



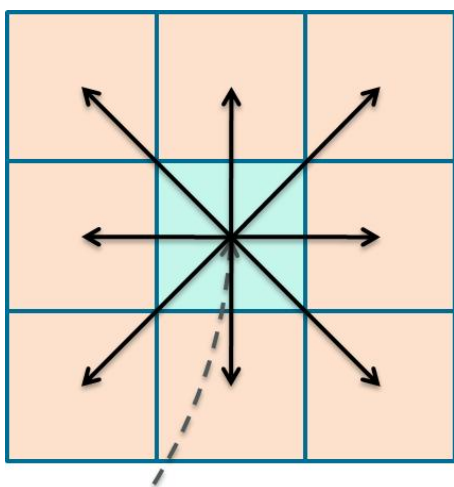
导航规划融合优化

李硕

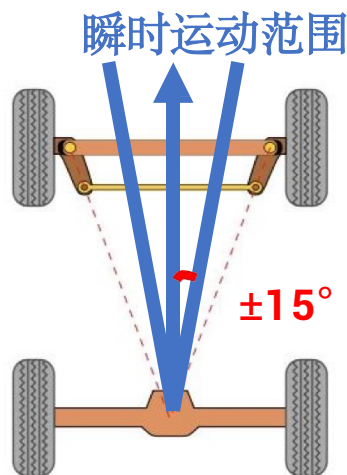
浙江大学 控制科学与工程学院

传统导航规划存在问题

1. 在路径规划中不考虑机器人的运动学约束，导致轨迹规划不能跟踪实现所有路径



(a) regular A*



随机生成的路径规划点对中大概只有8.3%可以被正常执行

传统导航规划存在问题

1. 在路径规划中不考虑机器人的运动学约束，导致轨迹规划不能跟踪实现所有路径
2. 如果实时避障偏离路径，避障规划和轨迹控制器没有如何到达目标的全局信息



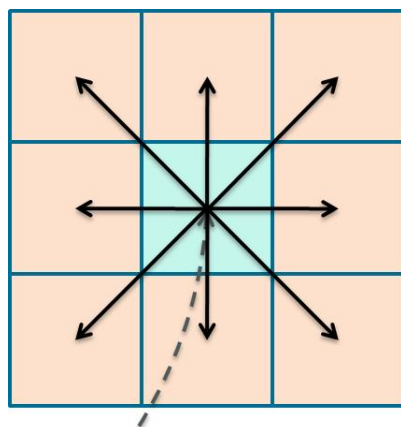
导航规划优化方法

- 混合A*：在路径规划中考虑机器人的运动学约束
- 弹性带算法：将全局规划和局部规划有效融合
- TEB：带有时间的弹性带算法，融合轨迹生成

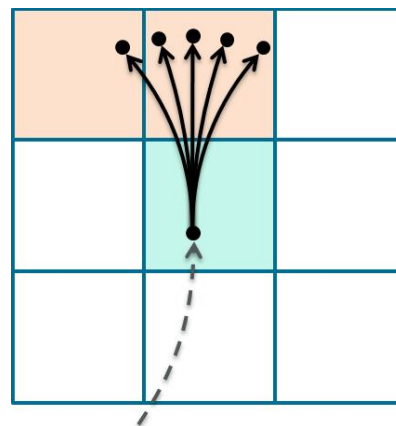


1. 混合A*

- 提出于2004年，针对固定翼飞行器在三维空间中的运动学约束
- 2005年被Stanford大学应用于DARPA无人驾驶挑战赛
- 基本思想：设置一组运动基元来确定可达状态并构建搜索树



(a) regular A*

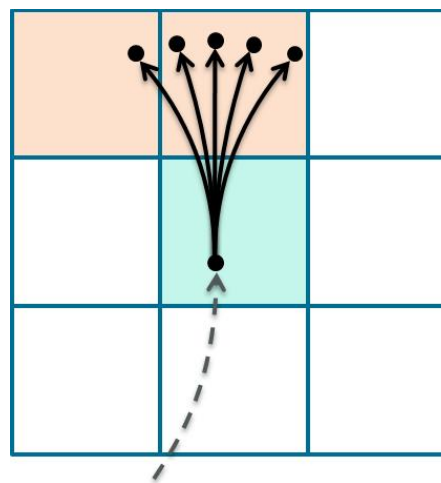


(b) Hybrid A*

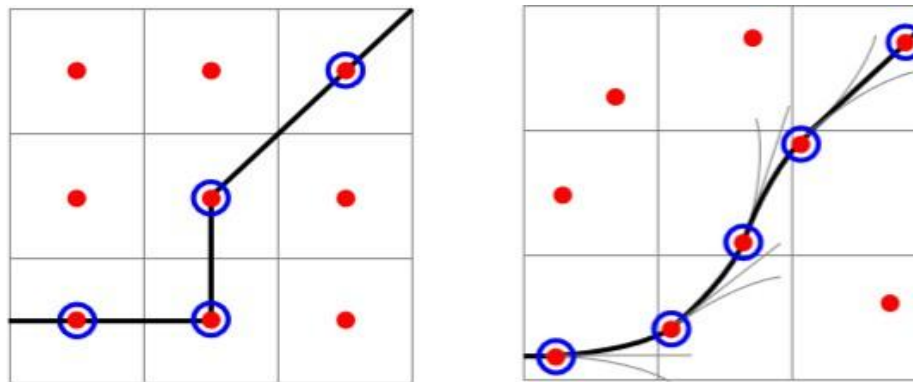


运动基元

- 指机器人一个时间片内能够实现的平移和旋转运动，受机器人的最大加速度和最大速度的约束，同时要求满足以下条件
 - 路径距离要足够离开当前网格
 - 路径曲率受最大转向角约束
 - 朝向变化是离散转角步长的倍数



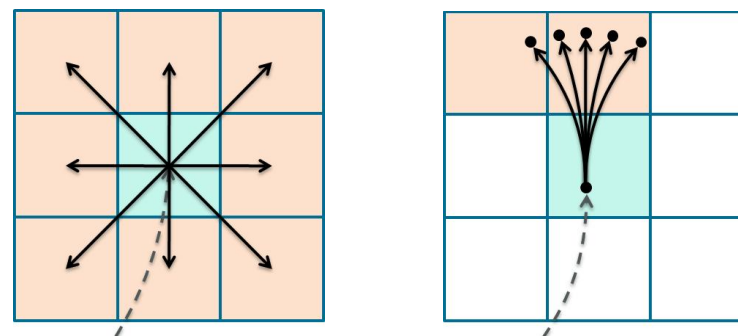
1. 混合A*



传统A*得到的是直线段组成的路径

混合A*得到的路径等同于轨迹，确保了机器人运动的平滑性和可实现性

混合A*与A*的区别



	A*	混合A*
机器人状态表示	位置(x, y)	位姿(x, y, θ)
	离散	连续
扩张搜索策略	相邻节点 每个相邻栅格是一个搜索节点	预定义运动基元 同一栅格可存在多个搜索节点

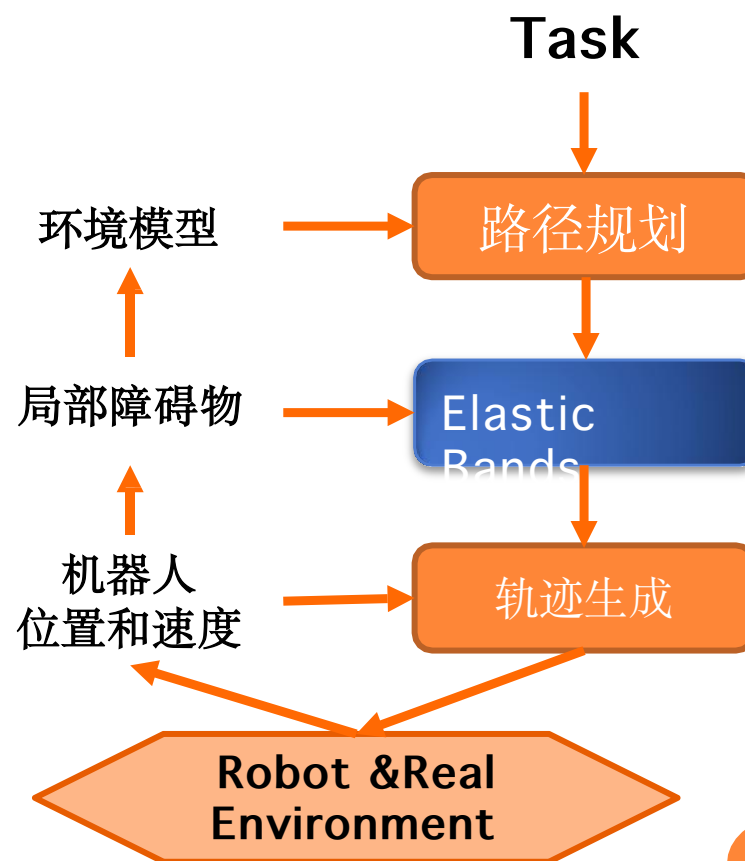
2.弹性带算法 (ELASTIC BAND)

于1993年由斯坦福大学机器人学家

Oussama Khatib提出

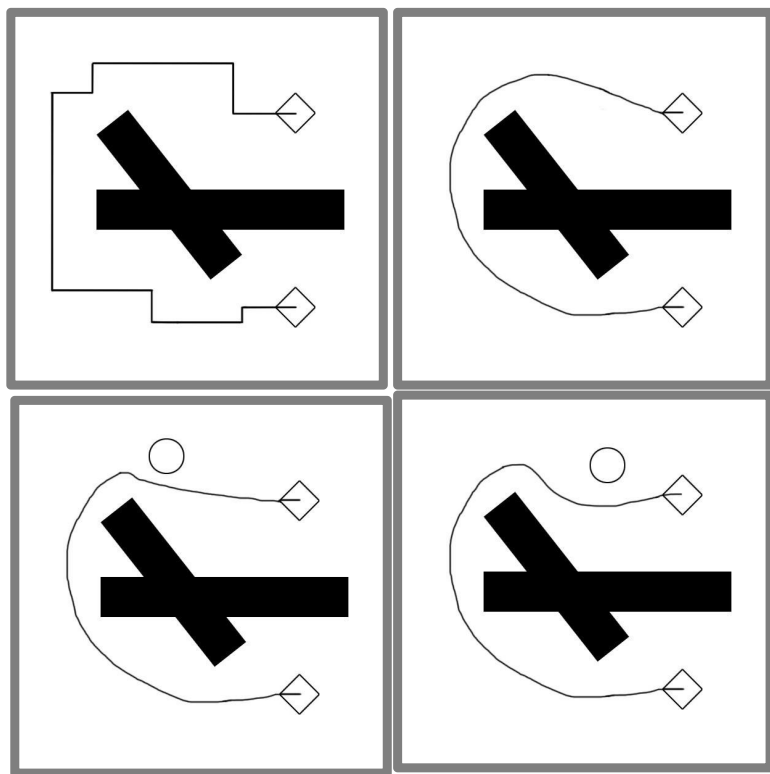
- 基本思想：根据环境感知对所规划路径进行实时变形，同时实现局部避障和路径平滑

在执行局部避障的同时维护着一条完整的到达目标点的无碰路径



2.弹性带算法 (ELASTIC BAND)

○ 借鉴了弹性带这一弹性体里力的概念，对路径上的点施加两个力

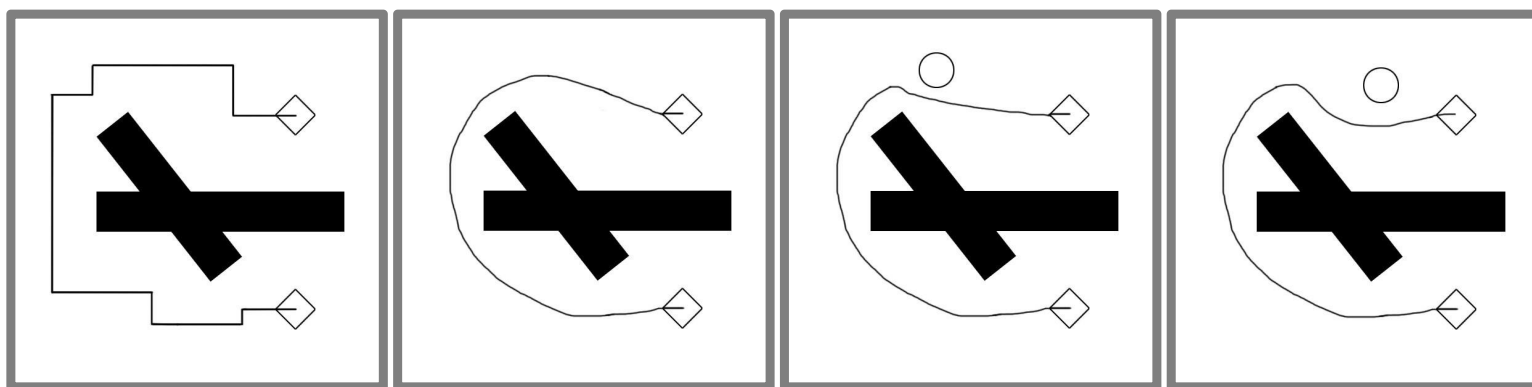


- 内部收缩力：用于模拟拉伸弹性带中的张力并消除路径中的松弛
- 外部排斥力：用于模拟障碍物排斥，抵消张力并拉开机器人与障碍物之间的距离

两种力使弹性带变形直至达到平衡
动态障碍物会改变力重新达成平衡

算法实现需要解决的问题

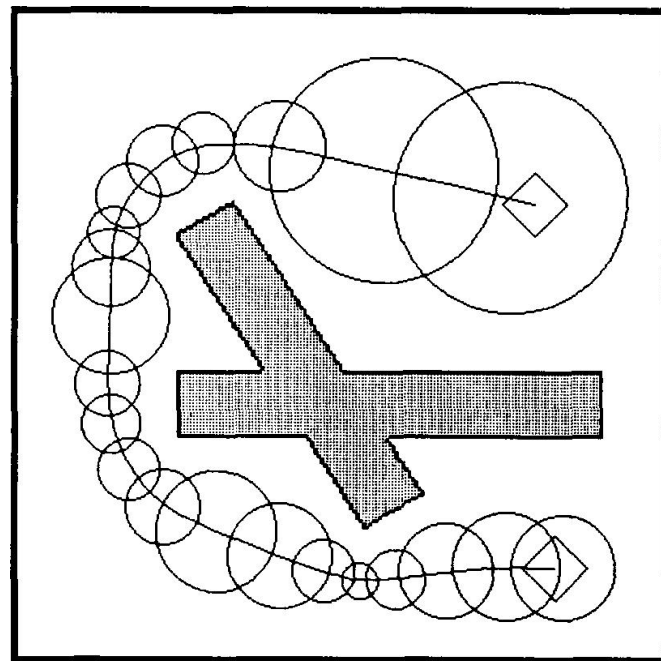
- 路径为一系列离散点表示，弹性带算法必须根据这些点生成一条连续的曲线。
- 所生成的连续曲线必须是安全无碰的，而曲线无碰检测是一件耗时的工作。



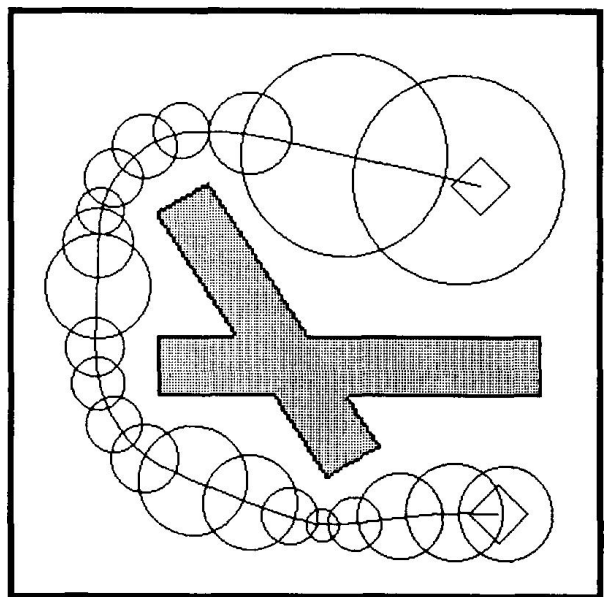
解决方案：气泡(BUBBLE)

- 每一个气泡是自由空间的一个子集，以路径点为中心，以该路径点与最近障碍物之间的安全距离为半径
- 路径表示为一系列路径点和由路径点长成的气泡，只要相邻气泡有一定的相互覆盖，就能确保该路径是安全的

采用气泡集合来近似表示规划路径附近的自由空间，而不是计算表达整个自由空间



气泡的数学描述



在姿态空间**b**点处的气泡为

$$B(b) = \{q | \|b - q\|_2 < \rho(b)\}$$

$\rho(b)$ 为计算机器人在**b**点处与环境中障碍物之间最小安全距离的函数

如果考虑机器人旋转

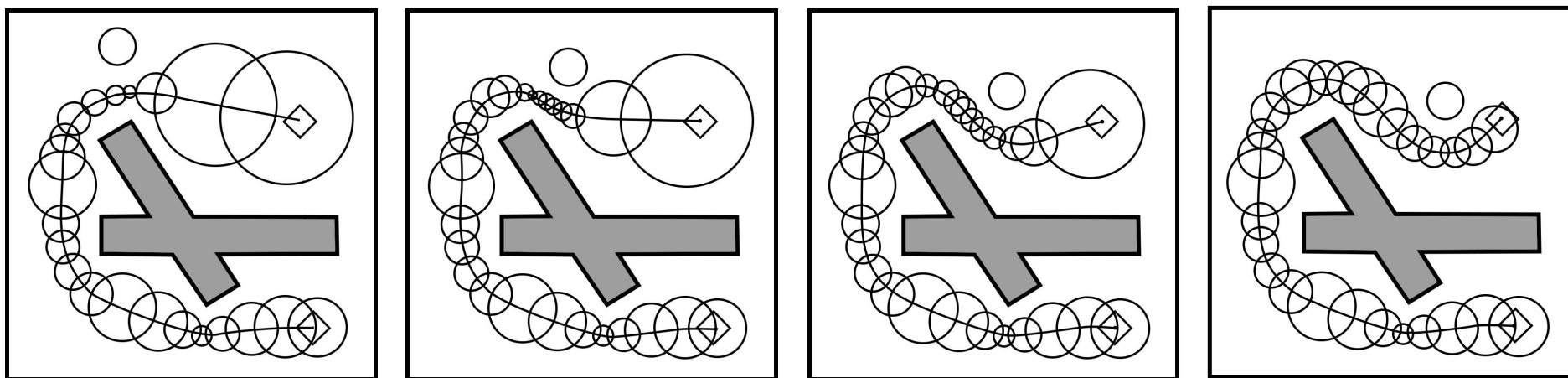
$$B(b) = \{q : D(b - q) < \rho(b)\}$$

$$D(\Delta b) = \sqrt{\Delta b_x^2 + \Delta b_y^2} + r \quad \left| \frac{\Delta b}{\theta} \right|_{\max}$$

也可用复杂模型表示气泡，需要在计算效率和表示个数上进行折中考虑

基于气泡的动态避障和路径平滑

- 根据前述定义生成用气泡表示的路径
- 基于相邻气泡点有收缩力、障碍物有排斥力的思想，依次来回扫描并移动各个气泡，根据虚拟力计算每个气泡的移动距离和方向
- 为了确保弹性带构成的路径安全无碰，要求每个气泡与它两边的相邻气泡有重叠区域，需根据需要增加新气泡或删除多余气泡



虚拟力计算

收缩力/吸引力

$$f_c = k_c \left(\frac{b_{i-1} - b_i}{\|b_{i-1} - b_i\|_2} + \frac{b_{i+1} - b_i}{\|b_{i+1} - b_i\|_2} \right) \quad k_c \text{ 为全局收缩系数}$$

排斥力，沿着气泡尺寸变化最大方向

$$f_r = \begin{cases} k_r(\rho_0 - \rho) \frac{\partial \rho}{\partial b} & \rho < \rho_0 \\ 0 & \rho \geq \rho_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} k_r \text{ 为全局排斥系数} \\ \rho_0 \text{ 是力作用距离阈值} \end{array}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial b} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} \rho(b - hx) - \rho(b + hx) \\ \rho(b - hy) - \rho(b + hy) \end{bmatrix} \quad h \text{ 为步长}$$



气泡位置更新

根据合力调整位置，气泡沿着力的方向移动

$$\mathbf{b}_{new} = \mathbf{b}_{old} + \alpha \mathbf{f}_{total}$$

α 为比例系数，可以取值为 $\rho(\mathbf{b}_{old})$ ，表示移动距离和原气泡尺寸成比例

该更新方程是通过下坡梯度搜索方式来寻找弹性带的平衡点，收敛缓慢
可以采用其他方法加快收敛，例如增加惯性项模拟二阶控制系统

气泡的插入与删除

- 确保路径连续安全，增加新气泡：如果新位置的气泡没有与相邻气泡重叠，那么弹性带就会断裂，需要在现有气泡之间插入一个新的气泡来重新连接
- 降低计算复杂度，删除多余气泡：通过扫描气泡序列，检查气泡邻接部分是否相互重叠，是否可以在不破坏弹性带的情况下将气泡移除，可以完成对冗余气泡的删除
- 针对新气泡插入和多余气泡去除造成的震荡问题，考虑修正虚拟力计算

$$f^* = f - \frac{f(b_{i-1} - b_{i+1})(b_{i-1} - b_{i+1})}{\|b_{i-1} - b_{i+1}\|^2} \quad \text{去除切向分量}$$

2.弹性带算法 (ELASTIC BAND)

○ 优点:

- 可实现路径平滑，解决路径存在方向突变问题，便于机器人执行
- 可避免避障后偏离原路径而失去到达目标点的全局信息

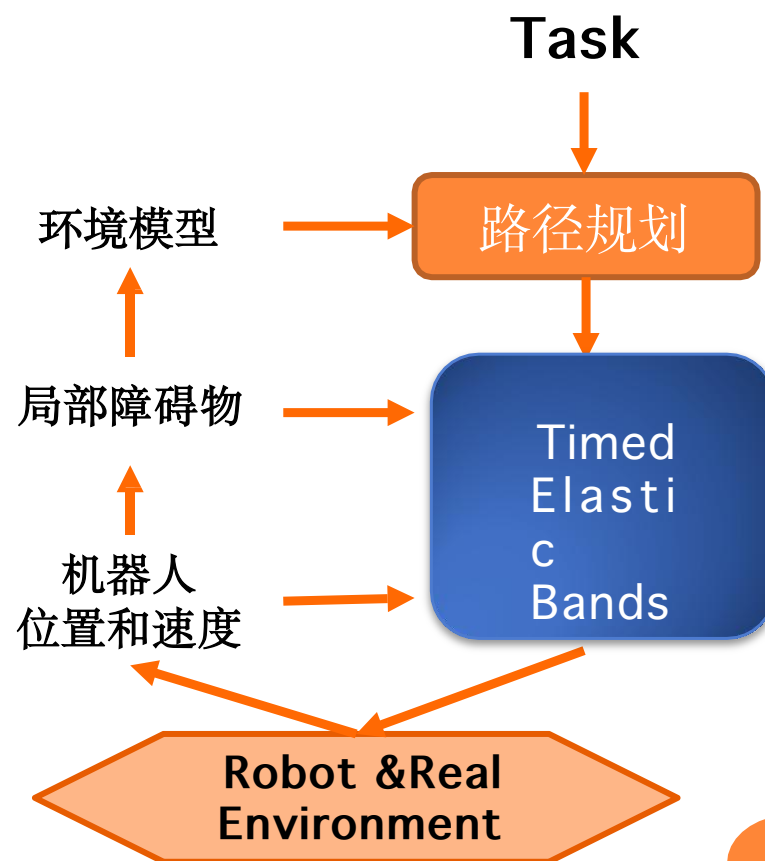
○ 存在问题:

- 如果环境中的变化很大，弹性带即使存在，也可能无法变形为无碰撞路径
- 本质上还是几何空间内的路径规划，是对路径规划和避障规划的融合，并没有考虑机器人执行时的任何运动学约束



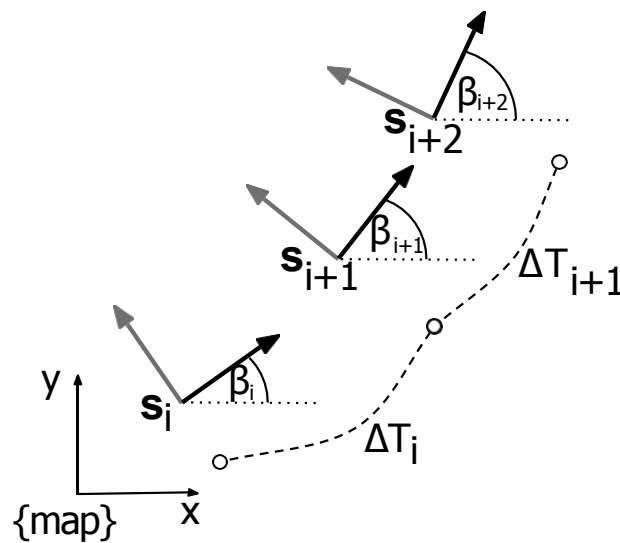
3. TEB (TIMED ELASTIC BAND)

- 2012年德国西门子研究人员 Christoph Rösmann等提出
- 增加时间信息，将路径转化为轨迹
- 综合考虑机器人运动学和动力学约束，通过加权多目标优化对轨迹进行变形



3. TEB (TIMED ELASTIC BAND)

- 关键思想：在路径的相邻位姿之间增加时间间隔



路径位姿序列

$$Q = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0,\dots,n}$$

$$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, \theta_i)$$

时间间隔序列

$$\tau = \{\Delta T_i\}_{i=0,\dots,n-1}$$

$$B = (Q, \tau)$$

3. TEB (TIMED ELASTIC BAND)

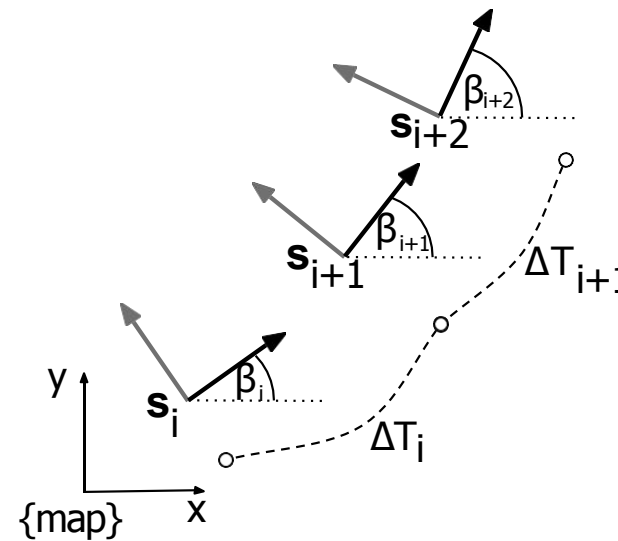
- 问题：同时对轨迹的位姿和时间间隔进行调整和优化，实现多目标优化

最优解 $B^* = \operatorname{argmin}_B f(B)$

目标函数 $f(B) = \sum_k \gamma_k f_k(B)$

目标类型：

- 路径最短或时间最快
- 运动学动力学约束
- 远离障碍物目标



目标函数1: 时间最短

$$f_k = \left(\sum_{i=1}^n \Delta T_i \right)^2$$



把约束转化为目标

- 采用罚函数形式表示

约束: $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}_r$

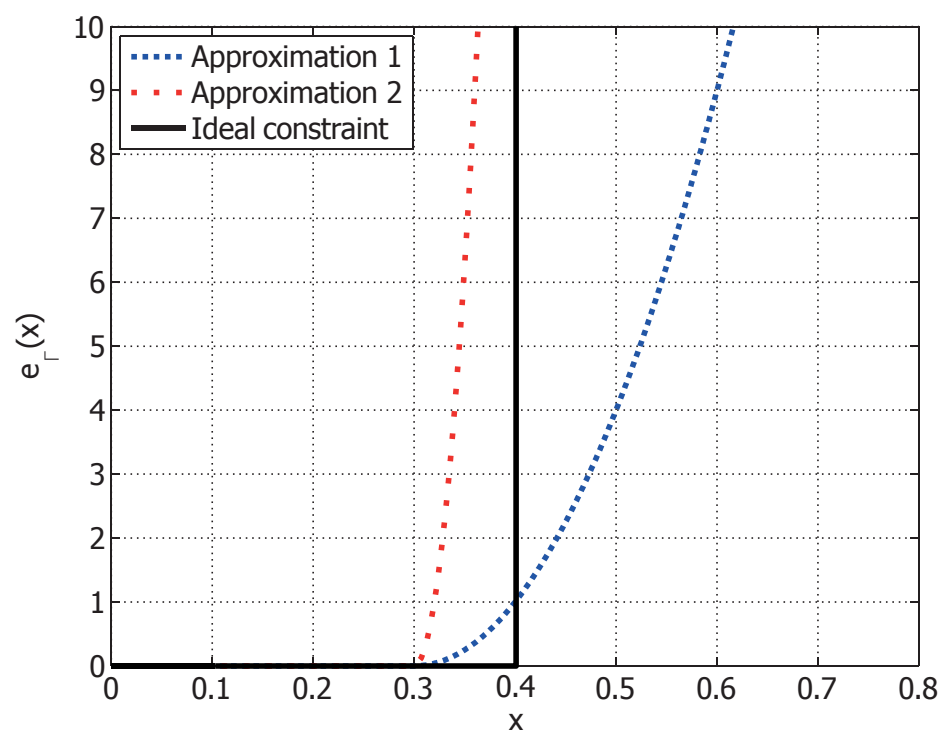
$$e_{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \epsilon, S, n) \cong \begin{cases} T\left(\frac{\mathbf{x} - (\mathbf{x}_r - \epsilon)}{S}\right)^n & \text{if } \mathbf{x} > \mathbf{x}_r - \epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

S 表示比例缩放, n 表示多项式阶次, ϵ 表示小的近似偏移

S, n, ϵ 将影响近似精度



把约束转化为目标



约束 $x_r = 0.4$

近似1

$n = 2, S = 0.1, \epsilon = 0.1,$

近似2

$n = 2, S = 0.05, \epsilon = 0.1$

约束1:速度和加速度等约束

速度 $f_v = e_{\Gamma}(v_i, v_{max}, \epsilon, S, n)$

$$f_w = e_{\Gamma}(w_i, w_{max}, \epsilon, S, n)$$

$$v_i \cong \frac{1}{\Delta T_i} \left\| \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{pmatrix} \right\|$$

当节点距离邻近时，欧氏距离是圆弧路径的充分近似值

$$w_i \cong \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta T_i}$$

加速度 $f_a = e_{\Gamma}(a_i, a_{max}, \epsilon, S, n)$

同理得旋转加速度

$$a_i = \frac{2(v_{i+1} - v_i)}{\Delta T_i + \Delta T_{i+1}}$$

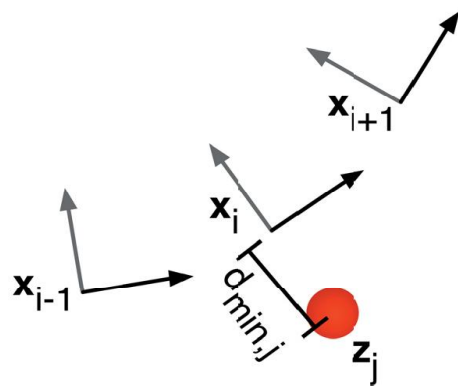


约束2: 逼近路径且安全无碰

最小化弹性带和路径点或者障碍物 z_j 之间的间隔 $d_{min,j}$

路径点 $f_{path} = e\Gamma(d_{min,j}, r_{p_{max}}, \epsilon, S, nb$

障碍物 $f_{ob} = e\Gamma(-d_{min,j}, -r_{o_{min}}, \epsilon, S, nb$



约束3: 非完整运动学约束

非完整运动学约束可表示为

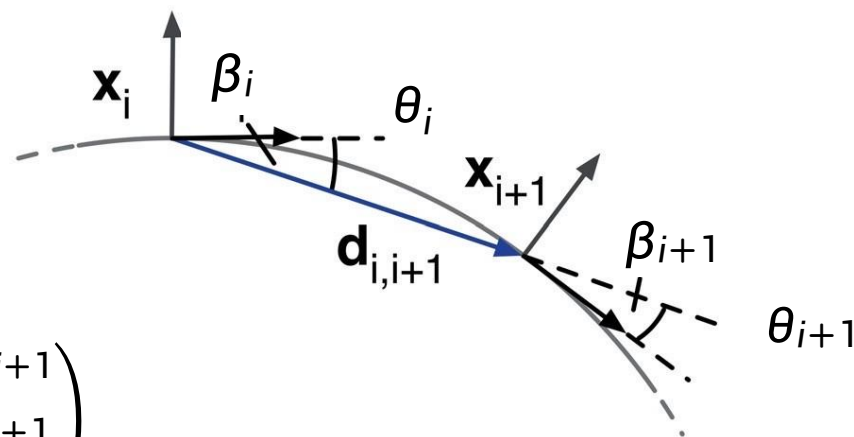
$$\beta_i = \beta_{i+1}$$

等价表示为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{d}_{i,i+1} = \mathbf{d}_{i,i+1} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{i+1} \\ \sin \theta_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}_{i,i+1} = \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 是相邻位形连线的向量表示}$$

θ_i 为机器人在第*i*个位形处的绝对方向



约束3: 非完整运动学约束

目标函数为

$$f_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = \left\| \left[\begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_{i+1} \\ \sin \theta_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \times \mathbf{d}_{i,i+1} \right\|^2 = 0$$



最优化求解

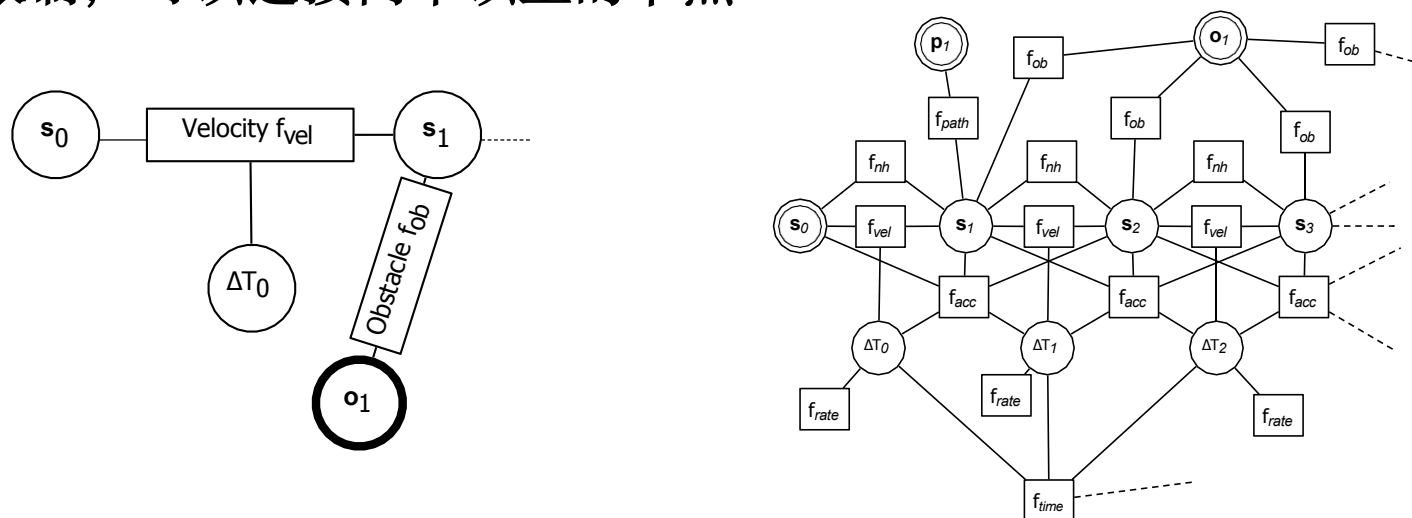
最优解 $B^* = \operatorname{argmin}_B f(B)$

目标函数 $f(B) = \sum_k \gamma_k f_k(B)$

- 绝大多数子目标函数仅仅和 B 的局部相关，即仅仅涉及若干连续路径位姿点及其间隔时间，而不是整个弹性带，因此**TEB**是一个稀疏最优化问题，可以采用图优化方法，用**G2O**等大规模数值优化方法求解

最优化求解

超图(hyper graph): 由节点和边组成, 其中一条边所能连接的节点数量不受限制, 可以连接两个以上的节点



节点: 位姿 (气泡点, 即轨迹点)、时间间隔

边: 目标函数, 将与目标函数相关的节点连接起来

TEB 的实现

1. 在初始路径上增加默认的关于动力学和运动学约束的时间信息，将初始路径转化为初始轨迹
2. 在每次迭代中，动态地增加新的位形或删除已有路径位姿节点，以便修正空间和时间分辨率，与当前轨迹长度匹配
3. 建立约束描述，构建超图模型，进行最优化问题求解
4. 验证最优化得到的轨迹是否可行；如果可行计算速度控制变量 v 和 ω ，驱动机器人执行；如果不可行，重新初始化，检查新的和改变的路径点，判断路径点密度是否能够确保视觉或者激光扫描传感器检测到，然后转步骤2迭代

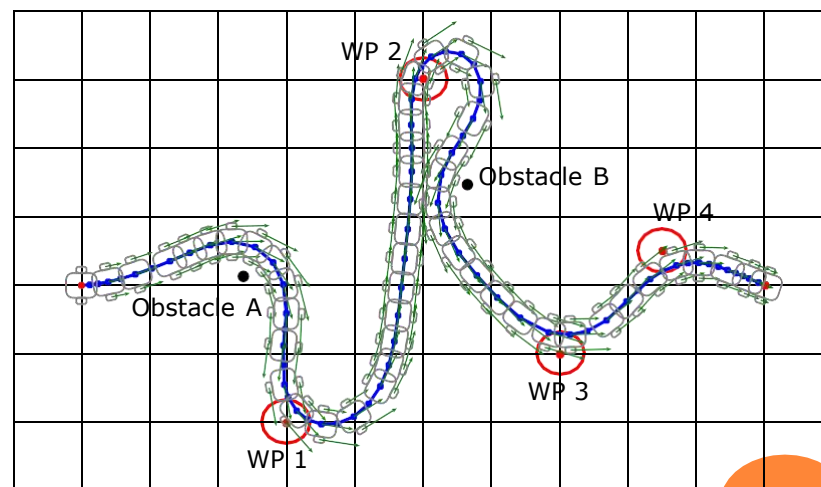
3. TEB (TIMED ELASTIC BAND)

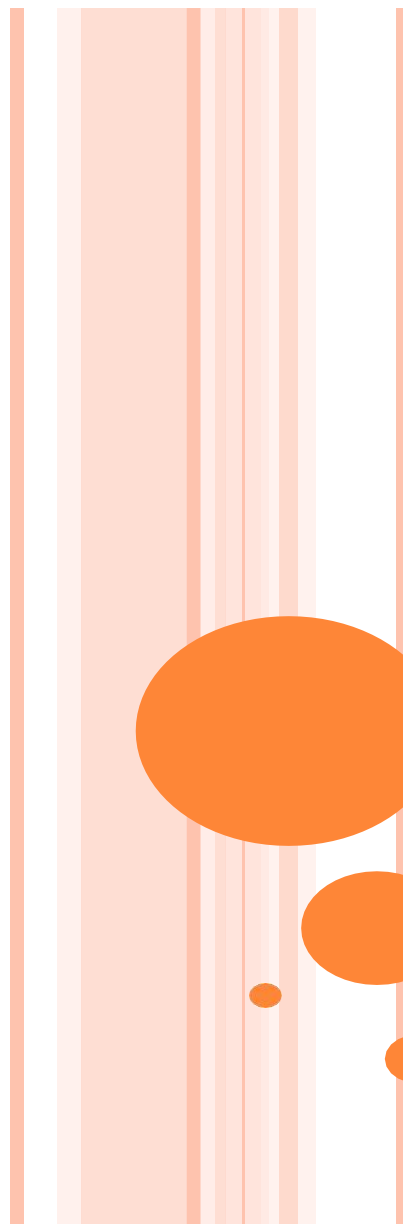
○ 优点:

- 引入时间信息和动力学运动学等约束条件，将避障规划和轨迹规划有效融合
- 具有较好的鲁棒性和扩展特性，可以方便的引入新的目标和约束

○ 缺点:

- 当问题规模较大、目标或者约束存在一定冲突时，问题求解计算成本较高，会难以满足实时性要求





END!