自动控制原理笔记

Xiaohei
Created by ElegantLaTeX

版本:0.1
更新:2021 年 1 月 8 日

1 控制系统的数学模型

1.1 线性控制系统

线性控制系统描述方法

1. 输入输出描述法 (外部描述法):输入输出模型
2. 状态空间描述法 (内部描述法):状态空间模型

线性控制系统输入输出数学模型

1. 时域模型:微分方程
2. 频域、复频域模型:传递函数
3. 图示模型:方框图、信号流图

1.2 典型环节

1.2.1 惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \tag{1}$$

其中 T 为惯性环节时间常数。

1.2.2 积分环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts} \tag{2}$$

其中 T 为积分环节时间常数。

1.2.3 振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \tag{3}$$

其中 $T = \frac{1}{\omega_n}$ 为时间常数，ζ 为阻尼比，ω_n 为无阻尼自然振荡角频率。

1.2.4 微分环节

$$G(s) = Ts \tag{4}$$

其中 T 为微分环节时间常数。理想微分环节的传递函数不是真有理分式，工程实现较为困难，工程上常采用具有惯性环节的微分环节。

1.2.5 比例环节

$$G(s) = K_p \tag{5}$$

其中 K_p 为比例系数增益。

1.2.6 时滞环节

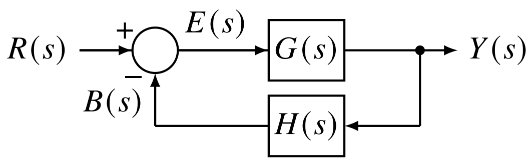
$$G(s) = \mathrm{e}^{-\tau s} \tag{6}$$

其中 τ 为延迟时间常数。

1.3 框图模型

框图的基本变换：合并串联方框、相加点前/后移、分支点前/后移、消去反馈回路。

负反馈控制系统的典型结构图：



闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{7}$$

前向传递函数：

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \tag{8}$$

开环传递函数：

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \tag{9}$$

2 控制系统的时域分析

2.1 线性定常系统

线性定常系统的一个特性：系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数；或者，系统对输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分，积分常数由零初始条件确定。

2.2 状态空间方程的解

系统状态空间方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{aligned} \tag{10}
$$

状态转移矩阵：

$$
\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right] \tag{11}
$$

状态空间方程的解：

$$
\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12}
$$

系统的输出：

$$
y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{13}
$$

单位阶跃响应：

$$
h(t) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{14}
$$

静态放大系数：

$$
k_s = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{15}
$$

2.3 暂态性能指标

延迟时间 T_d：系统响应从 0 上升到稳态值的 50% 所需要的时间

上升时间 T_r：有振荡系统响应从 0 上升到稳态值所需时间；无振荡系统响应从稳态值的 10% 上升到 90% 所需时间。

峰值时间 T_p：系统响应达到最大峰值所需要的时间。

最大超调量 $\sigma\%$：系统响应超出稳态值的最大偏离量，常以百分比表示。

调节时间 T_s：系统响应与稳态值之差达到误差 $\pm\Delta$ 所需要的最小时间。

振荡次数 N：调节时间 T_s 内，$y(t)$ 偏离 $y(\infty)$ 的振荡次数。

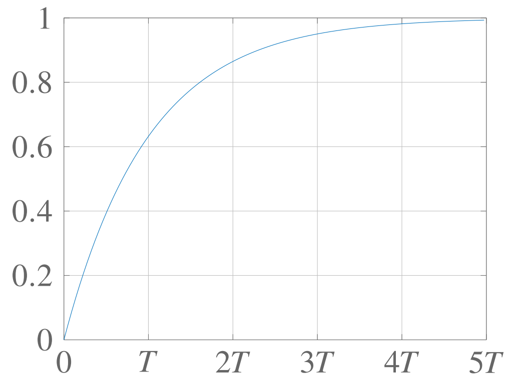
2.4 一阶系统的暂态响应特性

一阶系统的闭环传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \tag{16}$$

其单位阶跃响应如下：

图 1: 一阶系统单位阶跃响应



延迟时间 T_d：

$$T_d = -T\ln 0.5 = 0.69T \tag{17}$$

上升时间 T_r：

$$T_r = (-T\ln 0.9) - (-T\ln 0.1) = 2.20T \tag{18}$$

2.5 二阶规范系统的暂态响应特性

二阶规范系统的闭环传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{19}$$

其中 ζ 为阻尼比，ω_n 为无阻尼自然振荡角频率。ζ 的值影响系统的响应情况如下表所示。

欠阻尼或临界阻尼时：

表 1: ζ 的值对系统响应影响

ζ	$\zeta < 0$	$\zeta = 0$	$0 < \zeta < 1$	$\zeta = 1$	$\zeta > 1$
状态	不稳定	无阻尼	欠阻尼	临界阻尼	过阻尼
响应	-	无衰减振荡	衰减振荡	无振荡	无振荡

$$-p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega_d \tag{20}$$

其中，$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 为阻尼自然振荡角频率，$\sigma = -\zeta\omega_n$ 为阻尼系数或衰减系数。

过阻尼时：

$$-p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \tag{21}$$

峰值时间 T_p：

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{22}$$

超调量 $\sigma\%$：

$$\sigma\% = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \tag{23}$$

上升时间 T_r：

$$T_r = \frac{\pi-\varphi}{\omega_d} = \frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \tag{24}$$

调节时间 $T_s(0 < \zeta < 0.9)$：

$$T_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad T_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n} \tag{25}$$

二阶工程最佳参数：

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sigma\% = \mathrm{e}^{-\pi} \times 100\% = 4.3\% \tag{26}$$

添加零点对原无零点规范二阶系统性能的影响：峰值时间提前、超调量增大（振荡加剧）、调节时间增长。

2.6 控制系统的稳态误差

开环传递函数 $G(s)$ 中零极点的重数 N，即串联的积分环节的个数，称为系统的类型或阶数。

单位反馈系统的误差系数与稳态误差的定义：

$$K = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^N} \quad e_{ss} = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1+G(s)} \tag{27}$$

单位反馈系统的误差系数与稳态误差如下表：

表 2: 系统的误差系数与稳态误差

系统的类型	误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$e_{ss}=A/(1+K_p)$	$e_{ss}=A/K_v$	$e_{ss}=A/K_a$
0 型	K	0	0	$A/(1+K)$	∞	∞
1 型	∞	K	0	0	A/K	∞
2 型	∞	∞	K	0	0	A/K

分析非单位反馈系统的稳态误差时，开环传递函数等效为：

$$G_k(s) = G(s)H(s) \tag{28}$$

2.7 控制系统的稳定性

稳定系统：对于有界输入具有有界响应。

充要条件：系统传递函数的所有极点（系统矩阵的特征值）具有负实部（在 s 平面虚轴左面）。

稳定性判据：Routh-Hurwitz 稳定性判据。

系统稳定的必要条件：特征方程的各项系数均为正（同号且不缺项）。

系统稳定的充分必要条件：Routh 表中第一列各值为正。

3 根轨迹法