

运动学建模: 90°Swedish 轮 90°的意义转子平面和主轮平面夹角

基于作用的合成运动建模 (差分驱动机器人作为例子): 轮子半径为 r , 轮子到两

轮中间 P 的距离为 l , 两轮旋转速度分别为右轮 ϕ_1 , 左轮 ϕ_2

$$\dot{X}_I = R(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{r\phi_1}{2} + \frac{r\phi_2}{2} \\ 0 \\ r\dot{\phi}_1 - r\dot{\phi}_2 \\ \frac{r\phi_1}{2l} + \frac{r\phi_2}{2l} \end{bmatrix}$$

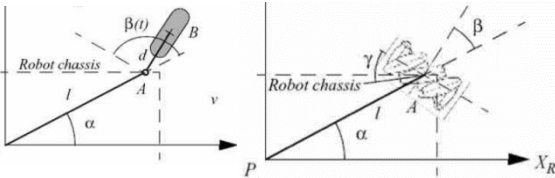


基于约束的运动建模:

固定标准轮: $l_{i,N} = \log \frac{p(m_i|s_N)}{1 - p(m_i|s_N)} + l_{i,N-1} + l_{i,0}$

滚动约束 $[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l\cos\beta]R(\theta)\dot{X}_I - r\dot{\phi} = 0$

无侧滑约束 $[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin\beta]R(\theta)\dot{X}_I = 0$



脚轮: 滚动约束 $[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l\cos\beta]R(\theta)\dot{X}_I - r\dot{\phi} = 0$

无侧滑 $[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l\sin\beta]R(\theta)\dot{X}_I + d\dot{\beta} = 0$ 总是满足 转向

标准轮: 滚动约束 $[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l\cos\beta]R(\theta)\dot{X}_I - r\dot{\phi} = 0$

无侧滑约束 $[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin\beta]R(\theta)\dot{X}_I = 0$

SWEDISH 轮 γ 轮子轴和主轮平面之间的夹角 第一行为滚动约束 无侧滑总是满足, SWEDISH 轮不存在无侧滑约束 $[\sin(\alpha + \beta + \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma) - l\cos(\beta + \gamma)]R(\theta)\dot{X}_I - r\dot{\phi}\sin\gamma = 0$

假设机器人共有 N 个标准轮组成

- N_f 个固定标准轮, 轮子角度向量为 β_i , 旋转速度向量为 $\dot{\phi}_i$
- N_t 个转向标准轮, 轮子角度向量为 β_i , 旋转速度向量为 $\dot{\phi}_i$

所有轮子的总约束表达式为

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1(\beta_s) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{X}_I = \begin{bmatrix} J_2\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

所有轮子的无侧滑约束为

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{X}_I = 0, \quad C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}$$

所有轮子的滚动约束为

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{X}_I - J_2\dot{\phi} = 0, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}$$

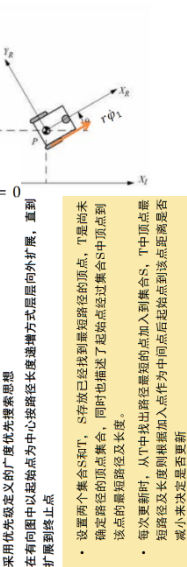
$$\begin{bmatrix} r'_i \\ \phi'_i \\ s'_i \\ z'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(m_{ys} - x)^2 + (m_{ys} - y)^2} \\ \arctan 2(m_{ys} - y, m_{ys} - x) - \theta \\ s_j \\ \mathbf{z}^i = h(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}^i, \mathbf{m}) \end{bmatrix} + \omega$$

求 $h(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}^i, \mathbf{m})$ 的 Jacobian 矩阵 $H_i^j = \frac{\partial h(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}^i, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}_i} \Big|_{\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i}$

条件下, 使机器人能够根据知识和传感器感知信息高效可靠地到达目标位置 研究内容: 路径规划、避障规划、轨迹生成 **路径规划**: 根据所给定的地图和目标位置, 规划一条使机器人到达目标位置的路径 (只考虑工作空间的几何约束, 不考虑机器人的运动学模型和约束) **避障规划**: 根据所得到的实时传感器测量信息, 调整路径/轨迹以避免发生碰撞。 **轨迹生成**: 根据机器人的运动学模型和约束, 寻找适当的控制命令, 将可行路径转化为可行轨迹。 **位形空间**: 机器人成为一个可移动点, 不考虑姿态、体积和非完整运动学约束。分辨率完备&概率完备 1、精确最优: 深度优先、广度优先 2、近似最优:

A^* , D^* **连通图构建**: 分辨率完备: 解析性离散化, 确保获得可行行驶车图法 **单元分解法** **势场法** **解概率完备**: 基于概率随机采样离散化, 使获得解的概率趋近于如 **PRM** **RRT1** **行车图法**: 基于障碍物几何形状分解位形空间, 将自由空间的连通性用一维曲线的网格表示, 典型方法: 可视图法 (靠近障碍物, 不安全, 可得到路径长度上的最优解) **Voronoi diagram** 法 (不适用于短距离定位传感器), 节点到两个或两个以上的障碍物的距离相等 **2. 单元分解法** 将位形空间中的自由空间分为若干的小区, 每一个区域作为一个单元, 以单元为顶点, 以单元之间的相邻关系为边构成连通图 常用方法: 精确单元分解 (严格基于环境几何形状分解, 与环境大小无关, 依赖物体复杂度) 近似单元分解 栅格表示法 (与环境的疏密和物体形状复杂度无关) 可变大小的近似单元分解 (二叉树表示) **3. 人工势场法**: 目标点对机器人产生吸引力, 障碍物对机器人产生排斥力, 合力构成机器人控制率 (对势场求偏导数得到力, 对合势场求偏导得到合力, 不仅是路径规划方法, 也可作为实时避障算法, 会存在局部最小, 产生振荡和死锁) **最优路径搜索** 精确算法: 深度优先, 广度优先 优先级定义的广度优先法 Dijkstra 算法 近似算法 A^*

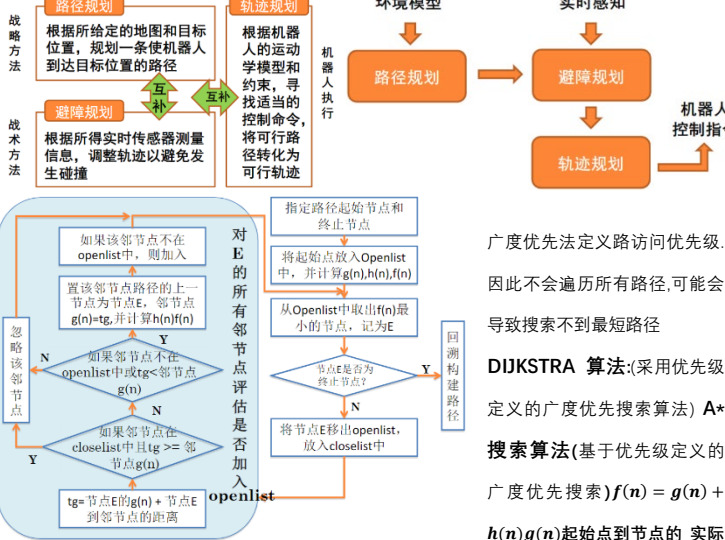
$$K = \frac{\log(1 - P)}{\log(1 - \omega^n)}$$



采用优先级定义的广度优先搜索思想 在有向图中以起始点为中心按路径长度递增方式向外扩展, 直到扩展到终止点

- 设置两个集合 S 和 T , S 存储已经找到最短路径的顶点, T 存储尚未确定最短路径的顶点集合, 同时也描述了起始点经过集合中顶点到该点的当前最短路径及长度。
- 每次循环时, 从 T 中找出路径最短的点加入到集合 S 中, T 中顶点能短路径长度比当前最短路径加入点作为中间点后起始点到该点距离最近

减小未确定是否最短



曼哈顿距离: $d(i,j) = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$ **PRM 算法**: 1 在位形空间中随机取点 2 对采样的姿态进行碰撞检测 3 无碰撞姿态成为图节点 每个图节点与最近相邻的 k 个节点直线连接 4 保留无碰撞路径为图的边, 构成自由位形空间中的 roadmap, 加入起始点和终止点, 进行搜索。优点: 简化了对环境的解析计算 适用高自由度自由位形空间中的规划 缺点: 依赖采样次数, 不考虑机器人执行的可行性, 难以评估需要多少时间做充分采样 **PRM** 中非全联通情况的解决办法: 在初始采样点中选取不在联通区域内的点, 在该点周围重新采样生成节点, 进行扩张, 直到图全联通。 **RRT 算法**: 1 在状态空间中随机采样 q_{rand} 2 在现有已经构成的搜索树上查找与 q_{rand} 最近的节点 q_{near} 3 根据 q_{rand} 和 q_{near} 连线方向延伸一定距离得到 q_{new} 4 对 q_{new} 进行碰撞检测 5 判断是否到终点 影响收敛速度的三个原因: 1. 随机状态的采样 2. 查找与随机状态距离最近的节点 3. 新生节点的碰撞检测 **RRT 曲折的原因**: 随机性小步导致路径曲折 **RRT* 解决曲折**: 寻找树中新节点领域内到新节点最短路径的节点, 对树中新节点领域内节点判断, 如果新节点到改节点的路径由于现有路径则修改该节点的父节点。 **避障规划**: **1. BUG 算法** 绕障碍物轮廓绕行 **BUG1**: 先完整绕行, 然后判断最靠近目标点的点作为目标点 **BUG2**: 沿着起始

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{v}{\omega} \sin(\theta) + \frac{v}{\omega} \sin(\theta + \omega \Delta t) \\ y + \frac{v}{\omega} \cos(\theta) - \frac{v}{\omega} \cos(\theta + \omega \Delta t) \\ \theta + \omega \Delta t \end{pmatrix} \quad V_a = \left\{ (v, \omega) \mid v \leq \sqrt{2 \cdot dist(v, \omega) \cdot \dot{v}_b}, \omega \leq \sqrt{2 \cdot dist(v, \omega) \cdot \dot{\omega}_b} \right\}$$

点到终止点的直线方向走, 遇到障碍物绕行, 提前规定绕行方向 (如向上或者向下, 之后总是按照这个方向绕) **2. 向量势直方图法 (VFH)**: 针对势场法容易陷入局部最优, 导致存在震荡, 难以通过窄通道 构建机器人坐标系下障碍物概率直方图 1、构建并维护机器人周围的局部栅格地图 2、为每个栅格计算其障碍物向量, 距离机器人越近向量越大。 3、转换为极坐标下障碍物概率直方图。 4、根据直方图识别所有可以让机器人通过的通道, 然后对每个通道计算成本, 选择具有最低成本的通道, 得到导航方向。 **动态窗口法 DWA**: 1. 构建可行的速度空间, 速度控制模型: 见上方图 2. 在当前速度配置处以固定的小时间间隔开一个速度窗口空间 3. 结合机器人速度约束获得可行速度空间 4. 评价 $f(v, w) = \alpha * h(v, w) + \beta * d(v, w) + \gamma * v(v, w)$ $h(v, w)$ 机器人朝向与起点终点连线的偏差 $d(v, w)$ 机器人与障碍物距离 $v(v, w)$ 当前速度与最大速度的偏差, 需要归一化处理 $\alpha + \beta + \gamma = 1$

1 轨迹规划: 一维轨迹规划 - 多项式规划速度和轨迹 移动机器人平面轨迹规划只需要做二维轨迹规划, 因为航向角可以用位置变化确定 (理论上要三维规划) 对于 $(x(t), y(t))$ 完整机器人使用单独独立规划、时间同步 非完整机器人使用图形搜索法 对于 $(x(t), y(t))$ 有参数优化法和反馈控制法 **图形搜索法**: **DUBIN** 曲线控制为车速和转向角 (圆弧+直线只能向前运动) **REEDS-SHEPP** 曲线 (圆弧+直线可前后运动)、**Balkcom-Mason** (机器人可原地旋转) 图形搜索法缺点: 空间分辨率低 **参数优化法**:

- 设定参数的初值 p_0 , 得到对应控制律
- 利用该控制律结合机器人运动学模型/动力学模型, 可以计算得到在该控制律下机器人从初始状态运动达到的目标状态 q_1
- 计算在控制律下到达的目标状态 q_1 和期望目标状态 q_1 之间的误差 Δq_1
- 如果误差小于阈值, 则结束, 否则采用数值方法计算参数校正量 Δp

$$\Delta p = -\alpha \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta q_1}{\partial p} \end{bmatrix}^{-1} \Delta q_1$$

6. 利用校正量校正参数 p , 得到新的控制律, 回到步骤 2 **地图构建**: 二维激光传感器 (测量某一平面上障碍物边缘点到传感器的距离和角度信息) 三维激光传感器 (一定俯仰角 360 度范围内障碍物边缘点到传感器的距离和角度信息) **1. 点云地图** (未区分道路还是障碍物, 需处理后才能应用于导航) 由激光测距仪直接获得局部点云地图, 结合里程计估计/定位构建全局点云地图, RGBD 传感器获得数据由稠密性, 视觉特征点云数据具有稀疏性 **2. 栅格地图 (存储空间需求大)**: 降低存储空间方法: 二叉树/八叉树 (分辨率可变, 限制查

询深度可以获得同一地图的多个分辨率)**3.高度栅格地图:**在栅格中存储高度信息.通过高斯分布表示高度估计和不确定性 栅格中也可存储 有向欧式距离(ESDF)构建距离截断场(TSDF)可重构高分辨率三维曲面 **4.特征地图**(无法精确表征复杂环境, 不能表示环境被占用/空闲/未知情况,不能直接用于导航)**4.拓扑地图**(把环境表示为带节点和相关连接线的拓扑结构图)**局部地图构建:**基于激光的局部栅格地图构建**传感器坐标**下占用栅格地图为 $\mathbf{m} \mathbf{m}=\{m_i,i=1,\cdots,M\}$ $m_i=0/1$ M 为栅格总数 激光测距仪一次测量获得 $S=\{s_1, \dots, s_N\}$ N 为激光数据总数, 问题定义为 $p(\mathbf{m}=1 \mid s_1, \dots, s_N)$, 简写为 $p(\mathbf{m} \mid s_1, \dots, s_N)=\prod p(m_i \mid s_1, \dots, s_N)$ (假设栅格彼此独立) $p(m_i \mid s_1, \dots, s_N)$ 记为 a 的几率 $a/(1-a)$ 的 \log 值记为 $l_{i,N}$ $p(m_i \mid s_1, \dots, s_N)=1-\frac{1}{1+e^{l_{i,N}}}$ **高度栅格地图构建:**每个栅格内存储的是该栅格中障碍物高度估计 $p(m_i)=N(h; \mu, \sigma^2)$ 计算时取该栅格内高度最大的一组数据点记为 $\bar{H}=(h_1, \dots, h_N)^T$ 问题定义 $(\mu, \sigma^2)=\operatorname{argmax} P(\bar{H} \mid \mu, \sigma^2)$ 缺点:会存在虚拟障碍物的情况.优化:识别单元是立式结构还是包含空隙, 如果地面上有空隙且超过机器人高度的话, 取空隙下方的数据(每个单元只能表示一层信息 无法利用穿过桥的路径)**MLS MAP:**将高度栅格地图扩展为多层平面描述的栅格地图,每一个栅格储存多个 patch,每个 patch 存储栅格上的一个平面(高度均值高度方差深度值 对于等地面平坦单元深度值为 0)可表示多层信息 **基于激光传感器的线段特征地图:给定点求线段:**

TLS 法:线段表示为 $x \cos \theta+y \sin \theta=r \Rightarrow x a+y b=r$ 解决问题: $\min \sum\left(x_i a+y_i b-r\right)^2$ 拉格朗日乘数法解决 $\min [\lambda\left(a^2+b^2-1\right)+\sum\left(x_i a+y_i b-r\right)^2]$ 受噪声影响 **RANSAC 法:** 1.随机采样:在样本集中抽取 n 个样本,进行线段拟合 2.计算样本集中其他样本到模型线段的误差,小于阈值的样本与抽取样本构成新的抽取样本集 再次拟合线段,直到出现最好的模型 K 次实验 w 为内点比例 n 为随机采样数 K 次实验至少 1 次选择好的样本概率为 $P=1-\left(1-\omega^n\right)^K$ **分割点拟合多条线段:**

段:SAN:1.获取穿过两个端点的线段,获取距离线段较远的点,如果距离大于阈值则线段分成两部分,并重复此过程 2.如果相邻两线段足够近,获取共同线段和距离较远的点,如果距离小于阈值则合并线段(两个点可能是噪点) **HOUGH TRANSFORM(投票法):**对每一个样本点,计算该样本点对其关联直线参数对的投票(噪声处理困难,直线拟合精度对网格尺寸选择敏感)**里程估计:里程估计:**根据传感器感知信息推导机器人位姿(位置和角度)变化 **航位推算:**基于已知位置,利用里程估计,推算现在位置 **1.基于码盘的轮式机器人里程估计:** $\dot{\varphi}=\frac{2 \pi n}{\eta}$ n 为码盘测量电机的速度 η 为齿轮减速比 **2.基于惯性单元的里程估计:**一般含有三轴的加速度计和三轴陀螺仪,三轴磁力计用于校正,通过积分可得姿态和速度位置等信息。

3.激光里程计:PPICP $e_i=p_i-\left(R p_i^{\prime}+t\right)$ 转化为 $R^{\ast}=\operatorname{argmin}_2 \sum\left\|q_i-R q_i^{\prime}\right\|^2$ q 代表去质心坐标 $t=p-R^{\ast} p^{\prime}$ 目标函数变: $\max \sum q_i^T R q_i^{\prime} \sum q_i^T R q_i^{\prime}=\operatorname{tr}\left(R \sum q_i^{\prime} q_i^T\right) W=\sum q_i^{\prime} q_i^T W=U S V^T \operatorname{tr}\left(R U S V^T\right)=\operatorname{tr}(S H) H=\left(h_1^T h_2^T h_3^T\right)^T \operatorname{tr}\left(R U S V^T\right) \leq s_1 h_{11}+s_2 h_{22}+s_3 h_{33}$ 取等时 $R=V U^T$ 计算效率受最近点匹配的计算速度影响 会陷入局部最优,依赖较好的初值 **定位:基于外部设备感知的定位:**GPS分为空间端、控制端和用户端,四颗卫星实现最优定位 差分全球定位系统 DGPS(消除 GPS 中出于利益考虑被人为引入的误差) **自定位:**在给定环境地图(对环境的已有知识)的条件下,根据机器人的运动控制/里程估计信息和传感器感知数据(当前认知)估计机器人相对于环境地图的坐标 自定位问题: $\hat{X}^t \triangleq E\left[X^t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right]$

$p\left(X_t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)=n p\left(z_t \mid X_t, m\right) \int p\left(X_t \mid X_{t-1}, u_{t-1}, m\right) p\left(X_{t-1} \mid Z^{t-1}, U^{t-2}, m\right) d X_{t-1}$
 $p\left(X^t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)=p\left(X^{t-1}, x_t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)$ **马尔可夫定位的运动模型**
 $p\left(X_t \mid X_{t-1}, u_{t-1}, m\right)=$
 $n p\left(m \mid X_t, X_{t-1}, u_{t-1}\right) \ast$
 $p\left(X_t \mid X_{t-1}, u_{t-1}\right) u_{t-1}$ 在速度运动模型下为速度指令
在里程计模型下为里程计数据
 $\left(\delta_{r o t 1}, \delta_{t r a n s}, \delta_{r o t 2}\right)^T$
根据乘法规则 $p(X, Y)=p(Y \mid X) p(X)$
 $p\left(X^t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)=p\left(x_t \mid X^{t-1}, Z^t, U^{t-1}, m\right) p\left(X^{t-1} \mid Z^{t-1}, U^{t-2}, m\right)$
 $p\left(X^t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)=p\left(x_t \mid X^{t-1}, Z^{t-1}, U^{t-1}, m\right) p\left(X^{t-1} \mid Z^{t-1}, U^{t-2}, m\right)$
根据贝叶斯公式 $p(Y \mid X)=\eta p(X \mid Y) p(Y)$
 $p\left(X^t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)=\eta p\left(z_t \mid X^t, Z^{t-1}, U^{t-1}, m\right) p\left(x_t \mid X^{t-1}, Z^{t-1}, U^{t-1}, m\right) p\left(X^{t-1} \mid Z^{t-1}, U^{t-2}, m\right)$

根据误差估计 X_t 的分布 $p\left(X_t \mid X_{t-1}, u_{t-1}\right)=p\left(\tilde{\delta}_{r o t 1}\right) p\left(\tilde{\delta}_{t r a n s}\right) p\left(\tilde{\delta}_{r o t 2}\right)$
 $\left(\begin{array}{l} x^{\prime} \\ y^{\prime} \\ \theta^{\prime} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{l} x+\tilde{\delta}_{t r a n s} \cos \left(\theta+\tilde{\delta}_{r o t 1}\right) \\ y+\tilde{\delta}_{t r a n s} \sin \left(\theta+\tilde{\delta}_{r o t 1}\right) \\ \theta+\tilde{\delta}_{r o t 1}+\tilde{\delta}_{r o t 2} \end{array}\right) \quad p\left(\tilde{\delta}_{r o t 1}\right)=N\left(\tilde{\delta}_{r o t 1} ; 0, \alpha_1\left|\delta_{r o t 1}\right|+\alpha_2\left|\delta_{t r a n s}\right|\right) \\ p\left(\tilde{\delta}_{t r a n s}\right)=N\left(\tilde{\delta}_{t r a n s} ; 0, \alpha_3\left|\delta_{t r a n s}\right|+\alpha_4\left|\delta_{r o t 1}+\delta_{r o t 2}\right|\right) \\ p\left(\tilde{\delta}_{r o t 2}\right)=N\left(\tilde{\delta}_{r o t 2} ; 0, \alpha_1\left|\delta_{r o t 2}\right|+\alpha_2\left|\delta_{t r a n s}\right|\right)$
随机采样求解 $p\left(m \mid X_t, X_{t-1}, u_{t-1}\right)$ 表示地图是否可通行 观测模型 $p\left(z_t \mid x_t, m\right)$ **特征的观测模型** t 时刻观测特征 $z_t=\left\{f_t^1, f_t^2, \dots, f_t^K\right\} f_t^i \triangleq\left(r_t^i, \phi_t^i, s_t^i\right)^T r_t^i$ 特征与机器人相对距离 ϕ_t^i 特征与机器人之间相对角度 s_t^i 特征标识 观测条件独立 $p\left(Z_t \mid X_t, m\right)=\prod p\left(f_t^i \mid X_t, m\right) p\left(f_t^i \mid X_t, m\right)=N\left(f_t^i ; \hat{f}_t^i, \sigma_f^2\right)$ **激光传感器模型** $p\left(z_t \mid X_t, m\right)=\prod p\left(z_t^k \mid X_t, m\right) p\left(z_t^k \mid X_t, m\right)=\alpha_{h i t} p_{h i t}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)+\alpha_{s h o r t} p_{s h o r t}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)+\alpha_{m a x} p_{m a x}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)+\alpha_{r a n d} p_{r a n d}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)=\sum p\left(z_t^k \mid X_t, m, \alpha\right) p(\alpha) \alpha_{h i t}+\alpha_{s h o r t}+\alpha_{m a x}+\alpha_{r a n d}=1$

$p_{h i t}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)=\left(\int_0^{z_{m a x}} N\left(z_t^k ; z_t^{k \ast}, \sigma_{h i t}^2\right) d z_t^k\right)^{-1} N\left(z_t^k ; z_t^{k \ast}, \sigma_{h i t}^2\right) p_{s h o r t}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)=\left(1-e^{-\lambda_{s h o r t} z_t^k}\right)^{-1} \lambda_{s h o r t} e^{-\lambda_{s h o r t} z_t^k}$ hit 带少量噪声的正确测量,short 临时障碍物测量 max 达到最大距离的测量,rand:随机测量的待求参数: $\sigma_{h i t}^2, \lambda_{s h o r t} \propto$ **LIKELIHOOD FIELD 激光束模** 取消 $\alpha_{s h o r t} p_{s h o r t}\left(z_t^k \mid X_t, m\right) p_{h i t}\left(z_t^k \mid X_t, m\right)=N\left(\operatorname{dist} ; 0, \sigma^2\right) \operatorname{dist}=\operatorname{argmin}\{\text { 激光束末端与障碍物最近距离 }\}$ (光滑性差)**马尔可夫自主定位求解方法:** 分为两步 1.状态预估(估计大概初始位置) 2.观测更新 (减小观测误差) **KF 方法:**运动方程表示为 $X_t=A_t X_{t-1}+B_t u_{t-1}+v_t X_{t-1} \sim N\left(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}\right) v_t \sim N\left(0, R_t\right)$ 位姿预估 $\bar{p}\left(X_t \mid Z^{t-1}, U^{t-1}\right)=N\left(X_t ; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t\right) \bar{\mu}_t=A_t \mu_{t-1}+B_t u_{t-1} \bar{\Sigma}_t=A_t \Sigma_{t-1} A_t^T+R_t$ 观测方程为: $z_t=C_t X_t+\omega_t \omega_t \sim N\left(0, Q_t\right)$ 观测更新 $p\left(X_t \mid Z^t, U^{t-1}\right)=N\left(X_t ; \mu_t, \Sigma_t\right) \mu_t=\bar{\mu}_t+K_t\left(z_t-C_t \bar{\mu}_t\right) \Sigma_t=\left[I-K_t C_t\right] \bar{\Sigma}_t K_t=\bar{\Sigma}_t C_t^T\left(C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T+Q_t\right)^{-1}$ 新信息矩阵 KF 法要求运动方程和观测方程都是线性函数 **EKF 方法:**基本思想:采用非线性函数表示运动方程和观测方程 $X_t=g\left(X_{t-1}, u_{t-1}\right)+v_t v_t \sim N\left(0, R_t\right) z_t=h\left(X_t\right)+\omega_t \omega_t \sim N\left(0, Q_t\right)$ 计算非线性转换后实际概率分布的高斯近似.(核心思想:线性化近似)位姿预估 $\bar{p}\left(X_t \mid Z^{t-1}, U^{t-1}\right)=N\left(X_t ; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t\right) \bar{\mu}_t=g\left(\mu_{t-1}, u_{t-1}\right) \bar{\Sigma}_t=G_t \Sigma_{t-1} G_t^T+R_t$ $G_t=\partial g\left(X_{t-1}, u_{t-1}\right) / \partial X_{t-1} \mid_{x_{t-1}=\mu_{t-1}}$ 观测更新 $p\left(X_t \mid Z^t, U^{t-1}\right)=N\left(X_t ; \mu_t, \Sigma_t\right) \mu_t=\bar{\mu}_t+K_t\left(z_t-h\left(\bar{\mu}_t\right)\right) \Sigma_t=\left[I-K_t H_t\right] \bar{\Sigma}_t K_t=\bar{\Sigma}_t H_t^T\left(H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T+Q_t\right)^{-1} H_t=\partial h\left(X_t\right) / X_t \mid_{x_t=\bar{\mu}_t}$ 缺点:线性近似好坏依赖于自变量的不确定程度以及被近似函数的局部非线性程度 **EFK** 采用多变量高斯分布表示估计的概率分布,这种单峰概率分布表示不适合存在多个假设的情况。**EKF 中采用里程计运动模型:**误差 $\tilde{\delta}=\left(\tilde{\delta}_{r o t 1} \tilde{\delta}_{t r a n s} \tilde{\delta}_{r o t 2}\right)^T \sim N\left(0, M_t\right) M_t=\operatorname{diag}\left(\left(\alpha_1\left|\delta_{r o t 1}\right|+\alpha_2\left|\delta_{t r a n s}\right|\right)^2,\left(\alpha_3\left|\delta_{t r a n s}\right|+\alpha_4\left|\delta_{r o t 1}+\delta_{r o t 2}\right|\right)^2,\left(\alpha_1\left|\delta_{r o t 2}\right|+\alpha_2\left|\delta_{t r a n s}\right|\right)^2\right)$ $X_t=g\left(X_{t-1}, u_{t-1}\right)+v_t v_t \sim N\left(0, R_t\right) V_t=\partial g\left(X_{t-1}, u_{t-1}\right) / \partial u_{t-1} R_t=V_t M_t V_t^T$ 观测更新采用特征地图表示 $m=\left\{m_1, m_2, \dots, m_N\right\} m_i=\left(m_{i x}, m_{i y}\right)^T$ t 时刻观测的特征为 $z_t=\left\{z_t^i, \dots\right\}$ 每一个特征对应 $c_t^i \in\{1, \dots, N+1\}$ 说明对应的特征 $\mu_t=\bar{\mu}_t+\sum_i K_t^i\left(z_t^i-h\left(\bar{\mu}_t, c_t^i, m\right)\right) \Sigma_t=\left[I-\sum_i K_t^i H_t^i\right] \bar{\Sigma}_t$ 设 $c_t^i=j$ 单个特征观测模型为(见首页图) **EKF 数据关联问题:** $\hat{c}_t^i=\operatorname{argmax}_p\left(z_t^i \mid C^i, m, Z^{t-1}, U^{t-1}\right) \approx \operatorname{argmax}_N\left(z_t^i ; h\left(\bar{\mu}_t, c_t^i, m\right), H_t^i \bar{\Sigma}_t H_t^{iT}+Q_t\right)$ **粒子滤波定位:**基本思想:通过一组样本(粒子)分布来近似表示概率分布 重采样基本方法:1.权重归一化 $\tilde{\omega}^{[m]}=\tilde{\omega}^{[m]} / \sum_{i=1}^M \tilde{\omega}^{[i]} \quad 2$ 归一化后的权重在 \bar{X}_t 中重新采样 $X^{[i]}=\bar{X} \left(j^{(i)}\right) p\left(j^{(i)}=l\right)=\tilde{\omega}^{[l]}, l=1, \dots, M$ 3.对于重采样的粒子重新赋予权重 $\omega^{[i]}=1 / M$ 样本重要性计算 目标 $p\left(X \mid z_1, \dots, z_n\right)=\prod_k p\left(z_k \mid X\right) p(X) / p\left(z_1, \dots, z_n\right)$ 陆标 z_i 建议分布 $p\left(X \mid z_i\right)=p\left(z_i \mid X\right) p(X) / p\left(z_i\right)$ 权重计算 $\omega=p\left(X \mid z_1, \dots, z_n\right) / p\left(X \mid z_i\right)=p\left(z_i\right) \prod_{k \neq i} p\left(z_k \mid X\right) / p\left(z_1, \dots, z_n\right)$ **PL 算法:**1.以表示上一时刻概率分布的粒子集合作为起点 X_{t-1} 2.利用运动模型对粒子进行更新并采样 3.利用观测模型来计算粒子权重

4.根据权重重新采样,生成表示当前时刻信度的粒子集合 x_t t 时刻粒子集合为 $X_t=\left\{X_t^{[1]}, X_t^{[2]}, \dots, X_t^{[M]}\right\}$ 每一个粒子 $X_t^{[i]}$ 是 t 时刻状态的一个假设 $X_t^{[i]} \sim p\left(X_t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)$ 某一粒子从 0 时刻到当前时刻的序列 $X_{0: t}^{[i]}=X_0^{[i]}, X_1^{[i]}, \dots, X_t^{[i]}$ 表示对某一路径的假设
$$\underbrace{p\left(X_t \mid Z^t, U^{t-1}, m\right)}_{t \text { 时刻粒子集合 }}=\underbrace{n p\left(z_t \mid X_t, m\right)}_{\text {粒子评价 }} \underbrace{\int}_{\text {粒子传递 }} \underbrace{p\left(X_t \mid X_{t-1}, u_{t-1}, m\right) p\left(X_{t-1} \mid Z^{t-1}, U^{t-2}, m\right) d X_{t-1}}_{t-1 \text { 时刻粒子集合 }}$$

$$\bar{x}_t^{[i]}=x_{t-1}^{[i]}+\left(\frac{\delta_{t r a n s} \cos \left(\theta+\delta_{r o t 1}\right)}{\theta+\delta_{r o t 1}+\delta_{r o t 2}}\right)+v_t, v_t \sim N\left(0, R_t\right) \quad t-1 \text { 时刻粒子集 } x_{t-1}=\left\{X_{t-1}^{[1]}, X_{t-1}^{[2]}, \dots, X_{t-1}^{[M]}\right\}$$

建议分布 $\bar{X}_t=\left\{\bar{X}_t^{[1]}, \bar{X}_t^{[2]}, \dots, \bar{X}_t^{[M]}\right\} \sim \bar{p}\left(X_t \mid Z^{t-1}, U^{t-1}, m\right)$ 计算粒子权重(建议分布为粒子分布)

PF 方法中的误差:1.样本集合近似带来的系统误差(在归一化后,增加了一个约束,使样本权重从 M 维降到 $M-1$ 维) 减小 1.2 误差-增大 M 的规模
2.由随机采样带来的偏差(称为采样器方差)3.由重采样带来的偏差(重采样无法产生相同的样本分布,粒子分布失去多样性)减小误差方法:减少重采样次数,根据权重反差决定是否重采样 **绑架问题:**绑架检测:检测一段时间内的观测模型概率分布 $p\left(z_t \mid Z^{t-1}, u_{t-1: t-1}, m\right) \approx \sum_{t'=t-1}^t \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \omega_{t'}^{[m]}$ 如果概率都偏低,说明粒子偏离真值需要调整粒子分布 **EKF 条件:**1.运动方程表示为 $X_t=g\left(X_{t-1}, u_{t-1}\right)+v_t v_t \sim N\left(0, R_t\right) 2$.观测方程表示为 $z_t=h\left(X_t\right)+\omega_t \omega_t \sim N\left(0, Q_t\right) 3$.初始位姿满足高斯分布: $p\left(X_0\right)=N\left(X_0 ; \mu_0, \Sigma_0\right)$ 可得到 $p\left(X_t\right)=N\left(X_t ; \mu_t, \Sigma_t\right)$
$$p\left(z_t^i \mid C^i, m, Z^{t-1}, U^{t-1}\right)=\int p\left(z_t^i \mid x_t^i, C^i, m, Z^{t-1}, U^{t-1}\right) p\left(x_t^i \mid C^i, m, Z^{t-1}, U^{t-1}\right) d x_t^i$$

$$=\int p\left(z_t^i \mid x_t^i, c_t^i, m\right) p\left(x_t^i \mid C^i, m, Z^{t-1}, U^{t-1}\right) d x_t^i$$

$$=\int p\left(z_t^i \mid x_t^i, c_t^i, m\right) \bar{p}\left(x_t^i \mid Z^{t-1}, U^{t-1}\right) d x_t^i$$

$$\approx \mathcal{N}\left(z_t^i ; h\left(\bar{\mu}_t, c_t^i, m\right)+H_t^i\left(x_t-\bar{\mu}_t\right), Q_t\right) \otimes \mathcal{N}\left(x_t ; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t\right)$$

$$=\mathcal{N}\left(z_t^i ; h\left(\bar{\mu}_t, c_t^i, m\right), H_t^i \bar{\Sigma}_t H_t^{iT}+Q_t\right)$$

