1 HW3 (№14)

Надо п-ть, что $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$.

Т.к. $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ и $[\beta]_{\mathcal{L}}$ – некоторые случайные представители соответствующих классов эквивалентости, то переобозначим $\alpha_1 = [\alpha]_{\mathcal{L}}$ и $\beta_1 = [\beta]_{\mathcal{L}}$.

Докажем, что $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 \vee \beta_1$.

(1) Докажем, что $\alpha_1 + \beta_1 \preceq \alpha_1 \vee \beta_1$.

Пусть $\alpha_1 + \beta_1 = sup(\alpha_1, \beta_1) = \gamma$.

γ – это такое наименьшее, что $\begin{cases} \gamma \succeq \alpha_1 \\ \gamma \succeq \beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \vdash \gamma \\ \beta_1 \vdash \gamma \end{cases}$

Также мы знаем из аксиом, что:
$\begin{cases} \alpha_1 \to \alpha_1 \vee \beta_1 \\ \beta_1 \to \alpha_1 \vee \beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \vee \beta_1 \succeq \alpha_1 \\ \alpha_1 \vee \beta_1 \succeq \beta_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 \vee \beta_1 \succeq \gamma$, т.к. γ – наименьшее из больших.

Значит доказали $\alpha_1 + \beta_1 \preceq \alpha_1 \vee \beta_1$.

(2) Теперь докажем, что $\alpha_1 + \beta_1 \succeq \alpha_1 \vee \beta_1 \Leftrightarrow \gamma \succeq \alpha_1 \vee \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_1 \vee \beta_1 \to \gamma$.

Мы знаем, что $\begin{cases} \alpha_1 \vdash \gamma \\ \beta_1 \vdash \gamma \end{cases} \Rightarrow$

Можем построить следующий вывод:

1. $\alpha_1 \to \gamma$ (дедукция).

2. $\beta_1 \to \gamma$ (дедукция).

3. $(\alpha_1 \to \gamma) \to (\beta_1 \to \gamma) \to (\alpha_1 \vee \beta_1 \to \gamma)$ (8 аксиома).

4. $(\beta_1 \to \gamma) \to (\alpha_1 \vee \beta_1 \to \gamma)$ (M.P(3, 1)).

5. $\alpha_1 \vee \beta_1 \to \gamma$ (M.P.(4, 2)).

$\alpha_1 \vee \beta_1 \to \gamma \Leftrightarrow \alpha_1 \vee \beta_1 \vdash \gamma \Leftrightarrow \gamma \succeq \alpha_1 \vee \beta_1$ Что и хотели доказать в данном пункте.

$(1) + (2) \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 \vee \beta_1$. Что и требовалось доказать.

Теперь поймем, что, т.к. мы взяли произвольных представителей это верно для произвольных в этих классах эквивалентости.