

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق



۲۵۷۴۲ گروه ۲ - سیگنال‌ها و سیستم‌ها - زمستان ۱۴۰۰

## تمرین متلب سری اول

موعد تحویل: مطابق با سامانه CW

## نحوه‌ی تحویل:

- گزارش تمرین خود را حتما در قالب یک فایل pdf. تایپ شده تحویل دهید (در صورتی که تمرین گزارش نداشته باشد یا گزارش در قالب فایل pdf. نباشد و یا دستنویس باشد، تمرین شما تصحیح نمی‌گردد). در گزارش لازم است تمامی خروجی‌ها و نتایج نهایی، پرسش‌های متن تمرین، و توضیح مختصری از فرآیند حل مسأله‌ی خود در هر قسمت را ذکر کنید. ارائه گزارش منظم و استاندارد بخش مهمی از نمره را تشکیل می‌دهد.
- کد کامل هر سوال تمرین را در قالب یک فایل m. جداگانه تحویل دهید. لازم است بخش‌های مختلف هر سوال در section های مختلف تفکیک شوند و کد تحویلی منظم و دارای کامنت‌گذاری مناسب باشد. بدیهی است آپلود کردن کدی که به درستی اجرا نشود، به منزله‌ی فاقد اعتبار بودن نتایج گزارش شده نیز می‌باشد.
- توابعی را که (در صورت لزوم) نوشته‌اید، حتما در انتهای کد ضمیمه کنید و از ایجاد فایل جدای m. برای آنها خودداری کنید.
- مجموعه‌ی تمامی فایل‌ها (گزارش، کد اصلی، توابع، و خروجی‌های دیگر در صورت لزوم) را در قالب یک فایل zip/.rar. ذخیره کرده و از طریق سامانه CW تحویل دهید.
- تمرین‌های متلب به صورت گروه‌های دو نفره هستند. در فایل گزارش حتما نام هر دو هم‌گروهی نوشته شده و از هر گروه تنها یک نفر تمرین رو دار سامانه CW آپلود کند.
- نام‌گذاری فایل‌های تحویلی را به صورت HW01\_StudentNumber1\_StudentNumber2.pdf/.m/.zip/.rar انجام دهید.

## معیار نمره‌دهی:

- ساختار مرتب و حرفه‌ای گزارش
- استفاده از توابع و الگوریتم‌های مناسب
- پاسخ به سؤالات تئوری و توضیح روش‌های مطلوب سوال
- کد و گزارش خروجی کد برای خواسته‌های مسأله

## نکات تکمیلی:

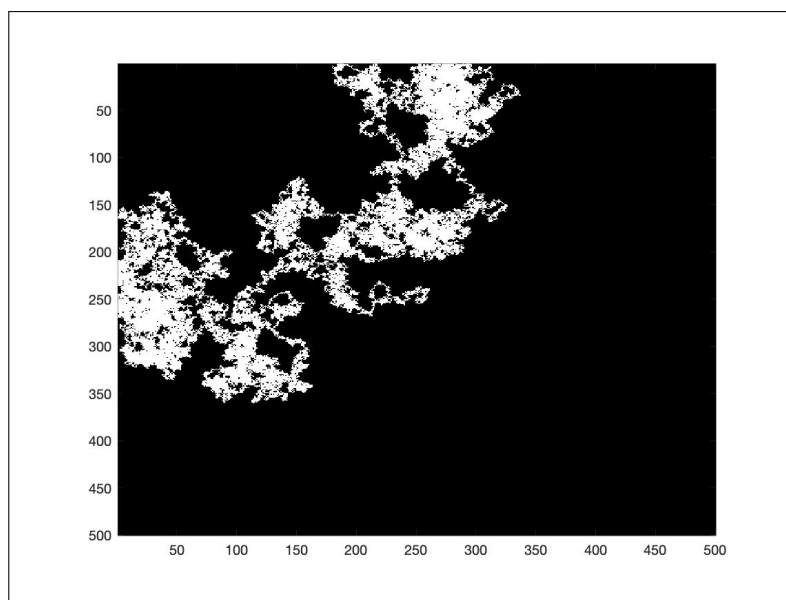
- همواره در تمامی تمارین، نمره اضافی برای قسمت‌های امتیازی و روش‌های ابتکاری در نظر گرفته می‌شود که این نمره برای این تمرین مجموعاً ۰.۲۵ از نمره می‌باشد.
- شرافت انسانی ارزشی به مراتب والاتر از تعلقات دنیوی دارد. رونویسی تمارین، زیر پا گذاشتن شرافت خویشتن است؛ به کسانی که شرافتشان را زیر پا می‌گذارند هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

## ۱ Diffusion-Limited Aggregation

Diffusion-Limited Aggregation فرآیندی است که در طی آن ذراتی که با حرکت براونی حرکت می‌کنند، با یکدیگر ترکیب شده و خوشه‌هایی تشکیل می‌دهند. به کمک این فرآیند می‌توان پدیده‌هایی مانند تشکیل دانه‌های برف، تسکیل کریستال‌ها، رعد و برق و مسیر حرکت الکترون‌ها هنگام فروریزش دی‌الکتریک را شبیه‌سازی کرد. در این تمرین سعی داریم که نمونه‌هایی از این فرآیند را شبیه‌سازی کنیم.

### ۱.۱ Random walk

random walk فرآیندی تصادفی می‌باشد که توصیف‌کننده مسیری است که طی مراحل و گام‌های تصادفی ایجاد شده است. این گام‌ها بسته به پدیده مورد شبیه‌سازی می‌توانند هر توزیعی داشته باشند. شکل زیر مربوط به مسیر حرکت در فرآیندی می‌باشد که در آن، احتمال حرکت به اندازه یک واحد در راستای عمودی و افقی (هر هشت جهت) برابر است. نمونه‌ای از این فرآیند تصادفی را برای تعداد مراحل قابل توجهی تکرار کرده و نمونه‌ای از خروجی خود را در گزارش بیاورید.



شکل ۱: نمونه‌ای از Random Walk

### ۲.۱ Brownian tree

برای تشکیل خوشه‌بندی در فرآیند Diffusion-Limited Aggregation، تعدادی پایه اولیه در فضا قرار می‌گیرند، سپس نقاطی با حرکت تصادفی شروع به حرکت می‌کنند و در صورت برخورد با پایه اولیه خوشه‌ها یا خوشه‌های تشکیل شده، به خوشه اضافه می‌شوند. شکل خوشه تشکیل شده به فاکتورهای زیر بستگی دارد:

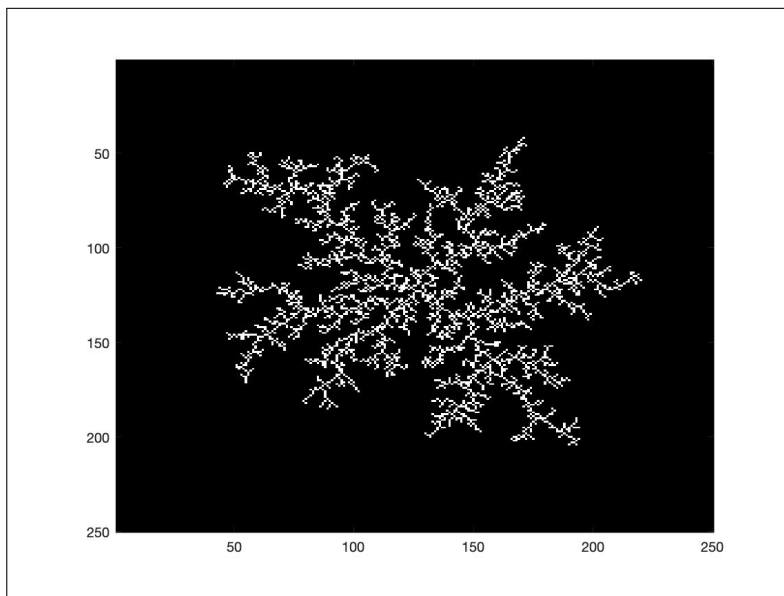
۱. مکان قرارگیری نقاط پایه خوشه‌ها

۲. محل شروع random walk ذرات متحرک

۳. الگو و الگوریتم حرکت ذرات (توزیع احتمال جهت و سرعت حرکت، اندازه ذرات و میرایی ذرات و ...)

در شکل ۲ پیکسل واقع در مرکز تصویر، پایه خوشه تشکیل شده می‌باشد. در هر مرحله یک random walk (مانند بخش قبل) از نقطه‌ای رندم در تصویر آغاز می‌شود. در هر مرحله در صورتی که در یکی از هشت خانه همسایه ذره نقطه‌ای از خوشه قرار داشته باشد، فرآیند حرکت متوقف شده و ذره به خوشه می‌پیوندد.

در این بخش یک خوشه را مانند فرآیند ذکر شده تشکیل دهید و تصویر آن را در گزارش خود بیاورید.



شکل ۲: نمونه‌ای از خوشه تشکیل شده

### ۳.۱ بهبود الگوریتم

همانطور که در بخش قبل دیدید، فرآیند تشکیل خوشه بسیار کند می‌باشد. راهکارهایی برای سریع‌تر شکل گرفتن خوشه ارائه دهید و با اعمال آن‌ها، خروجی انیمیشنی فرآیند تشکیل خوشه را به فرمت gif. در فایل تحویلی خود قرار دهید.

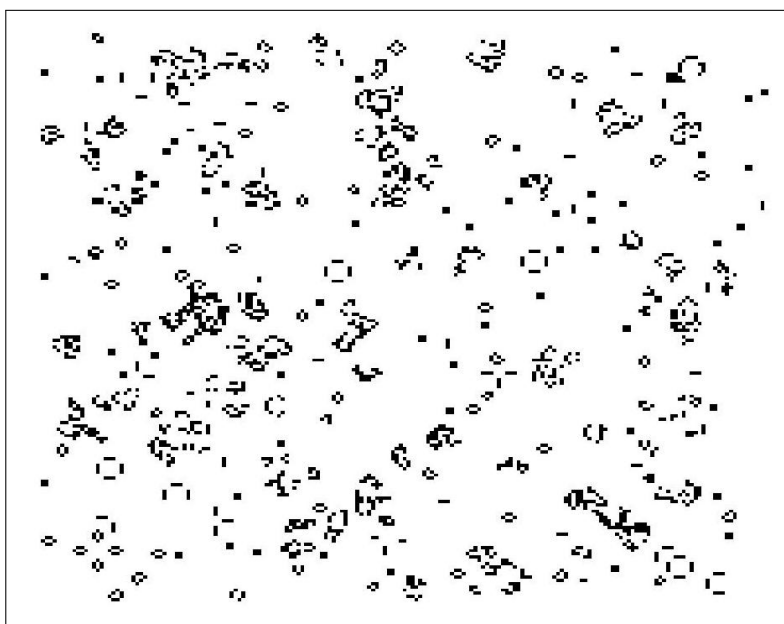
### ۴.۱ Lichtenberg figures (امتیازی)

با درباره Lichtenberg figures و چگونگی تشکیل آن‌ها تحقیق کرده و در گزارش خود خلاصه‌ای بنویسید. توضیح دهید که با چه تغییراتی در الگوریتم فرآیند تشکیل خوشه‌ها می‌توان این طرح‌ها را شبیه‌سازی کرد و با اعمال تغییرات لازم این طرح‌ها را شبیه‌سازی کنید. تصویر نمونه‌ای از خروجی خود را در گزارش خود بیاورید.

## ۲ Conway's Game of Life

Conway's Game of Life یک اتوماتای سلولی متشکل از یک ماتریس دو بعدی می‌باشد. هر یک از خانه‌های ماتریس یکی از دو حالت زنده یا مرده را دارند. هر مرحله از بازی بر اساس وضعیت تمام خانه‌های مرحله قبل تعیین می‌شود، به طوری که در هر مرحله تحولات زیر رخ می‌دهد:

۱. هر سلول زنده با کمتر از ۲ همسایه زنده می‌میرد (به دلیل کمبود جمعیت).
  ۲. هر سلول زنده با بیشتر از ۳ همسایه زنده می‌میرد (به دلیل ازدحام جمعیت).
  ۳. هر سلول زنده با ۲ یا ۳ همسایه زنده می‌ماند و به مرحله بعد می‌رود.
  ۴. سلول‌های مرده (خانه‌های خالی ماتریس) با دقیقاً ۳ همسایه زنده، در مرحله بعد زنده می‌شود.
- در تمامی مراحل منظور از همسایه‌های هر خانه، ۸ خانه اطراف آن می‌باشد. در ابتدای بازی ماتریسی تصادفی به عنوان بذر بازی ایجاد می‌شود و سپس بر اساس آن، وضعیت خانه‌ها در مراحل بعدی تعیین می‌شود.
- در این بخش از تمرین تابعی بنویسید که با گرفتن ماتریس حالت هر مرحله (درایه‌های یک معادل زنده و صفر معادل مرده)، ماتریس مرحله بعد را در خروجی بدهد.
- انیمیشن این فرآیند را به تعداد مراحل مناسب و به ازای ابعاد مناسب ماتریس ایجاد کرده و به فرمت gif. در فایل تحویلی خود قرار دهید و تصویری از آن را در گزارش خود قرار دهید.
- امتیازی:** تابع مورد نظر را با استفاده از محاسبات ماتریسی و بدون استفاده از حلقه (که هدف آن پیمایش تک تک درایه‌ها می‌باشد) بنویسید و چگونگی عملکرد تابع را در گزارش توضیح دهید.



شکل ۳: نمونه‌ای از خروجی Conway's Game of Life

### ۳ تحلیل سیستم‌ها با استفاده از تبدیل $z$

#### ۱.۳ بررسی رابطه صفر و قطب‌ها با سیگنال و تبدیل $z$

۱. چهار سیگنال زیر را در یک پنجره رسم کنید، سپس با استفاده از متلب تبدیل  $z$  این سیگنال‌ها را بدست آورید و نمودار صفر-قطب آن‌ها را رسم و پایداری هر کدام را بررسی کنید. از مشاهدات خود چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتایج منطبق بر دانسته‌های شما هستند؟

- $h_1[n] = (1/2)^n(u[n] - u[n - 30])$
- $h_2[n] = (2)^n(u[n] - u[n - 40])$
- $h_3[n] = (1/2)^n u[n]$
- $h_4[n] = (2)^n u[n]$

۲. برای هر شش سیستم علی زیر، نمودار صفر-قطب و پاسخ ضربه را در یک صفحه رسم کنید:

- $X_1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$
- $X_2(z) = \frac{1}{1-1.1z^{-1}}$
- $X_3(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$
- $X_4(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$
- $X_5(z) = \frac{1}{1-5z^{-1}}$
- $X_6(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$

برای هر سیگنال پایداری را بررسی کنید، همچنین با توجه به نمودارهای بدست آمده تاثیر محل و تعداد قطب‌ها را روی پاسخ ضربه توجیه کرده و نمودارها را با یکدیگر مقایسه کنید.

۳. سیستم‌هایی که در بخش‌های قبل بررسی کردیم، دارای قطب‌هایی روی محور حقیقی بودند. اکنون می‌خواهیم تاثیر وجود قطب‌های مزدوج مختلط را بر روی سیگنال بررسی کنیم. بدین منظور، نمودار صفر-قطب و پاسخ ضربه سیستم‌های زیر را ترسیم نمایید:

- $X_7(z) = \frac{1}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$
- $X_8(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+2z^{-2}}$
- $X_9(z) = \frac{1}{2-z^{-1}+z^{-2}}$

چه تفاوتی میان پاسخ ضربه این سیستم‌ها و سیستم‌هایی که در دو بخش قبلی بررسی کردید مشاهده می‌شود؟ کدام یک از سیستم‌های این بخش پایدار هستند؟ پایداری این سیستم را چگونه به کمک نمودار صفر-قطب توجیه می‌کنید؟

#### ۲.۳ خواص تبدیل $z$

۱. ضابطه سیگنال گسسته  $x[n]$  به صورت زیر داده شده است:

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)u[n]$$

این دنباله را به صورت symbolic در متلب تعریف کنید و به کمک دستور `ztrans`، تبدیل  $z$  آن را محاسبه کنید. همچنین نمودار صفر-قطب و پاسخ زمانی آن را نیز رسم کرده و به کمک آن (و مطالبی که از درس آموخته‌اید)، ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل  $z$  این سیگنال را مشخص کنید.

۲. تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n]$  (که در بخش قبل محاسبه کردید) را  $X_0(z)$  بنامید. در این صورت  $X_1(z) = X_0(2z)$  را محاسبه کنید. نمودار صفر-قطب و پاسخ زمانی این سیگنال را در متلب بدست آورده و رسم کنید. شکل پاسخ زمانی را با شکل پاسخ زمانی بخش قبل مقایسه کرده و با دانسته‌های خود در درس توجیه کنید.

۳. برای  $X_2(z) = X_0(z^3)$  نمودار صفر-قطب و پاسخ زمانی را رسم کنید. پاسخ زمانی  $x_2[n]$  را بدست آورده و ارتباط آن با  $x[n]$  را بیان کنید.

۳.۳ وارون تبدیل  $z$ 

۱. دو تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\bullet H_1(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \quad \bullet H_2(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

نمودار صفر-قطب این دو تابع را رسم کنید و با فرض علی بودن سیستم، ROC آن‌ها را مشخص کنید. همچنین وضعیت پایداری دو سیستم را بررسی کنید.

۲. یکی از روش‌های متداول برای محاسبه وارون تبدیل  $z$ ، تجزیه تابع تبدیل به کسرهای جزئی می‌باشد. در این روش تابع تبدیل را به فرم زیر درمی‌آوریم:

$$H(z) = \sum_i \frac{r_i}{1-p_i z^{-1}} + \sum_j k_j z^{-j}$$

در متلب به کمک دستور `residuez`، می‌توانیم یک تابع تبدیل را به فرم این معادله در بیاوریم. به کمک این دستور،  $H(z)$  را به کسرهای جزئی تجزیه کنید و با توجه به دانسته‌های خود از مباحث تئوری درس، فرم زمانی  $h[n]$  را بدست بیاورید.

۳. به کمک دستور `iztrans`، وارون تبدیل  $z$  را برای  $H(z)$ ‌ها حساب کنید و صحت پاسخ قسمت قبل خود را بررسی کنید.

۴. حال فرض کنید سیستم فوق، یک سیستم ضد علی است (پاسخ ضربه آن به ازای مقادیر  $n < 0$  مقادیر ناصفر دارد). به کمک روش تجزیه به کسرهای جزئی، وارون تبدیل  $z$  را برای این سیستم بدست آورید. آیا به کمک دستور `iztrans` می‌توان به این جواب رسید؟ علت این موضوع چیست؟

## ۴.۳ تحلیل سیستم‌های توصیف‌شده با معادله تفاضلی

در این بخش می‌خواهیم پاسخ ضربه یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان و گسسته را با استفاده از روش‌های گوناگون محاسبه کنیم. رابطه ورودی-خروجی این سیستم در معادله زیر توصیف شده است:

$$y[n] - 0.7y[n-1] + 0.49y[n-2] = 2x[n] - x[n-1]$$

۱. از دو طرف رابطه بالا تبدیل  $z$  بگیرید و تابع تبدیل سیستم را بدست آورید. با تجزیه این تابع تبدیل به کسرهای جزئی و با فرض علی بودن سیستم، پاسخ ضربه آن را بدست آورده و رسم کنید. در گزارش خود فرم زمانی پاسخ ضربه را بیاورید (هر مقدار از محاسبات را که مقدور است با متلب انجام دهید و سایر موارد را به صورت تحلیلی محاسبه کنید و در گزارش مکتوب کنید).

۲. اگر  $p_i$ ‌ها قطب‌های سیستم باشند، پاسخ ضربه به فرم کلی معادله به شکل زیر می‌باشد:

$$h[n] = \sum_i (\alpha_i p_i^n) u[n]$$

که در آن ضرایب  $\alpha_i$  مجهول می‌باشند. واضح است که اگر این ضرایب مجهول را تعیین کنیم، پاسخ ضربه به صورت کامل تعیین شده است. برای این کار نیازمند شروط اولیه هستیم. این شروط را بیابید و با جایگذاری در معادله و حل دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهول حاصل، فرم زمانی پاسخ ضربه را بیابید و ترسیم کنید. حاصل این قسمت را با قسمت قبل مقایسه کنید و صحت نتایج را تایید کنید.

۳. با انتخاب درست  $a$ ،  $b$  و  $x$  می‌توانید با استفاده از دستور `filter(b,a,x) = h` را در بردار  $h$  بدست آورید. در مورد چگونگی عملکرد این تابع و انتخاب ورودی‌های آن و علت این که این روش می‌تواند پاسخ مطلوب را ارائه کند تحقیق کرده و توضیح دهید. پاسخ ضربه را از این روش محاسبه کرده و با نتایج قسمت‌های قبلی مقایسه کنید.

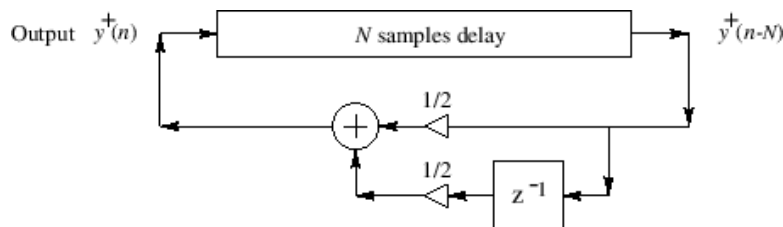
۴. (امتیازی) در این قسمت می‌خواهیم به کمک سیمولینک متلب پاسخ ضربه این سیستم گسسته را بدست بیاوریم. برای این کار ابتدا بلوک دیاگرام سیستم مورد نظر را در سیمولینک رسم کنید. برای این کار از المان‌های unit delay, gain, sum استفاده کنید، سپس به کمک بلوک discrete impluse در سیمولینک به سیستم ورودی ضربه بدهید و خروجی آن را مشاهده کرده و در گزارش کار ذکر کنید. برای مشاهده خروجی سیستم از بلوک out1 و data inspector استفاده کنید.

توجه داشته باشید که حتما فایل سیمولینک خود را در فایل تحویلی خود قرار دهید، در غیر این صورت به پاسخ‌های این بخش نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.

## ۴ تولید نت‌های موسیقی با استفاده از یک سیستم گسسته

### ۱.۴ الگوریتم Karplus-Strong

Karplus-Strong الگوریتمی برای شبیه‌سازی صدای سیم (مثلا سیم‌های گیتار) است. این الگوریتم این کار را به کمک یک سیستم گسسته که بلوک دیاگرام آن را در شکل ۴ مشاهده می‌کنید انجام می‌دهد. درباره این الگوریتم تحقیق کرده و توضیحی مختصر درباره آن در گزارش خود بیاورید.



شکل ۴: بلوک دیاگرام سیستم

### ۲.۴ تولید یک قطعه موسیقی

معادله تفاضلی توصیف کننده بلوک دیاگرام شکل ۴ به صورت زیر می‌باشد (در بلوک دیاگرام ضریب آلفا برابر با یک در نظر گرفته شده است اما برای پایدار بودن سیستم، آن را مقداری مثبت و کمتر از یک در نظر می‌گیریم):

$$y[n] = x[n] + \alpha \frac{y[n - N] + y[n - (N + 1)]}{2}$$

عملکرد الگوریتم به این صورت است که با قرار گرفتن سیگنال  $x[n]$  در ورودی سیستم که متشکل از  $N$  عدد رندم می‌باشد (white noise)، در خروجی سیستم نت مورد نظر تولید خواهد شد. تنها نکته مهم انتخاب درست طول سیگنال ورودی است که همان دوره تناوب خواهد بود و می‌توان آن را به شکل زیر بدست آورد:

$$N = \text{floor}(Fs / \text{freq})$$

که در این رابطه  $Fs$  برابر با فرکانس نمونه‌برداری می‌باشد. صداهایی که در دنیای واقعی شنیده می‌شوند سیگنال‌هایی پیوسته هستند، اما در دنیای دیجیتال امکان تولید صدای پیوسته وجود ندارد. به این منظور پارامتری تحت عنوان فرکانس نمونه‌برداری تعریف می‌کنیم که تعداد نمونه‌های سیگنال صوتی در یک ثانیه را نشان می‌دهد. برای تولید یک سیگنال صوتی گسسته، نمونه‌هایی از سیگنال پیوسته صوت داریم که با توجه به محدوده شنوایی و برای حفظ کیفیت نمونه‌برداری و جلوگیری از تداخل نمونه‌ها، این عمل را با  $Fs = 44100 \text{ Hz}$  انجام می‌دهیم.

با طی کردن مراحل زیر، تابع `generateNote(freq, duration, alpha)` که در خروجی بردار نت مورد نظر با مدت دلخواه تولید می‌کند را بنویسید:

(۱) سیگنال  $x$  را به شکل برداری به طول  $N$  و اعضای بین ۱ و -۱ (با توزیع هم احتمال) تولید کنید.

(۲) با توجه به طول زمانی مورد نظر برای نت و با توجه به فرکانس نمونه‌برداری، بردار  $y$  را با اعضای صفر به طول مناسب تولید کنید (این طول چقدر می‌باشد؟)، سپس  $N$  مقدار اول آن را برابر با بردار  $x$  قرار دهید.

(۴) سیستم توصیف شده توسط معادله تفاضلی داده شده را پیاده‌سازی کنید و سیگنال  $y$  به طور کامل و با طول مورد نظر ایجاد کنید.



پس از نوشتن این تابع، تابع `noteFreq(note)` بنویسید، به طوری که با گرفتن کاراکتر نت موسیقی، فرکانس آن را در خروجی بدهد. در [این لینک](#) می‌توانید فرکانس مربوط به هر نت (در اکتاو چهارم) را مشاهده کنید.

در پایان تابعی بنویسید که با گرفتن برداری از کاراکتر نت‌ها و برداری از مدت زمان هر نوت، بردار قطعه آهنگ مربوطه را تولید کند. خروجی آهنگ خود را برای بردارهای قطعه کد زیر بدست آورده و سپس به کمک دستوره‌ای `audioplayer` و `play` آن را پخش کنید. آهنگ ایجاد شده را به کمک دستور `audiowrite` ذخیره کنید و در فایل تحویلی خود قرار دهید.

(قطعه کد ۱):

```

1 notes = ['G', 'G', 'A#', 'D#', 'D', ...
2         'G', 'G', 'A#', 'D', 'C', ...
3         'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G#', ...
4         'G#', 'G#', 'G#', 'G#', 'G', 'G'];
5
6 noteDurations = [330, 330, 490, 490, 790, ...
7                  330, 330, 490, 490, 750, ...
8                  330, 330, 330, 490, 490, 700, ...
9                  330, 330, 330, 490, 490, 750];

```