西南交通大学 2015－2016 学年第（ 一 ）学期考试试卷

课程代码 6011310 课程名称 高等数学 I (A 卷) 考试时间 120 分钟

一. 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、关于函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2-4x}$ 的间断点，以下说法正确的是:（ C ）.

（A） $x=0$，$x=4$ 都是第一类间断点;

（B） $x=0$，$x=4$ 都是第二类间断点;

（C） $x=0$ 是第一类间断点，$x=4$ 是第二类间断点;

（D） $x=0$ 是第二类间断点，$x=4$ 是第一类间断点.

2、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln(1-x^2) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$（ B ）.

（A） 0;　（B） -1;　（C） 1;　（D） 2.

3、若函数 $y=f(x)$ 满足 $f'(x_0)=2$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是（ D ）.

（A）与 Δx 等价的无穷小;　（B）比 Δx 高阶的无穷小;

（C）比 Δx 低阶的无穷小;　（D）与 Δx 同阶的无穷小.

4、设函数 $y=f(x)$ 满足方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点:（ A ）.

（A）取得极小值;（B）取得极大值;（C）某邻域内单调递增;（D）某邻域内单调递减.

5、方程 $y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$ 的特解形式为:（ B ）（a,b,c 为常数）.

（A） ax^2e^{3x};　（B） $x^2(ax^2+bx+c)e^{3x}$;　（C） $x(ax^2+bx+c)e^{3x}$;　（D） ax^4e^{3x}.

二. 填空题（每小题 4 分，共 16 分）

6、已知 $y=f(e^{2x})$， $f'(x)=\arcsin(x-0.5)$，则 $y'\big|_{x=0}=\underline{\dfrac{\pi}{3}}$.

7、若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\underline{-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C}$.

8、曲线 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 的拐点是 $\underline{(0,0)\text{ 和 }(\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{16\sqrt[3]{16}})}$.

9、由 $y=x^2$ 与 $y=x^3$ 在第 I 象限所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体体积 $=\underline{\dfrac{2}{35}\pi}$.

三. 计算题（每小题 8 分，共 32 分）

10、计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}\ln\cot x}$

其中：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\dfrac{\csc^2 x}{\cot x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{\sin x\cos x}=-1$

故：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$

11、计算广义积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=\int_0^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}+\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

$$=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}+2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}$$

$$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^1+2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\pi$$

12、已知$f(x)$为可导函数，$f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f'(2)=0$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$，求$I=\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

解：令$t=2x$ 则：

$$I=\frac{1}{4}\int_0^2 t^2\ f''(t)\mathrm{d}$$

$$=\frac{1}{4}((t^2 f'(t))\Big|_0^2-\int_0^2 2t\,f'(t)\mathrm{d}t)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2 t\,f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}((t\,f(t))\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t)$$

$$=0$$

13、求微分方程$x^2y'+xy=y^2$满足初值条件$y\big|_{x=1}=1$的特解.

解：令：$z(x)=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

代入原方程，整理得：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}z=-\dfrac{1}{x^2}$

故：$z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int-\frac{1}{x^2}e^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=x(\frac{1}{2x^2}+C)$

所以，通解为：$y=\dfrac{2x}{1+Cx^2}$

由初值条件 $y\big|_{x=1}=1$得：$C=1$

故所求特解为：$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

注：此题可考虑为齐次方程求解

四. 解答题（每小题 9 分，共 27 分）

14、一辆公共汽车能容纳 60 人. 每次租用该辆车乘客人数 x 和每位乘客需支付的费用 p (元) 之间的关系为：$p=[3-(x/40)]^2$. 写出汽车公司每次租车得到的总收入 $r(x)$ 的表达式. 使边际收入 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x$ 等于零的每次旅行的人数是多少？相应的费用 p 是多少？

解：$r(x)=xp(x)=\dfrac{1}{1600}(x^3-240x^2+14400x)$

边际收入 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3}{1600}(x^2-160x+4800)$

令 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=0$，则：$x=40$ （$x=120>60$，不合题意舍去）

且：$p(40)=4$ （元）

15、设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x)=e^x+\int_0^x(t-x)f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解：$f(x)=e^x+\int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$f''(x)=e^x-f(x)$

所以得微分方程：$y''+y=e^x$，且 $f(0)=1$，$f'(0)=1$

特征方程：$r^2+1=0$，$r=\pm\sqrt{i}$

令方程特解为：$y^*=ae^x$，代入原方程解得：$a=\dfrac{1}{2}$

故方程通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^x$

由 $f(0)=1$，$f'(0)=1$解得：$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$

所以：$f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$

16、设直线 $y=ax$ $(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2，试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值.

解：$\begin{cases}y=ax\\y=x^2\end{cases}$，交点为：$(a,a^2)$

$S_1(a)=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{6}$

$S_2(a)=\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}$

所以 $S(a)=S_1(a)+S_2(a)=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$

令 $S'(a)=-\frac{1}{2}+a^2=0$，得驻点 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ （$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$ 舍去）

且 $S''(a)=2a>0$，故 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为 $S(a)$ 唯一极小值点，也是最小值点

所以最小值：$S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

五. 证明题（第 17 题 5 分，共 5 分）

17、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，证明：对于任意 $x\in(0,1)$，有：$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

证明：令 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (0<x\le 1)$

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$$

由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\xi f(\xi)$

故：$F'(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x}$

因为 $f(x)$ 单调递增，所以：$F'(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x}>0$

所以 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，即：

$\forall x\in(0,1)$：$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$