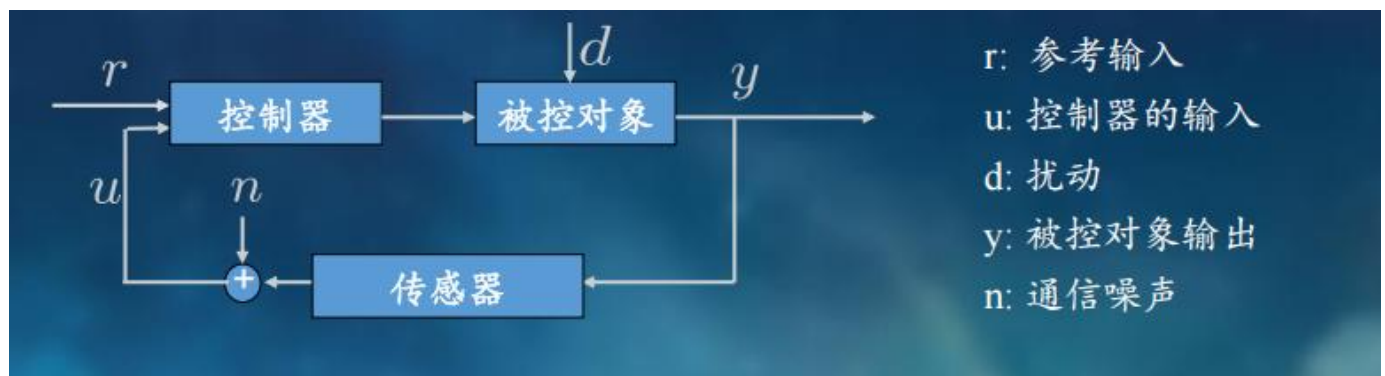
$$M = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + r_4 \times F_4 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \quad (4)$$

当飞行器再 $z$ 轴方向受力不平衡，产生竖直方向运动的加速度： $\sum_{i=1}^4 k_F \omega_i^2 + mg = ma$ ，此加速度方向和大小决定了飞行器进行相应的升降运动。如果加速度为0，即 $z$ 轴方向上受力平衡，则可以实现飞行器再某一高度上的悬停。

## 2.2.2 控制系统介绍

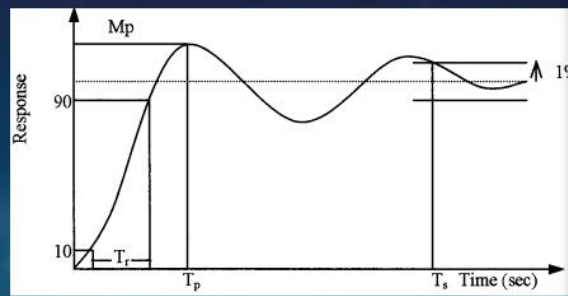
### 1. 基本概念

控制的目标之一是使被控对象稳定，并尽可能精确且快速地跟踪给定的参考输入信号



控制器只是一个计算单元，它计算最优的或期望的输入给到被控对象

- 上升时间  $T_r$  (Rise time):
  - 响应值从10% 到 90%的用时
- 稳态误差 (Steady-state error)
- 超调量 (Overshoot)
  - 峰值超过最终值的百分比
- 校正时间  $T_s$  (Settling time)
  - 让响应值与其最终值的偏差在1%以内的用时
- 一个好的控制系统应该是上升时间短、校正时间短、超调量小且稳态误差小的



## 2. 简单一阶系统

找到能够满足下面要求的输入  $u$

$$\dot{e} + K_p e = 0 \quad K_p > 0$$

$$u(t) = \dot{x}^{des}(t) + K_p e(t) \quad \dot{x}^{des}(t): \text{前馈} \quad K_p e(t): \text{比例}$$

## 3. 简单二阶系统

找到能够满足下面要求的输入  $u$

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0 \quad K_d, K_p > 0$$

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t)$$

前馈

微分

比例

## 4. PD 控制和 PID 控制

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t)$$

PD控制:

比例控制的作用类似于弹簧响应

微分控制的作用类似于粘性阻尼响应

微分增益过大会导致系统过阻尼，收敛速度慢

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

PID控制:

PID 控制产生了一个三阶的闭环系统。积分控制使得稳态误差趋近于0

## 5. 人工整定

参数变化	$K_p \uparrow$	$K_d \uparrow$	$K_i \uparrow$
Rise Time (上升时间)	减少	-	减少
Overshoot (超调量)	增加	减少	增加
Setting Time (校正时间)	-	减少	增加
Steady-State Error (稳态误差)	减少	-	消除

## 6. Ziegler-Nichols 整定

## • 调节增益时的启示（建议）

1. 设置  $K_i = K_d = 0$
2. 增大  $K_p$  直到输出发生震荡，此时  $K_p$  记为最大增益  $K_u$
3. 记录增益为  $K_u$  时的振荡周期  $T_u$
4. 根据下表来设置增益参数：

控制器	$K_p$	$K_d$	$K_i$
P	$0.5K_u$	-	-
PD	$0.8K_u$	$K_p T_u / 8$	-
PID	$0.6K_u$	$K_p T_u / 8$	$2K_p / T_u$

## 7. 基于模型的控制

## (1) 一个普通的二阶模型

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (5)$$

## (2) PID 或 PD 控制

方案的缺点

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) \quad (6)$$

- 表现效果取决于模型
- 需要调节增益参数来获得最佳的效果

## (3) 基于模型的控制律

基于模型的控制律

$$u(t) = \underbrace{\hat{m}(\ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t))}_{\text{基于模型的部分}} + \underbrace{\hat{b}\dot{x}(t) + \hat{k}x(t)}_{\text{基于模型的(估计值)}}$$

伺服：前馈+ PD反馈

, 基于模型的(估计值)

- 取消了系统的动力学

- 特定于模型
- 基于伺服（前馈+PD 控制）
  - 使用带有前馈的 PID 或PD 控制器来将执行误差消除到 0
  - 独立于系统模型

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t)$$

前馈项

微分系数

比例系数

➤ 此控制律即我们所说的比例微分控制，即PD控制

- 当  $K_d, K_p > 0$ ，系统最终可趋于稳定；
- 当  $K_p > 0, K_v = 0$ ，系统震荡；
- 当  $K_p \text{ or } K_v < 0$ ，系统发散；

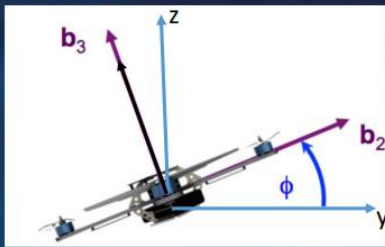


§ 3 控制基础 (主讲: 任沁源)

3.1 四旋翼飞行器控制 .....	10
3.1.1 平面四旋翼模型 .....	10
3D .....	10
3.2 四旋翼空中机器人先进控制 .....	10

3.1 四旋翼飞行器控制

3.1.1 平面四旋翼模型



$u_1 = \text{推力}$

$u_2 = \text{力矩}$

$\phi$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -u_1 \sin(\phi) = m\ddot{y} \\ \sum F_z &= -mg + u_1 \cos(\phi) = m\ddot{z} \\ M &= u_2 = I_{xx}\ddot{\phi} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{m}\sin\phi & 0 \\ \frac{1}{m}\cos\phi & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

1.

- 非线性动力学模型

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{u_1}{m}\sin(\phi) \\ \ddot{z} &= -g + \frac{u_1}{m}\cos(\phi) \\ \ddot{\phi} &= \frac{u_2}{I_{xx}} \end{aligned}$$

- 平衡悬停态

$$y_0, z_0, \phi_0 = 0, \quad u_{1,0} = mg, \quad u_{2,0} = 0$$

- 线性化的动力学模型

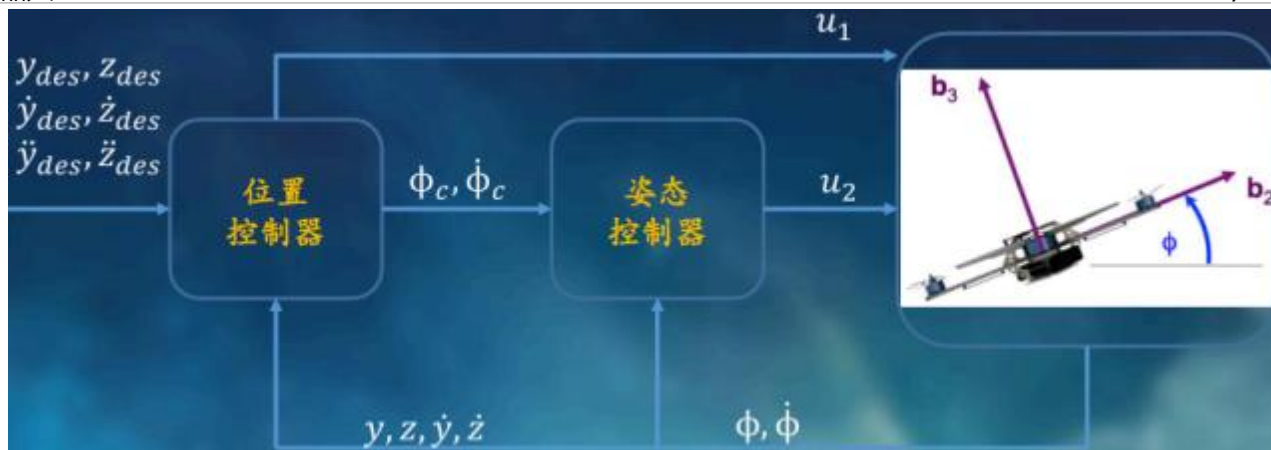
$$\ddot{y} = -g\phi$$

$$\ddot{\phi} = \frac{u_2}{I_{xx}}$$

级联的二阶系统

一个简单的二阶系统

2. 控制回路



## 4. 线性化

## • Z轴方向位置控制

• PD控制:  $\ddot{z}_c = \ddot{z}^{des} + K_{d,z}(\dot{z}^{des} - \dot{z}) + K_{p,z}(z^{des} - z)$

• 模型:  $\ddot{z} = -g + \frac{u_1}{m}$

•  $u_1 = m(g + \ddot{z}^{des} + K_{d,z}(\dot{z}^{des} - \dot{z}) + K_{p,z}(z^{des} - z))$

## • Y轴方向的位置控制

• PD:  $\ddot{y}_c = \ddot{y}^{des} + K_{d,y}(\dot{y}^{des} - \dot{y}) + K_{p,y}(y^{des} - y)$

• 模型:  $\ddot{y} = -g\phi$

•  $\phi_c = -\frac{1}{g}(\ddot{y}^{des} + K_{d,y}(\dot{y}^{des} - \dot{y}) + K_{p,y}(y^{des} - y))$

## • 姿态控制

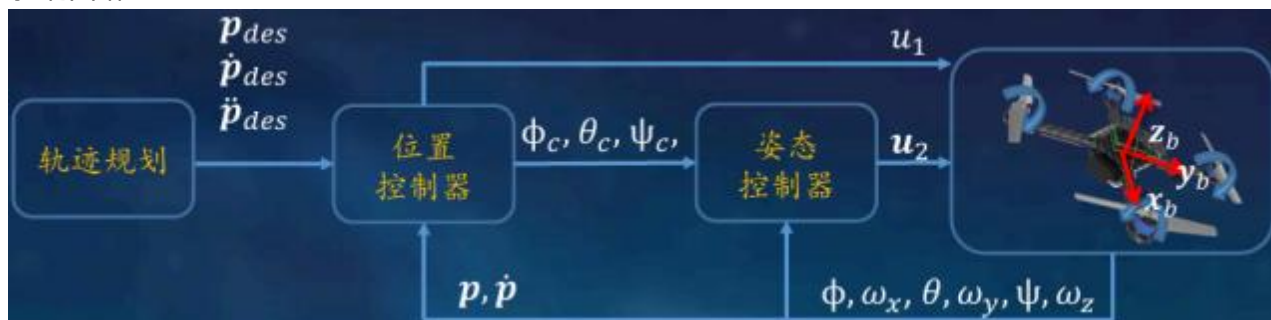
• PD:  $\ddot{\phi}_c = K_{d,\phi}(\dot{\phi}_c - \dot{\phi}) + K_{p,\phi}(\phi_c - \phi)$

• 模型:  $\ddot{\phi} = \frac{u_2}{I_{xx}}$

•  $u_2 = I_{xx}(K_{d,\phi}(\dot{\phi}_c - \dot{\phi}) + K_{p,\phi}(\phi_c - \phi))$

## 3.1.2 3D 四旋翼

## 1. 控制回路



- 线性化 平衡悬停态 ( $\phi_0 \sim 0, \theta_0 \sim 0, u_{1,0} \sim mg$ )

牛顿方程  $m\ddot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{x} &= g(\theta \cos \psi + \phi \sin \psi) \\ \dot{\mathbf{p}}_2 = \dot{y} &= g(\theta \sin \psi - \phi \cos \psi) \\ \dot{\mathbf{p}}_3 = \dot{z} &= -g + \frac{u_1}{m} \end{aligned}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta - s\phi s\psi s\theta & -c\phi s\psi & c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi \\ c\theta s\psi + c\psi s\phi s\theta & c\phi c\psi & s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi \\ -c\phi s\theta & s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

欧拉角微分  $\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -c\phi s\theta \\ 0 & 1 & s\phi \\ s\theta & 0 & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$

欧拉方程:  $\mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(F_2 - F_4) \\ l(F_3 - F_1) \\ M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \end{bmatrix}$

- 位置控制

PID:  $\ddot{\mathbf{p}}_{i,c} = \ddot{\mathbf{p}}_i^{des} + K_{d,i}(\dot{\mathbf{p}}_i^{des} - \dot{\mathbf{p}}_i) + K_{p,i}(\mathbf{p}_i^{des} - \mathbf{p}_i)$

模型:  $u_1 = m(g + \ddot{\mathbf{p}}_{3,c})$  (牛顿方程)

$$\phi_c = \frac{1}{g}(\ddot{\mathbf{p}}_{1,c} \sin \psi - \ddot{\mathbf{p}}_{2,c} \cos \psi) \quad \theta_c = \frac{1}{g}(\ddot{\mathbf{p}}_{1,c} \cos \psi + \ddot{\mathbf{p}}_{2,c} \sin \psi)$$

注意: 这些是当前测量的yaw, 不是期望的yaw

- 姿态控制

PID:  $\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_c \\ \ddot{\theta}_c \\ \ddot{\psi}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{p,\phi}(\phi_c - \phi) + K_{d,\phi}(\dot{\phi}_c - \dot{\phi}) \\ K_{p,\theta}(\theta_c - \theta) + K_{d,\theta}(\dot{\theta}_c - \dot{\theta}) \\ K_{p,\psi}(\psi_c - \psi) + K_{d,\psi}(\dot{\psi}_c - \dot{\psi}) \end{bmatrix}$

模型:  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_c \\ \ddot{\theta}_c \\ \ddot{\psi}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$  (欧拉方程)

## 3.2 四旋翼空中机器人先进控制

### 3.1.1 回顾

$$F_i = k_p \omega_i^2, M_p = k_M \omega_i^2$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} k_F & k_F & k_F & k_F \\ 0 & k_f L & 0 & -k_f L \\ -k_F L & 0 & k_F L & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{bmatrix}$$

其中 $u_1$ 是总推力,  $u_2, u_3, u_4$ 是转动惯量,  $L$ 是电机转轴到四旋翼中心的距离



### 3.1.2 SE(3)控制 ( ? )

微分平坦: 给定任意期望跟踪的轨迹, 已知无人机的状态  $(x, v, a)$  求其姿态

目的: 1、能够自动生成轨迹 2. 在空间中任何具有平坦输出 (输出具有合理的有界导数) 的任意平滑轨迹都可以被旋翼跟踪

输出: 有平坦输出的轨迹

(1) 旋翼状态

位置, 姿态, 线速度, 角速度:  $X = [x, y, z, \phi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  其中  $\omega$  是机体系下机体旋转的即时角速度。

位置, 速度, 加速度都是平坦输出 ( $\sigma = [x, y, z, \psi]^T$ ) 的简单导数

牛顿欧拉运动方程:

$$m\ddot{\mathbf{p}} = -mg\mathbf{z}_W + u_1\mathbf{z}_B.$$

$$\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_B = I^{-1} \left[ -\boldsymbol{\omega}_B \times I \cdot \boldsymbol{\omega}_B + \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \right]$$

(2) 姿态角

➤ 由动力学基本知识可得:

$$\mathbf{z}_B = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}, \mathbf{t} = [\ddot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_2, \ddot{\sigma}_3 + g]^T$$

➤ 给定 yaw 角, 可以得到单位向量  $\mathbf{x}_C$ :

$$\mathbf{x}_C = [\cos\sigma_4, \sin\sigma_4, 0]^T$$

➤ 姿态角可以按如下公式获取

$$\mathbf{y}_B = \frac{\mathbf{z}_B \times \mathbf{x}_C}{\|\mathbf{z}_B \times \mathbf{x}_C\|}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{y}_B \times \mathbf{z}_B, \quad \mathbf{R}_B = [\mathbf{x}_B \ \mathbf{y}_B \ \mathbf{z}_B]$$

(3) 角速度

➤ 对运动方程求导

$$m\ddot{\mathbf{p}} = -mg\mathbf{z}_W + u_1\mathbf{z}_B.$$

$$m\dot{\mathbf{a}} = \dot{u}_1\mathbf{z}_B + \boldsymbol{\omega}_{BW} \times u_1\mathbf{z}_B$$

➤ 旋翼只有机体  $z$  轴方向有推力:

世界系下, 机体旋转的即时角速度

$$\dot{u}_1 = \mathbf{z}_B \cdot m\dot{\mathbf{a}}$$

➤ 可推:

$$\mathbf{h}_\omega = \boldsymbol{\omega}_{BW} \times \mathbf{z}_B = \frac{m}{u_1} (\dot{\mathbf{a}} - (\mathbf{z}_B \cdot \dot{\mathbf{a}})\mathbf{z}_B). \quad \text{这是将 } \frac{m}{u_1} \dot{\mathbf{a}} \text{ 投影到 } x_B - y_B \text{ 平面}$$

➤ 由于

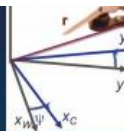
$$\boldsymbol{\omega}_{BW} = \omega_x \mathbf{x}_B + \omega_y \mathbf{y}_B + \omega_z \mathbf{z}_B$$

➤ 沿着  $x_B$  和  $y_B$  方向的角速度:

$$\omega_x = -\mathbf{h}_\omega \cdot \mathbf{y}_B, \quad \omega_y = \mathbf{h}_\omega \cdot \mathbf{x}_B$$

➤ 由于  $\boldsymbol{\omega}_{BW} = \boldsymbol{\omega}_{BC} + \boldsymbol{\omega}_{CW}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{BC}$  没有  $z_B$  分量:

$$\omega_z = \boldsymbol{\omega}_{BW} \cdot \mathbf{z}_B = \boldsymbol{\omega}_{CW} \cdot \mathbf{z}_B = \dot{\psi} \mathbf{z}_W \cdot \mathbf{z}_B$$



## 要求跟踪一条期望轨迹

$\sigma_T(t) = [r_T(t)^T, \psi_T(t)]^T$ , 其中,  $r$  是位置,  $\psi$  是 yaw 角

- 定义位置和速度误差:

$$e_p = r - r_T, e_v = \dot{r} - \dot{r}_T$$

- 计算期望的推力:

$$F_{des} = \overset{\text{PD控制}}{-K_p e_p - K_v e_v} + \overset{\text{前馈}}{mgz_W + m\ddot{r}_T}$$

- 将计算得到的推力投影到当前实际的机体坐标系的 z 轴作为输入:

$$u_1 = F_{des} \cdot z_B$$

- 为了得到剩下的三个输入, 需要计算旋转误差

- 计算期望的  $z_B$ :

$$z_{B,des} = \frac{F_{des}}{\|F_{des}\|}$$

- 根据前面介绍的微分平坦可以计算  $x_{B,des}$  和  $y_{B,des}$ :

$$x_{C,dex} = [\cos(\psi_T), \sin(\psi_T), 0]^T$$

$$y_{B,des} = \frac{z_{B,des} \times x_{C,dex}}{\|z_{B,des} \times x_{C,dex}\|}$$

$$x_{B,des} = y_{B,des} \times z_{B,des}$$

$$R_{B,des} = [x_{B,des} \ y_{B,des} \ z_{B,des}]$$

- 定义姿态误差

$$e_R = \frac{1}{2} (R_{des}^T {}^w R_B - {}^w R_B^T R_{des})^v$$

$v$  表示从  $so(3)$  到  $\mathbb{R}^3$  的 vee 映射

$$\begin{aligned} \bullet \omega &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \omega^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \\ \bullet \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}^v &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 定义角速度误差为机体坐标系下实际角速度和期望角速度的差:

$$e_\omega = {}^B[\omega_{BW}] - {}^B[\omega_{BW,T}]$$

- 剩下的三个输入可以计算如下:

$$[u_2, u_3, u_4]^T = \boxed{-K_R e_R - K_\omega e_\omega}$$

姿态的 PD 控制

## § 4 导航基础 (主讲: 任沁源)

### 4.1 飞行器常见导航方式

#### 4.1.1 卫星导航

GPS即全球定位系统 (Global Positioning System)。简单地说, 这是一个由覆盖全球的24颗卫星组成的卫星系统。这个系统可以保证在任意时刻, 地球上任意一点都可以同时观测到**4颗卫星**, 以保证卫星可以采集到该观测点的经纬度和高度, 以便实现导航、定位、授时等功能。GPS全球卫星定位系统由三部分

组成: 空间部分—GPS星座; 地面控制部分—地面监控系统; 用户设备部分—GPS信号接收机。

四大卫星导航系统: GPS, 俄罗斯格洛纳斯系统 (GLONASS), 欧洲伽利略系统 (Galileo), 中国北斗

#### 4.1.2 惯性导航系统

1. 分类: 平台式惯导系统&捷联惯导系统

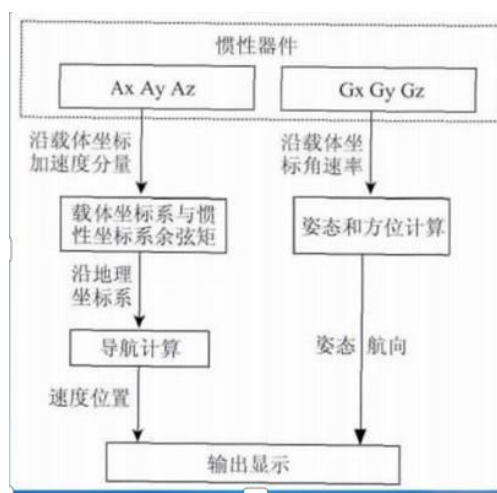
2. 包含模块: 计算机、加速度计、陀螺仪或其他运动传感器的平台

3. 工作原理: 通过感知加速度、角速度计算位置、速度、姿态变化, 加上初始条件实现定位导航

4. 加速度计的基本原理: 三轴加速度计是一种惯性传感器, 能够测量物体的比力, 即去掉重力后的整体加速度或者单位质量上作用的非引力。

5. 陀螺仪基本原理: 在陀螺仪中, 两个质量块运动速度方向相反, 而大小相同。它们产生的科式力相反, 从而压迫两块对应的电容板移动, 产生电容差分变化。**电容的变化正比于旋转角速度**。这就是基本原理。

6. 捷联惯导原理图



7. 优点:

依赖外界任何信息实现完全自主的导航; 隐蔽性好; 不受外界干扰; 不受地形影响; 能够全天候工作。

8. 缺点: 系统精度取决于单个传感器精度, 实际空间位置的漂移是不可避免的, 并随时间累积。

#### 4.1.3 多普勒导航

多普勒导航系统是利用多普勒效应实现的, 该系统由磁罗盘或陀螺仪表、多普勒雷达和导航计算机组成。

多普勒雷达不断地沿着某方向向地面发出无线电波, 利用飞行器和地面有相对运动产生多普勒效应, 测出雷达发射的电磁波和接收到的回波的频率变化, 从而计算出飞行器相对于地面的飞行速度, 速度的方向就是该点航线的方向。

A. 优点：自主性好，反应快，抗干扰性强，测速精度高，能用于各种气候条件。

B. 缺点：隐蔽性不好；系统工作受地形影响；测量有积累误差。

#### 4.1.4 图形匹配导航系统（地形辅助导航）

预先将无人机经过的地域，通过大地测量、航空摄影或已有的地形图等方法将地形数据（主要是地形位置和高度数据）制成数字化地图，存贮在机载计算机中，当飞机飞越上述区域时，其上的探测设备再次对该区域进行测量并与预先存储的原图进行比较，确定实际位置和位置偏差，从而实现无人机的导航。

➢ 单纯的图形匹配导航不能提供地理坐标位置，必须和其他导航方式进行组合，更多的是和图形/惯性组合。

➢ 图形匹配导航可分为地形匹配导航和景象匹配导航两种。

A. 优点：没有累计误差，隐蔽性好，抗干扰性能较强

B. 缺点：实时性受到制约，工作性能受地形影响，受天气影响，飞行器的机动性

#### 4.1.5 地磁导航

1. 基本原理：地磁场是矢量场，在地球近地空间内任意一点的地磁矢量与其它地点的地磁矢量是不同的，且与该地点的经纬度是一一对应的。因此，理论上只要知道该点的地磁场矢量就可实现全球定位。

2. 分类：地磁匹配；地形滤波

A. 优点：无源、无辐射、隐蔽性强，不受敌方干扰、全天时、全天候、全地域、能耗低的优良特征，导航不存在误差积累，在跨海制导方面有一定的优势。

B. 缺点：地磁匹配需要存储大量的地磁数据；实时性与计算机处理数据的能力有关

#### 4.1.6 组合导航

组合导航是指把两种或两种以上的导航系统以适当的方式组合在一起，利用其性能上的互补特性可以获得比单独使用任一系统时更高的导航性能。

除了可以将以上介绍的导航技术进行组合之外，还可以应用一些相关技术提高精度，比如大气数据系统、航迹推算技术等。

#### 4.1.7 INS/GPS组合导航系统

组合导航常以INS（高动态、宽频带、误差慢漂移特性）作为主导航系统，而将其他导航定位误差不随时间积累的导航系统，如无线电导航、天文导航、地形匹配导航和卫星导航等系统作为辅助导航系统。如GPS（低动态、宽频带、误差慢漂移特性）

### 4.2 空中机器人SLAM基础（非线性非高斯系统）

SLAM: Simultaneous Localization (定位) and Mapping (建图)

SLAM问题可以描述为:机器人在未知环境中从一个未知位置开始移动,在移动过程中根据位置估计和地图进行自身定位，同时在自身定位的基础上建造增量式地图，实现机器人的自主定位和导航

**图是描述环境的信息，可以用特征位置来表述**

**地标指的是环境中可以较易重复识别的特征。**

地标在SLAM中主要是用于帮助移动机器人确定它在哪里（自定位）。



### 4.2.1 空中机器人与SLAM

- A.空中机器人在SLAM里怎么“看”地标：用激光传感器测距、GPS测量、视觉测量等
- B.空中机器人在SLAM里怎么“猜”自己在哪里：里程计
- C.根据新路标校正错误并建立新图

### 4.2.2 SLAM技术

主要涉及：地标的提取、数据关联、运动状态的估计、运动状态的更新、地标的更新

机器人SLAM中多次重复：

- A.由于里程计的不准确性，利用环境信息对机器人位置更新。
- B.机器人利用机载传感器从环境地标中获得机器人定位信息。
- C.在移动机器人移动的时候，重复的观测同一地标，提高机器人定位精度。

### 4.2.3 EKF扩展卡尔曼滤波

扩展卡尔曼技术帮助准确估计含有噪声信息的机器人位置，通知准确估计含有噪声信息的环境地表位置信息。预测（贝叶斯估计）+更新（反馈测量）

EKF的做法为在工作点附近对运动和观测方程进行一阶泰勒展开，保留线性部分。

1. 系统状态 $\mathbf{X}$ ，包含机器人的位置 $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ 和路标位置 $(x_i, y_i, z_i)$ ， $i$ 为路标个数。

2. 协方差矩阵 $\mathbf{P}$ ， $\mathbf{Q}$ 描述了两个变量的相关程度，误差协方差 $\mathbf{P}$ 是用来对状态估计准确度的的一种测量， $\mathbf{Q}$ 是被称为过程噪音协方差矩阵，它体现对模型准确度的一种估计。

3、卡尔曼滤波增益 $\mathbf{K}$ ：表示对观测地标的信任度以及他们提供的数据中能获得的改正。

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

过程模型(process model)和测量模型(observation model)

#### Predict

$$\text{State Prediction} : \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$$

$$\text{Error Covariance Prediction} : \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

#### Update

$$\text{Kalman Gain} : \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$$\text{State Updation} : \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

$$\text{Error Covariance Updation} : \mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

## SLAM(Simultaneous Localization and Mapping)

“同时定位与地图构建”是指搭载特定传感器的主体，在没有环境先验信息的情况下，于运动过程中建立环境的模型，同时估计自己的运动。

### SLAM问题的建模

- 运动：机器人从 $k-1$ 时刻到 $k$ 时刻，位置 $x$ 的变化。  
无论使用何种测量自身运动的传感，我们都能使用一个抽象的数学模型来表达：

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, \omega_k)$$

该方程成为运动方程，其中 $u_k$ 为传感器输入， $\omega_k$ 为噪声。

- 观测：机器人在 $x_k$ 的位置看到某个路标点 $y_j$ ，产生了一个观测数据，抽象数学模型为：

$$z_{k,j} = h(y_j, x_k, v_{k,j})$$

该方程为观测方程，其中 $v_{k,j}$ 是观测存在的噪声。

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_k) \\ z_{k,j} = h(y_j, x_k, v_{k,j}) \end{cases}$$

运动方程，可以作为输入的传感器有IMU、轮式里程计等

观测方程，可以作为输入的传感器有激光雷达、相机等

那么我们就把SLAM 问题建模成了一个状态估计问题：如何通过带有噪声的测量数据，估计内部的、隐藏着的状态变量？

#### 4.2.4 激光SLAM

##### 滤波方法：

- 优势：  
计算资源要求少，计算速度快，输出频率高，保证SLAM系统的实时性
- 劣势：  
一定程度上假设了马尔科夫性，过早地边缘化，也导致了不便于进行回环优化。

##### 非线性优化

- 优势：  
考虑更多的历史信息，使得结果更加准确，且便于进行回环优化。
- 劣势：  
需要更多计算资源，输出频率较低

激光里程计的实现可以看做是点云的匹配和激光数据的校正：ICP（迭代最近点）

2D激光雷达——通常2D概率栅格地图

3D激光雷达——通常3D点云地图

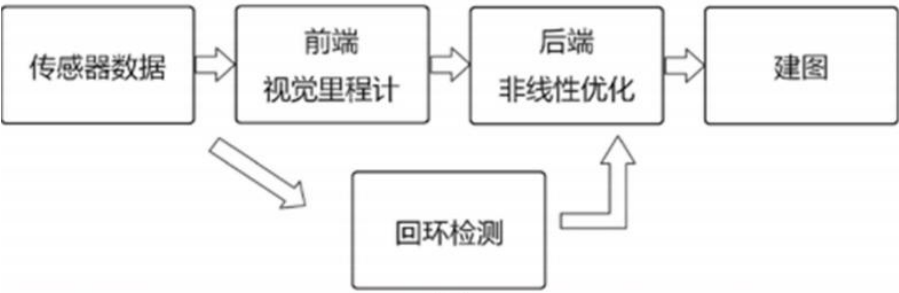
点云是在同一空间参考系下表达目标空间分布和目标表面特性的海量点集合。根据激光测量原理得到的点云，包括三维坐标和激光反射强度。

4.2.5 视觉SLAM

相机的本质：以二维投影形式记录了三维世界的信息，丢失了距离维度。

各类相机主要区别：有没有深度信息

- 单目：没有深度，必须通过移动相机产生深度Moving View Stereo
- 双目：通过视差计算深度Stereo
- RGBD：通过物理方法测量深度



相机位姿和空间观测特征点的优化方法

○ 路标节点  
△ 位姿节点  
- - - 观测模型  
— 运动模型

BA (Bundle Adjustment, 光束平差法)

BA的本质是一个优化模型，其目的是最小化重投影误差

优/劣势	激光SLAM	VSLAM
优	可靠性高、技术成熟	结构简单，安装的方式多元化
	建图直观、精度高、不存在累计误差	无传感器探测距离限制，成本低
	地图可用于路径规划	可提取语义信息
劣	受Lidar探测范围限制	环境光影响大、暗处（无纹理区域）无法工作
	安装有结构要求	运算负荷大，构建的地图本身难以直接用于路径规划与导航
	地图缺乏语义信息	传感器动态性能还需提高，地图构建时会存在累计误差