নবম শ্রেণি | উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ২: বীজগাণিতিক রাশি

ALL IN ONE PREPARATION BOOK

দশম শ্রেণি | উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ২: বীজগাণিতিক রাশি

ACS FUTURE SCHOOL

ALL IN ONE PREPARATION BOOK

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

'Preparation Book' টি সম্পূর্ণ সঠিক এবং ত্রুটিহীন রাখার জন্য আমরা সর্বোচ্চ চেষ্টা করেছি। তবুও যদি কেউ কোন ভুল দেখতে পাও, তাহলে নিচে দেয়া ফর্মের লিংকে ক্লিক করে, সেখানে তোমার গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য দিয়ে আমাদের জানালে আমরা কৃতজ্ঞ হবো এবং খুব শীঘ্রই সেটি সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

তাছাড়া প্রিপারেশন বুক সংক্রান্ত যেকোনো পরামর্শ বা উপদেশও দিতে পারো এই ফর্মে!

শুভ কামনায়

ACS Future School

ফর্মটিতে যেতে,

ক্লিক করো

অথবা,

QR Code টি Scan করো

বীজগাণিতিক রাশি

প্রয়োজনীয় তথ্য

চলক (Variable): একটি চলক বলতে এমন একটি রাশিকে বোঝানো হয়, যার মান পরিবর্তনশীল এবং এটি কোনো প্রদত্ত সেটের বিভিন্ন মান গ্রহণ করতে পারে। সাধারণত একটিমাত্র বর্ণ দিয়ে একটি চলককে নির্দেশ করা হয়। এক কথায়, বীজগ্ণিতে অজ্ঞাত রাশিকে চলক বলে। যেমন: x, ক, a ইত্যাদি।

চলক মূলত ২ প্রকার:

- **স্বাধীন চলক (Independent Variable):** স্বাধীন চলক বলতে এমন একটি বীজগাণিতিক রাশিকে বোঝানো হয় যা পরিবর্তিত হতে পারে এবং অন্য চলকের মানকে প্রভাবিত করে।
- **নির্ভর চলক (Dependent Variable):** পরাধীন চলক বলতে এমন একটি বীজগাণিতিক রাশিকে বোঝানো হয় যার মান স্বাধীন চলকের উপর নির্ভর করে পরিবর্তিত হতে পারে।

ধ্রুবক (Constant): একটি ধ্রুবক একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা বা মান যা পরিবর্তিত হয় না। চলকের বিপরীত অর্থাৎ জ্ঞাত অপরিবর্তনশীল রাশিকে ধ্রুবক বলা হয়। যেমন: 9.8, e, π ইত্যাদি।

বীজগাণিতিক রাশি (Algebric Expression): বীজগাণিতিক রাশি হলো এমন একটি গাণিতিক অভিব্যক্তি যা সংখ্যা, চলক, ধ্রুবক এবং বিভিন্ন গাণিতিক অপারেশন (+, −, ×, ÷) দ্বারা গঠিত। যেমন: $2x$, $2y+3ay$, $6x+4y^2+a+\sqrt{z}$ ইত্যাদি প্রতিটিই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি।

বহুপদী রাশি সংক্রান্ত

বহুপদী (Polynomial): বহুপদী হলো এক বা একাধিক চলক এবং ধ্রুবকের সমন্বয়ে গঠিত একটি সসীম পদসংখ্যাবিশিষ্ট বীজগাণিতিক রাশি, যেখানে প্রত্যেক চলকের ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়।

বহুপদী হওয়ার শর্তাবলী:

- প্রতিটি পদে প্রত্যেক চলকের ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে।
- পদসংখ্যা হবে সসীম।

মাত্রা: কোন বহুপদী রাশির চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে ঐ বহুপদী রাশির মাত্রা বলে। একাধিক চলকের ক্ষেত্রে প্রত্যেক পদে চলকের ঘাতের সমষ্টি বিবেচনা করতে হবে।

মুখ্যপদ: যে পদে চলকের ঘাত সর্বোচ্চ হয় তাকে মুখ্যপদ বলে। একাধিক চলকের ক্ষেত্রে প্রত্যেক পদে চলকের ঘাতের সমষ্টি বিবেচনা করতে হবে।

মুখ্যসহগ: মুখ্যপদের সহগকে (চলকব্যতীত পদটির বাকি অংশ) মুখ্যসহগ বলে।

ধ্রুবপদ: যে পদে চলক থাকে না বা চলকবর্জিত পদকে ধ্রুবপদ বলে।

উদাহরণ

Example 01: $P(x)=5x^3-2x^2+7x-9$

- মাত্রা: 3
- মুখ্যপদ: $5x^3$
- মুখ্য সহগ: 5
- ধ্রুবপদ: -9

Example 02: $Q(a,b)=4a^2b^3-3ab^2+2a-5b+1$

- মাত্রা: 5 ($4a^2b^3$ পদে a এর ঘাত 2 এবং b এর ঘাত 3, সর্বোচ্চ ঘাত 2 + 3 = 5)
- মুখ্যপদ: $4a^2b^3$
- মুখ্য সহগ: 4
- ধ্রুবপদ: 1

Example 03: $R(x,y)=8x^3y^2-6x^2y+9xy^2-2x+7y+2x^3y^2$

- মাত্রা: 5 ($10x^3y^2$ পদে x এর ঘাত 3 এবং y এর ঘাত 2, সর্বোচ্চ ঘাত 3 + 2 = 5)
- মুখ্যপদ: $10x^3y^2$
- মুখ্য সহগ: 10
- ধ্রুবপদ: 0

Example 04: যদি $P(x)=3x^3+2x^2-7x+8$ হয়, তবে $P(2)$, $P(-2)$ এবং $P\left(\frac{1}{2}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদীতে x-এর পরিবর্তে $2, -2, \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই, $P(2) = 3(2)^3 + 2(2)^2 - 7(2) + 8 = 26$

$P(-2) = 3(-2)^3 + 2(-2)^2 - 7(-2) + 8 = 6$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 8 = \frac{43}{8}$$

বহুপদীর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ

P(x) ও Q(x) দুটি বহুপদী হলে,

- $P(x) + Q(x)$ দুটি বহুপদীর যোগফল একটি বহুপদী হবে।
- $P(x) - Q(x)$ দুটি বহুপদীর বিয়োগফল একটি বহুপদী হবে।
- $F(x) = P(x) \times Q(x)$ হলে দুটি বহুপদীর গুণফল $F(x)$ একটি বহুপদী হবে।

$F(x)$ এর মাত্রা $=$ $P(x)$ এর মাত্রা $+$ $Q(x)$ এর মাত্রা।

- $F(x) = P(x) \div Q(x)$ দুটি বহুপদীর ভাগফল $F(x)$ একটি বহুপদী হতেও পারে অথবা নাও হতে পারে। ভাজ্যের $P(x)$ বহুপদীর ঘাত ভাজকের $Q(x)$ বহুপদীর ঘাতের চেয়ে ছোট হলে ভাগফল বহুপদী হবে না।

$F(x)$ বহুপদী হলে, $F(x)$ এর মাত্রা $=$ $P(x)$ এর মাত্রা $-$ $Q(x)$ এর মাত্রা।

উদাহরণ

Example 05: $(x^2 + 2)$ কে $(x + 1)$-দ্বারা গুণ করলে গুণফল কত?

এখানে $(x^2 + 2)$ এবং $(x + 1)$ বহুপদী দুটি গুণফল,

$(x^2 + 2)(x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2$

একটি বহুপদী যার মাত্রা $2 + 1 = 3$

এবং মুখ্যসংখ্যা $1 \times 1 = 1$

Example 06: $P(x) = (x^3 - 6)$-কে $2x^2 + 3$-দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল কত?

এখানে $P(x) = (x^3 - 6)$ এবং এর মাত্রা 3 এবং মুখ্যসংখ্যা 1।

আর ভাজক $Q(x) = 2x^2 + 3$-এর মাত্রা 2 এবং মুখ্যসংখ্যা 2।

P(x)-কে Q(x)-দিয়ে ভাগ করলে, ভাগফল $F(x) = \frac{1}{2}x - 3$ এবং ভাগশেষ $R(x) = -\frac{x}{2} + 3$।

কাজেই, ভাগফল F(x) একটি বহুপদী যার মাত্রা $3 - 2 = 1$ এবং মুখ্যসংখ্যা $\frac{1}{2}$।

ভাগশেষ উপপাদ্য

কোনো বহুপদী ~~$f(x)$ কে $(x - a)$~~ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$, যেখানে a নির্দিষ্ট একটি সংখ্যা।

- যদি $P(x) = x^2 - 5x + 6$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ কর এবং দেখাও যে, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

সমাধান: $P(x)$ কে $(x - 4)$ দ্বারা নিচের মতো ভাগ করি।

$$
\begin{array}{l}
x - 4\ )\ x^2 - 5x + 6\ (\ x - 1 \\
\qquad\qquad x^2 - 4x \\
\qquad\qquad\quad -x + 6 \\
\qquad\qquad\quad -x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad\ 2
\end{array}
$$

এখানে ভাগশেষ 2।

যেহেতু $P(4) = 4^2 - 5(4) + 6 = 2$, সুতরাং, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

অনুসিদ্ধান্ত: $f(a) = 0$ হলে, $(x - a), f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

উদাহরণ

Example 01: বহুপদী $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$ কে $(2x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: নির্ণেয় ভাগশেষ,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 5$$
$$= 9 - 4 + 5 = 10\text{।}$$

Example 02: যদি $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$P(2) = 5(2)^3 + 6(2)^2 - a(2) + 6$

$= 40 + 24 - 2a + 6$

$= 70 - 2a$

শর্তানুসারে, $70 - 2a = 6$

বা, $2a = 70 - 6 = 64$ অর্থাৎ $a = 32$

Example 03: যদি $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ হয় এবং $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$।

সমাধান: $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$, এবং $P(x)$ কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

শর্তানুসারে,

$a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

বা, $a^3 - b^3 + 5(a^2 - b^2) + 6(a - b) = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6) = 0$

$\therefore a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0,$

যেহেতু $a \neq b$

Example 04: দেখাও যে, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি $a + b + c + d = 0$ হয়।

সমাধান: মনে করি,

$a + b + c + d = 0$

তাহলে, $P(1) = a + b + c + d = 0$ [শর্তানুসারে]।

সুতরাং, $x - 1, P(x)$ এর একটি উৎপাদক

[উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে]।

এবার মনে করি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - 1$

তবে, উৎপাদকের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$P(1)$ তাই $a + b + c + d = 0$।

মন্তব্য: $x - 1$ ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ

কোন বীজগাণিতিক রাশিকে দুই বা ততোধিক রাশির গুণফল হিসেবে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলে।

ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই:

$f(a) = 0$ ধরে $(x - a)$ নির্ণয় করি যা, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে। উৎপাদকটি ব্যবহার করে back calculation করে $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

উদাহরণ

Example 01: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

$$x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$\therefore f(-1) = 1 - 7 + 17 - 17 + 6 = 0$

এখানে, $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$

$\therefore (x + 1),\ f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 11x + 6x + 6$

$= x^3(x + 1) + 6x^2(x + 1) + 11x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

$= (x + 1)\{x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6\}$

$= (x + 1)\{x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)\}$

$= (x + 1)(x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)^2(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)^2(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x + 1)^2\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x + 1)^2 (x + 2)(x + 3)$

Example 02: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

$$18x^3 + 15x^2 - x - 2$$

সমাধান: মনে করি, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(-\frac{1}{8}\right) + 15\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 2 = 0$

এখানে, $x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

অর্থাৎ $(2x + 1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$= 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$

$= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2)$

$= (2x + 1)(9x^2 + 6x - 3x - 2)$

$= (2x + 1)(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$

একাধিক চলক বিশিষ্ট রাশির ক্ষেত্রে:

রাশিটিকে সরল করে কমন নিতে হবে/ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

Example 03: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

সমাধান: $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$
$= xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2y + x^2z + y^2z + 3xyz$
$= (xy^2 + x^2y + xyz) + (xz^2 + x^2z + xyz) + (y^2z + yz^2 + xyz)$
$= xy(x + y + z) + xz(z + x + y) + yz(z + y + x)$
$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$

Example 04: $(b + c)(c + a)(a + b) + abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $(b + c)(c + a)(a + b) + abc$
$= (bc + ab + c^2 + ac)(a + b) + abc$
$= abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + ab^2 + bc^2 + abc + abc$
$= (a^2b + ab^2 + abc) + (ac^2 + a^2c + abc) + (bc^2 + b^2c + abc)$
$= ab(a + b + c) + ac(a + b + c) + bc(a + b + c)$
$= (a + b + c)(ab + bc + ca)$

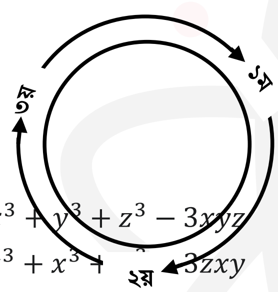
Example 05: $(x + 1)^2(y - z) + (y + 1)^2(z - x) + (z + 1)^2(x - y)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,
$(x + 1)^2 (y - z) + (y + 1)^2 (z - x) + (z + 1)^2 (x - y)$
$= (x^2 + 2x + 1)(y - z) + (y^2 + 2y + 1)(z - x) + (z^2 + 2z + 1)(x - y)$
$= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + 2x(y - z) + 2y(z - x) + 2z(x - y) + (y - z + z - x + x - y)$
$= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + 2(xy - zx + yz - xy + zx - yz) + 0$
$= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + 2 \times 0$
$= x^2(y - z) + y^2z - xy^2 + z^2x - yz^2$
$= x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y^2 - z^2)$
$= (y - z) \{x^2 + yz - x(y + z)\}$
$= (y - z)(x^2 + yz - xy - zx)$
$= (y - z)(x^2 - xy - zx + yz)$
$= (y - z) \{x(x - y) - z(x - y)\}$
$= (y - z)(x - y)(x - z)$
$= (y - z)(x - y)\{-(z - x)\}$
$= -(x - y)(y - z)(z - x)$

সমমাত্রিক বহুপদী (Homogeneous Polynomial): কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে সমমাত্রিক বহুপদী বলা হয়। উদাহরণ:
$P(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
[এখানে প্রতিটি পদের মাত্রা 3]
$Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ (এখানে প্রতিটি পদের মাত্রা 2)

প্রতিসম রাশি (Symmetric Expression): একাধিক চলক সংবলিত কোন বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুটি চলকের স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলা হয়। উদাহরণ:
$P(x, y) = x + y$
$P(y, x) = y + x = x + y$
$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
$P(y, x, z) = y^2 + x^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$P(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
$P(y, x) = y^2 + 2yx + x^2 = x^2 + 2xy + y^2$

চক্র-ক্রমিক রাশি (Cyclic Expression): তিনটি চলক সংবলিত কোনো রাশিতে প্রথম চলক দ্বিতীয় চলকের, দ্বিতীয় চলক তৃতীয় চলকের এবং তৃতীয় চলক প্রথম চলকের স্থানে বসালে রাশিটি যদি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি বলা হয়। উদাহরণ:



$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
$P(z, x, y) = z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy$

$P(x,y,z) = xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$
$P(z,x,y) = zx(z-x) + xy(x-y) + yz(y-z)$
$P(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$
$P(z,x,y) = (z-x)(x-y)(y-z)$

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ:

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, a, b, c চলকের

- কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর (a – b) একটি উৎপাদক হলে, (b – c) এবং (c – a) ও একই চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদক হবে।
- এক মাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a+b+c)$ ও $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$; যেখানে k ও m ধ্রুবক।
- দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হবে।

উদাহরণ

Example 06: $\boldsymbol{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি।

এখন, $a = b$ বসিয়ে পাই,

$bc(b-c)+cb(c-b)+b^2(b-b)$
$= bc(b-c)-bc(b-c)+0$
$= 0$

এখানে, $a = b \Rightarrow a-b=0$; অর্থাৎ $(a-b)$ রাশিটির একটি উৎপাদক।

আবার, এটি একটি চক্রক্রমিক রাশি বলে, $(\boldsymbol{b-c})$ ও $(\boldsymbol{c-a})$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

এবং প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a-b)(b-c)(c-a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। তাই এক্ষেত্রে অতিরিক্ত কোন উৎপাদকের প্রয়োজন নেই।

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)$

a,b,c এর সকল মানের জন্য এটি সত্য।

$a=1, b=2, c=0$ বসিয়ে পাই,

$0+0+2(-1) = K(-1)(2)(-1)$
$\Rightarrow -2 = 2K$
$\Rightarrow K = -1$
$\therefore bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

Example 07: $\boldsymbol{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

সমাধান: প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ বিবেচনা করে,

$P(b) = b^3(b-c)+b^3(c-b)+c^3(b-b) = 0$।

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্রক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a-b)(b-c)(c-a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্রক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি $k(a+b+c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

a,b,c এর সকল মানের জন্য ইহা সত্য।

$a=0, b=1, c=2$ বসিয়ে পাই,

$2+8(-1) = k(-1)(-1)(2)(3)$
$\therefore\ k = -1$
$\therefore a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Example 08: $\boldsymbol{(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)}$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি।

এখন, $x = y$ বসিয়ে পাই,

$(y+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-y)+(z+1)^2(y-y)$
$= (y+1)^2(y-z)-(y+1)^2(y-z)+0 = 0$

এখানে, $x = y$

$\Rightarrow\ x-y=0$; অর্থাৎ $(x-y)$ রাশিটির একটি উৎপাদক।

আবার, এটি একটি চক্রক্রমিক রাশি বলে, $(y-z)$ ও $(z-x)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।
এবং প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(x-y)(y-z)(z-x)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। তাই এক্ষেত্রে অতিরিক্ত কোন উৎপাদকের প্রয়োজন নেই।

$(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$

x, y, z এর সকল মানের জন্য এটি সত্য।

$x=1, y=2, z=0$ বসিয়ে পাই, $K=-1$

$\therefore (x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$

Example 09: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

$b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$

সমাধান: $a^2=x,\ b^2=y$ ও $c^2=z$ বসিয়ে পাই,

$=yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$

[Example 05 এর অনুরূপ]

$=-(x-y)(y-z)(z-x)$

$=-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$

$=-(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$

বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্র: a, b, c এর সকল মানের জন্য

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

আবার, $a^3+b^3+c^3-3abc$ রাশিটিকে a চলকের বহুপদী $P(a)$ ধরে $a=-(b+c)$ বসিয়ে পাই,

$P\{-(b+c)\}=-(b+c)^3+b^3+c^3+3(b+c)bc=(b+c)^3-(b+c)^3=0$

সুতরাং $a+b+c$ রাশিটির একটি উৎপাদক। যেহেতু $a^3+b^3+c^3-3abc$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্রক্রমিক বহুপদী, সুতরাং রাশিটির অপর উৎপাদক $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

অতএব, সকল a, b ও c এর জন্য

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)\}$

এখানে প্রথমে $a=1, b=0, c=0$ ও পরে $a=1, b=1, c=0$ বসিয়ে পাই,

$k=1$

এবং $2=2(k\times 2+m)$

$\Rightarrow 1=2+m$

$\Rightarrow m=-1$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

অনুসিদ্ধান্ত ১:

$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

এখানে, $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

অনুসিদ্ধান্ত ২: যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3=3abc$

অনুসিদ্ধান্ত ৩: যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়, তবে $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

হয়, $a+b+c=0$

অথবা, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

কতগুলো বর্গ রাশির সমষ্টি 0 হলে এরা পৃথক পৃথক ভাবে 0।

$(a-b)^2=0$ $\quad$ $(b-c)^2=0$

$\Rightarrow a-b=0$ $\quad$ $\Rightarrow b-c=0$

$\Rightarrow a=b$ $\quad$ $\Rightarrow b=c$

$\therefore a=b=c$

Example 10: $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: ধরি $A=a-b, B=b-c, C=c-a$

তাহলে, $A+B+C=a-b+b-c+c-a=0$

সুতরাং, $A^3+B^3+C^3=3ABC$

অর্থাৎ, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

সরল সংক্রান্ত

মূলদ ভগ্নাংশ: একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমনঃ

$\frac{x}{(x-a)(x-b)}$ এবং $\frac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

Example 01: সরল কর:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

সমাধান: $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=-\frac{a}{(a-b)(c-a)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$

$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

Example 02: সরল কর:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

সমাধান: প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}$

$=\frac{a+b-c}{a+b+c}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(a+b-c)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(a+b+c)(b+c-a)}=\frac{c+a-b}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{b+c-a}{a+b+c}+\frac{c+a-b}{a+b+c}$

$=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}$

$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$

Example 03: সরল কর:

$$\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)}+\frac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)}+\frac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$

$=\frac{(ax+1)^2(y-z)+(ay+1)^2(z-x)+(az+1)^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots (i)$

এখানে (i) এর লব $(a^2x^2+2ax+1)(y-z)+(a^2y^2+2ay+1)(z-x)+(a^2z^2+2az+1)(x-y)$

$=a^2\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+2a\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}+\{(y-z)+(z-x)+(x-y)\}$

কিন্তু $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$

তদুপরি, $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0$ এবং $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$

$\therefore (i)$ এর লব $-a^2(x-y)(y-z)(z-x)$।

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\frac{-a^2(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=-a^2$

Example 04: সরল কর: $\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{a^8-x^8}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির তৃতীয় ও চতুর্থ পদের যোগফল

$=\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{a^8-x^8}$

$=\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{(x^4+a^4)(a^4-x^4)}$