密封装订线

姓　名＿＿＿＿＿＿

密封装订线

学　号＿＿＿＿＿＿

密封装订线

班　级＿＿＿＿＿＿

西南交通大学 2017－2018 学年第(2)学期半期测试题解答

课程代码 1272005 课程名称 《高等数学》BII 考试时间 90 分钟

一、选择题（每小题 5 分，共 6 个小题，共 30 分）

1. 曲面 $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=3$ 是【 A 】

（A） xoy 面上的双曲线绕 x 轴旋转一周所得；

（B） xoz 面上的双曲线绕 z 轴旋转一周所得；

（C） yoz 面上的双曲线绕 y 轴旋转一周所得；

（D） xoz 面上的双曲线绕 z 轴旋转一周所得.

解：因为曲面方程 $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=3$ 即为 $\frac{x^2}{4}-\left(y^2+z^2\right)=3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=3$，

所以曲面 $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=3$ 可以看作是由 xoy 面上的双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=3\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得，或者是由 xoz 面上的双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-z^2=3\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得；从而应选（A）.

2. 设有直线 $l_1: x-1=\frac{y-5}{-2}=z+8$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$，则 l_1 与 l_2 的夹角为【 C 】

（A） $\frac{\pi}{6}$；　（B） $\frac{\pi}{4}$；　（C） $\frac{\pi}{3}$；　（D） $\frac{\pi}{2}$.

解：因为直线 $l_1: x-1=\frac{y-5}{-2}=z+8$ 的一个方向向量为 $\overrightarrow{s_1}=(1,-2,1)$，

直线 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 的一个方向向量为 $\overrightarrow{s_2}=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$，

则直线 l_1 与 l_2 的夹角 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 为：

$$\cos\theta=\left|\cos\left(\overrightarrow{s_1},\ \overrightarrow{s_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{s_1}\bullet\overrightarrow{s_2}\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\bullet\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{|-1+2+2|}{\sqrt{1+4+1}\bullet\sqrt{1+1+4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$，故应选（C）.

3. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处【 B 】

（A）可微分；　　　　　　　　（B）不连续，偏导数存在；

（C）连续，偏导数不存在；　　（D）不连续，偏导数不存在.

解：（1）先判断 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性：

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{换元：}\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}}\lim\limits_{\rho\to 0+0}\dfrac{\rho\cos\theta\bullet\rho\sin\theta}{\rho^2}=\dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$ 随 θ 的取值不同而不同，故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，

根据函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的连续的定义 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，得函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. 故排除选项（A）与（C）.

（2）再判断 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数的存在性：

因为 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta x\bullet 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$，

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\dfrac{0\bullet\Delta y}{0^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. 故应选（B）.

4. 设 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中函数 f 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$【　B　】

（A）$-2z-y^2f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$；　　（B）$2z$；　　（C）$-y^2f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$；　　（D）$y^2f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解：因为 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，且函数 f 可微，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{y}{x}\right)+xy\bullet f'\left(\frac{y}{x}\right)\bullet\frac{-y}{x^2}=yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+xy\bullet f'\left(\frac{y}{x}\right)\bullet\frac{1}{x}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\left[yf\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y^2}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]+y\left[xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]=2xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)=2z$，故应选（B）.

5. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$【　C　】

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点；（B）不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（C）是 $f(x,y)$ 的极小值点；（D）是 $f(x,y)$ 的极大值点.

解：因为函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y$；

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，得唯一驻点 $(0,0)$；

又 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=1|_{(0,0)}=1,B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0|_{(0,0)}=0$，$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=1|_{(0,0)}=1$，

则 $\Delta=AC-B^2=1-0=1>0$，且 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=1>0$，

故驻点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点，从而应选（C）.

另解（利用“平面曲线上对坐标的曲线积分与路径无关”的等价条件中的“全微分方程”）：

因为 $dz=xdx+ydy=d\left(\frac{x^2}{2}\right)+d\left(\frac{y^2}{2}\right)=d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)$，则 $z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C$，

即 $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C$；显然 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C\geq C$（当且仅当 $x=y=0$ 时等号才成立），

则 $f(x,y)\geq C$（当且仅当 $x=y=0$ 时等号才成立），

根据极值的定义，得 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点，从而应选（C）.

6. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 可以写为【 D 】

（A）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$；（B）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$；（D）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$.

解：因为二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 的积分区域 $D:0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},0\leq\rho\leq\cos\theta$ 是由上半圆周 $x^2+y^2=x(y\geq 0)$ 与 x 轴围成的半圆域，

则该二次积分的积分区域在直角坐标下可表示为：

$D:0\leq x\leq 1,0\leq y\leq\sqrt{x-x^2}$ 或 $D:0\leq y\leq\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\leq x\leq\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}$，

则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \xlongequal[\text{坐标}]{\text{直角}} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

或者 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \xlongequal[\text{坐标}]{\text{直角}} \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)dx$. 从而应选（D）.

二、填空题（每小题 6 分，共 5 个小题，共 30 分）

7. 过直线 $x=y=2z$ 且平行于直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{4}$ 的平面方程为 $\underline{5x-6y+2z=0}$.

解：方法一（平面束）：因为直线 $x=y=2z$ 的一般方程为 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$；

由条件，所求平面过直线 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$，可设过直线 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ 的平面束为

$\lambda(x-y)+\mu(x-2z)=0$，即 $(\lambda+\mu)x-\lambda y-2\mu z=0$；

又所求平面平行于直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{4}$，则 $(\lambda+\mu,-\lambda,-2\mu)\perp(2,3,4)$，

故 $2(\lambda+\mu)-3\lambda-8\mu=0 \Rightarrow \lambda=-6\mu$；

所以 $-5\mu x+6\mu y-2\mu z=0$，即 $5x-6y+2z=0$ 为所求平面方程.

方法二（平面的点法式方程）：因为直线 $x=y=2z$ 即为 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$；

由条件，直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 在所求平面上，而直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 过点 $O(0,0,0)$，

则所求平面过直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 上的任意一点，即所求平面过点 $O(0,0,0)$，且其法向量 $\vec{n}$ 与直线

$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 的方向向量 $(2,2,1)$ 垂直，即 $\vec{n}\perp(2,2,1)$；

又所求平面平行于直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{4}$，则 $\vec{n}\perp(2,3,4)$；

从而可取所求平面的一个法向量为 $\vec{n}=(2,2,1)\times(2,3,4)=(5,6,-2)$，

又所求平面过点 $O(0,0,0)$，根据平面的点法式方程，得所求平面方程为：$5x-6y+2z=0$.

8. 若函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z-xyz=e$ 确定，则 $dz\big|_{(1,0)}=\underline{0dx+\frac{1}{e}dy}$.

解：将 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 代入方程 $e^z-xyz=e$，得 $e^z-0=e \Rightarrow z=1 \Rightarrow z(1,0)=1$.

方法一（利用全微分公式进行求解）：因为$z=f(x,y)$，则$dz\big|_{(1,0)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)}dy$；

令$F(x,y,z)=e^z-xyz-e$，则

$F_x'(1,0,1)=-yz\big|_{(1,0,1)}=0$，$F_y'(1,0,1)=-xz\big|_{(1,0,1)}=-1$，$F_z'(1,0,1)=\left(e^z-xy\right)\big|_{(1,0,1)}=e$，

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0,1)}=-\dfrac{F_x'(1,0,1)}{F_z'(1,0,1)}=-\dfrac{0}{e}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}=-\dfrac{F_y'(1,0,1)}{F_z'(1,0,1)}=-\dfrac{-1}{e}=\dfrac{1}{e}$，

从而$dz\big|_{(1,0,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0,1)}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}dy=0dx+\dfrac{1}{e}dy=\dfrac{1}{e}dy$.

方法二（利用多元函数全微分形式的不变性）：对方程$e^z-xyz=e$两边同时取全微分，得

$$d\left(e^z-xyz\right)=d(e)\Rightarrow d\left(e^z\right)-d(xyz)=0\Rightarrow e^zdz-\left[yzdx+xzdy+xydz\right]=0$$

$$\Rightarrow dz=\frac{yz}{e^z-xy}dx+\frac{xz}{e^z-xy}dy\Rightarrow dz\big|_{(1,0,1)}=\frac{yz}{e^z-xy}\Big|_{(1,0,1)}dx+\frac{xz}{e^z-xy}\Big|_{(1,0,1)}dy=0dx+\frac{1}{e}dy=\frac{1}{e}dy,$$

故$dz\big|_{(1,0,1)}=\dfrac{1}{e}dy$.

9. 曲面$x^2+y^2+z=4$在点$P(1,1,2)$处的法线方程是$\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}}$.

解：将点$P(1,1,2)$代入曲面方程$x^2+y^2+z=4$，得$1^2+1^2+2=4$成立，则点$P(1,1,2)$是切点. 令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z-4$，则曲面$x^2+y^2+z=4$在点$P(1,1,2)$处的法向量为

$$\vec{n}=\left(F_x',F_x',F_z'\right)\big|_{(1,1,2)}=(2x,2y,1)\big|_{(1,1,2)}=(2,2,1),$$

则由直线的点向式方程，得所求法线方程为$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

10. 函数$u=xy^2z$在点$A(1,-1,2)$处沿增加最快方向的方向导数是$\underline{\sqrt{21}}$.

解：因为函数$u=xy^2z$在点$A(1,-1,2)$处沿增加最快方向的方向导数就是“函数$u=xy^2z$在点$A(1,-1,2)$处的方向导数的最大值”，即为“函数$u=xy^2z$在点$A(1,-1,2)$处梯度$gradu(1,-1,2)$的模$\left|gradu(1,-1,2)\right|$”，

而$gradu(1,-1,2)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,-1,2)}=\left(y^2z,2yz,xy^2\right)\big|_{(1,-1,2)}=(2,-4,1)$，

则$\left|gradu(1,-1,2)\right|=\left|(2,-4,1)\right|=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}$，故所求方向导数为$\sqrt{21}$.

11. 设平面区域$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$，则二重积分$\displaystyle\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\underline{\ 0\ }$.

解：方法一（利用二重积分的积分区域的对称性与被积函数的奇偶性）：

因为区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$ 关于 x 轴对称，而二重积分 $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ 的被积函数 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是关于 y 的奇函数，所以 $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$.

方法二（计算该二重积分）：

因为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$ 的极坐标表示为 $D:\frac{-\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 1$，则

$$\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy \overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho\cos\theta\bullet\rho\sin\theta}{1+\rho^2}\bullet\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)d\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\bullet\int_0^1\frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho=\frac{1}{2}\left[\frac{-(-1)}{2}-\frac{-(-1)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\bullet\int_0^1\frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho=0,$$

即 $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$.

三、解答题（每小题 10 分，共 4 个小题，共 40 分，要求有必要的解题步骤）

12. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解：将点 $(1,-2,1)$ 代入曲线方程 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}1^2+(-2)^2+1^2=6\\1-2+1=0\end{cases}$ 成立，

则点 $(1,-2,1)$ 是切点.

因为曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(2x,2y,2z)\big|_{(1,-2,1)}=2(1,-2,1)$，

平面 $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)\big|_{(1,-2,1)}=(1,1,1)$，

则曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为

$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(2(1,-2,1))\times(1,1,1)=2((1,-2,1)\times(1,1,1))=2(-3,0,3)=-6(1,0,-1)$，

则所求切线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$；法平面方程为 $(x-1)-(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

注：此题中的切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$ 不能错误的写成 $\frac{x-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$（因为方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在

空间中表示的是一个平面，不是一条直线）.

13. 已知直角三角形的斜边长为 l，则其周长不可能超过多少？

解：设直角三角形的两条直角边的长度为 x,y，则三角形的周长为 $f(x,y)=x+y+l$，

其中 $x>0,y>0,x^2+y^2=l^2$.

则所求问题为：求函数 $f(x,y)=x+y+l$ 在限制条件 $x^2+y^2=l^2$（其中 $x>0,y>0$）下的最大值.

方法一（用拉格朗日乘数法）：令 $L(x,y,\lambda)=x+y+l+\lambda\left(x^2+y^2-l^2\right)$，

则根据 $\begin{cases} L'_x=1+2\lambda x=0 \\ L'_y=1+2\lambda y=0 \\ L'_\lambda=x^2+y^2-l^2=0 \end{cases}$，解得 $x=y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$；故 $f\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{l}{\sqrt{2}}+\dfrac{l}{\sqrt{2}}+l=\left(1+\sqrt{2}\right)l$

由实际问题可知，周长的最大值存在.

所以当直角三角形的两条直角边的长度都是 $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ 时，其周长取得最大值 $f\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)l$.

方法二（转化为无条件极值）：将 $\begin{cases} x=l\cos t \\ y=l\sin t \end{cases},0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 代入 $f(x,y)=x+y+l$，得

$$f(l\cos t,l\sin t)=l\cos t+l\sin t+l=\sqrt{2}\,l\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+l,$$

而 $0<t<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}<t+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow\left(\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)_{\max}=1$，

所以 $f_{\max}=\sqrt{2}\,l\bullet 1+l=\left(1+\sqrt{2}\right)l$. 即周长的最大值为 $\left(1+\sqrt{2}\right)l$.

方法三（转化为无条件极值）：将 $y=\sqrt{l^2-x^2}$ ，$0<x<l$ 代入 $f(x,y)=x+y+l$，得

$$f\left(x,\sqrt{l^2-x^2}\right)=x+\sqrt{l^2-x^2}+l\ (0<x<l),$$

根据 $\dfrac{df}{dx}=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{l^2-x^2}}=\dfrac{\sqrt{l^2-x^2}-x}{\sqrt{l^2-x^2}}=\dfrac{l^2-2x^2}{\sqrt{l^2-x^2}\left(\sqrt{l^2-x^2}+x\right)}\overset{令}{=}0$，得唯一驻点 $x=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$；

当 $0<x<\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ 时 $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{l^2-2x^2}{\sqrt{l^2-x^2}\left(\sqrt{l^2-x^2}+x\right)}>0$，

当 $\frac{l}{\sqrt{2}}<x<l$ 时 $\frac{df}{dx}=\frac{l^2-2x^2}{\sqrt{l^2-x^2}\left(\sqrt{l^2-x^2}+x\right)}<0$；

所以唯一驻点 $x=\frac{l}{\sqrt{2}}$ 是函数 $f\left(x,\sqrt{l^2-x^2}\right)=x+\sqrt{l^2-x^2}+l\,(\,0<x<l)$ 的极大值点；

又函数 $f\left(x,\sqrt{l^2-x^2}\right)=x+\sqrt{l^2-x^2}+l$ 在 $x\in(\,0,l)$ 内可导，且极值唯一，

故该唯一的极值（极大值）即为最值（最大值），

即当 $x=\frac{l}{\sqrt{2}}$ 时， $f_{\max}\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}}\right)=\frac{l}{\sqrt{2}}+\frac{l}{\sqrt{2}}+l=\left(1+\sqrt{2}\right)l$，即周长的最大值为 $\left(1+\sqrt{2}\right)l$.

方法四（利用向量的数量积与其模的乘积的关系）因为 $f(x,y)=x+y+l=(x,y)\bullet(1,1)+l$，

而向量 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$，且 $\left|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|\le 1$，故 $\left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|\left|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|\le\left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|$，

从而 $f(x,y)=x+y+l=(x,y)\bullet(1,1)+l\le\left|(x,y)\right|\bullet\left|(1,1)\right|+l$

$=\sqrt{x^2+y^2}\bullet\sqrt{2}+l=l\bullet\sqrt{2}+l=\left(1+\sqrt{2}\right)l$，

即 $f(x,y)=x+y+l\le\left(1+\sqrt{2}\right)l$，故其周长取得最大值 $\left(1+\sqrt{2}\right)l$.

14. 计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=y^2$ 所围成的区域.

解：（注意：本题只能用“直角坐标”的“先对 x 积分再对 y 积分”的积分次序进行计算）

联立 $\begin{cases}y=x\\x=y^2\end{cases}$，得交点 $(0,0)$ 与 $(1,1)$；则 $D:0\le y\le 1,\,y^2\le x\le y$，

所以 $\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1\frac{\sin y}{y}dy\int_{y^2}^{y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\bullet\left(y-y^2\right)dy=\int_0^1(1-y)\sin y\,dy$

$=\int_0^1(1-y)d(-\cos y)\overset{\text{分部}}{\underset{\text{积分}}{=}}\left[(1-y)\bullet(-\cos y)\right]_0^1-\int_0^1(-\cos y)\bullet(-1)dy$

$=\left[(y-1)\cos y\right]_0^1-\int_0^1\cos y\,dy=\left[0-(-1)\right]-\left[\sin y\right]_0^1=1-(\sin 1-0)=1-\sin 1$，

即 $\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=1-\sin 1$.

15. 设区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$.

解：因为 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，则

方法一（“先二后一”）：因为 $\Omega:-1\le z\le 1,\,D_z:x^2+y^2\le 1-z^2$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz \xlongequal{\text{“先二后一”}} \int_{-1}^{1} z^2dz\iint\limits_{D_z} dxdy=\int_{-1}^{1} z^2\bullet\pi\left(1-z^2\right)dz \xlongequal{\text{奇偶性}} 2\pi\int_0^1\left(z^2-z^4\right)dz$$

$$=2\pi\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right]_0^1=2\pi\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=\frac{4\pi}{15},$$

即 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\frac{4\pi}{15}$.

方法二（柱面坐标）：因为$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le\rho\le1,-\sqrt{1-\rho^2}\le z\le\sqrt{1-\rho^2}$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz \xlongequal[\text{坐标}]{\text{柱面}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} z^2\bullet\rho dz=2\pi\int_0^1\rho\bullet2\bullet\frac{\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^3}{3}d\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}d\rho \xlongequal{\text{“凑微分”}} \frac{4}{3}\pi\bullet\frac{-1}{2}\int_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}d\left(1-\rho^2\right)$$

$$=\frac{-2}{3}\pi\bullet\left[\frac{2}{5}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{-2}{3}\pi\bullet\frac{2}{5}[0-1]=\frac{4\pi}{15},$$

即 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\frac{4\pi}{15}$.

方法三（球面坐标）：因为$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\pi,0\le r\le1$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz \xlongequal[\text{坐标}]{\text{球面}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(r\cos\varphi)^2\bullet r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi}\bullet\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=2\pi\left[\frac{-1}{3}(-1-1)\right]\bullet\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{4\pi}{15},$$

即 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\frac{4\pi}{15}$.