

## گزارش کار مربوط به جلسه سوم آزمایشگاه مدارهای الکتریکی

تهیه و تنظیم:

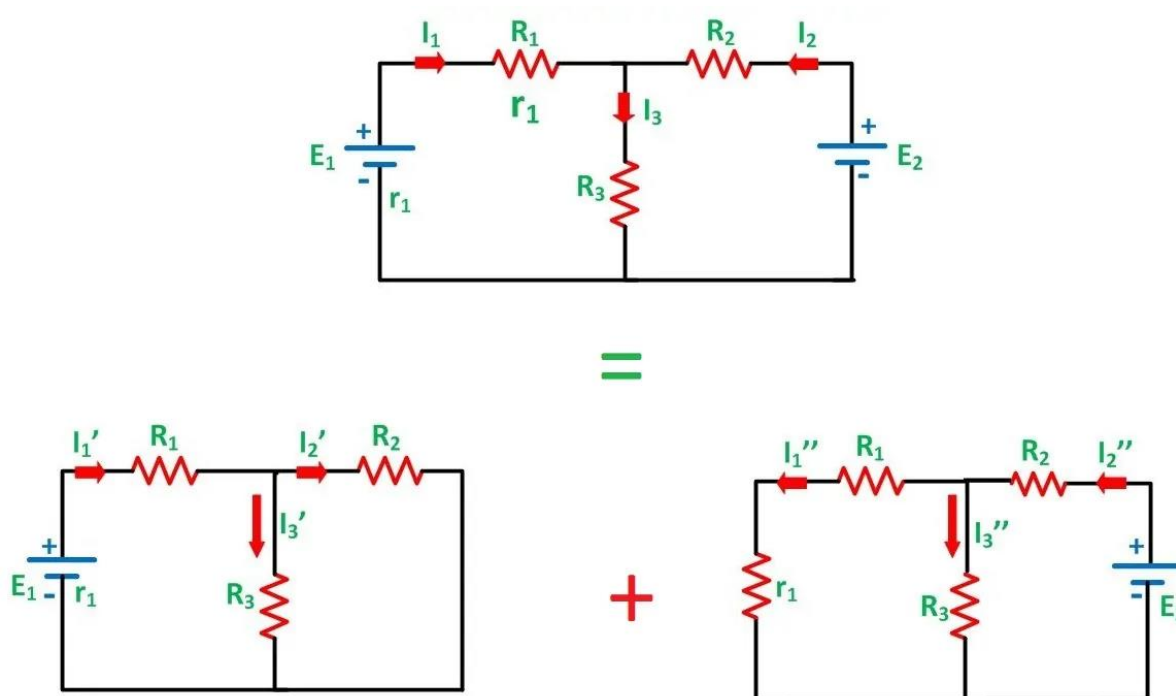
مبین خیری [994421017]

عطا میرزالی [984421037]

مهدی بیک باباپور [984421007]

استاد راهنما: آقای محمدیان

### قضیه جمع آثار در مدار



اگر یک مدار دو یا تعداد بیشتری منبع مستقل داشته باشد، یک راه برای تعیین مقدار یک متغیر خاص (ولتاژ یا جریان)، استفاده از تحلیل گره و تحلیل مش است. اما راه دیگری نیز وجود دارد و آن تعیین سهم هر منبع مستقل در یک متغیر و سپس جمع کردن آن‌ها است. این روش به قضیه جمع آثار (Superposition) معروف است. قضیه جمع آثار فقط به آنالیز مدارات محدود نیست و در بسیاری رشته‌ها که علت و معلول رابطه خطی با یکدیگر دارند، قابل اعمال است.

## بیان قضیه جمع آثار

اساس قضیه جمع آثار بر مشخصه خطی بودن استوار است. قضیه جمع آثار بیان می‌کند که ولتاژ یا جریان در المانی از یک مدار خطی برابر با جمع جبری ولتاژ یا جریان آن المان است که از عملکرد هر کدام از منابع به تنهایی ناشی شده باشد.

اصل جمع آثار از طریق محاسبه تاثیر هر کدام از منابع به صورت جداگانه به ما کمک می‌کند تا اقدام به آنالیز یک مدار با بیش از یک منبع مستقل کنیم. اما برای اعمال قضیه جمع آثار باید به دو نکته توجه کنیم.

1. باید در هر زمان فقط یکی از منابع مستقل روشن باشد و بقیه منابع را خاموش فرض کنیم. برای خاموش کردن منابع ولتاژ را صفر ولت (اتصال کوتاه) و منابع جریان را برابر با صفر آمپر (مدار باز) در نظر می‌گیریم. در این صورت مدار حاصل بسیار ساده‌تر قابل تجزیه و تحلیل است.
2. منابع وابسته باید دست نخورده باقی بمانند؛ زیرا توسط متغیرهای مدار کنترل می‌شوند.

حال قضیه جمع آثار را می‌توان در سه گام اعمال کرد.

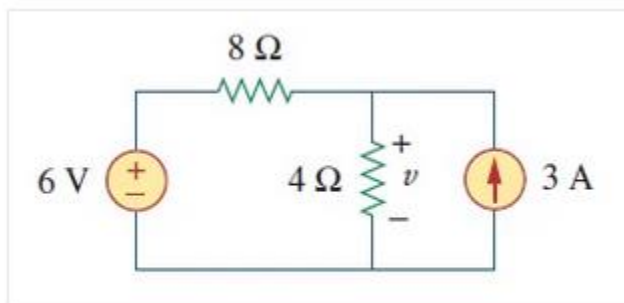
1. تمام منابع مستقل به غیر از یکی از آن‌ها را خاموش و ولتاژها و جریان‌های ناشی از منبع باقی مانده را با استفاده از تکنیک‌های آنالیز مش و آنالیز گره محاسبه می‌کنیم.
2. گام اول را برای سایر منابع مدار نیز تکرار می‌کنیم.
3. مقدار کلی را با استفاده از جمع جبری آثار ناشی از تمام منابع مستقل به دست می‌آوریم.

اما آنالیز مدار با استفاده از قضیه جمع آثار یک عیب بزرگ دارد. در اکثر موارد تحلیل مدار با استفاده از این روش ممکن است، زمان بیشتری طول بکشد. اگر مدار شامل سه منبع مستقل باشد، باید سه مدار ساده‌تر را هر بار برای محاسبه اثر یکی از منابع مستقل، آنالیز کنیم. با این حال قضیه جمع آثار در کاستن از پیچیدگی تحلیل یک مدار و تبدیل آن به مداری ساده‌تر، از طریق مدار باز کردن منابع جریان مستقل و اتصال کوتاه کردن منابع ولتاژ مستقل، بسیار مفید است.

لازم است به این نکته توجه کنیم که قضیه جمع آثار برای مدارات با مشخصه خطی صادق است و به همین دلیل برای محاسبه توان ناشی از هر منبع قابل اعمال نیست؛ زیرا توان جذب شده توسط مثلاً یک مقاومت به مربع جریان یا ولتاژ بستگی دارد. اگر به محاسبه توان یک المان نیاز داشته باشیم، باید ابتدا ولتاژ یا جریان آن المان را از طریق قضیه جمع آثار محاسبه کنیم.

## مثال ۱

با استفاده از قضیه جمع آثار، مقدار ولتاژ  $v$  را در مدار زیر به دست بیاورید.

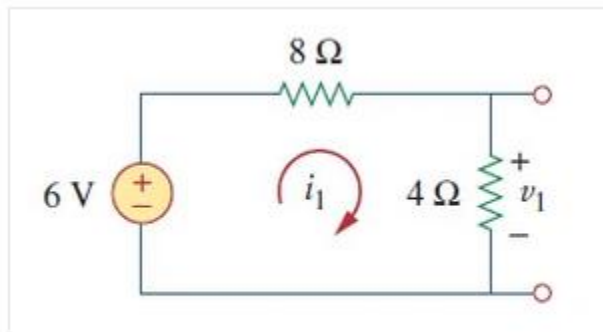


مدار مثال ۱

مقدار ولتاژ ناشی از منبع ولتاژ ۶ ولت و منبع جریان ۳ آمپر را به ترتیب  $v_1$  و  $v_2$  نام گذاری می کنیم. بنابراین ولتاژ  $v$  به صورت زیر است:

$$v = v_1 + v_2$$

برای محاسبه  $v_1$ ، باید منبع جریان را مانند شکل زیر مدار باز فرض کنیم.



مدار پس از حذف منبع جریان

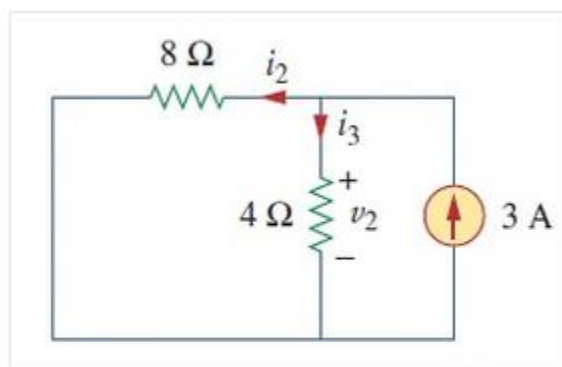
حال از طریق اعمال KCL در حلقه، مقدار جریان برابر است با :

$$12i_1 - 6 = 0 \rightarrow i_1 = 0.5A$$

حال ولتاژ  $v_1$  را به دست می آوریم.

$$v_1 = 4i_1 = 2V$$

برای محاسبه ولتاژ  $V_2$  باید منبع ولتاژ را مانند شکل زیر اتصال کوتاه فرض کنیم.



مدار پس از حذف منبع ولتاژ

با استفاده از تقسیم جریان داریم :

$$i_3 = \frac{8}{4 + 8} (3) = 2A$$

مقدار  $V_2$  را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

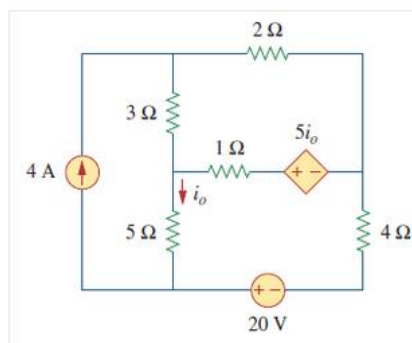
$$V_2 = 4I_3 = 8v$$

حال ولتاژ کلی  $V$  را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10$$

## مثال 2

در مدار شکل زیر مقدار جریان  $i_o$  را با استفاده از قضیه جمع آثار بیابید.

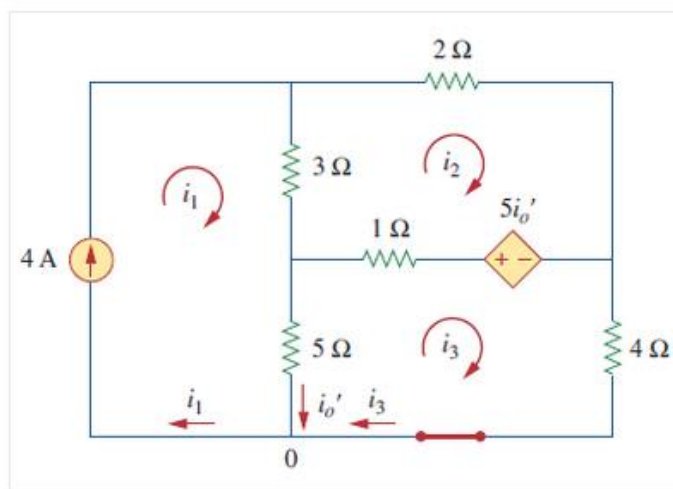


مدار مثال ۲

مدار شامل یک منبع وابسته است که باید دست نخورده باقی بماند. در نتیجه داریم :

$$i_o = i_o' + i_o''$$

که در آن  $i_o'$  و  $i_o''$  به ترتیب جریان ناشی از منبع جریان ۴ آمپری و منبع ولتاژ ۲۰ ولتی به صورت جداگانه هستند. برای محاسبه  $i_o'$  ، باید منبع ولتاژ مستقل را مانند شکل زیر اتصال کوتاه کنیم.



مدار بالا پس از حذف منبع ولتاژ

در نتیجه از طریق اعمال آنالیز مش در حلقه شماره ۱ و حلقه شماره ۲ معادلات زیر به دست می آیند:

$$i_1 = 4A$$

$$-3i_1 + 6i_2 - i_3 - 5i_o' = 0$$

برای حلقه شماره ۳ نیز داریم :

$$-5i_1 - 1i_2 + 10i_3 + 5i_o' = 0$$

در گره شماره ۰ رابطه زیر برقرار است:

$$i_3 = i_1 - i_o' = 4 - i_o'$$

با استفاده از معادلات بالا دستگاه معادلات زیر را به دست می آوریم :

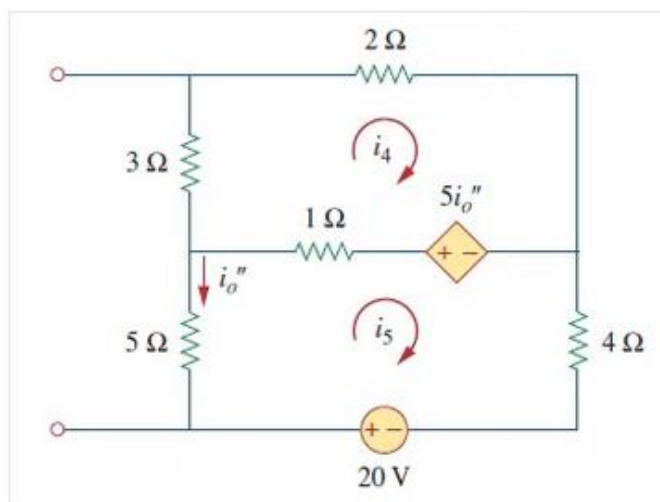
$$3i_2 - 2i_o' = 8$$

$$i_2 + 5i_o' = 20$$

برای به دست آوردن مقدار جریان  $i_o'$ ، باید دستگاه معادلات بالا را حل کرد. در نتیجه جواب به صورت زیر است:

$$i_o' = \frac{52}{17} A$$

حال برای یافتن جریان  $i_o''$ ، منبع جریان ۴ آمپری را مانند شکل زیر مدار باز فرض می کنیم.



مدار بالا پس از حذف منبع جریان

سپس در حلقه ۴ از KVL استفاده می کنیم .

$$6i_4 - i_5 - 5i_o'' = 0$$

و نیز در حلقه ۵ داریم :

$$-i_4 + 10i_5 - 20 + 5i_o'' = 0$$

پس از جایگزینی  $i_5 = -i_o''$  در معادلات بالا، آن ها را بازنویسی می کنیم.

$$6i_4 - 4i_o'' = 0$$

$$i_4 + 5i_o'' = -20$$

مقدار جریان  $i_o''$  به صورت زیر است:

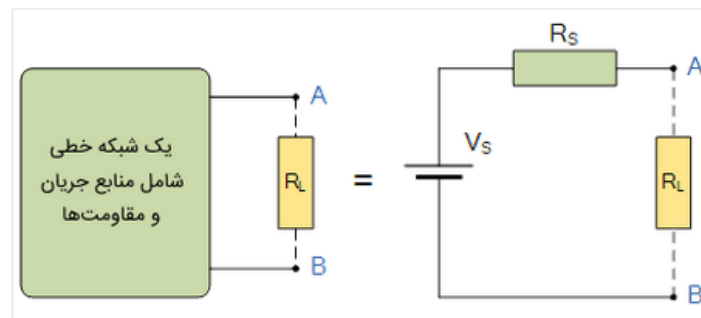
$$i_o'' = -\frac{60}{17} A$$

در نتیجه جریان  $i_o$  که برابر با مجموع  $i_o'$  و  $i_o''$  است، به دست می‌آید.

$$i_o = -\frac{8}{17} = -0.4706A$$

### قضیه تونن (Thevenin's Theorem)

قضیه تونن بیان می‌کند: «هر مدار خطی متشکل از منابع ولتاژ و مقاومت‌ها را می‌توان با یک منبع ولتاژ با مقاومت سری با آن جایگزین کرد». به عبارت دیگر، می‌توان هر مدار الکتریکی را بدون توجه به میزان پیچیدگی، با یک مدار دو سر شامل منبع ولتاژ و مقاومت یا امپدانس سری با آن ساده کرد. شکل زیر این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد.

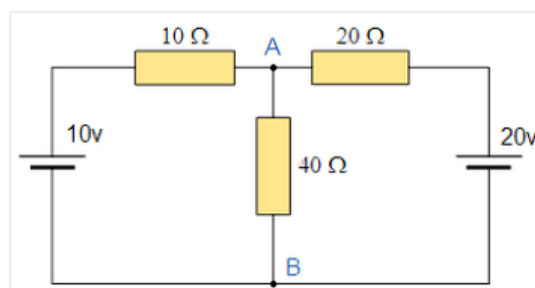


مدار معادل تونن

قضیه تونن، خصوصاً برای معادل‌سازی سیستم‌های شامل باتری و مدارهای مقاومتی متصل به آن‌ها مناسب است.

برای بررسی مدار از دو سر مقاومت  $R_L$ ، شبکه تک قطبی شامل عناصر مقاومتی و منابع انرژی را می‌توان با مقاومت معادل  $R_S$  و ولتاژ معادل  $V_S$  جایگزین کرد. مقاومت  $R_S$  مقدار مقاومت منبع از دید دوسر خروجی مدار و  $V_S$  مقدار ولتاژ مدار باز است.

مدار شکل زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مدار معادل تونن را از دو سر A و B محاسبه کنیم.

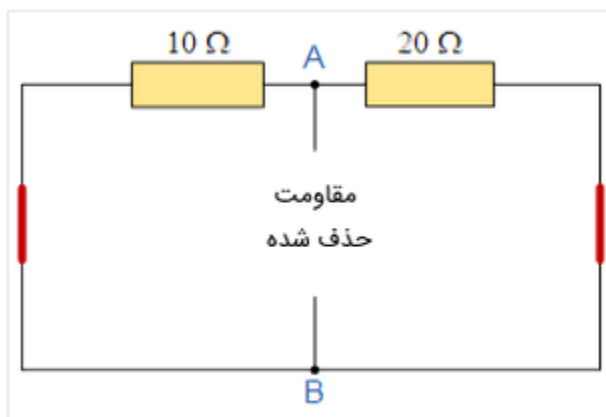


مدار شامل منابع ولتاژ و مقاومت

### محاسبه مقاومت معادل

برای تحلیل مدار، ابتدا فرض می‌کنیم مقاومت بین دو سر A و B وجود نداشته باشد و آن را مدار باز می‌کنیم. سپس برای محاسبه مقاومت معادل، منابع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم (منابع جریان را مدار باز می‌کنیم).

اکنون، مقاومت معادل را می‌توان با محاسبه مقاومت کل دیده شده از دو سر A و B به دست آورد. شکل زیر، تغییرات مدار را برای محاسبه مقاومت معادل نشان می‌دهد.



محاسبه مقاومت معادل مدار

با توجه به شکل بالا، دو مقاومت 10 و 20 اهمی موازی می‌شوند و معادل آن‌ها طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

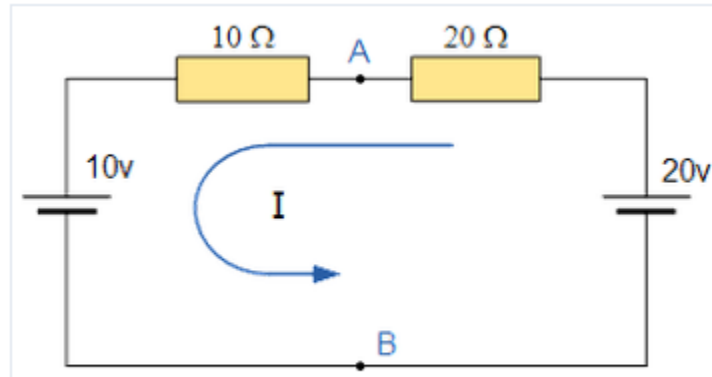
$$R_T = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \times 10}{20 + 10} = 6.67\Omega$$

### محاسبه ولتاژ معادل

ولتاژ  $V_S$ ، برابر با کل ولتاژی است که هنگام مدار باز بودن A و B یعنی مقاومت RL را از مدار جدا کنیم، بین آن‌ها می‌افتد.

در این حالت، منابع در مدار حضور دارند. با کمک شکل زیر، این ولتاژ را محاسبه می‌کنیم.





محاسبه ولتاژ معادل

جریان حلقه مدار با عبارت زیر قابل محاسبه است :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{20v - 10v}{20\Omega + 10\Omega} = 0.33 \text{ amps}$$

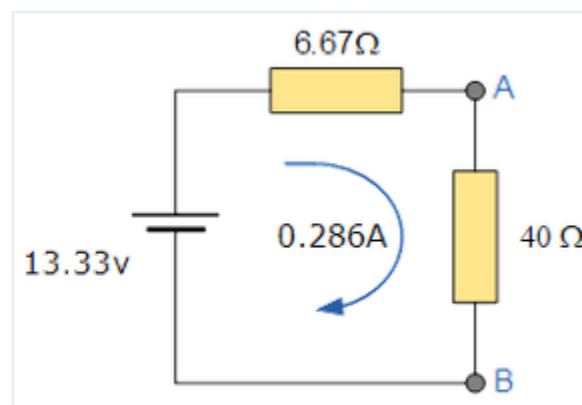
این مقدار جریان، از هر دو مقاومت می‌گذرد، بنابراین می‌توان ولتاژ VAB را به صورت زیر به دست آورد:

$$V_{AB} = 20 - (20\Omega \times 0.33A) = 13.33V$$

یا

$$V_{AB} = 10 + (10\Omega \times 0.33A) = 13.33V$$

در نهایت، مدار معادل تونن متشکل از منبع ولتاژ 13.33 ولتی و مقاومت 6.67 اهمی به صورت زیر به دست می‌آید.



مدار معادل تونن

جریان مدار معادل با رابطه ساده زیر محاسبه می شود :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{13.33v}{6.67\Omega + 40\Omega} = 0.286 \text{ amps}$$

که برابر با مقداری است که با استفاده از قانون مداری کیرشهف به دست آوردیم .

مدار معادل تونن ترانزیستورها، منابع ولتاژ مانند باتری ها و غیره در طراحی مدار بسیار مهم است .

### جمع بندی

دیدیم که قضیه تونن، یکی دیگر از ابزارهای تحلیل مدار است که برای کاهش مدارهای پیچیده به یک مدار ساده (شامل یک منبع ولتاژ و یک مقاومت) استفاده می شود. اگر از دو ترمینال A و B به مدار نگاه کنیم، مدار معادل دقیقاً مانند مدار اصلی عمل می کند و رابطه  $i-v$  از دو سر A و B در دو حالت مشابه است .

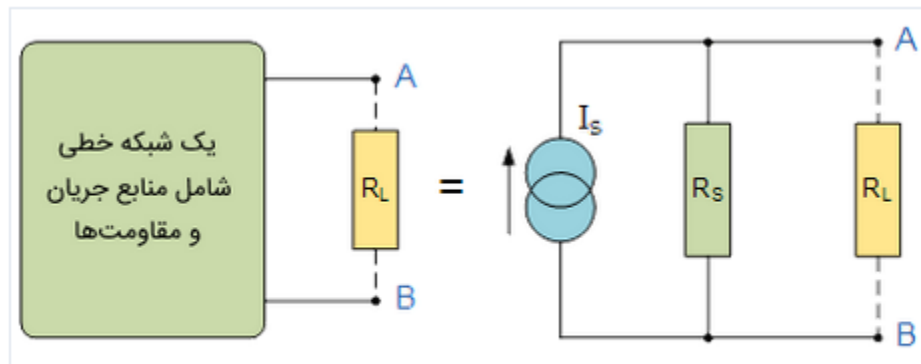
روند اصلی حل معادله با کمک قضیه تونن را می توان به صورت زیر خلاصه کرد :

1. مقاومت بار  $RL$  یا عنصر دیگر مدار را که در نظر دارید، از مدار حذف کنید.
  2. مقاومت  $RS$  را با اتصال کوتاه کردن منابع ولتاژ و مدار باز کردن منابع جریان محاسبه کنید.
  3. ولتاژ  $VS$  را با یکی از روش های تحلیل مدار بیابید.
  4. جریان مقاومت بار  $RL$  را محاسبه کنید.
- در ادامه، مدار معادل نورتن را معرفی می کنیم که مدار را در یک منبع جریان موازی با مقاومت خلاصه می کند .

## قضیه نورتن (Nortons Theorem)

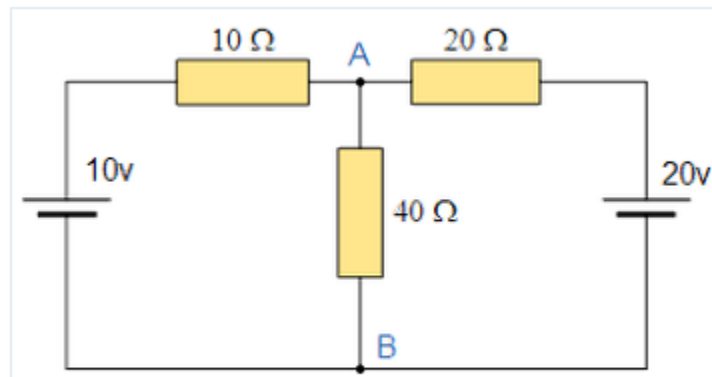
«قضیه نورتن» (Nortons Theorem) دوگان قضیه تونن است و بیان می‌کند: «هر مدار خطی از منابع انرژی و مقاومت‌ها را می‌توان به یک منبع جریان موازی با مقاومت کاهش داد».

مقاومت دیده شده مدار شکل زیر، از دو سر مقاومت  $R_L$  برابر با  $R_S$  است. برای محاسبه مقاومت معادل، همه منابع جریان را مدار باز و منابع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم. منبع  $I_S$  مقدار جریانی است که اگر مقاومت بار  $R_L$  را اتصال کوتاه کنیم از آن می‌گذرد.



مدار معادل نورتن

مدار شکل زیر را در نظر بگیرید که در آموزش‌های قبل نیز آن را بررسی کردیم. می‌خواهیم این مدار را با کمک قضیه نورتن تحلیل کنیم.

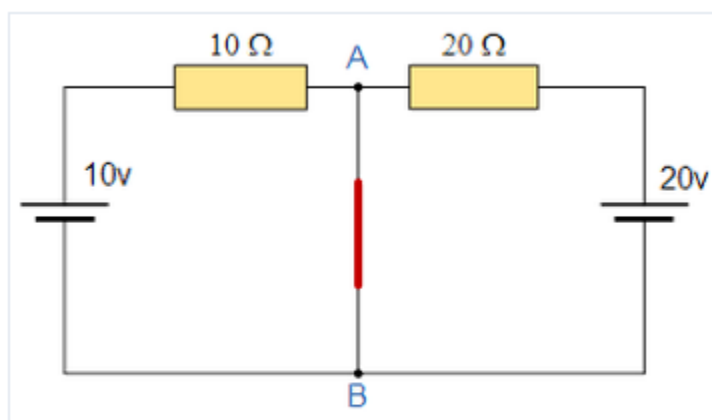


یک مدار مقاومتی ساده

### محاسبه منبع جریان معادل

برای محاسبه منبع جریان معادل، دو سر مقاومت مورد نظر را اتصال کوتاه کرده و جریان گذرنده از آن را محاسبه می‌کنیم.

توجه کنید که در این حالت، منابع در مدار حضور دارند. شکل زیر مدار را برای محاسبه منبع جریان معادل نورتن می‌دهد.



محاسبه منبع جریان معادل نورتن

جریان گذرنده از دو سر A و B با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$I_1 = \frac{10\text{V}}{10\Omega} = 1\text{amp}, \quad I_2 = \frac{20\text{V}}{20\Omega} = 1\text{amp}$$

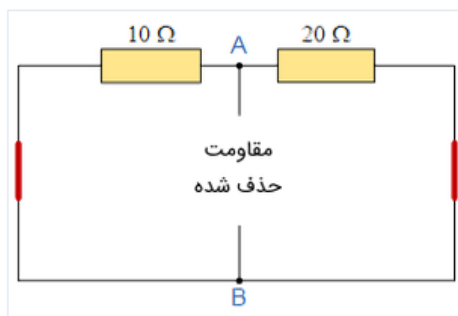
$$I_{\text{short-circuit}} = I_1 + I_2 = 2\text{amps}$$

بنابراین، مقدار منبع جریان 2 آمپر است.

#### محاسبه مقاومت معادل

برای محاسبه مقاومت معادل، مقاومت RL را از مدار حذف می‌کنیم.

سپس منابع جریان را مدار باز و منابع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم. اگر این کار را انجام دهیم، شکل زیر را خواهیم داشت:

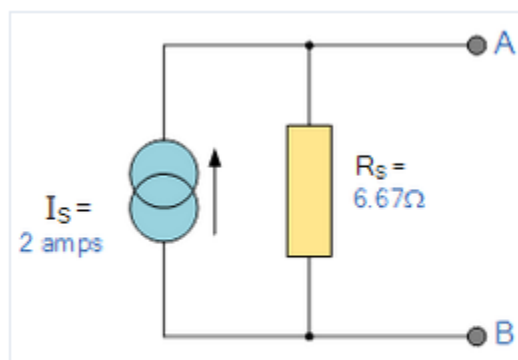


مدار محاسبه مقاومت معادل نورتن

با توجه به شکل فوق، مقاومت دیده شده از دو سر A و B را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد :

$$R_T = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \times 10}{20 + 10} = 6.67\Omega$$

با محاسبه مقدار منبع جریان و مقاومت معادل، مدار معادل نورتن به دست آمده است. شکل زیر مدار معادل نورتن مدار بالا را نشان می‌دهد.



مدار معادل نورتن

حال اگر بخواهیم مدار را برای  $R_L = 40\Omega$  حل کنیم، باید ابتدا مقاومت کل مدار را حساب کنیم:

$$R_T = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.67 \times 40}{6.67 + 40} = 5.72\Omega$$

ولتاژ دو سر مقاومت نیز با فرمول زیر محاسبه می‌شود :

$$V_{A-B} = I \times R = 2 \times 5.72 = 11.44v$$

در نهایت، جریان گذرنده از مقاومت بار به صورت زیر به دست می‌آید :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{11.44}{40} = 0.286 \text{ amps}$$

می‌بینیم که این مقدار برابر با همان عددی است که با استفاده از قوانین کیرشهف محاسبه کردیم .

## جمع‌بندی

روند اصلی حل مدار با قضیه نورتن بر اساس گام‌های زیر است :

1. مقاومت بار  $RL$  یا هر عنصری از مدار را که مورد نظر است حذف کنید.
  2. مقاومت معادل  $RS$  را با اتصال کوتاه کردن منابع ولتاژ و مدار باز کردن منابع جریان مدار محاسبه کنید.
  3. جریان  $IS$  را با اتصال کوتاه کردن ترمینال‌های دو سر بار به دست آورید.
  4. جریان گذرنده از مقاومت  $RL$  را محاسبه کنید.
- وقتی در یک مدار، مقاومت بار با مقاومت منبع برابر باشد، حداکثر توان را دریافت خواهد کرد.

تصاویر مرتبط با آزمایش این جلسه:

