1 HW4.4b

Пример в общем виде выглядит так (нас наводит на это задача 1c):

$(A_0 \to (\alpha_0 \lor \neg\alpha_0)) \lor (\neg A_0 \to ((\alpha_0 \lor \neg\alpha_0)))$,

где α_i в свою очередь такого же вида, то есть:

$\alpha_i = (A_i \to (\alpha_{i+1} \lor \neg\alpha_{i+1})) \lor (\neg A_i \to ((\alpha_{i+1} \lor \neg\alpha_{i+1})))$

и в свою очередь финальное по вложенности $\alpha_{n-2} = A_{n-2}$

Таким образом, я утверждаю, что данная формула не может быть опровергнута моделью Крипке глубиной n и меньше.

.

Доказательство 1 *Будем доказывать по индукции/рекурсии:*

База $n = 1$: Очевидно, что $A \lor \neg A$ не получить глубиной 0, т.к. если в мире W без потомков $\nVdash A$ (что является обязательным условием), то в нем увы $\Vdash \neg A \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ должна быть глубина хотя бы 1. Также заметим, что это, очевидно, верно не только для переменной A, но и для формулы α

А также вспомним пример из лекции для достижения опровержения данной конструкции миоделью Крипке глубиной 1:

$$\begin{tikzcd} & W_1\ (\Vdash A) \\ W\ (\nVdash A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Переход(рекурсивный): заметим, что в мире, который все опровергает (W) должно быть (из свойства $\lor$) следующее

$\nVdash A_0 \to (\alpha_0 \vee \neg\alpha_0)$

$\nVdash \neg A_0 \to ((\alpha_0 \vee \neg\alpha_0))$

$\Rightarrow \exists W_1 : W_1 \succeq W$ *и* $W_1 \Vdash A_0$ *и* $W_1 \nVdash (\alpha_0 \vee \neg\alpha_0)$

и

$\exists W_2 : W_2 \succeq W$ *и* $W_2 \Vdash \neg A_0$ *и* $W_2 \nVdash (\alpha_0 \vee \neg\alpha_0)$

А значит $W_1 \not\succeq W_2$*, т.к.* $\forall X \succeq W_2$ *выполняется* $\nVdash A_0$

И с другой стороны $W_1 \not\preceq W_2$*, т.к.* $\forall X \succeq W_1$ *выполняется* $\Vdash A_0$*, а значит* $X \nVdash \neg A$

Значит W_1 *и* W_2 *в некотором смысле параллельные миры, т.к. не могут быть наследниками друг друга. А значит в лучшем случае* W *- их общий ближайший предок (родитель). А значит данная рекурсия доказывает добавление +1 за каждое погружение вглубь. (Более того ветки миров* W_1 *и* W_2 *вообще потом не могут пересекаться)* $\Rightarrow$ *как минимум получили +1 к общей глубине дерева. Далее аналогично все раскрывается для* α_0*. Посмотрим на картинке:*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & W_{11}\ (\textit{опровержение}\ \alpha_0) \\
 & W_1\ (\Vdash A, \nVdash \alpha_0, \neg\alpha_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & W_{12}\ (\textit{опровержение}\ \neg\alpha_0) \\
W\ (\nVdash A_0) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & W_{21}\ (\textit{опровержение}\ \alpha_0) \\
 & W_2\ (\nVdash A, \nVdash \alpha_0, \neg\alpha_0)) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & W_{22}\ (\textit{опровержение}\ \neg\alpha_0)
\end{tikzcd}
$$