

数字信号处理例题讲解

Xiaohei

版本:1.2

更新:2021 年 1 月 5 日

本文章为数字信号处理(电气)课程的部分例题讲解,由于部分答案为个人编撰,难免会出现错误,请保证使用[GitHub 仓库](#)所发布的最新版本。如遇问题可在 [GitHub](#) 上发布 Issue 或直接联系我。

1 离散时间信号与系统

Exercise 1

一模拟信号 $x_a(t) = \sin(240\pi t) + 5 \sin(360\pi t)$, 采用 300Hz 的抽样频率进行采样。

- 1) 求信号的 Nyquist 抽样频率。
- 2) 求信号的折叠频率。
- 3) 求经过抽样后的序列 $x(n)$ 。
- 4) 若序列 $x(n)$ 通过理想 D/A 进行转换, 求转换后的信号 $y_a(t)$ 。

Solution 1

- 1) 360Hz。Nyquist 抽样频率为信号最高频率的 2 倍。
- 2) 150Hz。折叠频率为抽样频率的一半。
- 3) 采样后的序列 $x(n)$ 为:

$$\begin{aligned}x(n) &= x_a(nT_s) = x_a\left(\frac{n}{f_s}\right) = \sin\left(240\pi \cdot \frac{n}{300}\right) + 5 \sin\left(360\pi \cdot \frac{n}{300}\right) \\&= \sin(0.8\pi n) + 5 \sin(1.2\pi n) \\&= \sin(0.8\pi n) - 5 \sin(2\pi n - 1.2\pi n) \\&= -4 \sin(0.8\pi n)\end{aligned}$$

4) 恢复后的信号 $y_a(t)$ 为:

$$\begin{aligned}y_a(t) &= x\left(\frac{t}{T_s}\right) = x(t f_s) = -4 \sin(0.8\pi \cdot 300t) \\&= -4 \sin(240\pi t)\end{aligned}$$

2 z 变换与离散时间 Fourier 变换(DTFT)

Exercise 2

已知离散 LSI 系统的差分方程

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

其中 $x(n)$ 为输入, $y(n)$ 为输出。

- 1) 求系统函数, 并指出零极点。
- 2) 若该系统因果稳定, 指出系统收敛域。
- 3) 求该因果稳定系统的单位抽样响应。

Solution 2

1) 对差分方程两边取 z 变换:

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

则系统函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

其零点为 $z = -\frac{1}{3}, 0$, 极点为 $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 。(不要遗漏 $z = 0$ 的零点)

2) 由于系统为因果稳定系统, 故其收敛域:

$$|z| > \frac{1}{2}$$

3) 用部分分式法求 $H(z)$ 的 z 变换:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{7}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

根据 $|z| > \frac{1}{2}$, 通过查表法得:

$$h(n) = \left[\frac{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n)$$

Exercise 3

设序列 $x(n]$ 的傅氏变换为 $X(e^{j\omega})$, 试求下列序列的 Fourier 变换。

1) $x(2n)$ 。

2) $x^*(n)$ 。

Solution 3

1)

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x(2n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n} = \sum_{\frac{k}{2} \in \mathbb{Z}} x(k)e^{-j\omega \frac{k}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1 + (-1)^k] x(k)e^{-j\omega \frac{k}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\frac{\omega}{2}k} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left(-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2} X\left(-e^{j\frac{\omega}{2}}\right) \end{aligned}$$

2)

$$\text{DTFT}[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} \right]^* = X^*(-e^{j\omega})$$

3 离散 Fourier 变换(DFT)

Exercise 4

对实信号进行谱分析, 要求谱分辨率 $F_0 \leq 10\text{Hz}$, 信号最高频率 $f_h = 2.5\text{kHz}$, 试确定以下参量:

- 1) 最小记录长度 T_0 。
- 2) 抽样点间的最大时间间隔 T 。
- 3) 在一个记录中的最小抽样点数 N 。

Solution 4

- 1) 最小记录长度

$$T_0 \geq \frac{1}{F_0} = 0.1\text{s}$$

- 2) 抽样点间的最大时间间隔

$$T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h} = 0.2\text{ms}$$

- 3) 在一个记录中的最小抽样点数

$$N \geq \frac{T_0}{T} = 500 \text{ or } N \geq \frac{f_s}{F_0} = 500$$

Exercise 5

若存在模拟信号

$$x_a(t) = [\cos(160\pi t) + \cos(200\pi t)] \cos(1200\pi t)$$

使用 DFT 做谱分析, 要求能分辨该信号的所有频率分量, 试求:

- 1) 最小采样频率 f_s 。
- 2) 采样后的离散序列 $x(n)$ 。
- 3) 在一个记录中的最小抽样点数 N 。
- 4) 使用 1200Hz 的采样频率对信号采样后通过理想 D/A 恢复的信号 $x'_a(t)$ 。

Solution 5

1)

$$\begin{aligned}
 x_a(t) &= [\cos(160\pi t) + \cos(200\pi t)] \cos(1200\pi t) \\
 &= \frac{1}{2} [\cos(1000\pi t) + \cos(1040\pi t) + \cos(1360\pi t) + \cos(1400\pi t)]
 \end{aligned}$$

最小采样频率为

$$f_s = 2f_h = 2 \times 700\text{Hz} = 1400\text{Hz}$$

2)

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{1000\pi n}{1400}\right) + \cos\left(\frac{1040\pi n}{1400}\right) + \cos\left(\frac{1360\pi n}{1400}\right) + \cos\left(\frac{1400\pi n}{1400}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{5}{7}\pi n\right) + \cos\left(\frac{26}{35}\pi n\right) + \cos\left(\frac{34}{35}\pi n\right) + \cos(\pi n) \right] \\
 &= 2 \cos\left(\frac{6}{7}\pi n\right) \cos\left(\frac{9}{70}\pi n\right) \cos\left(\frac{1}{70}\pi n\right)
 \end{aligned}$$

3) 最大谱分辨率

$$F_0 = 520\text{Hz} - 500\text{Hz} = 20\text{Hz}$$

最小采样点数

$$N = \frac{f_s}{F_0} = \frac{1400}{20} = 70$$

4) 由抽样定理知, 小于 600Hz 信号可被恢复

$$x'_a(t) = \frac{1}{2} [\cos(1000\pi t) + \cos(1040\pi t)]$$

4 快速 Fourier 变换(FFT)

要求会画运算流图和计算复加复乘次数,题目略。

5 数字滤波器的基本结构

Exercise 6

已知系统由下面差分方程描述:

$$y(n] = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2)$$

试画出系统的直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型结构。其中 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示系统的输入和输出信号。

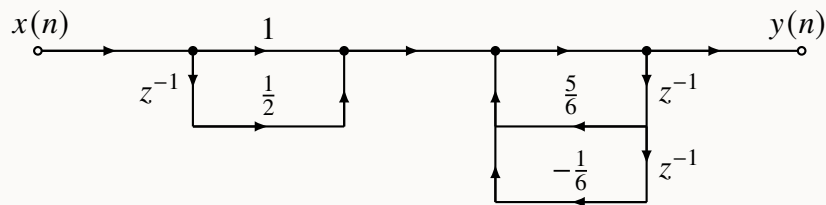
Solution 6

该 IIR 系统的系统函数为:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (1)$$

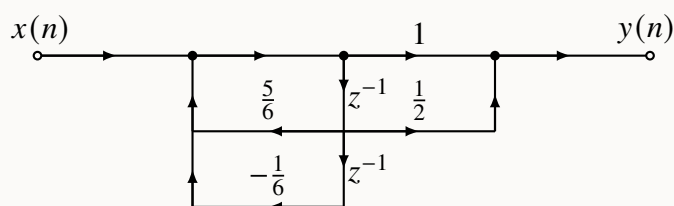
可得 $a_1 = \frac{5}{6}, a_2 = -\frac{1}{6}, b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}$ 。可画出直接 I 型和直接 II 型结构如图:

图 1: 直接 I 型



级联和并联型的系统函数为:

图 2: 直接 II 型



$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{5}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

结构流图即为分别实现子系统后级联或并联，形式不唯一，需要注意不要遗漏并联子系统的系数，图略。

6 IIR 滤波器设计

Exercise 7

用双线性变换法设计一个三阶数字 Butterworth 低通滤波器，采样频率 $f_s = 4\text{kHz}$ ，其 3dB 截止频率为 $f_c = 1\text{kHz}$ ，三阶模拟 Butterworth 低通滤波器为

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + 2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + \left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^3}$$

Solution 7

截止频率对应的数字频率 ω_c 为

$$\omega_c = 2\pi f_c T_s = 2\pi f_c \frac{1}{f_s} = 0.5\pi$$

则 Ω_c 为

$$\Omega_c = c \tan \frac{\omega_c}{2} = c$$

所以

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{s}{c}\right) + 2\left(\frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^3}$$

采用双线性变换法, 映射到 z 平面为

$$\begin{aligned} H(z) = H_a(s)|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-2}} \end{aligned}$$

Exercise 8

已知模拟滤波器的系统函数 $H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$, 用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转化为数字滤波器, 采样周期 $T = 2$ 秒。

Solution 8

1) 脉冲响应不变法

$$H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{(2s + 1)(s + 1)} = \frac{1}{s - \left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{-1}{s - (-1)}$$

$$H(z) = \frac{T}{1 - e^{-\frac{1}{2}T}z^{-1}} + \frac{-T}{1 - e^{-T}z^{-1}} = \frac{2}{1 - e^{-1}z^{-1}} - \frac{2}{1 - e^{-2}z^{-1}}$$

2) 双线性变换法

取 $c = \frac{2}{T} = 1$, 则

$$\begin{aligned} H(z) = H_a(s)|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{1}{2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 3\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \end{aligned}$$

7 FIR 滤波器设计

Exercise 9

用矩形窗设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器。已知通带的截止频率 $\omega_p = 0.5\pi$ ，窗的长度 $N = 17$ ，求出 $h(n)$ 的表达式即可。

Solution 9

理想低通滤波器特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

群延时

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 8$$

过渡带宽

$$\Delta\omega = 0.9 \cdot \frac{2\pi}{N} \approx 0.1\pi$$

理想低通截止频率

$$\omega_c \approx \frac{1}{2}(\omega_p + \omega_{st}) = 0.55\pi$$

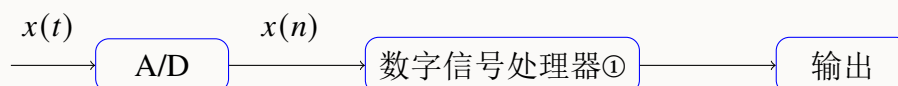
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} = \frac{\sin[0.55\pi(n-8)]}{\pi(n-8)}$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin[0.55\pi(n-8)]}{\pi(n-8)}, & 0 \leq n \leq 16 \\ 0, & \text{Others} \end{cases}$$

8 综合题

Exercise 10

如图为一数字信号处理系统,其中 A/D 为模数转换器, $x(t) = \sin(200\pi t) + \sin(300\pi t)$ 为系统模拟输入信号,试解答如下问题:



- 1) 若图中数字信号处理器①是 IIR 数字滤波器并具有高通特性,试确定其截止频率和输出信号(忽略滤波器带来的影响)。
- 2) 简要叙说 IIR 和 FIR 滤波器的异同(至少涉及 3 方面)。
- 3) 设 A/D 采样率为 512Hz,对序列 $x(n)$ 进行 256 个点的 FFT 变换。求两谱线间的频率间隔。若对上述数据进行离散傅立叶反变换,则反变换后的抽样间隔是多少? 整个 256 个点的时宽又为多少?

Solution 10

- 1) 截止频率为 [100, 150]Hz, 输出信号为高频部分

$$x(t) = \sin(300\pi t)$$

2) **IIR 滤波器:** 单位冲激响应无限长; 系统函数在有限 z 平面上有极点存在, 系统可能不稳定; 结构上是递归型的, 即存在着输出到输入的反馈。

FIR 滤波器: 单位冲激响应是有限个非零值; 系统函数只有零点, 全部极点都在 $z = 0$ 处, 系统总是因果稳定的; 结构上主要是非递归结构, 没有输出到输入的反馈。

- 3) 频率间隔

$$F_0 = \frac{512\text{Hz}}{256} = 2\text{Hz}$$

抽样间隔

$$T_0 = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{512}\text{s}$$

256 点时宽

$$T_{256} = 256 \cdot T_0 = 0.5\text{s}$$