姓名______ 学号______ 班级______

密封装订线

西南交通大学 2019－2020 学年第（ 二 ）学半期试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 考试时间 60 **分钟**

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总成绩
得分									

阅卷教师签字：________________________

1. 计算行列式 $\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&16&81&256\end{vmatrix}$

答案：$\boldsymbol{D}_4\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&3&8&15\\0&15&80&255\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&8&15\\15&80&255\end{vmatrix}$

$$\overset{r_3-5r_2}{\underset{r_2-3r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&6\\0&40&180\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&6\\40&180\end{vmatrix}=120$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&4\\0&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

求（1）$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}^T$；（2）$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$；（3）$|\boldsymbol{AB}|$；（4）$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{p}$.

答案：（1）$\begin{pmatrix}2&3&7\\7&8&9\end{pmatrix}$ **（2）**$\begin{pmatrix}-3&10\\2&2\end{pmatrix}$ **（3）-26.（4）**$\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&2\\-1&-1\end{matrix}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$ 及 $\boldsymbol{A}^{2020}$.

答案： $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&2\\-1&-1\end{matrix}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\begin{matrix}1&2\\0&1\end{matrix}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{2020}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&2\\-1&-1\end{matrix}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\begin{matrix}1&2020\\0&1\end{matrix}\end{pmatrix}$.

4. 已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}&\boldsymbol{e}&\boldsymbol{f}\end{pmatrix}$，

求（1） $\boldsymbol{PAQ}$；（2）$\boldsymbol{Q}^5\boldsymbol{A}$；（3）$\boldsymbol{AQ}^3$**.**

答案：（1） $\begin{pmatrix}3&2&3\\ \boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}&\boldsymbol{e}&\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1&2&3\\ \boldsymbol{a}+5&\boldsymbol{b}+10&\boldsymbol{c}+15\\ \boldsymbol{d}&\boldsymbol{e}&\boldsymbol{f}\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}7&2&3\\ \boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}&\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}+3\boldsymbol{e}&\boldsymbol{e}&\boldsymbol{f}\end{pmatrix}$**.**

5. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$,

（1）$\boldsymbol{a}$ 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆？

（2） 在 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

答案：（1）$\boldsymbol{a}\neq-\dfrac{7}{6}$；

（2）$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{5}{3\boldsymbol{k}}&\dfrac{5}{9\boldsymbol{k}}-\dfrac{4}{3}\\ 1-\dfrac{8}{3\boldsymbol{k}}&\dfrac{7}{3}-\dfrac{8}{9\boldsymbol{k}}\\ \dfrac{2}{\boldsymbol{k}}&\dfrac{2}{3\boldsymbol{k}}\end{pmatrix}$**，其中** $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}+\dfrac{7}{6}$**；**

或 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{6\boldsymbol{a}+7}\begin{pmatrix}10&-8\boldsymbol{a}-6\\6\boldsymbol{a}-9&14\boldsymbol{a}+11\\12&4\end{pmatrix}$**.**

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$**,**

（1） 求的秩,并求一个最高阶非零子式；

（2） 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化成行最简形阵。

答案：（1）3，（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=4 \\ \lambda x_1+4x_2+10x_3=1 \\ x_1+7x_2+17x_3=3 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=3 \end{cases}$ 有无穷解？并在无穷解时求其解.

答案：$(A|b)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda=0$ 时，原方程组有无穷解；此时

$$(A|b)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_3+\frac{5}{4} \\ x_2=-\frac{5}{2}x_3+\frac{1}{4} \end{cases}$$

令 $x_3=c$，得原方程组的通解为 $x=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c+\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2}c+\frac{1}{4} \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$,

其中 c 是任意常数.

注意：答案不唯一。