

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дисциплина: Архитектура ЭВМ

Отчет

по домашней работе № 1

Построение логических схем и минимизация логических функций

Выполнил: Левицкий Иван Михайлович

Номер ИСУ: 334916

студ. гр. М3135

Санкт-Петербург

2021

Цель работы: моделирование простейших логических схем и минимизация логических функций методом карт Карно.

Инструментарий и требования к работе: работа выполняется в logisim.

Теоретическая часть

Минимизация булевой функции - уменьшение кол-ва операций в формуле, ее представляющей (в частности в данной работе нас будет интересовать только минимизация ДНФ и КНФ).

Карта Карно - несколько переименованная в визуальном плане таблица истинности булевой функции, а именно: представленная в двухмерном виде таблица истинности, в которой порядок наборов значений переменных записан не в обычном виде (лексикографическом), а в коде Грея (зеркальном коде). То есть карта Карно представляет собой двумерную таблицу $2^m \times 2^n$, где каждой строке соответствует некоторый код, кодирующий какой-то набор значений первых m переменных, и при этом все наборы значений первых m переменных закодированы и закодированы именно в порядке кода Грея (и аналогично для столбцов), а в клетке стоит значение данной булевой функции (от $m + n$ переменных) от набора значений этих переменных, полученного конкатенацией кода строки и столбца на пересечении клетки.

Минимизация булевой функции методом карт Карно - графический способ минимизации булевых функций, представляющий собой операции “попарного неполное склеивания” и “элементарного поглощения”.

Попарное неполное склеивание (или просто склеивание/склейка) - замена двух полных конъюнктов (или дизъюнктов), отличающихся инверсией ровно одной переменной, на выражение, получающееся выносом за скобки их общей части. Пример: $X_1 X_2 \neg X_3 \vee X_1 X_2 X_3 = X_1 X_2 (\neg X_3 \vee X_3)$.

Элементарное поглощение - откидывание множителя (или элемента дизъюнкции), в котором происходит дизъюнкция (или конъюнкция) переменной и ее инверсии (мы можем их откинуть, так как они константы, не влияющие на результат). Пример: $\neg X_3 \vee X_3 = 1$ (не влияет на конъюнкцию), $\neg X_3 X_3 = 0$ (не влияет на дизъюнкцию).

Таким образом, очевидно, что после последовательного применения “склеивания” и “поглощения” мы сокращаем запись на один дизъюнкт/конъюнкт в ДНФ/КНФ и еще сокращаем его длину на 1:

$$X_1 X_2 \neg X_3 \vee X_1 X_2 X_3 = X_1 X_2.$$

А карта Карно в данном варианте минимизации помогает нам найти термы, которые содержат одинаковые переменные и отличаются только в инверсии одной из них, и разбить их на пары (или группы пар, где склейка пройдет в несколько этапов).

Упрощения поиска таких элементов с помощью карт Карно происходит потому, что они попросту являются “соседними” относительно осей нашей карты (оси - мнимые линии разделяющие каждые четыре столбца или строки таблицы).

По итогу, полный алгоритм минимизации ДНФ/КНФ (= построения МДНФ/МКНФ) с помощью карт Карно следующий:

- 1) Построить карту Карно.

- 2) Выделить в ней все клетки с 1 (или 0, если строим МКНФ) и разбить их на пары “соседних” (если какие-то не бьются - оставить так).
- 3) Произвести склеивание + элементарное поглощение соседних термов.
- 4) Записать все полученные термы и произвести между ними дизъюнкцию (или конъюнкцию), получив тем самым МДНФ/МКНФ.

Практическая часть

2. Дана вектор-функция $\bar{x} = 1001100111100100$

Построим таблицу истинности по данной вектор-функции :

Таблица №1 — Таблица истинности $f(\bar{x})$

X_0	X_1	X_2	X_3	$f(\bar{x})$
1	2	3	4	5
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

3. Запишем СДНФ по таблице 1:

$$\begin{aligned}
 &(\neg X_0 \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3) \vee (\neg X_0 \neg X_1 X_2 X_3) \vee (\neg X_0 X_1 \neg X_2 \neg X_3) \vee \\
 &(\neg X_0 X_1 X_2 X_3) \vee (X_0 \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3) \vee (X_0 \neg X_1 \neg X_2 X_3) \vee \\
 &(X_0 \neg X_1 X_2 \neg X_3) \vee (X_0 X_1 \neg X_2 X_3) = f(X_0, X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}$$

Запишем СКНФ по таблице 1:

$$\begin{aligned}
 &(X_0 \vee X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3)(X_0 \vee X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3)(X_0 \vee \neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \\
 &(X_0 \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3)(\neg X_0 \vee X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3)(\neg X_0 \vee \neg X_1 \vee X_2 \vee X_3) \\
 &(\neg X_0 \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3)(\neg X_0 \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3)
 \end{aligned}$$

4. По записанной выше СКНФ составим логическую схему (см. рисунок 1).

Для удобства будем делать это по следующему алгоритму: сначала

получим всевозможные дизъюнкты X_0 , X_1 и их отрицаний (и аналогично для X_2 , X_3), затем из получившихся элементов получим все нужные нам дизъюнкты из СКНФ и с помощью бинарного дерева (для сокращения записи и уменьшения глубины) получим конъюнкцию этих дизъюнктов.

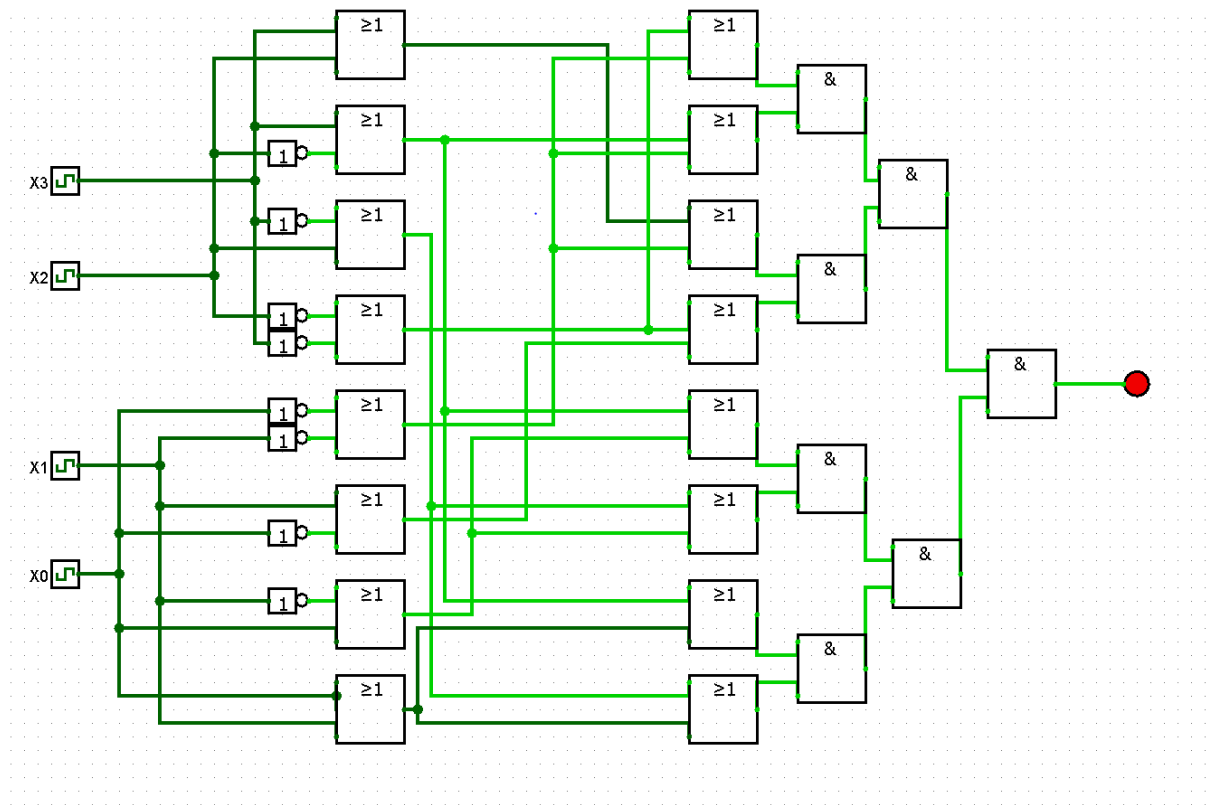


Рисунок №1 — логическая схема СКНФ

5. Составим МДНФ, для этого по таблице 1 построим карту Карно :

Таблица №2 — карта Карно для МДНФ

$X_2 X_3$		00	01	11	10
$X_0 X_1$	00	1	0	1	0
	01	1	0	1	0
	11	0	1	0	0
	10	1	1	0	1

Разобьем смежные термы, дающие 1, на пары для склейки (в таблице 2 получившиеся пары выделены цветом, больших групп для склейки в этом примере не оказалось).

Произведем склейку с элементарным поглощением (в порядке синие, красные, желтые, зеленые):

$$(\neg X_0 \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3) \vee (\neg X_0 X_1 \neg X_2 \neg X_3) = \neg X_0 \neg X_2 \neg X_3$$

$$(\neg X_0 \neg X_1 X_2 X_3) \vee (\neg X_0 X_1 X_2 X_3) = \neg X_0 X_2 X_3$$

$$(X_0 X_1 \neg X_2 X_3) \vee (X_0 \neg X_1 \neg X_2 X_3) = X_0 \neg X_2 X_3$$

$$(X_0 \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3) \vee (X_0 \neg X_1 X_2 \neg X_3) = X_0 \neg X_1 \neg X_3$$

Далее просто запишем дизъюнкцию для склеенных термов, получая МДНФ:

$$(\neg X_0 \neg X_2 \neg X_3) \vee (\neg X_0 X_2 X_3) \vee (X_0 \neg X_2 X_3) \vee (X_0 \neg X_1 \neg X_3) = f(X_0, X_1, X_2, X_3)$$

Аналогично построим МКНФ:

Таблица №3 — карта Карно для СКНФ

$X_2 X_3$		00	01	11	10
$X_0 X_1$	00	1	0	1	0
	01	1	0	1	0
	11	0	1	0	0
	10	1	1	0	1

Опять разобьем смежные термы, теперь уже, дающие 0, на пары для склейки (в таблице 3 получившиеся пары выделены цветом, больших групп здесь тоже не оказалось).

Произведем склейку (в порядке синие, красные, желтые, зеленые):

$$(\neg X_0 \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3)(\neg X_0 \vee X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) = \neg X_0 \vee \neg X_2 \vee X_3$$

$$(\neg X_0 \vee \neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3)(\neg X_0 \vee X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) = \neg X_0 \vee X_2 \vee \neg X_3$$

$$(X_0 \vee X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3)(X_0 \vee X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) = X_0 \vee X_1 \vee \neg X_3$$

$$(X_0 \vee X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_0 \vee \neg X_1 \vee X_2 \vee X_3) = X_0 \vee X_2 \vee X_3$$

Далее просто запишем конъюнкцию для склеенных термов, получая МКНФ:

$$(\neg X_0 \vee \neg X_2 \vee X_3)(\neg X_0 \vee X_2 \vee \neg X_3)(X_0 \vee X_1 \vee \neg X_3)(X_0 \vee X_2 \vee X_3)$$

6. По записанной выше МДНФ построим логическую схему. Для этого сначала получим первую конъюнкцию в каждой конъюнкте (первый столбик элементов “и”, см. рисунок 2), затем получим полный конъюнкт (второй столбик элементов “и”, см. рисунок 2), используя только что полученный элемент конъюнкции и оставшуюся переменную (в данном случае последняя везде X_3), а потом с помощью бинарного дерева (для сокращения записи и уменьшения глубины) получим дизъюнкцию наших конъюнктов.

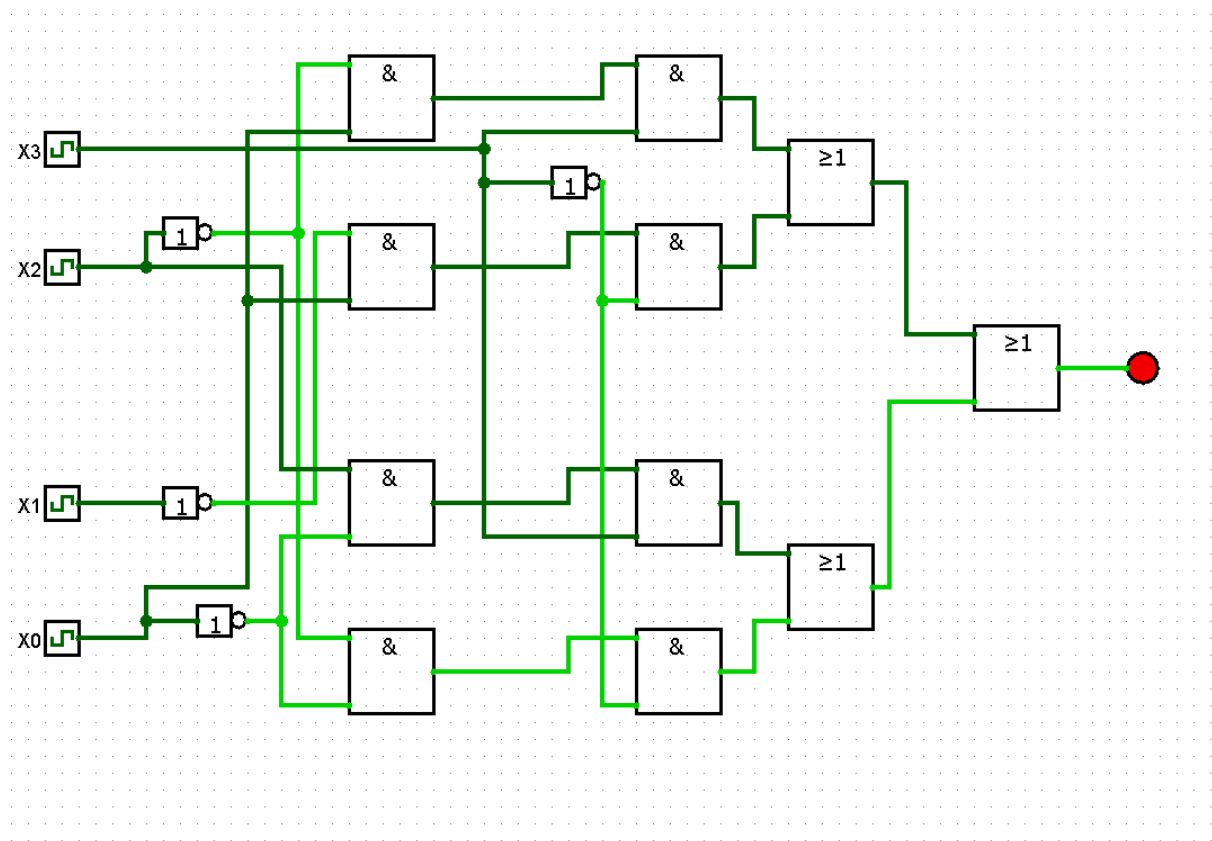


Рисунок №2 — логическая схема МДНФ