数字信号处理例题讲解

Xiaohei

版本：1.0
更新：2021 年 1 月 2 日

本文章为数字信号处理（电气）课程的部分例题讲解，由于部分答案为个人编撰，难免会出现部分错误，请保证使用 GitHub 仓库所发布的最新版本。如遇问题可在 GitHub 上发布 Issue 或直接联系我。

1 离散时间信号与系统

Exercise 1

一模拟信号 $x_a(t) = \sin(240\pi t) + 5\sin(360\pi t)$，采用 300Hz 的抽样频率进行采样。

1) 求信号的 Nyquist 抽样频率。
2) 求信号的折叠频率。
3) 求经过抽样后的序列 $x(n)$。
4) 若序列 $x(n)$ 通过理想 D/A 进行转换，求转换后的信号 $y_a(t)$。

Solution 1

1) 360Hz。Nyquist 抽样频率为信号最高频率的 2 倍。
2) 150Hz。折叠频率为抽样频率的一半。
3) 采样后的序列 $x(n)$ 为：

$$x(n)=x_a(nT_s)=x_a\left(\frac{n}{f_s}\right)=\sin\left(240\pi\cdot\frac{n}{300}\right)+5\sin\left(360\pi\cdot\frac{n}{300}\right)$$

$$\begin{aligned}&=\sin(0.8\pi n)+5\sin(1.2\pi n)\\&=\sin(0.8\pi n)-5\sin(2\pi n-1.2\pi n)\\&=-4\sin(0.8\pi n)\end{aligned}$$

4) 恢复后的信号 $y_a(t)$ 为：

$$y_a(t)=x\left(\frac{t}{T_s}\right)=x(tf_s)=-4\sin(0.8\pi\cdot 300t)$$

$$=-4\sin(240\pi t)$$

2 z 变换与离散时间 Fourier 变换（DTFT）

Exercise 2

已知离散 LSI 系统的差分方程

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中 $x(n)$ 为输入，$y(n)$ 为输出。

1) 求系统函数，并指出零极点。
2) 若该系统因果稳定，指出系统收敛域。
3) 求该因果稳定系统的单位抽样响应。

Solution 2

1) 对差分方程两边取 z 变换：

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

则系统函数为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

其零点为 $z=-\frac{1}{3},0$，极点为 $z=\frac{1}{2},\frac{1}{4}$。（不要遗漏 $z=0$ 的零点）

2) 由于系统为因果稳定系统，故其收敛域：

$$|z|>\frac{1}{2}$$

3) 用部分分式法求 $H(z)$ 的 z 变换：

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

根据 $|z|>\frac{1}{2}$，通过查表法得：

$$h(n)=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

3 离散 Fourier 变换（DFT）

Exercise 3

设序列 $x(n)$ 的傅氏变换为 $X\left(e^{j\omega}\right)$，试求下列序列的傅立叶变换。

1) $x(2n)$。
2) $x^*(n)$。

Exercise 4

对实信号进行谱分析，要求谱分辨率 $F_0 \le 10\text{Hz}$，信号最高频率 $f_h = 2.5\text{kHz}$，试确定以下参量：

1) 最小记录长度 T_0。
2) 抽样点间的最大时间间隔 T。
3) 在一个记录中的最小抽样点数 N。

Solution 4

Exercise 5

若存在模拟信号

$$x_a(t) = [\cos(160\pi t) + \cos(200\pi t)] \cos(1200\pi t)$$

使用 DFT 做谱分析，要求能分辨该信号的所有频率分量，试求：

1) 最小采样频率 f_s。
2) 采样后的离散序列 $x(n)$。
3) 在一个记录中的最小抽样点数 N。
4) 使用 1200Hz 的采样频率对信号采样后通过理想 D/A 恢复的信号 $x_a'(t)$。

Solution 5

4 快速 Fourier 变换（FFT）

5 数字滤波器的基本结构

Exercise 6

已知系统由下面差分方程描述：

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2)$$

试画出系统的直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型结构。其中 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示系统的输入和输出信号。

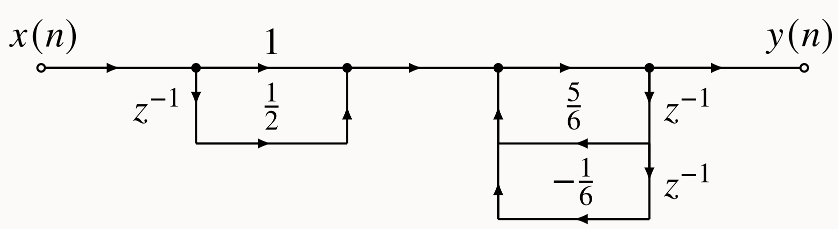
Solution 6

该 IIR 系统的系统函数为：

$$H(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{1}$$

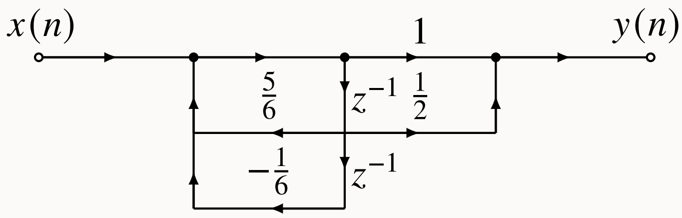
可得 $a_1 = \frac{5}{6}, a_2 = -\frac{1}{6}, b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}$。可画出直接 I 型和直接 II 型结构如图：

图 1: 直接 I 型



级联和并联型的系统函数为：

图 2: 直接 II 型



$$H(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

结构流图即为分别实现子系统后级联或并联，形式不唯一，需要注意不要遗漏并联子系统的系数，图略。

6 IIR 滤波器设计

Exercise 7

用双线性变换法设计一个三阶数字 Butterworth 低通滤波器，采样频率 $f_s = 4\text{kHz}$，其 3dB 截止频率为 $f_c = 1\text{kHz}$，三阶模拟 Butterworth 低通滤波器为

$$H_a(s) = \frac{1}{1+2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)+2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2+\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^3}$$

Solution 7

截止频率对应的数字频率 ω_c 为

$$\omega_c = 2\pi f_c T_s = 2\pi f_c \frac{1}{f_s} = 0.5\pi$$

则 Ω_c 为

$$\Omega_c = c\tan\frac{\omega_c}{2} = c$$

所以

$$H_a(s) = \frac{1}{1+2\left(\frac{s}{c}\right)+2\left(\frac{s}{c}\right)^2+\left(\frac{s}{c}\right)^3}$$

映射到 z 平面为

$$H(z) = H_a(s)\big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{1+2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1+\frac{1}{3}z^{-2}}$$

Exercise 8

已知模拟滤波器的系统函数 $H_a(s) = \dfrac{1}{2s^2+3s+1}$，用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转化为数字滤波器，采样周期 $T = 2$ 秒。

Solution 8

7 FIR 滤波器设计

Exercise 9

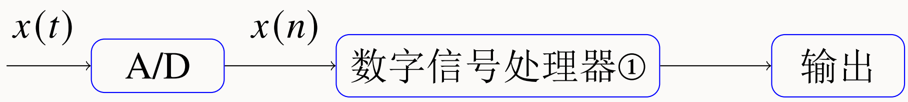
用矩形窗设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器。已知通带的截止频率 $\omega_p = 0.5\pi$，窗的长度 $N = 17$，求出 $h(n)$ 的表达式即可。

Solution 9

8　综合题

Exercise 10

如图为一数字信号处理系统，其中 A/D 为模数转换器，$x(t) = \sin(200\pi t) + \sin(300\pi t)$ 为系统模拟输入信号，试解答如下问题：



1) 若图中数字信号处理器①是 IIR 数字滤波器并具有高通特性，试确定其截止频率和输出信号（忽略滤波器带来的影响）。
2) 简要叙说 IIR 和 FIR 这两种滤波器的异同（至少涉及 3 个方面）。
3) 设 A/D 采样率为 512Hz，对序列 $x(n)$ 进行 256 个点的 FFT 变换。求两谱线间的频率间隔。若对上述数据进行离散傅立叶反变换，则反变换后的抽样间隔是多少？整个 256 个点的时宽又为多少？

Solution 10