数字信号处理例题讲解

Xiaohei

版本：1.2
更新：2021 年 1 月 4 日

本文章为数字信号处理（电气）课程的部分例题讲解，由于部分答案为个人编撰，难免会出现错误，请保证使用GitHub 仓库所发布的最新版本。如遇问题可在 GitHub 上发布 Issue 或直接联系我。

1 离散时间信号与系统

Exercise 1

一模拟信号 $x_a(t) = \sin(240\pi t) + 5\sin(360\pi t)$，采用 300Hz 的抽样频率进行采样。

1) 求信号的 Nyquist 抽样频率。
2) 求信号的折叠频率。
3) 求经过抽样后的序列 $x(n)$。
4) 若序列 $x(n)$ 通过理想 D/A 进行转换，求转换后的信号 $y_a(t)$。

Solution 1

1) 360Hz。Nyquist 抽样频率为信号最高频率的 2 倍。
2) 150Hz。折叠频率为抽样频率的一半。
3) 采样后的序列 $x(n)$ 为：

$$x(n)=x_a(nT_s)=x_a\left(\frac{n}{f_s}\right)=\sin\left(240\pi\cdot\frac{n}{300}\right)+5\sin\left(360\pi\cdot\frac{n}{300}\right)$$

$$\begin{aligned}&=\sin(0.8\pi n)+5\sin(1.2\pi n)\\&=\sin(0.8\pi n)-5\sin(2\pi n-1.2\pi n)\\&=-4\sin(0.8\pi n)\end{aligned}$$

4) 恢复后的信号 $y_a(t)$ 为：

$$y_a(t)=x\left(\frac{t}{T_s}\right)=x(tf_s)=-4\sin(0.8\pi\cdot 300t)$$

$$=-4\sin(240\pi t)$$

2 z 变换与离散时间 Fourier 变换（DTFT）

Exercise 2

已知离散 LSI 系统的差分方程

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中 $x(n)$ 为输入，$y(n)$ 为输出。

1) 求系统函数，并指出零极点。
2) 若该系统因果稳定，指出系统收敛域。
3) 求该因果稳定系统的单位抽样响应。

Solution 2

1) 对差分方程两边取 z 变换：

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

则系统函数为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

其零点为 $z = -\frac{1}{3}, 0$，极点为 $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$。（不要遗漏 $z = 0$ 的零点）

2) 由于系统为因果稳定系统，故其收敛域：

$$|z| > \frac{1}{2}$$

3) 用部分分式法求 $H(z)$ 的 z 变换：

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{7}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

根据 $|z| > \frac{1}{2}$，通过查表法得：

$$h(n) = \left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

Exercise 3

设序列 $x(n)$ 的傅氏变换为 $X\left(e^{j\omega}\right)$，试求下列序列的 Fourier 变换。

1) $x(2n)$。

2) $x^*(n)$。

Solution 3

1)

$$\mathrm{DTFT}[x(2n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{\frac{k}{2}\in\mathbb{Z}} x(k)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega k}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[1+(-1)^k\right]x(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{k}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}k} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2}X\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)$$

2)

$$\mathrm{DTFT}[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\right]^* = X^*\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$$

3　离散 Fourier 变换（DFT）

Exercise 4

对实信号进行谱分析，要求谱分辨率 $F_0 \le 10\mathrm{Hz}$，信号最高频率 $f_h = 2.5\mathrm{kHz}$，试确定以下参量：

1) 最小记录长度 T_0。

2) 抽样点间的最大时间间隔 T。

3) 在一个记录中的最小抽样点数 N。

Solution 4

1) 最小记录长度

$$T_0 \geq \frac{1}{F_0} = 0.1\text{s}$$

2) 抽样点间的最大时间间隔

$$T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h} = 0.2\text{ms}$$

3) 在一个记录中的最小抽样点数

$$N \geq \frac{T_0}{T} = 500 \text{ or } N \geq \frac{f_s}{F_0} = 500$$

Exercise 5

若存在模拟信号

$$x_a(t) = [\cos(160\pi t) + \cos(200\pi t)]\cos(1200\pi t)$$

使用 DFT 做谱分析，要求能分辨该信号的所有频率分量，试求：

1) 最小采样频率 f_s。

2) 采样后的离散序列 $x(n)$。

3) 在一个记录中的最小抽样点数 N。

4) 使用 1200Hz 的采样频率对信号采样后通过理想 D/A 恢复的信号 $x_a'(t)$。

Solution 5

1)

$$x_a(t) = [\cos(160\pi t) + \cos(200\pi t)]\cos(1200\pi t)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(1000\pi t) + \cos(1040\pi t) + \cos(1360\pi t) + \cos(1400\pi t)]$$

最小采样频率为

$$f_s = 2f_h = 2 \times 700\text{Hz} = 1400\text{Hz}$$

2)

$$x(n) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1000\pi n}{1400}\right) + \cos\left(\frac{1040\pi n}{1400}\right) + \cos\left(\frac{1360\pi n}{1400}\right) + \cos\left(\frac{1400\pi n}{1400}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5}{7}\pi n\right) + \cos\left(\frac{26}{35}\pi n\right) + \cos\left(\frac{34}{35}\pi n\right) + \cos(\pi n)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{6}{7}\pi n\right)\cos\left(\frac{9}{70}\pi n\right)\cos\left(\frac{1}{70}\pi n\right)$$

3) 最大谱分辨率

$$F_0 = 520\text{Hz} - 500\text{Hz} = 20\text{Hz}$$

最小采样点数

$$N = \frac{f_s}{F_0} = \frac{1400}{20} = 70$$

4) 由抽样定理知，小于 600Hz 信号可被恢复

$$x_a'(t)=\frac{1}{2}\left[\cos(1000\pi t)+\cos(1040\pi t)\right]$$

4 快速 Fourier 变换（FFT）

要求会画运算流图和计算复加复乘次数，题目略。

5 数字滤波器的基本结构

Exercise 6

已知系统由下面差分方程描述：

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)+\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)$$

试画出系统的直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型结构。其中 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示系统的输入和输出信号。

Solution 6

该 IIR 系统的系统函数为：

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}} \tag{1}$$

可得 $a_1=\frac{5}{6}, a_2=-\frac{1}{6}, b_0=1, b_1=\frac{1}{2}$。可画出直接 I 型和直接 II 型结构如图：

级联和并联型的系统函数为：

图 1: 直接 I 型

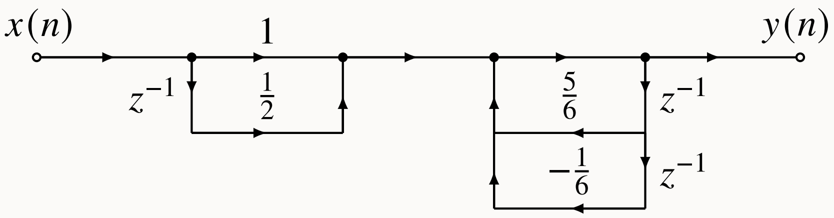
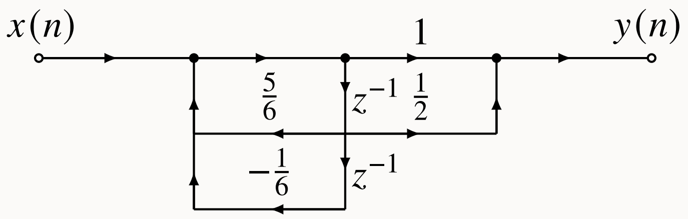


图 2: 直接 II 型



$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

结构流图即为分别实现子系统后级联或并联，形式不唯一，需要注意不要遗漏并联子系统的系数，图略。

6 IIR 滤波器设计

Exercise 7

用双线性变换法设计一个三阶数字 Butterworth 低通滤波器，采样频率 $f_s=4\text{kHz}$，其 3dB 截止频率为 $f_c=1\text{kHz}$，三阶模拟 Butterworth 低通滤波器为

$$H_a(s)=\frac{1}{1+2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)+2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2+\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^3}$$

Solution 7

截止频率对应的数字频率 ω_c 为

$$\omega_c = 2\pi f_c T_s = 2\pi f_c \frac{1}{f_s} = 0.5\pi$$

则 Ω_c 为

$$\Omega_c = c \tan \frac{\omega_c}{2} = c$$

所以

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{s}{c}\right) + 2\left(\frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^3}$$

采用双线性变换法，映射到 z 平面为

$$H(z) = H_a(s)\big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-2}}$$

Exercise 8

已知模拟滤波器的系统函数 $H_a(s) = \dfrac{1}{2s^2 + 3s + 1}$，用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转化为数字滤波器，采样周期 $T = 2$ 秒。

Solution 8

1) 脉冲响应不变法

$$H_a(s) = \frac{1}{2s^2+3s+1} = \frac{1}{(2s+1)(s+1)} = \frac{1}{s-\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{-1}{s-(-1)}$$

$$H(z) = \frac{T}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T}z^{-1}} + \frac{-T}{1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}} = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}z^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2}z^{-1}}$$

2) 双线性变换法

取 $c = \frac{2}{T} = 1$，则

$$\begin{aligned} H(z) = H_a(s)\big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{1}{2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 3\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \end{aligned}$$

7 FIR 滤波器设计

Exercise 9

用矩形窗设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器。已知通带的截止频率 $\omega_p = 0.5\pi$，窗的长度 $N = 17$，求出 $h(n)$ 的表达式即可。

Solution 9

理想低通滤波器特性为

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{-j\omega\tau}, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

群延时

$$\tau=\frac{N-1}{2}=8$$

过渡带宽

$$\Delta\omega=0.9\cdot\frac{2\pi}{N}\approx 0.1\pi$$

理想低通截止频率

$$\omega_c\approx\frac{1}{2}(\omega_p+\omega_{st})=0.55\pi$$

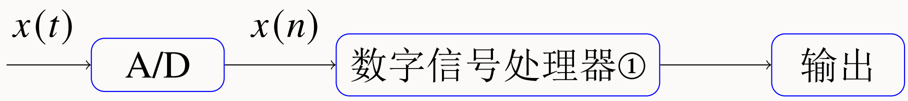
$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}=\frac{\sin[0.55\pi(n-8)]}{\pi(n-8)}$$

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.55\pi(n-8)]}{\pi(n-8)}, & 0\le n\le 16\\ 0, & \text{Others}\end{cases}$$

8 综合题

Exercise 10

如图为一数字信号处理系统，其中 A/D 为模数转换器，$x(t)=\sin(200\pi t)+\sin(300\pi t)$ 为系统模拟输入信号，试解答如下问题：



1) 若图中数字信号处理器①是 IIR 数字滤波器并具有高通特性，试确定其截止频率和输出信号（忽略滤波器带来的影响）。
2) 简要叙说 IIR 和 FIR 滤波器的异同（至少涉及 3 方面）。
3) 设 A/D 采样率为 512Hz，对序列 $x(n)$ 进行 256 个点的 FFT 变换。求两谱线间的频率间隔。若对上述数据进行离散傅立叶反变换，则反变换后的抽样间隔是多少？整个 256 个点的时宽又为多少？

Solution 10

1) 截止频率为 [100, 150]Hz，输出信号为高频部分

$$x(t) = \sin(300\pi t)$$

2) **IIR 滤波器**：单位冲激响应无限长；系统函数在有限 z 平面上有极点存在，系统可能不稳定；结构上是递归型的，即存在着输出到输入的反馈。

FIR 滤波器：单位冲激响应是有限个非零值；系统函数只有零点，全部极点都在 $z = 0$ 处，系统总是因果稳定的；结构上主要是非递归结构，没有输出到输入的反馈。

3) 频率间隔

$$F_0 = \frac{512\text{Hz}}{256} = 2\text{Hz}$$

抽样间隔

$$T_0 = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{512}\text{s}$$

256 点时宽

$$T_{256} = 256 \cdot T_0 = 0.5\text{s}$$