

## 1 HW4.4b

Пример в общем виде выглядит так (нас наводит на это задача 1с):

$$(A_0 \rightarrow (\alpha_0 \vee \neg \alpha_0)) \vee (\neg A_0 \rightarrow ((\alpha_0 \vee \neg \alpha_0))),$$

где  $\alpha_i$  в свою очередь такого же вида, то есть:

$$\alpha_i = (A_i \rightarrow (\alpha_{i+1} \vee \neg \alpha_{i+1})) \vee (\neg A_i \rightarrow ((\alpha_{i+1} \vee \neg \alpha_{i+1})))$$

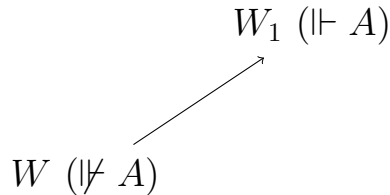
и в свою очередь финальное по вложенности  $\alpha_{n-2} = A_{n-2}$

Таким образом, я утверждаю, что данная формула не может быть опровергнута моделью Крипке глубиной  $n$  и меньше.

**Доказательство 1** Будем доказывать по индукции/рекурсии:

*База  $n = 1$ : Очевидно, что  $A \vee \neg A$  не получить глубиной 0, т.к. если в мире  $W$  без потомков  $\not\models A$  (что является обязательным условием), то в нем увы  $\models \neg A \Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow$  должна быть глубина хотя бы 1. Также заметим, что это, очевидно, верно не только для переменной  $A$ , но и для формулы  $\alpha$*

*А также вспомним пример из лекции для достижения опровержения данной конструкции моделью Крипке глубиной 1:*



*Переход(рекурсивный): заметим, что в мире, который все опровергает ( $W$ ) должно быть (из свойства  $\vee$ ) следующее*

$$\not\models A_0 \rightarrow (\alpha_0 \vee \neg \alpha_0)$$

$$\not\models \neg A_0 \rightarrow ((\alpha_0 \vee \neg \alpha_0))$$

$$\Rightarrow \exists W_1 : W_1 \succeq W \text{ и } W_1 \models A_0 \text{ и } W_1 \not\models (\alpha_0 \vee \neg \alpha_0)$$

и

$$\exists W_2 : W_2 \succeq W \text{ и } W_2 \models \neg A_0 \text{ и } W_2 \not\models (\alpha_0 \vee \neg \alpha_0)$$

А значит  $W_1 \not\preceq W_2$ , т.к.  $\forall X \succeq W_2$  выполняется  $\not\models A_0$

И с другой стороны  $W_1 \not\preceq W_2$ , т.к.  $\forall X \succeq W_1$  выполняется  $\models A_0$ , а значит  $X \not\models \neg A$

Значит  $W_1$  и  $W_2$  в некотором смысле параллельные миры, т.к. не могут быть наследниками друг друга. А значит в лучшем случае  $W$  - их общий ближайший предок (родитель). А значит данная рекурсия доказывает добавление  $+1$  за каждое погружение вглубь. (Более того ветки миров  $W_1$  и  $W_2$  вообще потом не могут пересекаться)  $\Rightarrow$  как минимум получили  $+1$  к общей глубине дерева. Далее аналогично все раскрывается для  $\alpha_0$ . Посмотрим на картинке:

