



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه ۱ - سیگنال‌ها و سیستم‌ها - بهار ۱۴۰۰-۰۱

تمرین تئوری سری دوم

موعد تحویل: مطابق تاریخ اعلام شده در درس افزار

توجه: تحویل تمامی تمارین الزامی است. همچنین تحویل تکالیف به صورت گروهی بوده و تحویل تنها یک عضو از گروه کافی است.

۱ بررسی خواص تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال‌های $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ ، $y_2[n] = x[n] - x[n-1]$ و $y_3[n] = \begin{cases} x[n] & n = 2k \\ 0 & n \neq 2k \end{cases}$ را بر حسب تبدیل Z سیگنال $x[n]$ بیابید. ناحیه‌ی همگرایی آن‌ها را نیز بررسی کنید.

۲ سیستم LTI

سیستمی LTI و علی، پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ دارد که تبدیل Z آن برابر است با

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

الف) ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z سیگنال h را بیابید.

ب) آیا این سیستم پایدار است؟

ج) تبدیل Z ورودی‌ای را بیابید که خروجی این سیستم به آن ورودی، برابر

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

می‌شود.

د) پاسخ ضربه‌ی سیستم را به دست آورید.

۳ چند خاصیت تبدیل Z

۱.۳ قضیه‌ی مقدار نهایی

اگر $x[n]$ ، یک سیگنال دست‌راستی باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ نیز موجود باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

توجه: در حالت خاصی که $X(z)$ گویا باشد، شرط گفته‌شده برای رابطه‌ی فوق را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد که «ناحیه‌ی همگرایی $X(z)$ دست راستی باشد و همه‌ی قطب‌های $(1 - z^{-1})X(z)$ در درون دایره‌ی واحد باشند.»

۲.۳ هم‌بستگی دو سیگنال

اگر $x[n]$ و $y[n]$ ، سیگنال‌هایی حقیقی باشند، هم‌بستگی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l]$$

نشان دهید که تبدیل Z سیگنال r_{xy} برابر است با:

$$R_{xy}(z) = X(z)Y(z^{-1})$$

که در آن X و Y ، تبدیل Z سیگنال‌های x و y هستند.

در مورد ناحیه همگرایی تبدیل Z فوق چه می‌توان گفت؟

۴ وارون تبدیل Z

وارون تبدیل Z هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

• $X(z) = \sin(z)$ که ROC آن شامل دایره واحد است.

• $X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$ با فرض دست چپی بودن سیگنال.

۵ محاسبه تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های «تناوبی» علی را می‌توان بر حسب تبدیل لاپلاس اولین تناوب آن‌ها بیان کرد. فرض کنید سیگنال **Finite Duration** $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s)$ باشد. تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را، بر حسب $X(s)$ بیابید.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t - kT)$$

۶ حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس

پاسخ ضربه‌ی هر یک از سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید. فرض کنید شرط **Initial Rest** برای آن‌ها برقرار است.

(الف)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 24y = 5\frac{dx}{dt} + 3x(t)$$

(ب)

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 4\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt} + 2x(t)$$

۷ تبدیل Z سیگنال نمونه‌برداری شده

سیگنال پیوسته‌ی $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $X(s)$ را در نظر بگیرید. تبدیل Z سیگنال $x[n] = x(nT)$ را بر حسب $X(s)$ به دست آورید. در مورد ناحیه همگرایی آن چه می‌توان گفت؟ به کمک رابطه‌ای که بین ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس و تبدیل Z به دست آوردید، بررسی کنید که پایداری و علی بودن سیستم بعد از نمونه‌برداری چه تغییری می‌کند. آیا این نتایج منطقی هستند؟

۸ نمونه‌برداری با قطار ضربه

سیگنال $x(t)$ ، یک سیگنال نمونه‌برداری شده با دوره‌ی نمونه‌برداری T ، با تعریف زیر می‌باشد:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nT} \delta(t - nT)$$

الف) تابع $X(s)$ و ناحیه‌ی همگرایی آن را به دست آورید.

ب) نمودار قطب و صفر $X(s)$ را رسم کنید.

۹ محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس

در برخی از کاربردهای پردازش سیگنال، با دسته‌ای از سیگنال‌ها به فرم

$$\phi_n = e^{-t/2} L_n(t) u(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

مواجه می‌شویم که

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

الف) نشان دهید که توابع $L_n(t)$ ، چند جمله‌ای هستند.

ب) تبدیل لاپلاس سیگنال $\phi_n(t)$ را به دست آورید.