



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

۲۵۷۴۲ گروه ۱ - سیگنال‌ها و سیستم‌ها - بهار ۱۴۰۰-۰۱

تمرین سری اول

موعد تحویل: یک شنبه ۲۹ اسفند، ساعت ۲۳:۵۵

* توجه: تحویل تمامی تمارین الزامی است. همچنین تحویل تمارین به صورت گروهی بوده و تحویل تنها یکی از اعضای گروه کافی است.

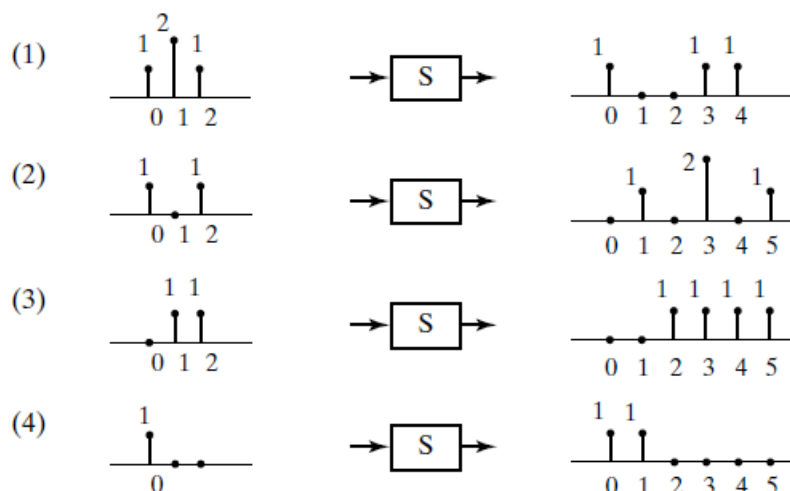
۱ خواص سیستم‌ها

شش خاصیت «خطی بودن»، «تغییرناپذیری با زمان»، «بی‌حافظگی»، «وارون‌پذیری»، «علیت»، و «پایداری» را برای هر یک از سیستم‌های زیر تحقیق کنید. (لازم است برای هر ویژگی از هر سیگنال، استدلال مختصری ارائه دهید).

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(2t) \geq 0 \\ 0 & x(2t) < 0 \end{cases}$
- $y(t) = \frac{\sin(x(t) + 2t)}{x(t-1)}$
- $y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$
- $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau} x(-\tau^2) d\tau$
- $y(t) = x(-2|t|)$
- $y[n] = n \cos \frac{n\pi}{5} x[n]$
- $y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$
- $y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
- $y[n] = \frac{n^3 x[n]}{n^2 - 10}$

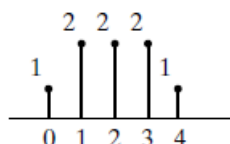
۲ رابطه ورودی و خروجی سیستم‌ها

چهار زوج ورودی-خروجی برای سیستم گسسته‌ی S در شکل ۱ مشخص شده‌اند.



شکل ۱

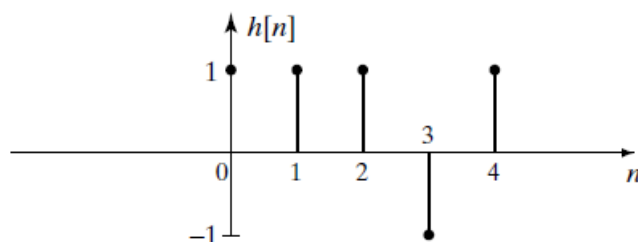
۱. آیا سیستم S می‌تواند تغییرناپذیر با زمان باشد؟ توضیح دهید.
۲. آیا سیستم S می‌تواند خطی باشد؟ توضیح دهید.
۳. فرض کنید (۲) و (۳) زوج‌های ورودی-خروجی سیستم S_2 باشند و این سیستم LTI باشد؛ پاسخ ضربه سیستم S_2 را بیابید.
۴. فرض کنید (۱) زوج ورودی-خروجی سیستم S_3 باشد و این سیستم نیز LTI باشد؛ خروجی سیستم S_3 به ورودی شکل ۲ را بیابید.



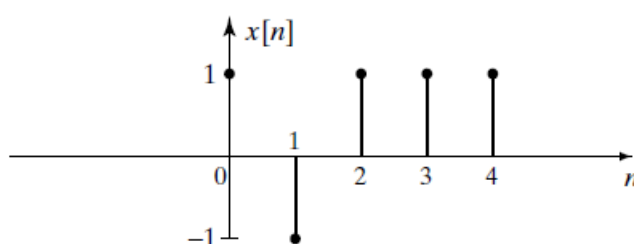
شکل ۲

۳ کانولوشن گسسته

- یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه ای مطابق شکل ۳ می‌باشد. همچنین ورودی $x[n]$ داده شده به سیستم مطابق شکل ۴ می‌باشد.



شکل ۳



شکل ۴

۱. با استفاده از کانولوشن گسسته پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ را یافته و رسم کنید.
۲. تابع خودهمبستگی (autocorrelation) سیگنال $x[n]$ به صورت $c_{xx}[n] = x[n] * x[-n]$ تعریف می‌شود. خروجی بدست آمده در قسمت اول را برحسب $c_{xx}[n]$ بنویسید.
۳. خروجی سیستم را در حالتیکه $x[n] = u[n+2]$ باشد، یافته و رسم کنید.

۴ سیگنال‌های توان و انرژی

یک سیگنال (پیوسته یا گسسته) با انرژی و توان E_∞ و P_∞ را در نظر بگیرید. این سیگنال را یک «سیگنال انرژی» گوییم، هرگاه

$$E_\infty < \infty$$

همچنین این سیگنال را یک «سیگنال توان» گوییم، هرگاه

$$0 < P_\infty < \infty$$

۱. شرط اینکه سیگنال نه سیگنال انرژی و نه سیگنال توان باشد را بیان کنید.

۲. نشان دهید سیگنال $x_1(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ یک سیگنال توان بوده و توان آن را بدست آورید.

۳. نشان دهید سیگنال $x_2(t) = u(t)$ یک سیگنال توان بوده و توان آن را بدست آورید.

۴. نشان دهید سیگنال

$$x_3(t) = \begin{cases} kt^{-\frac{1}{4}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

سیگنال نه انرژی و نه توان است.

۵. نوع سیگنال‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

- $x_4(t) = A \cos 2\pi f_1 t + B \cos 2\pi f_2 t$
- $x_5(t) = e^{-t} \cos t$
- $x_6(t) = \operatorname{sgn}(t)$

۵ خواص کانولوشن

درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را نشان دهید.

۱. اگر داشته باشیم $x[n] = 0$ برای $n < N_1$ و $h[n] = 0$ برای $n < N_2$ ، آنگاه خواهیم داشت: $x[n] * h[n] = 0$ برای $n < N_1 + N_2$.

۲. اگر $y[n] = x[n] * h[n]$ ، آنگاه خواهیم داشت: $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$.

۳. اگر $y(t) = x(t) * h(t)$ ، آنگاه خواهیم داشت: $y(-t) = x(-t) * h(-t)$.

۴. اگر داشته باشیم $x(t) = 0$ برای $t > T_1$ و $h(t) = 0$ برای $t > T_2$ ، آنگاه خواهیم داشت: $x(t) * h(t) = 0$ برای $t > T_1 + T_2$.

۶ سیگنال‌های تناوبی

تناوبی بودن یا نبودن هر یک از سیگنال‌های زیر را مشخص کنید. همچنین، دوره تناوب پایه‌ی سیگنال‌های تناوبی را نیز بیابید.

$$x(t) = \operatorname{odd}\{\sin(4\pi t)u(t)\} \bullet$$

$$x[n] = e^{\frac{j\pi n}{\sqrt{2}}} \bullet$$

$$x[n] = e^{j\pi(n-10)/3} + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \bullet$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right) \bullet$$

۷ خواص سیستم‌های LTI

برای هر یک از سیستم‌های LTI با پاسخ ضربه‌ی داده‌شده، علی بودن/نبودن و پایدار بودن/نبودن را بررسی کنید.

1. $h_1[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$
2. $h_2[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$
3. $h_3[n] = \cos(\pi n) u[n]$
4. $h_4(t) = te^{-t} u(t)$

۸ محاسبه‌ی تبدیل z

تبدیل z هر يك از سیگنال‌های زیر را بیابید و ناحیه‌ی همگرایی آن را مشخص کنید.

1. $x_1[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1]$, $|a| < |b| < |c|$
2. $x_2[n] = n^2 a^n u[n]$
3. $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$
4. $x_4[n] = \alpha^{|n|}$, $|\alpha| < 1$
5. $x_5[n] = (1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-3]$
6. $x_6[n] = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 2N-n-1 & N \leq n \leq 2(N-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

۹ محاسبه‌ی وارون تبدیل z

وارون تبدیل z ‌های داده‌شده را بیابید. (سعی کنید تا حدّ امکان از خواصّ تبدیل z بهره ببرید.)

1. $X_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$, $x_1[n]$ is a casual sequence
2. $X_2(z) = \frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$, $x_2[n]$ is stable
3. $X_3(z) = \frac{z^7-2}{1-z^{-7}}$, $|z| > 1$
4. $X_4(z) = \frac{z^3-2z}{z-2}$, $x_4[n]$ is a left-sided sequence
5. $X_5(z) = e^{z^{-1}}$
6. $X_6(z) = \log(1-2z)$, $|z| < \frac{1}{2}$

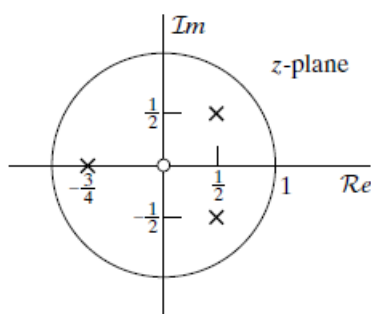
راهنمایی: از سری توانی

$$\log(1-x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}, \quad |x| < 1$$

و رابطه مشتق‌گیری استفاده کنید.

۱۰ صفرها و قطب‌های تبدیل z

دیاگرام صفر-قطب تبدیل z سیگنال علی $x[n]$ مطابق شکل ۵ می‌باشد. اگر داشته باشیم $y[n] = x[-n + 3]$ ، نمودار صفر-قطب $Y(z)$ را رسم کنید.



شکل ۵

۱۱ کاهش فرکانس نمونه‌برداری

سیستمی با رابطه‌ی ورودی-خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = x[Mn]$$

چنین سیستمی از میان هر M نمونه‌ی ورودی، تنها یکی را نگه می‌دارد. چنین سیستمی اصطلاحاً «کاهش‌دهنده‌ی فرکانس نمونه‌برداری» نامیده می‌شود. اگر تبدیل z ورودی $X(z)$ باشد، تبدیل z خروجی، $Y(z)$ را بر حسب $X(z)$ بیابید. آیا می‌توان برای این سیستم یک تابع تبدیل $H(z)$ معرفی کرد؟
راهنمایی: سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$w_M[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi kn/M}$$