

## 1 HW5 (additional 1d)

Док-во аналогичных пунктам а-б утверждений для  $\neg$  и  $\rightarrow$ .

Лемма 1 (уже давно известная):

$$\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$$

Лемма 2 (уже давно известная):

$$\alpha \vdash \alpha$$

$\neg$ )

$$1.1.1) \neg \forall x. \alpha \rightarrow \forall x. \neg \alpha \Leftrightarrow \neg \forall x. \alpha \vdash \forall x. \neg \alpha$$

$$1. \neg \forall x. \alpha$$

$$2. (\alpha \rightarrow \forall x. \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \forall x. \alpha) \rightarrow \neg \alpha \text{ (акс 9)}$$

$$3. \alpha \rightarrow \alpha \text{ (Лемма 2)}$$

$$4. \alpha \rightarrow \forall x. \alpha \text{ (правило вывода } \forall(3))$$

$$5. \alpha \rightarrow \neg \forall x. \alpha \text{ (Лемма 1}(\alpha, 1))$$

$$6. (\alpha \rightarrow \neg \forall x. \alpha) \rightarrow \neg \alpha \text{ (M.P(2, 4))}$$

$$7. \neg \alpha \text{ (M.P(6, 5))}$$

$$8. \neg \alpha \rightarrow \neg \alpha \text{ (Лемма 2)}$$

$$9. \neg \alpha \rightarrow \forall x. \neg \alpha \text{ (правило вывода } \forall(8))$$

$$10. \forall x. \neg \alpha \text{ (M.P(9, 7)) ЧТД}$$

$$1.1.2) \forall x. \neg \alpha \rightarrow \neg \forall x. \neg \alpha \Leftrightarrow \forall x. \neg \alpha \vdash \neg \forall x. \neg \alpha$$

$$1. \forall x. \neg \alpha$$

$$2. \forall x. \neg \alpha \rightarrow \neg \alpha \text{ (акс 11)}$$

3.  $\neg\alpha$  (M.P(2, 1))
4.  $(\forall x.\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\forall x.\alpha$  (акс 9)
5.  $\forall x.\alpha \rightarrow \alpha$  (акс 11)
6.  $(\forall x.\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\forall x.\alpha$  (M.P(4, 5))
7.  $\forall x.\alpha \rightarrow \neg\alpha$  (Лемма 1(3))
8.  $\neg\forall x.\alpha$  (M.P(6, 7)) ЧТД

$$1.2) \forall x.\neg\alpha \rightarrow \forall p.\neg\alpha[x := p] \Leftrightarrow \forall x.\neg\alpha \vdash \forall p.\neg\alpha[x := p]$$

1.  $\forall x.\neg\alpha$
2.  $\forall x.\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha[x := p]$  (акс 11)
3.  $\neg\alpha[x := p]$  (M.P(2, 1))
4.  $\neg\alpha[x := p] \rightarrow \neg\alpha[x := p]$  (Лемма 2)
5.  $\neg\alpha[x := p] \rightarrow \forall p.\neg\alpha[x := p]$  (Правило вывода для  $\forall(4)$ )
6.  $\forall p.\neg\alpha[x := p]$  (M.P(5, 3)) ЧТД

$\rightarrow$ )

$$2.1.1) ((\forall x.\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x.(\alpha \rightarrow \beta)) \Leftrightarrow ((\forall x.\alpha) \rightarrow \beta) \vdash (\forall x.(\alpha \rightarrow \beta))$$

Докажем  $((\forall x.\alpha) \rightarrow \beta) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\alpha) \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

0.  $(\forall x.\alpha) \rightarrow \beta$
1.  $(\alpha \rightarrow \forall x.\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  (акс 2)

2.  $\alpha \rightarrow \forall x.\alpha$  (доказанный выше факт)
3.  $\alpha \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta)$  (Лемма 1(0))
4.  $(\alpha \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  (М.Р(1, 2))
5.  $\alpha \rightarrow \beta$  (М.Р(4, 3)) Доказали что хотели.
6.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  (Лемма 2)
7.  $\forall x.(\alpha \rightarrow \beta)$  (Правило вывода для  $\forall(6) + M.P(5)$ ).

$$2.1.2) (\alpha \rightarrow \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.(\alpha \rightarrow \beta)) \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \forall x.\beta \vdash \forall x.(\alpha \rightarrow \beta)$$

0.  $\alpha \rightarrow \forall x.\beta$
1.  $(\alpha \rightarrow \forall x.\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x.\beta \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
2.  $(\alpha \rightarrow (\forall x.\beta \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  (М.Р(1, 0))
3.  $\forall x.\beta \rightarrow \beta$  (аксиома 11)
4.  $\alpha \rightarrow (\forall x.\beta \rightarrow \beta)$  (Лемма 1(3))
5.  $\alpha \rightarrow \beta$  (М.Р(2, 4)) Далее аналогично

$$2.2) ((\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \rightarrow \beta[y := q] \Leftrightarrow ((\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall y.\beta)) \vdash \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \rightarrow \beta[y := q]$$

1. Подставим все в 2ую аксиому получим  $(\forall x.\alpha \rightarrow \forall y.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \forall y.\beta \rightarrow \beta[y := q]) \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta[y := q])$
2. Знаем первое и второе по М.Р. получим  $\forall x.\alpha \rightarrow \beta[y := q]$
3. Сняв квантор аналогично подставим  $p : \forall x.\alpha[x := p] \rightarrow \beta[y := q]$
4. Далее навесим кванторы  $p, q$  : получим  $\forall p.\forall q.\alpha[x := p] \rightarrow \beta[y := q]$

ЧТД