به نام خدا

تمرین کامپیوتری دوم بهینه سازی محدب

دکتر یاسایی

مبین خطیب

۹۹۱۰۶۱۱۴

۱ برآورد درست نمایی بیشینه

:۱.۱

log-likelihood برای مشاهده N_t رخداد برابر است با :

$-\lambda_t - N_t \log \lambda_t + \log N_t!$

از آنجایی که این رخداد ها به دلیل توزیع پواسون مستقل هستند میتوانیم همه این ۲۴ رخداد را با هم در نظر بگیریم که بتوانیم به محاسبه log-likelihood نزدیک تر شویم بنابراین negative log-likelihood برای مجموعه مشاهدات رویداد ها برابر است با :

$$\Sigma_{t=1}^{24} = \lambda_t - N_t \log \lambda_t + \log(N_t!) \tag{1}$$

بنابراین تخمین بیشینه درست نمایی برای λ_t مینیمم خواهد کرد negative log-likelihood روی مشاهدات $N_1, ..., N_{24}$ که این مینیمایز کردن با حل مسئله بهینه سازی زیر برای $\lambda_1, ..., \lambda_{24}$ انجام خواهد شد:

$$\begin{aligned} \text{minimize } \Sigma_{t=1}^{24} &= \lambda_t - N_t \log \lambda_t + \log(N_t!) \\ \text{subject to } \lambda &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

اما در پاسخ بالا $N_t = 0$ کاور نمیشود چون فقط $\lambda_t > 0$ در نظر گرفته ایم برای این حالت میتوانیم مینیمایزشن را روی هر λ_t انجام دهیم اول فرض میکنیم $N_t > 0$ باشد آنگاه مینیمایزر $N_t/\lambda_t = 0$ − ۱ را ارضا خواهد کرد بنابراین $\lambda_t = N_t$ برای $N_t = 0$ خواهد بود در واقع ما λ_t را به قید $\lambda_t \geq 0$ مینیمایز کردیم که در نتیجه این خواهیم داشت $\lambda_t = 0$ بنابراین در همه حالت ها تخمین ML ما خواهد بود $N_t = \lambda_t$ در واقع اگر مشاهدات ما N_t رخداد باشد احتمالا میانگین این اتفاق ها رخ داده است.

.۱.۲

برای این کار باید مسئله بهینه سازی زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \left(\sum_{t=1}^{24} (\lambda_t - N_t \log \lambda_t) + \sum_{t=1}^{23} (\lambda_{t+1} - \lambda_t)^2 + (\lambda_1 - \lambda_{24})^2 \right) \\ & \text{subject to } \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

به طوری که $\lambda \in R^{24}$ ترم ثابت را در نظر نگرفتیم چون وابسته به λ_t نیست

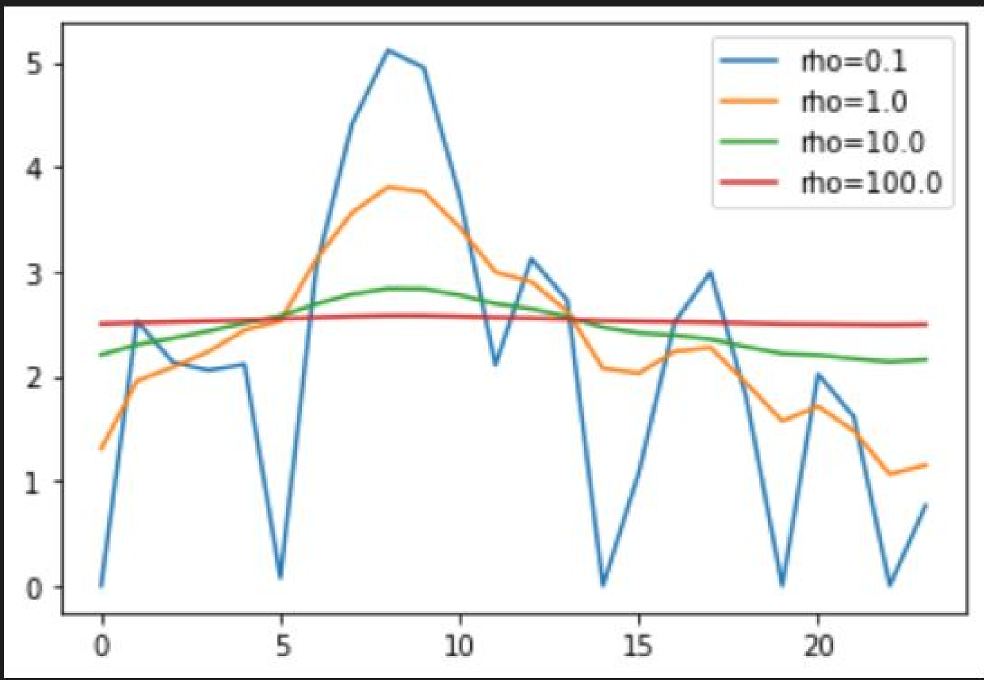
۱.۳: هرچه $\rho \to \infty$ میل دهیم λ_t ها به برابری نزدیک تر میشوند بنابراین وقتی داشته باشیم $\lambda = \tilde{\lambda} \mathbf{1}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{minimize} \quad 24\tilde{\lambda} - \left(\sum_{t=1}^{24} N_t \log(\tilde{\lambda}) \right) \quad \text{subject to} \quad \tilde{\lambda} \geq 0 \tag{4}$$

در واقع راه حل ما مدل پواسون در حالت ثابت است که در آن $\lambda_t = \tilde{\lambda} = \bar{N} = \Sigma_i N_i / 24$ که این میانگین رخداد های هر ساعت از روز که در کل روز رخ داده میباشد.

:۱.۴،۵

```
rho = 100, log likelihood = -43.76226937992665
```



۲ سطوح فعالیت بهینه

:۲.۱

مسئله بهینه سازی را میتوانیم به صورت زیر عنوان کنیم:

$$\text{maximize} \quad \left(\sum_{j=۱}^{n} r_j(x_j)\right) \quad \text{subject to} \quad x \geq ۰ \quad Ax \leq c^{max} \tag{۵}$$

اگر به مسئله بالا دقت کنیم میبینم که تابع هدف مسئله ما مقعر است و در اینجا مجموعه نامساوی خطی همان تابع constraint ماست و برای تبدیل به فرم LP تعریف میکنیم تابع زیر را به شکل:

$$\min \quad \left(p_j x_j, p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j)\right) \tag{۶}$$

که در نتیجه r_j مقعر است و همچنین میتوانیم بگوییم که $r_j(x_j) \geq u_j$ است اگر و تنها اگر:

$$p_j(x_j) \geq u_j, p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq u_j \tag{۷}$$

آنگاه با توجه به شرایط بالا میتوانیم فرم LP را تشکیل دهیم:

$$\begin{array}{c} \text{maximize} \quad \left(\mathbf{۱}^T u\right) \\ \text{subject to} \quad x \geq ۰ \\ Ax \leq c^{max} \\ p_j(x_j) \geq u_j, \\ p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq u_j \end{array}$$

حال فقط میماند درست کردن x، آخرین مجموعه محدودیت‌ها در LP تضمین می‌کند که $u_i \leq r_i(x)$ ، که میتوانیم تساوی زیر را جایگزین عبارت پیشین کنیم

$$ui = ri(x)$$

را بگیریم، در این صورت دو هدف یکسان هستند.

:۲.۲

```
x.value =
 [[ 3.99999996]
 [22.49999989]
 [30.99999995]
 [ 1.50000005]]
r =
 [[ 11.99999989]
 [ 32.49999989]
 [138.99999981]
 [  9.00000032]]
tot_r =
 [192.49999991]
avgPrice  =
 [[3.        ]
 [1.44444445]
 [4.48387097]
 [6.        ]]
```

:۳.۱

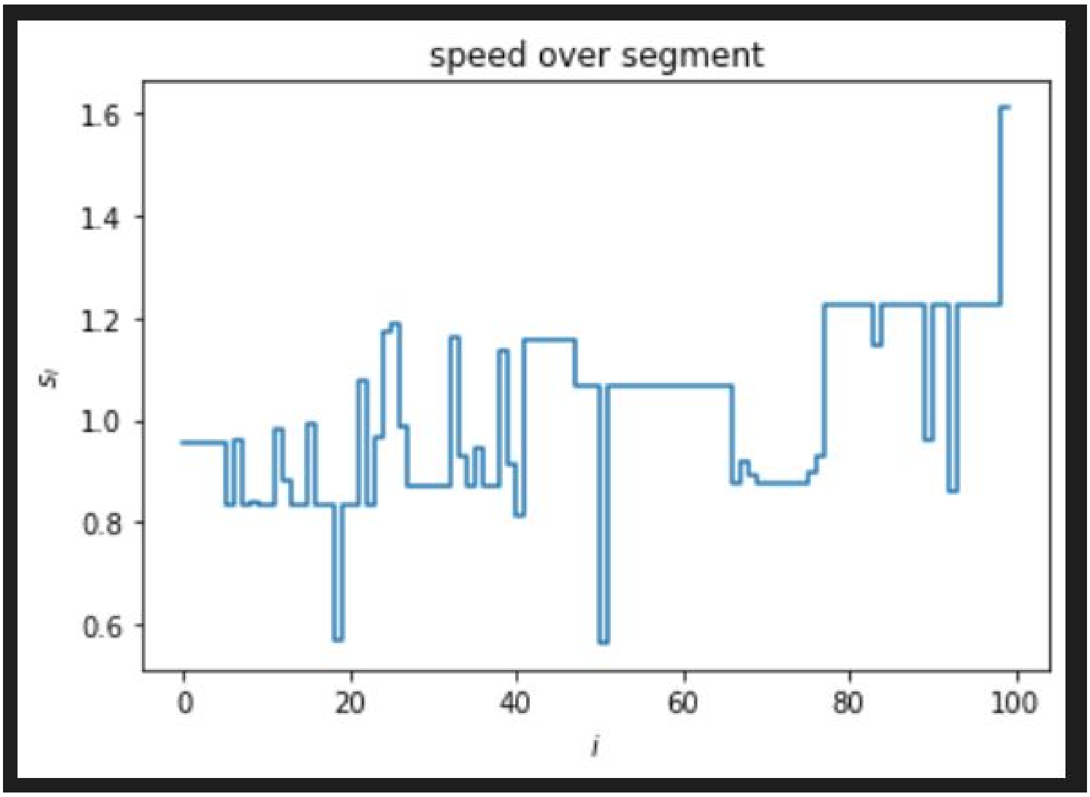
سوختی که برای بخش i ام مصرف شده برابر است با $d_i/s_i\Phi(s_i)$ بنابراین مجموع سوخت استفاده شده برابر است با $\Sigma_{i=1}^{n} d_i/s_i\Phi(s_i)$ وسیله نقلیه در زمان $\tau_i = \Sigma_{j=1}^{i} d_j/s_j$ به نقطه i میرسد بنابراین مسئله بهینه سازی ما به شکل:

$$\begin{gathered}\text{minimize} \quad (\Sigma_{i=1}^{n} d_i/s_i\Phi(s_i)) \\ \text{subject to} \quad s_i^m in \leq s_i \leq s_i^m ax(i = 1, ..., n) \\ \tau_i^m in \leq \Sigma_{j=1}^{i} d_j/s_j \leq \tau_i^m ax(i = 1, ..., n)\end{gathered}$$

این مسئله یک مسئله محدب نیست تابع هدف ما باید در s_i محدب باشد و همچنین نا برابری ها محدب نیستند با تغییر متغیر میتوانیم این ضعف ها را بپوشانیم. اگر تعریف کنیم $x_i = d_i/s_i$ آنگاه مسئله بهینه سازی ما به شکل:

$$\begin{gathered}\text{minimize} \quad (\Sigma_{i=1}^{n} x_i\Phi(d_i/x_i)) \\ \text{subject to} \quad d_i/s_i^m ax \leq x_i \leq d_i/s_i^m in(i = 1, ..., n) \\ \tau_i^m in \leq \Sigma_{j=1}^{i} x_j \leq \tau_i^m ax(i = 1, ..., n)\end{gathered}$$

این مسئله محدب است تابع $x_i\Phi(d_i/x_i)$ پرسپکتیوی از Φ محدب است بنابراین تابع هدف ما محدب است چون جمع وزن های توابع محدب است و همچنین constraint های ما در x خطی هستند و اگر مسئله را برای x_i* حل کنیم سرعت بهینه را با استفاده از $s_i* = d_i/x_i*$ بدست خواهیم آورد. :۳.۲



:۴.۱

$۱/x$ محدب نیست مگر اینکه دامنه را به R^{++} محدود کرد در واقع میتوانیم بنویسیم $invpos(x) + invpos(y)$ که تابع invpos دامنه اش R^{++} بنابراین قید های $x \geq ۰, y \geq ۰$ را شامل خواهد شد.

:۴.۲

xy مقعر نیست ولی میتوانیم قیدمان را به شکل $x \geq invpos(y)$ بنویسیم همچنین اگر در اینجا جای x ، y را عوض کنیم باز هم همه چیز اوکی خواهد بود.

:۴.۳

اینجا هم مسئله وقتی مشکل دار خواهد شد که میخواهیم یک تابع محدب را بر مقعر تقسیم کنیم.اگر بنویسیم: $quadoverlin(x + y, sqrt(y)) \leq x - y + ۵$ چون تابع quadoverlin در آرگومان دوم یکنواخت کاهش می یابد، بنابراین می تواند یک تابع مقعر را در اینجا بپذیرد، و sqrt مقعر است :۴.۴

مشکل اینجاست که xy مقعر نیست، که باعث می شود CVX دستور را رد کند.برای اصلاح این موضوع: $\sqrt{xy - z^۲} = \sqrt{y(x - z^۲/y)}$ حال میتوانیم قید ها را به شکل زیر فرمول بندی کنیم: $x + z <= ۱ + geomean([x - quadoverlin(z, y), y])$ این کار می کند، زیرا geomean در هر آرگومان مقعر و بدون کاهش است. بنابراین یک تابع مقعر را در آرگومان اول خود می پذیرد.