



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

گزارشکار

فرآیندهای تصادفی

عنوان

شبیه سازی شکل گیری نبات

نگارش

مبین اسعدی

استاد راهنما

دکتر حسین عباسی

بهمن ۱۴۰۲

## چکیده

در این گزارش به نحوه شکل گیری نبات با استفاده از رویکرد ولگشت<sup>۱</sup> می پردازیم. بدین منظور ابتدا مسئله را در دو بعد مدل کردیم و سپس با استفاده از دیدگاه ترمودینامیکی، مسئله را به سه بعد بسط دادیم. پس از آن نمایی از نبات را به تصویر کشیدیم. در آخر با توجه به اینکه تعدادی خلل در ساختار شبیه سازی شده وجود داشت به دلایل احتمالی این مشکل و پیشنهاداتی برای رفع آن پرداختیم.

کلمات کلیدی:

فرآیندهای تصادفی<sup>۲</sup>، ولگشت، نبات

---

<sup>۱</sup>Random walk

<sup>۲</sup>Stochastic Processes

## سخنی با خواننده

امیدوارم این گزارش کنجکاوی شما را در راستای شبیه سازی پدیده های اطرافتان برانگیزد. در صورت تمایل می توانید کدهایی که در این پروژه استفاده کردم را از طریق گیت هاب من دانلود کنید. در صورتی که هرگونه پیشنهاد و یا انتقادی در رابطه با روش مورد استفاده من داشتید، لطفاً با من به اشتراک بگذارید.

## فهرست مطالب

۲	۱	مقدمه
۲	۱.۱	نحوه درست کردن نبات . . . . .
۳	۲	روش پیشنهادی
۴	۱.۲	حالت دو بعدی . . . . .
۴	۲.۲	حالت سه بعدی . . . . .
۶	۳	نتیجه‌گیری
۷		کتاب‌نامه

## فهرست تصاویر

۳	۱.۲	محفظه مکعب مستطیلی و یک لایه افقی آن . . . . .
۴	۲.۲	۱۰ مولکول های شکر که به صورت تصادفی در صفحه پراکنده شده اند . . . . .
۵	۳.۲	۵ مرحله از حرکت ۱۰ مولکول شکر در صفحه . . . . .
۵	۴.۲	سه نمای مختلف از شکل بدست آمده. . . . .
۶	۱.۳	ساختار نبات شبیه سازی شده در برابر نبات . . . . .

# فصل ۱

## مقدمه

در درس فرآیند های تصادفی تلاش به بررسی پدیده های طبیعی با استفاده از مفهوم تصادف<sup>۱</sup> کردیم. در این گزارش نیز تلاش داریم در ابتدا حرکت مولکول های شکر در آب و نحوه ی شکل گیری نبات در صفحه ی دو بعدی را بررسی کنیم. در آخر نیز نحوه ی چینش مولکول های شکر در ساختار سه بعدی نبات را بررسی کنیم.

### ۱.۱ نحوه درست کردن نبات

برای درست کردن نبات، ابتدا مقداری آب را گرم می کنیم تا به جوش آید. سپس به قدری شکر را در آب حل می کنیم تا یک محلول اشباع از آب شکر درست شود. در ادامه یک تکه چوب کوچک یا نخ را در داخل ظرف قرار می دهیم و دمای آب را کم می کنیم تا یک محلول فوق اشباع از آب شکر داشته باشیم. مرحله نهایی تولید نبات، قرار دادن ظرف محلول مورد نظر در یک مکان ثابت و صبر کردن برای تشکیل شدن نبات است [۱].

---

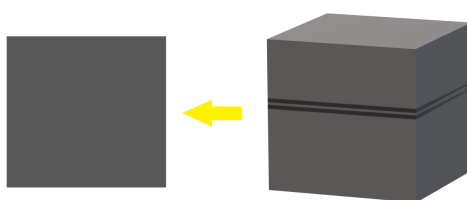
<sup>۱</sup>Randomness

## فصل ۲

### روش پیشنهادی

محلولی که برای تولید نبات با آن کار می کنیم، فوق اشباع است. به همین خاطر می توان حرکت مولکول های شکر در آب را به شکل حرکت آزادانه مولکول های یک گاز در یک محفظه در نظر گرفت. این ذرات تنها اثر گرانش را حس می کنند. با توجه به اینکه تمام توان آب پوشانی حلال در محلول اشباع اعمال شده است، منطقی است که از تأثیر مولکول های آب بر مولکول های شکر چشم پوشانی کنیم. روش پیشنهادی ما برای بررسی این فرآیند به این شکل است.

روش پیشنهادی یک محفظه به شکل مکعب مستطیل در نظر می گیریم (این انتخاب صرفاً به منظور ساده تر شدن برنامه نویسی شبیه سازی است و در صفحه های افقی هیچ ارجعیتی بین جهت ها وجود ندارد؛ به عبارت دیگر مسئله همسانگرد<sup>۱</sup> است). محفظه را به تعداد دلخواهی از صفحه های دو بعدی تقسیم می کنیم. توجه کنید که به طور کلی با افزایش تعداد صفحات وضوح تصویر بیشتری خواهیم داشت و در فرآیند کلی شبیه سازی تداخلی ایجاد نخواهد کرد. یکی از این صفحات در شکل ۱.۲ رسم شده است.



شکل ۱.۲: محفظه مکعب مستطیلی و یک لایه افقی آن

می توان به جای بررسی کردن حرکت مولکول های شکر در این فضای سه بعدی حرکت آنها را در هر یک از این صفحات بررسی کرد و در آخر این صفحات را به یکدیگر متصل کرد. به همین خاطر، اول به بررسی حرکت مولکول های شکر در دو بعد و سپس در سه بعد می پردازیم. قبل از اینکه حالت دو بعدی را بررسی کنیم باید به این سوال پاسخ دهیم که هر یک از صفحات چه سهمی از تعداد کل مولکول های شکر موجود در ظرف را دارد. با توجه به شباهتی که بین این مسئله و مسئله تعداد مولکول های یک گاز ایده آل تحت تأثیر گرانش در محفظه

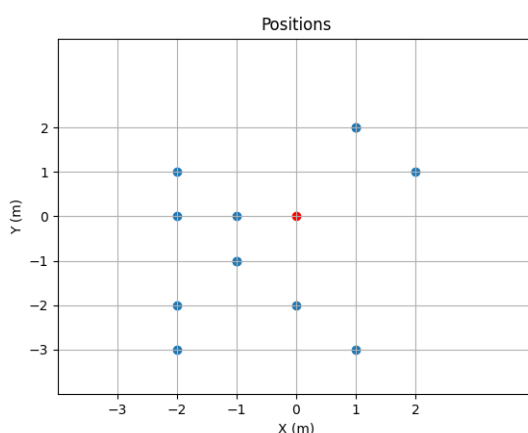
<sup>۱</sup>Isotropic

وجود دارد، در اینجا نیز تعداد مولکول های هر صفحه با افزایش ارتفاع به صورت نمایی کاهش می یابد.

$$N(z) = N_0 e^{-\beta z} \quad (1.2)$$

## ۱.۲ حالت دو بعدی

در مرحله اول ابتدا یکی از صفحات را در نظر می گیریم و به صورت کاملاً تصادفی مولکول های شکر را در صفحه پراکنده می کنیم (به شکل ۲.۲ نگاه کنید). در این حالت ۱۰ مولکول شکر، که با رنگ آبی نشان داده شده اند، به صورت کاملاً تصادفی در صفحه پراکنده شده اند. نقطه قرمز رنگ که در مبدأ مختصات قرار گرفته است نماینده تکه چوبی است که نبات دور آن شکل می گیرد.



شکل ۲.۲: ۱۰ مولکول های شکر که به صورت تصادفی در صفحه پراکنده شده اند

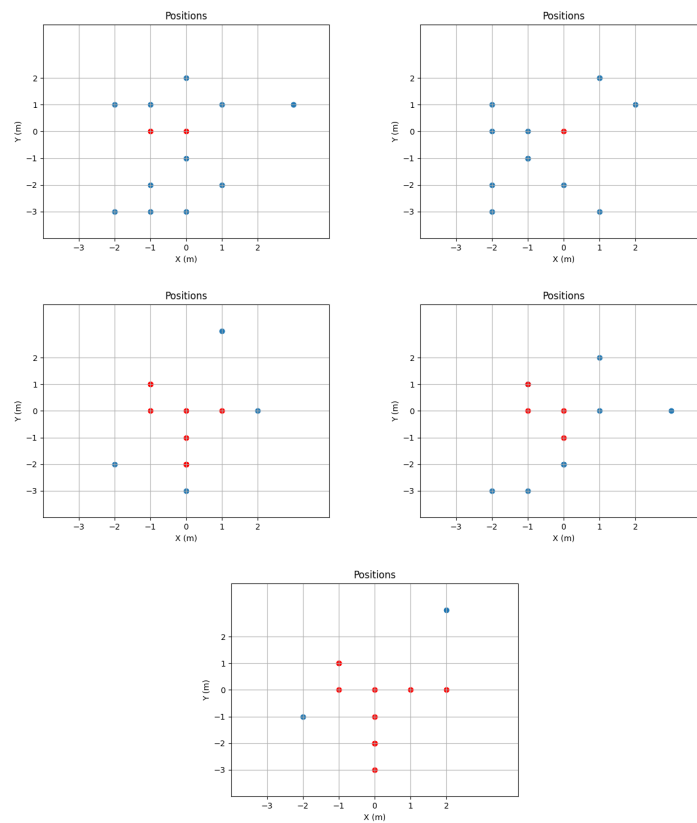
در هر مرحله تمام مولکول های آزاد شکر<sup>۲</sup> که به ساختار متصل نشده اند، به صورت کاملاً تصادفی به یکی از چهار خانه مجاورشان سفر می کنند. در صورتی که مولکول های شکر در همسایگی چوب و یا مولکول های شکر که در مراحل قبل به چوب متصل شده اند<sup>۳</sup> قرار گیرند، خودشان نیز به ساختار متصل می شوند و ثابت می شوند. شکل ۳.۲ پنج مرحله از حرکت ۱۰ مولکول شکر در صفحه را نشان می دهد.

## ۲.۲ حالت سه بعدی

برای ادامه مسیر تنها لازم است که موقعیت مولکول های شکر را در تعدادی صفحه دو بعدی محاسبه و رسم کنیم سپس با اتصال این تصاویر روی یکدیگر، یک ساختار سه بعدی از نبات را بدست آوریم. در این مرحله تعداد مولکول های موجود در پایین ترین صفحه  $N_0 = 900$  را به عنوان معیار در عبارت ۱.۲ در نظر گرفتیم و  $\beta = \frac{1}{30}$  را در نظر گرفتیم. به عبارتی دیگر رابطه تعداد با ارتفاع به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

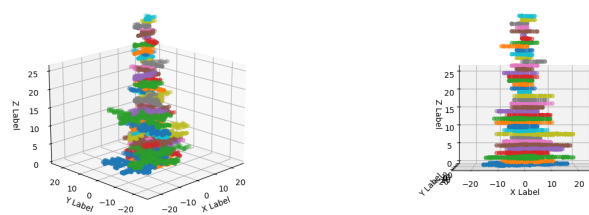
$$N(z) = 900 \exp\left(\frac{-z}{30}\right) \quad (2.2)$$

<sup>۲</sup> این مولکول ها با رنگ آبی نمایش داده شده اند.  
<sup>۳</sup> این مولکول ها با رنگ قرمز نمایش داده شده اند.



شکل ۳.۲: ۵ مرحله از حرکت ۱۰ مولکول شکر در صفحه

تعداد قدم های هر مولکول در هر صفحه را ۹۰ قدم در نظر گرفتیم. شکل ۴.۲ نتیجه نهایی این محاسبات را از چند زاویه مختلف نشان می دهد.



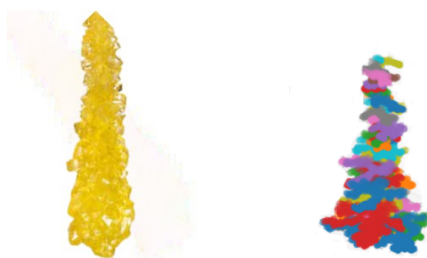
شکل ۴.۲: سه نمای مختلف از شکل بدست آمده.



## فصل ۳

### نتیجه‌گیری

در انتها با توجه به شباهتی که بین تصویر شبیه سازی شده و نبات وجود دارد (به شکل ۱.۳ نگاه کنید)، می‌توان گفت که روش مورد استفاده به طور کلی موفق است. اما با نگاه دقیق‌تر به شکل ۳.۲ متوجه می‌شویم که شبیه سازی انجام شده یک ناسازگاری با واقعیت دارد. این ناسازگاری فضاهای خالی است که در ساختار وجود دارد. این ناسازگاری و حل آن را در مطالعات آینده بررسی خواهیم کرد.



شکل ۱.۳: ساختار نبات شبیه سازی شده در برابر نبات

## کتابنامه

- [1] The Sweet Science of Candymaking. by Tom Husband. October 2014.