



8.4 马尔可夫定位中的运动模型

运动模型

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ &= \eta p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1} \end{aligned}$$



航位推算计算公式

速度控制
航位推算
计算模型

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{v}{\omega} \sin(\theta) + \frac{v}{\omega} \sin(\theta + \omega \Delta t) \\ y + \frac{v}{\omega} \cos(\theta) - \frac{v}{\omega} \cos(\theta + \omega \Delta t) \\ \theta + \omega \Delta t \end{pmatrix}$$

里程估计
航位推算
计算模型

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + \Delta d \cos(\theta_{t-1} + \Delta \theta) \\ y_t = y_{t-1} + \Delta d \sin(\theta_{t-1} + \Delta \theta) \\ \theta_t = \theta_{t-1} + \Delta \theta \end{cases}$$



运动模型

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ = \eta p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

概率架构下的航位推算模型

航位推算估计的概率分布



运动模型

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ = \eta p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1} \end{aligned}$$

利用贝叶斯规则

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) = \eta p(\mathbf{m} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$



运动模型

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ = \eta p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1} \end{aligned}$$

利用贝叶斯规则

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) = \eta p(\mathbf{m} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$

给定上一时刻位姿 \mathbf{x}_{t-1} 和控制指令 \mathbf{u}_{t-1} ,
计算当前位姿 \mathbf{x}_t 的概率分布

运动模型

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ &= \eta p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1} \end{aligned}$$

利用贝叶斯规则

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) = \eta p(\mathbf{m} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$

在控制指令 \mathbf{u}_{t-1} 下机器人从 \mathbf{x}_{t-1} 移动到 \mathbf{x}_t ，在这样条件下地图 \mathbf{m} 的可能性

如果路径或者 \mathbf{x}_t 与环境障碍物碰撞，则获得地图 \mathbf{m} 的可能性低

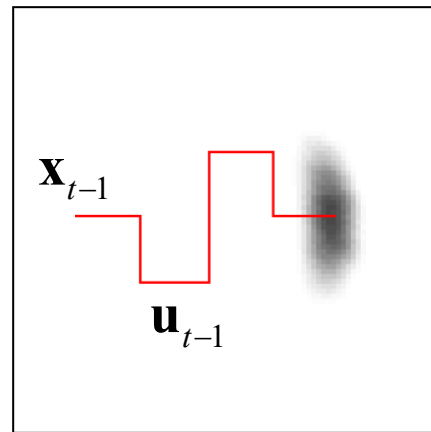
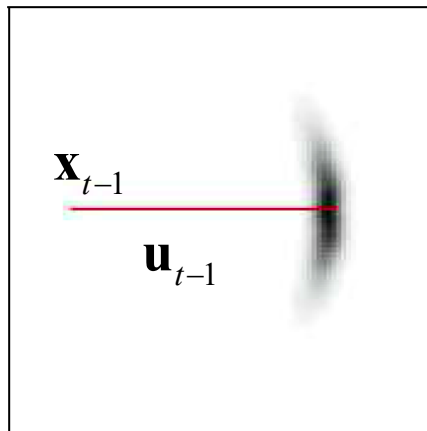
通过路径验证地图存在的可能性实现地图条件下当前位姿估计的验证

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$

给定上一时刻位姿 \mathbf{x}_{t-1} 和控制指令 \mathbf{u}_{t-1} ，计算当前位姿 \mathbf{x}_t 的概率分布

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$

二维投影



$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$

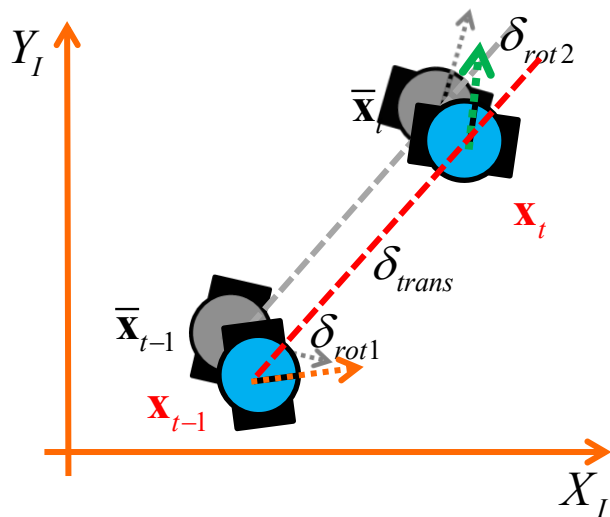
- 不同的控制指令形成不同的概率运动模型
- 速度控制运动模型
 - \mathbf{u}_{t-1} 为发送给机器人、控制机器人运动的指令
- 里程估计运动模型
 - \mathbf{u}_{t-1} 为里程估计数据

如何求解概率运动模型？



里程计运动模型

无噪声情况下根据里程计的航位推算模型



将运动变化量叠加到 \mathbf{x}_{t-1} 得到 \mathbf{x}_t

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \delta_{trans} \cos(\theta + \delta_{rot1}) \\ y + \delta_{trans} \sin(\theta + \delta_{rot1}) \\ \theta + \delta_{rot1} + \delta_{rot2} \end{pmatrix}$$

根据该模型的逆模型，可以得到 \mathbf{x}_{t-1} 到 \mathbf{x}_t 的里程值（真实值）

里程计运动模型

- 实际测量中带有各种误差

真实值 = 测量值 - 误差

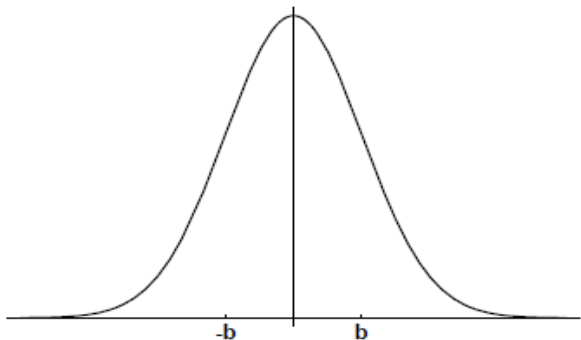
$$\hat{\delta}_{rot1} = \delta_{rot1} - \tilde{\delta}_{rot1}, \hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} - \tilde{\delta}_{trans}, \hat{\delta}_{rot2} = \delta_{rot2} - \tilde{\delta}_{rot2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \hat{\delta}_{trans} \cos(\theta + \hat{\delta}_{rot1}) \\ y + \hat{\delta}_{trans} \sin(\theta + \hat{\delta}_{rot1}) \\ \theta + \hat{\delta}_{rot1} + \hat{\delta}_{rot2} \end{pmatrix}$$



里程计运动模型

- 可以设定误差为均值为0的高斯分布



真实值与测量值之间的误差
应服从该分布

误差越小，概率越高
误差越大，概率越低



里程计运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$

○ 闭式求解

- (1) 将里程计数据 \mathbf{u}_{t-1} 表示为 $\delta = (\delta_{rot1}, \delta_{trans}, \delta_{rot2})^T$ ，作为测量控制值
- (2) 根据 $\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_t$ 计算机器人的实际运动变化量 $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_{rot1}, \hat{\delta}_{trans}, \hat{\delta}_{rot2})^T$ ，作为真实控制值
- (3) 根据真实值与测量值之间误差 $\tilde{\delta} = \delta - \hat{\delta}$ 的分布估计 \mathbf{x}_t 的分布

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) = p(\tilde{\delta}_{rot1}) \square p(\tilde{\delta}_{trans}) \square p(\tilde{\delta}_{rot2})$$



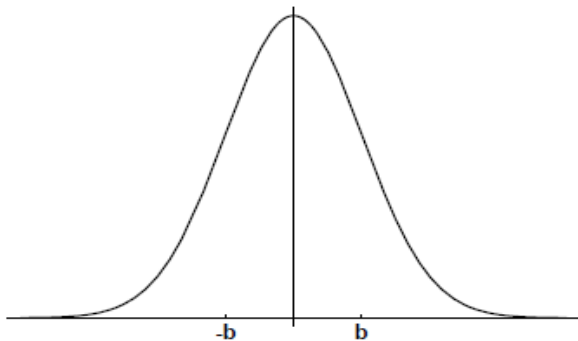
里程计运动模型中的误差模型

误差分布表示

$$p(\tilde{\delta}_{rot1}) = N(\tilde{\delta}_{rot1}; 0, \alpha_1 |\delta_{rot1}| + \alpha_2 |\delta_{trans}|)$$

$$p(\tilde{\delta}_{trans}) = N(\tilde{\delta}_{trans}; 0, \alpha_3 |\delta_{trans}| + \alpha_4 |\delta_{rot1} + \delta_{rot2}|)$$

$$p(\tilde{\delta}_{rot2}) = N(\tilde{\delta}_{rot2}; 0, \alpha_1 |\delta_{rot2}| + \alpha_2 |\delta_{trans}|)$$

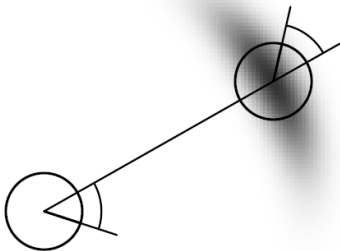


里程计运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$

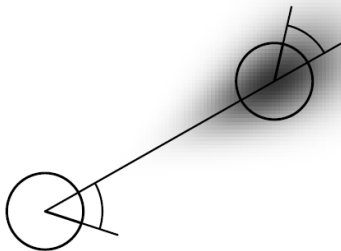
闭式求解

不同 α_i 参数下得到的 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$

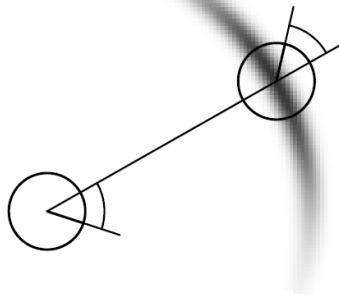
(a)



(b)



(c)



里程计运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$

随机采样求解

将噪声建模为高斯分布

- 在噪声的高斯分布中随机采样

$$\tilde{\delta}_{rot1} = \text{sample}(\alpha_1|\delta_{rot1}| + \alpha_2|\delta_{trans}|), \tilde{\delta}_{trans} = \dots, \tilde{\delta}_{rot2} = \dots$$

- 基于采样得到的噪声和测量得到的里程计值，构建机器人实际执行的控制指令

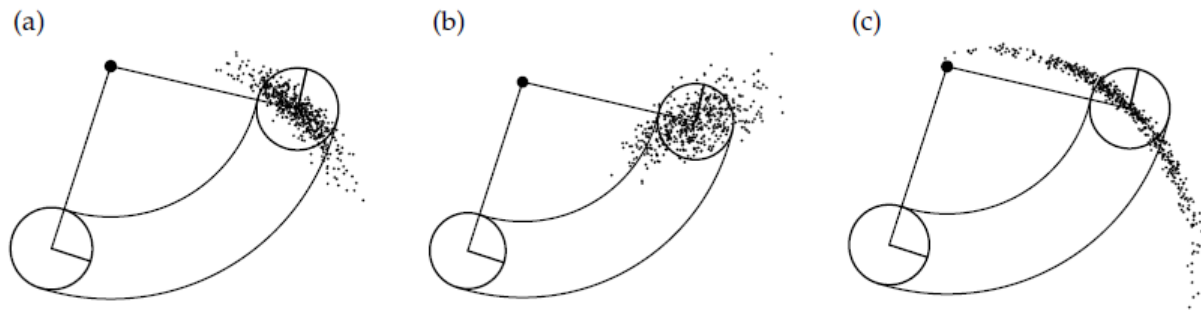
$$\hat{\delta}_{rot1} = \delta_{rot1} - \tilde{\delta}_{rot1}, \hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} - \tilde{\delta}_{trans}, \hat{\delta}_{rot2} = \delta_{rot2} - \tilde{\delta}_{rot2}$$

- 利用前述里程运动叠加模型计算 \mathbf{x}_t
- 重复上述过程，所得 \mathbf{x}_t 点集合构成对 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$ 的描述

里程计运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$

随机采样求解

不同 α_i 参数下得到的 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$



每个子图含500个样本



运动模型

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) = \eta p(\mathbf{m} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$



运动模型

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) = \eta p(\mathbf{m} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$



地图分为可通行和不可通行

本项作用：基于地图降低运动模型的不确定性

问题：需要融合两次位姿之间路径不被占用的可能性和机器人根据控制跟随该路径的可能性，计算非常复杂，难以计算闭式解

实际应用时，可以

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) \approx p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$$

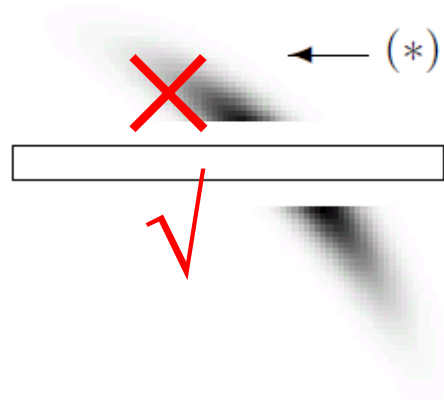
$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) \approx \eta p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{m})$$



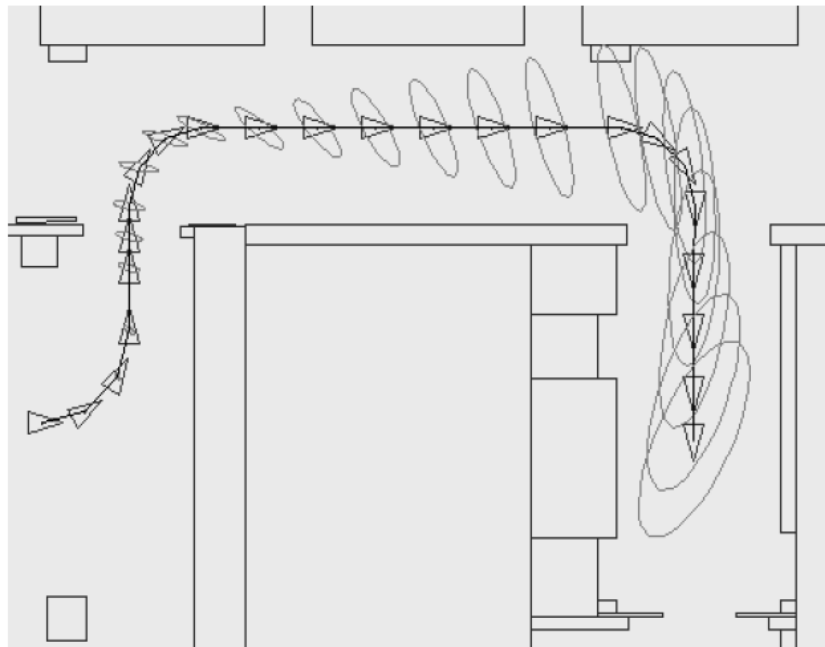
(a) $p(x_t \mid u_t, x_{t-1})$



(b) $p(x_t \mid u_t, x_{t-1}, m)$



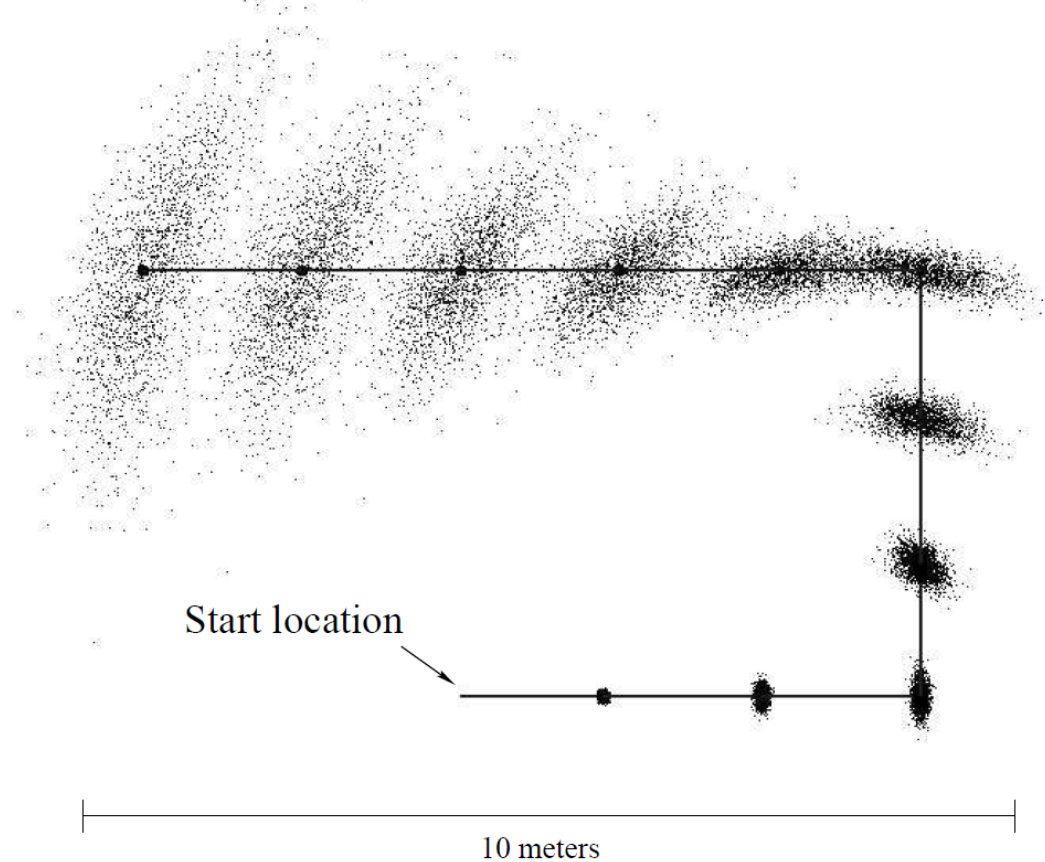
$$\int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1}$$



如果只考虑运动模型进行位姿估计，其不确定性（方差）会不断地无上限增大



二维，不确定性用样本分布表示



问题

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{v}{\omega} \sin(\theta) + \frac{v}{\omega} \sin(\theta + \omega \Delta t) \\ y + \frac{v}{\omega} \cos(\theta) - \frac{v}{\omega} \cos(\theta + \omega \Delta t) \\ \theta + \omega \Delta t \end{pmatrix}$$

速度控制航位推算的概率模型 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$ 如何计算？



速度运动模型

- 无噪声的理想速度运动模型

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{v}{\omega} \sin(\theta) + \frac{v}{\omega} \sin(\theta + \omega \Delta t) \\ y - \frac{v}{\omega} \cos(\theta) + \frac{v}{\omega} \cos(\theta + \omega \Delta t) \\ \theta + \omega \Delta t \end{pmatrix}$$



速度运动模型

- 实际运行中，存在控制执行误差、模型误差等

真实控制值=指令控制值+误差

$$\hat{v} = v + \tilde{v}, \hat{\omega} = \omega + \tilde{\omega}$$

实际的速度运动模型

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta) + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega}\Delta t) \\ y - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta) + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega}\Delta t) \\ \theta + \hat{\omega}\Delta t \end{pmatrix}$$

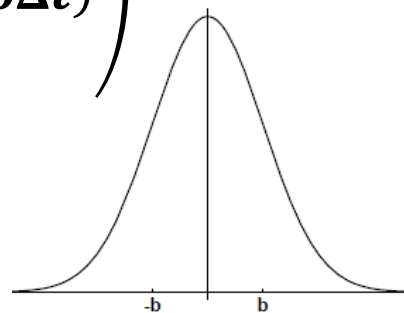


速度运动模型的概率分布

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) \quad \mathbf{u}_{t-1} = (v, \omega)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta) + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega} \Delta t) \\ y - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta) + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega} \Delta t) \\ \theta + \hat{\omega} \Delta t \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v} = \hat{v} - v, \tilde{\omega} = \hat{\omega} - \omega$$



\tilde{v} 的概率分布

速度运动模型的逆模型

- 考虑圆弧运动假设引起了**退化问题**（状态量三维，控制量二维），会导致应用贝叶斯估计状态中逆向求解时发生分歧，为此假设机器人到达末位姿后执行转动 $\hat{\gamma}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta) + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega}\Delta t) \\ x + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta) - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega}\Delta t) \\ \theta + \hat{\omega}\Delta t + \hat{\gamma}\Delta t \end{pmatrix}$$



速度运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$ 的闭式求解

○ 计算思路：根据控制值误差模型计算到达该位姿的概率

(1) 根据所评估状态 \mathbf{x}_t 和当前状态 \mathbf{x}_{t-1} 计算无噪声模型下的实际控制指令

$$\hat{\mathbf{u}}_{t-1} = (\hat{v}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}) \quad \text{采用前述运动模型的逆模型}$$

(2) 根据实际控制指令 $\hat{\mathbf{u}}_{t-1}$ 和发送控制指令 \mathbf{u}_{t-1} 之间误差分布估计 \mathbf{x}_t 的分布

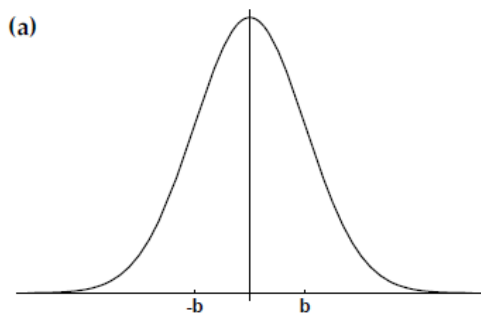
$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) = \varepsilon_{b_{\tilde{v}}}(\tilde{v}) \square \varepsilon_{b_{\tilde{\omega}}}(\tilde{\omega}) \square \varepsilon_{b_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma})$$

$$\tilde{v} = \hat{v} - v, \tilde{\omega} = \hat{\omega} - \omega, \tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$$

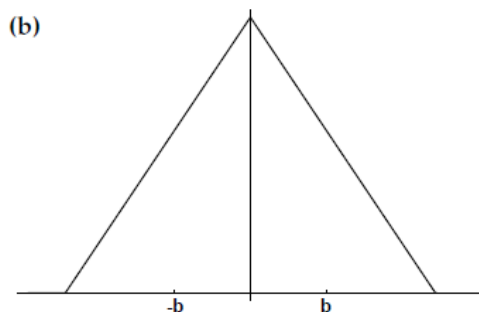


误差分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}) = \varepsilon_{b_{\tilde{v}}}(\tilde{v}) \square \varepsilon_{b_{\tilde{\omega}}}(\tilde{\omega}) \square \varepsilon_{b_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma})$

- 误差/噪声一般可以建模为均值为0，标准偏差为b的高斯分布或者三角分布



$$\varepsilon_b(x) = N(x; 0, b^2)$$



$$\varepsilon_b(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} [\text{rand}(-b, b) + \text{rand}(-b, b)]$$

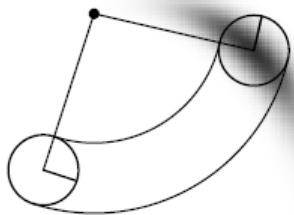
可以设 $b_{\tilde{v}} = \alpha_1 |v| + \alpha_2 |\omega|$, $b_{\tilde{\omega}} = \alpha_3 |v| + \alpha_4 |\omega|$, $b_{\tilde{\gamma}} = \alpha_5 |v| + \alpha_6 |\omega|$

使噪声分布方差与速度和角速度大小相关

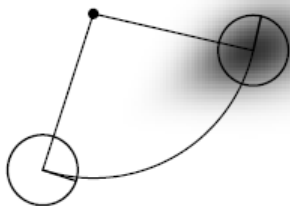
速度运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$ 的闭式求解

不同 α_i 参数下得到的 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$

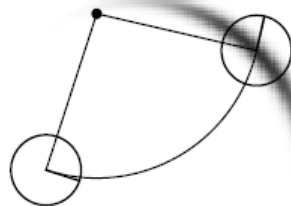
(a)



(b)



(c)

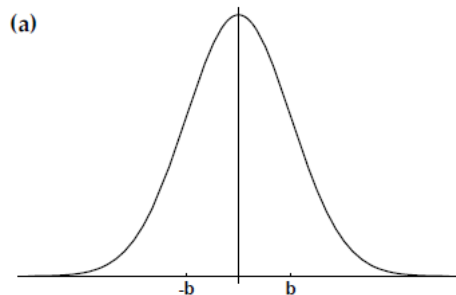


速度运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$ 的随机求解

将噪声建模为高斯分布

(1) 根据噪声的高斯分布随机采样噪声

$$\tilde{v} = \text{sample}(\alpha_1 |v| + \alpha_2 |\omega|), \tilde{\omega} = \square, \tilde{\gamma} = \square$$



(2) 基于采样得到的噪声和发送的控制指令，构建机器人实际执行控制指令

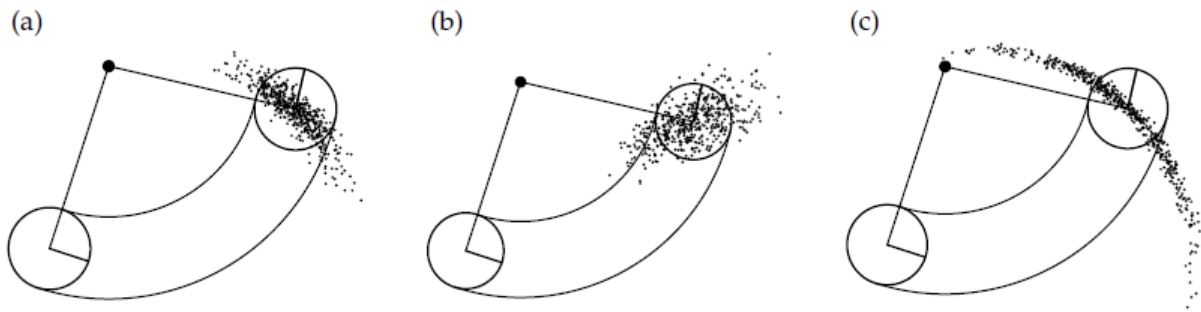
$$\hat{v} = v + \tilde{v}, \hat{\omega} = \omega + \tilde{\omega}, \hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$$

(3) 利用前述正向运动模型计算 \mathbf{x}_t

(4) 重复上述过程，所得 \mathbf{x}_t 点集合构成对 \mathbf{x}_t 的概率分布描述

速度运动模型的概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$ 的随机求解

不同 α_i 参数下得到的 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1})$



每个子图含500个样本

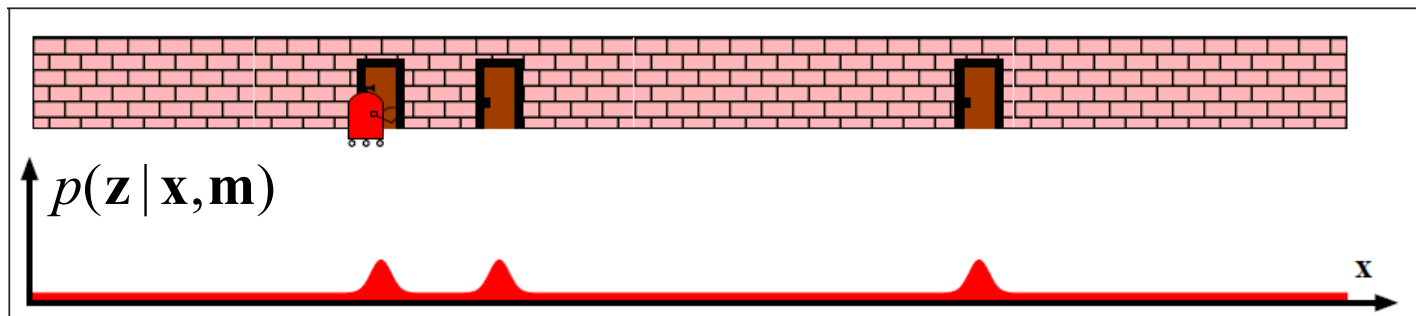




8.5 马尔可夫定位中的观测模型

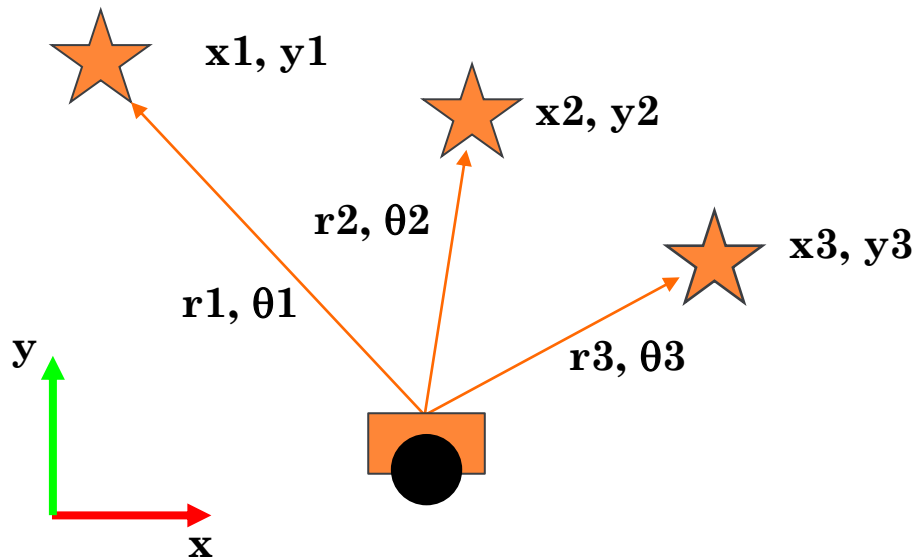
观测模型

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ = \eta \mathbf{p}(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1}$$



观测模型 $p(z_t | x_t, m)$

- 观测模型依赖于传感器模型（即观测随机变量在取值范围内的概率分布/概率密度），然后确定位姿空间上的概率



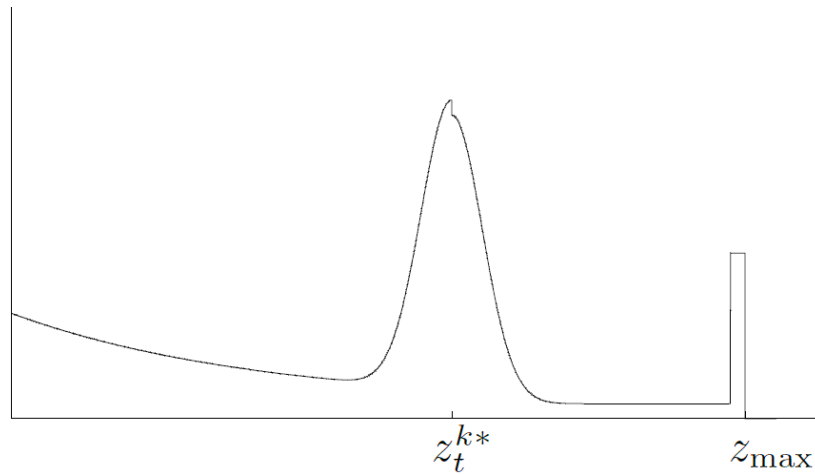
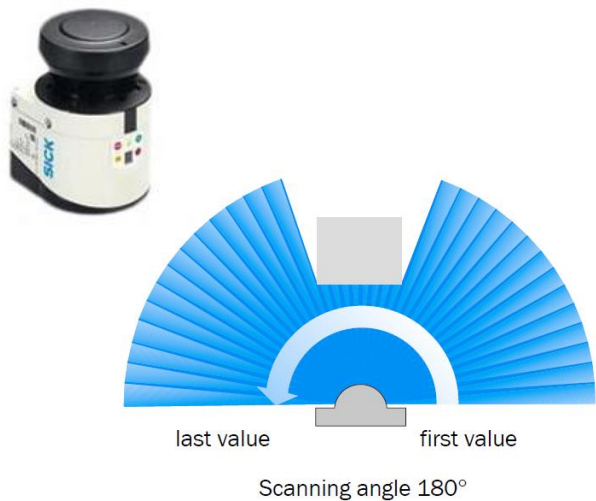
对于要评估的 x_t ，根据地图 m 和传感器模型，可以获得在 x_t 上获得的理想测量数据（真实值）

测量值=真实值+误差

可以对误差分布进行建模，根据误差概率获得在 x_t 观测到 z_t 的可能性

观测模型 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$

○ 激光传感器模型



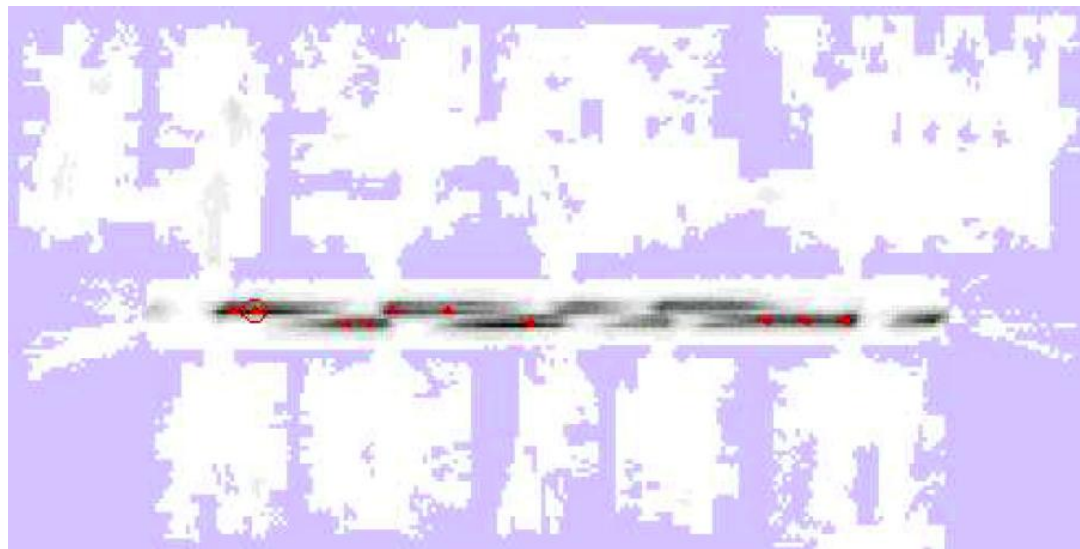
根据激光测量模型、 \mathbf{x}_t 和 \mathbf{m} ,
建立激光测量数据的概率分布

观测模型 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$

- 根据激光传感器模型计算得到观测模型



实际位姿与测量示意图



基于激光传感器模型得到的观测模型

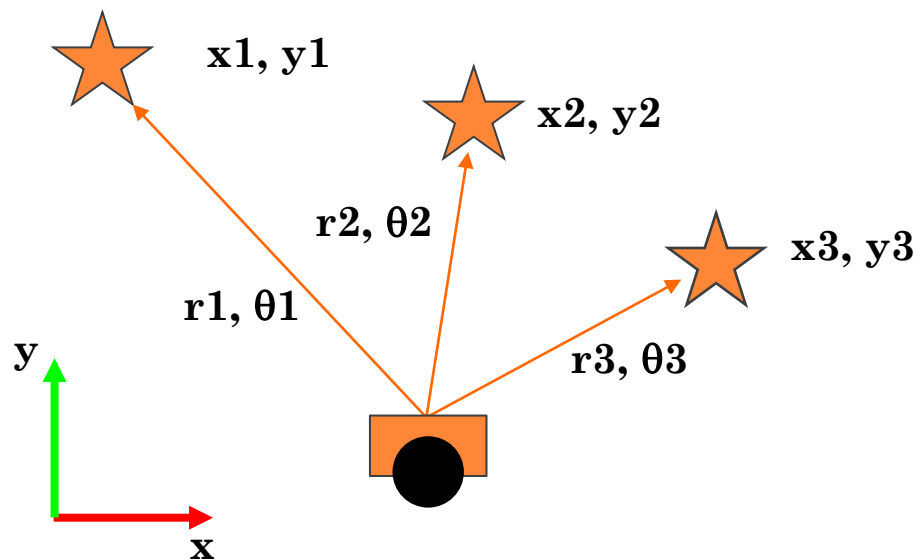
$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}^t, \mathbf{U}^{t-1}, \mathbf{m}) \\ = \eta \mathbf{p}(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Z}^{t-1}, \mathbf{U}^{t-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

- 本部分介绍

- 特征传感器模型和观测模型
- 基于物理建模的激光传感器模型
- 基于Likelihood Field的激光束模型

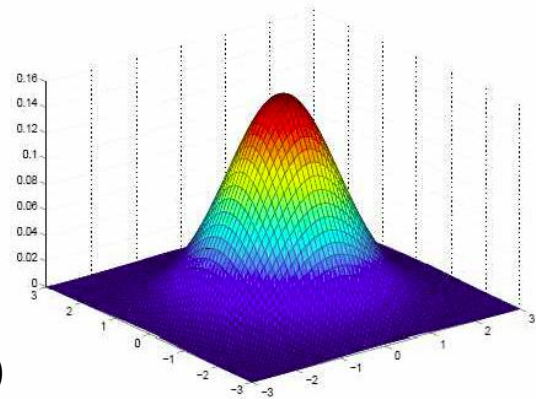


特征的传感器模型



测量值=真实值+误差

对误差分布进行建模，根据误差
概率获得在 x_t 观测到 z_t 的可能性



$$N(\tilde{\delta}; 0, \sigma^2)$$

特征的观测模型



特征地图表示

$$\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_N\}$$

\mathbf{m}_i 在地图中的坐标为

$$(m_{ix}, m_{iy})^T$$

t时刻的特征观测表示为 $\mathbf{z}_t = \{f_t^1, f_t^2, \dots, f_t^K\}$

$$f_t^i \triangleq (r_t^i, \varphi_t^i, s_t^i)^T$$

r_t^i : 特征与机器人之间的相对距离

φ_t^i : 特征与机器人之间的相对角度

s_t^i : 特征标识

特征的观测模型



假设特征观测条件独立

$$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = p(f_t^1, f_t^2, \dots, f_t^K | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \prod_{k=1}^K p(f_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$$



特征的观测模型 $p(f_t^i | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$

假设 f_t^i 对应的地图特征为 \mathbf{m}_j

将地图特征 \mathbf{m}_j 转换到机器人坐标系下即为观测特征真值

$$\hat{\mathbf{f}}_t^i = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{jx} - x)^2 + (m_{jy} - y)^2} \\ \arctan 2(m_{jy} - y, m_{jx} - x) - \theta \\ s_j \end{pmatrix}$$

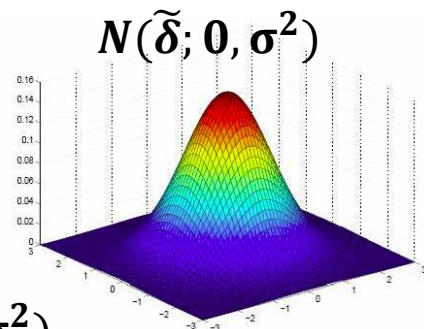
$$\mathbf{x}_t = (x, y, \theta)^T$$

测量值 = 真实值 + 误差

$$\mathbf{f}_t^i = \hat{\mathbf{f}}_t^i + \tilde{\delta}_f$$

根据观测误差模型，则

$$p(f_t^i | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = N(f_t^i; \hat{\mathbf{f}}_t^i, \sigma_f^2)$$



基于物理建模的激光传感器模型

- 是对激光测距仪的物理过程进行建模得到的传感器模型
- 由于激光传感器的每次测量都是独立地发射激光脉冲，所以只要为一次激光测量（激光束）建立模型即可

$$p(\mathbf{z}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \prod_{k=1}^K p(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$$

注意：仅在理想情况下，测量独立假设才成立
实际情况中，测量会因为以下因素而存在关联：

- 移动的人，使得多次测量的数据是关联的
- 概率模型的不准确，后验概率近似分布误差



基于物理建模的激光束模型

- 一次激光测量的可能机制：正确测量（带有小测量噪声）、临时障碍、未检测到物体、随机误差

$$p(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \alpha_{hit} p_{hit}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) + \alpha_{short} p_{short}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \\ + \alpha_{max} p_{max}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) + \alpha_{rand} p_{rand}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$$

hit: 带少量噪声的正确测量

short: 临时障碍的测量

max: 达到最大距离的测量

rand: 随机错误测量

$$\alpha_{hit} + \alpha_{short} + \alpha_{max} + \alpha_{rand} = 1$$



基于物理建模的激光束模型

- 一次激光测量的可能机制：正确测量（带有小测量噪声）、临时障碍、未检测到物体、随机误差

$$p(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \alpha_{hit} p_{hit}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) + \alpha_{short} p_{short}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \\ + \alpha_{max} p_{max}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) + \alpha_{rand} p_{rand}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$$

$$p(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \sum_c p(z_t^k, c | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \sum_c p(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}, c) p(c | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$$

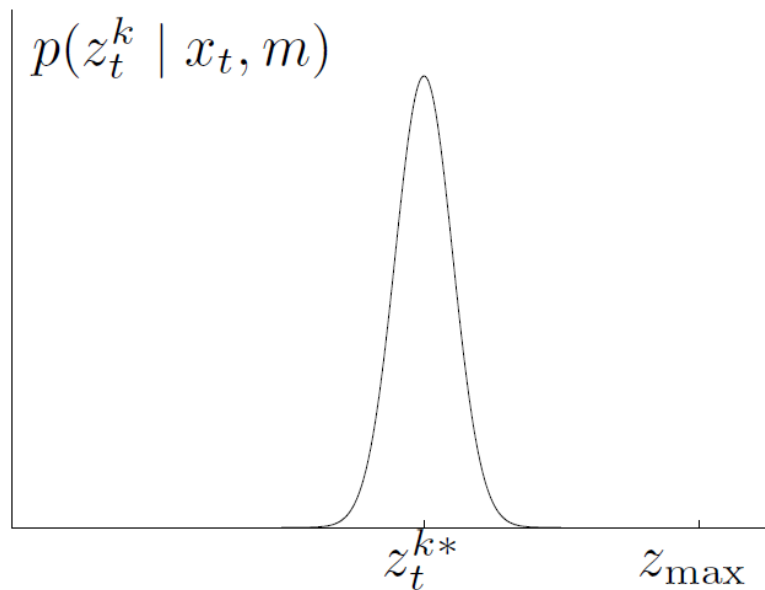
$$c \in \{hit, short, max, rand\}$$

$$= \sum_c p(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}, \alpha) p(c)$$

$$p(c) = \alpha_{hit} \text{ 或 } \alpha_{short} \text{ 或 } \alpha_{max} \text{ 或 } \alpha_{rand}$$

带少量噪声的正确测量数据的概率模型

- 可以被建模为真实距离的高斯分布，其中真实距离可以通过光线追踪算法获得



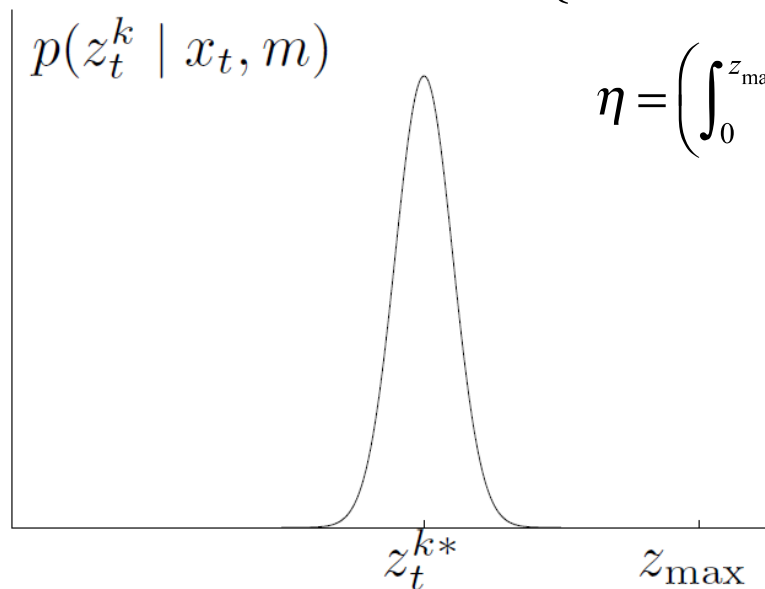
z_t^{k*} 通过光线追踪算法获得的真实距离

z_{\max} 最大测量距离



带少量噪声的正确测量数据的概率模型

$$p_{hit}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \begin{cases} \eta N(z_t^k; z_t^{k*}, \sigma_{hit}^2) & 0 \leq z_t^k \leq z_{\max} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



$$\eta = \left(\int_0^{z_{\max}} N(z_t^k; z_t^{k*}, \sigma_{hit}^2) dz_t^k \right)^{-1}$$

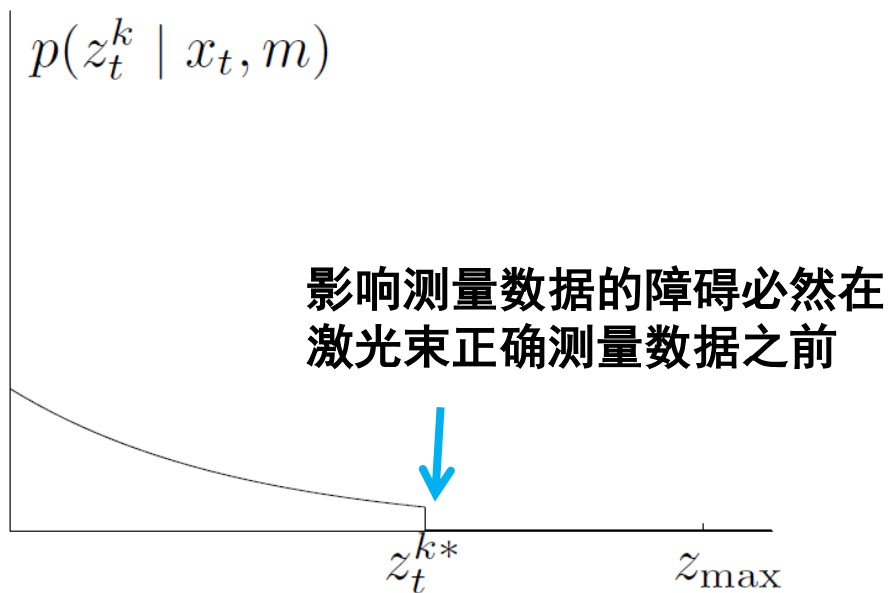
z_t^{k*} 通过光线追踪算法获得的真实距离

z_{\max} 最大测量距离



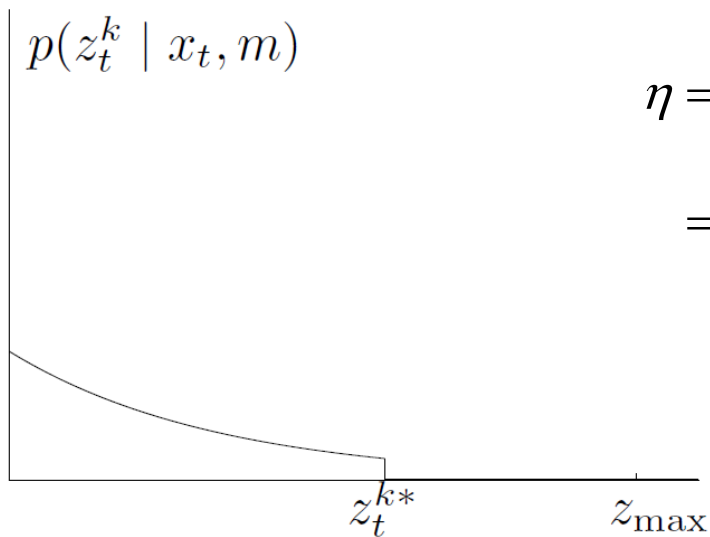
临时障碍的测量数据的概率模型

- 临时障碍往往导致测距仪得到非常短的数据，且随着距离的增大概率降低，因此可以建模为**截断的指数分布**



临时障碍的测量数据的概率模型

$$p_{short}(z_t^k | x_t, m) = \begin{cases} \eta \lambda_{short} e^{-\lambda_{short} z_t^k} & 0 \leq z_t^k \leq z_t^{k*} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



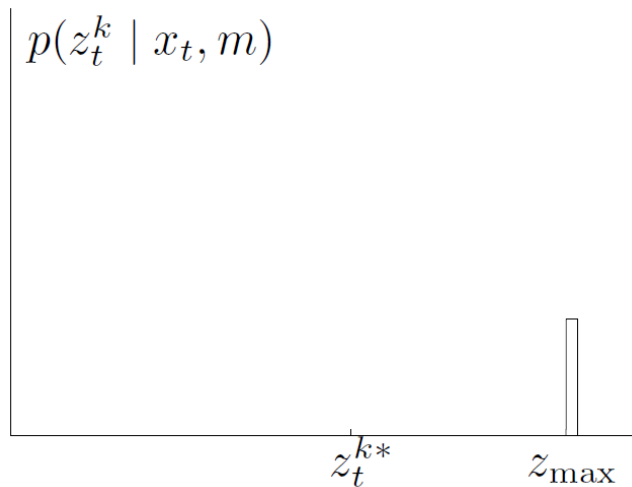
$$\begin{aligned} \eta &= \left(\int_0^{z_t^{k*}} \lambda_{short} e^{-\lambda_{short} z_t^k} dz_t^k \right)^{-1} \\ &= (1 - e^{-\lambda_{short} z_t^{k*}})^{-1} \end{aligned}$$



达到最大距离的测量数据的概率模型

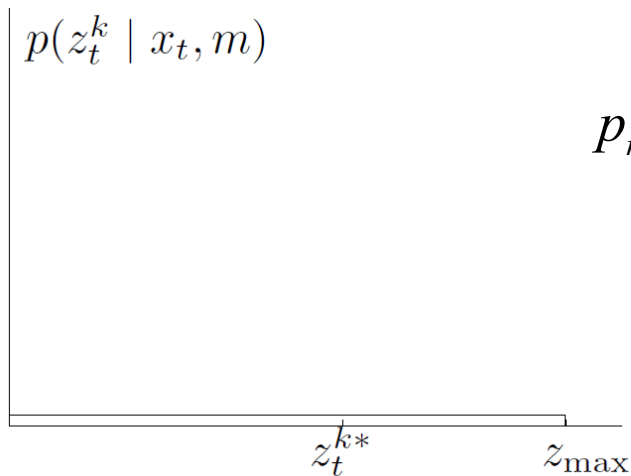
- 需要建模为一个伪概率分布，因为其数据只存在于一个值

$$p_{\max}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \begin{cases} 1 & z_t^k = z_{\max} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



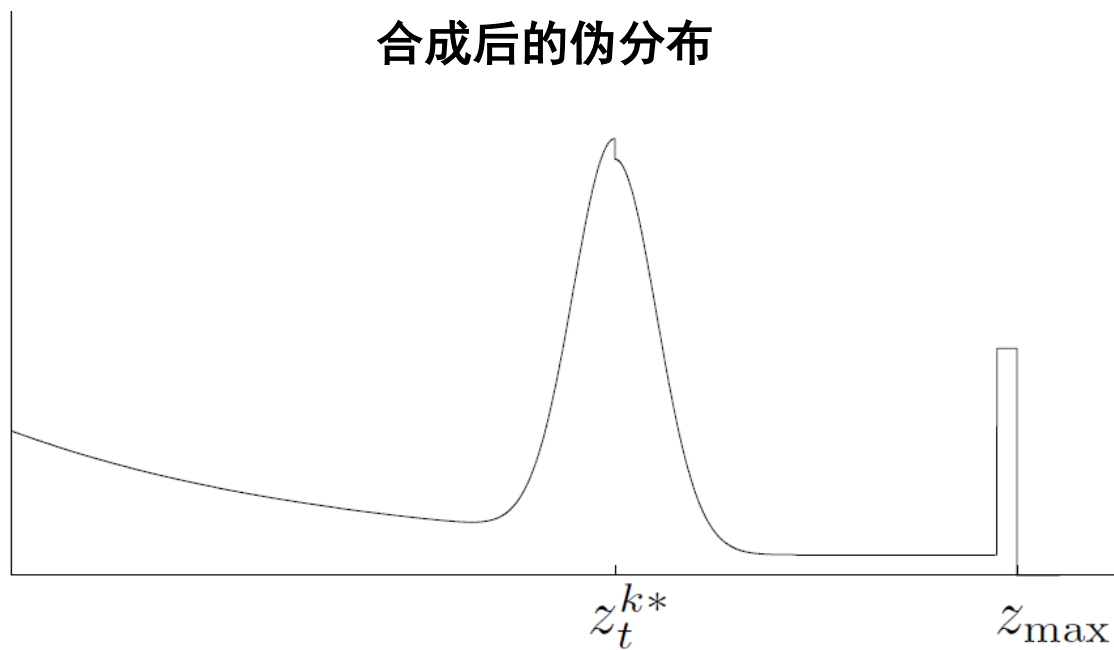
随机错误测量数据的概率模型

- 可以建模为均匀分布，因为错误测量主要来自反射或串扰等传播问题，其机理建模较为复杂



$$p_{rand}(z_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = \begin{cases} 1 / z_{\max} & 0 \leq z_t < z_{\max} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

基于物理建模的激光束模型



激光束模型参数确定

○ 模型中需要确定的参数

- 概率分布本身的参数 $\sigma_{hit}^2, \lambda_{short}$
- 四种数据模型混合的权值 $\alpha_{hit}, \alpha_{short}, \alpha_{max}, \alpha_{rand}$

○ 参数确定方法

- 正常环境下，确定机器人的位置，给定一个与机器人距离已知的目标，然后利用激光测距仪测量目标，得到测量值，反复多次，得到大量数据样本
- 根据样本，基于最大化样本集概率分布的思想，进行统计和学习

激光束模型参数确定：数学描述

最大化 $p(Z | \mathbf{X}, \mathbf{m}, \Theta)$

$\Theta = \{\sigma_{hit}^2, \lambda_{short}, \alpha_{hit}, \alpha_{short}, \alpha_{max}, \alpha_{rand}\}$ 为待估计参数

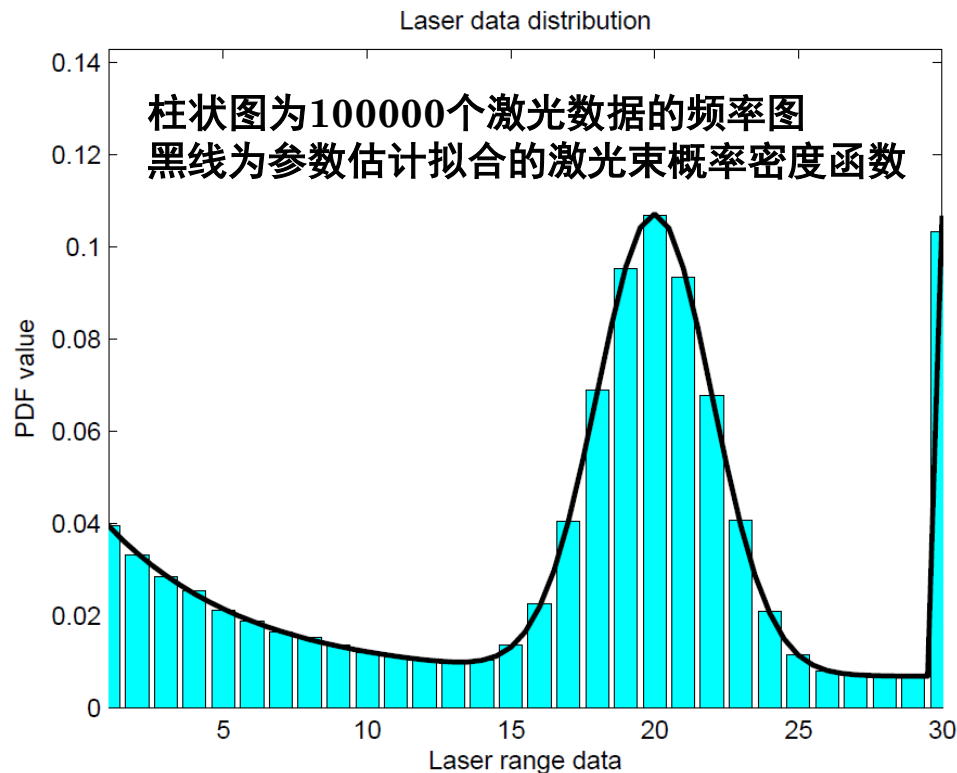
$Z = \{z_i\}$ 为采集到的激光束样本集合

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$ 为对应的观测位姿集合

\mathbf{m} 为地图



基于物理建模的激光束模型



利用学习得到的激光束模型计算观测可能性



对地图中的每一个 \mathbf{x}_t 计算其观测可能性 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$



利用学习得到的激光束模型计算观测可能性



每个位置的角度取最大可能角度，黑色表示可能性高



基于物理建模的激光束模型

○ 优点：

- 物理意义非常明确
- 对地图形式无要求

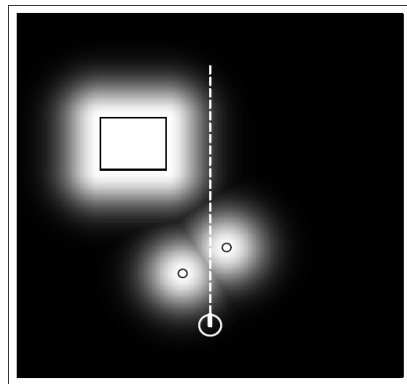
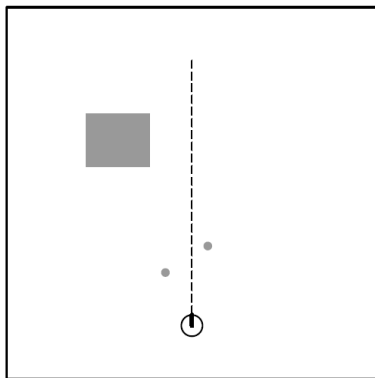
○ 缺点：

- 计算耗时：光线追踪算法耗时较大
- 光滑性差：当地图中有很多小障碍物时，概率分布连续性很差，使得定位算法难以收敛



基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型

- 基本思想：
 - 把激光束末端投影于地图中
 - 根据激光束末端投影与地图中最近物体之间距离建模
 - 为减少在线计算量，根据地图离线构建Likelihood Field图



基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型

○ 概率描述：

$$\begin{aligned} p(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) &= \alpha_{hit} p_{hit}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \\ &\quad + \alpha_{max} p_{max}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \\ &\quad + \alpha_{rand} p_{rand}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) \end{aligned}$$

z_t^k 一次激光测量的数据

因无法考虑临时障碍物，所以取消 $p_{short}(z_t^k \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$



基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型

末端投影距离建模 $p_{hit}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$

记 z_t^k 末端在地图中的坐标为 $(x_{z_t^k}, y_{z_t^k})^T$

寻找地图中与该坐标最近的物体，计算两者间距

$$dist = \arg \min \left\{ \sqrt{(m_x - x_{z_t^k})^2 + (m_y - y_{z_t^k})^2} \right. \\ \left. | (m_x, m_y) \text{ is occupied in map} \right\}$$

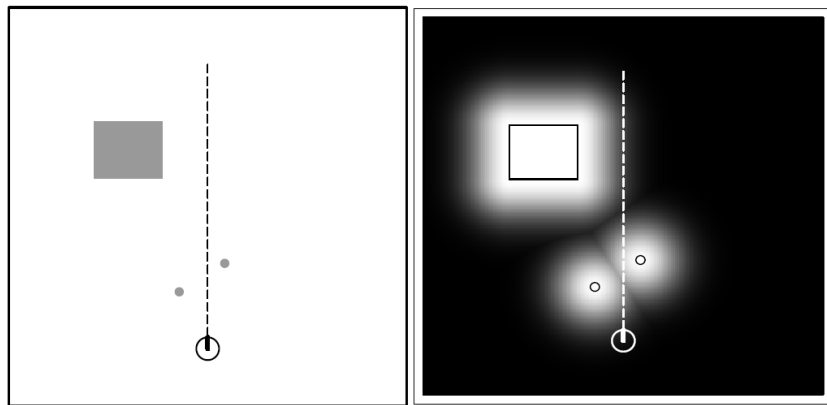
$$p_{hit}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m}) = N(dist; 0, \sigma^2)$$



基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型

可以离线建立likelihood field来得到 $p_{hit}(z_t^k | \mathbf{x}_t, \mathbf{m})$

Likelihood field 表示激光束末端落在该位置可能性的概率分布

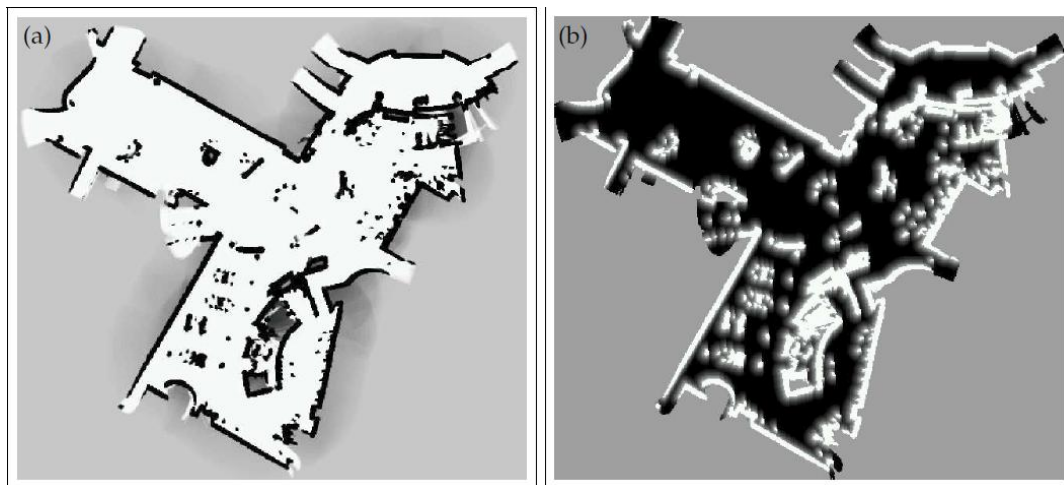


白色表可能性高

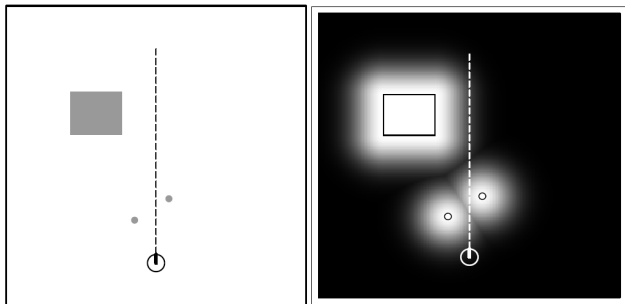


基于栅格地图的LIKELIHOOD FIELD建立

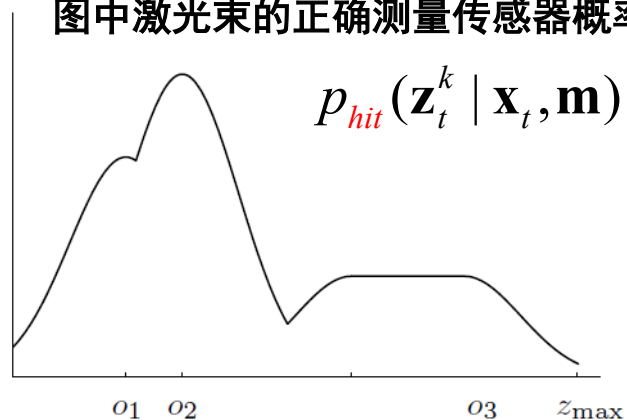
对于栅格地图中的每一个未占用栅格，搜索距离最近的占用栅格，计算高斯分布下的概率赋给该未占用栅格，最后给未知栅格赋值 $1 / z_{\max}$



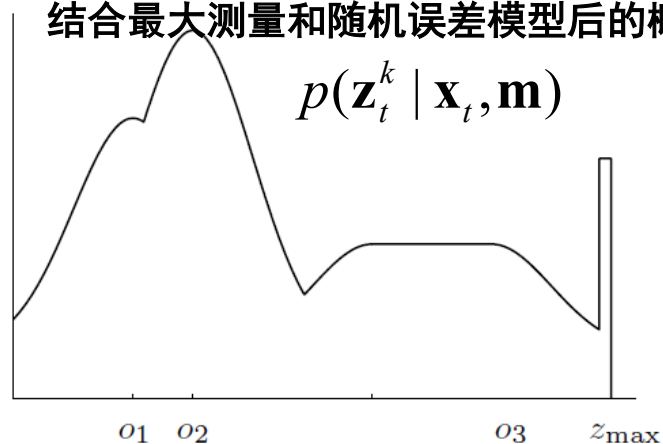
基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型



图中激光束的正确测量传感器概率分布



结合最大测量和随机误差模型后的概率分布



基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型

○ 优点：

- 在线计算量小
- 平滑性好，可确保算法收敛

○ 缺点：

- 没有明确的物理意义
- 无法建模人等临时动态障碍造成的错误测量，适用于人流较少时的实际应用

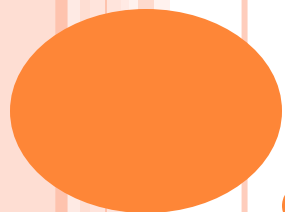


基于LIKELIHOOD FIELD的激光束模型

○ 与基于物体建模的激光束模型的区别

- 基于物理建模的激光束模型的高斯分布是在**激光束方向**上，隐含的假设是物体的不确定性只存在于激光束方向上，满足激光束测量的物理意义，但造成平滑性非常差；
- 基于Likelihood Field的激光束模型的高斯分布是在**障碍物周围**，即假设障碍物的不确定性遍布它的四周，更符合实际情况





END



练习

- (1) 写出由本质矩阵 E 求解旋转矩阵 R 和平移向量 t 的推导过程
- (2) 单目视觉里程计中当对应特征点数量大于8时，写出使用RANSAC方法的基本原理与步骤

