西南交通大学 2016—2017 学年第(1)学期期中考试试卷

课程代码 1271031 课程名称 概率论与数理统计 B 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总成绩
得分											

阅卷教师签字：

已知：$\Phi(0.0556)=0.5239$，$\Phi(0.5)=0.6915$

一、（15）某市有一辆出租车涉嫌夜间交通肇事逃逸。该市的出租车有“绿色”和“蓝色”两种，且 85%的出租车是“绿色”，15%的出租车是“蓝色”。一位目击者认定肇事出租车为“蓝色”。法庭在与出事当夜相同的环境下测试了目击者的可信度，发现在 80%的时间里他能正确识别两种颜色中的每一种，在 20%的时间里不能正确识别。问该肇事车辆确为“蓝色”的概率是多少？

解:设 A={出租车是蓝色}, $\bar{A}=\{$出租车是绿色$\}$ $B=\{$目击者认定肇事出租车为蓝色$\}$

则据题 $P(A)=15, P(\bar{A})=85\%, P(B|A)=80\%, P(B|\bar{A})=20\%$

由全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.29$

由贝叶斯公式,该肇事车辆确为“蓝色”的概率为

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{80\%\times15\%}{0.29}=0.4138$$

二、（18）设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ k(2-x), & 1\le x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）k 值；（2）分布函数 $F(x)$；（3）$P\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\}$。

解:(1)据题 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 k(2-x)dx=1$ 得 $k=1$

(2)当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$

姓名 学号 班级 密封装订线

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$

当 $1 \le x < 2$ 时, $F(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$

当 $x \ge 1$ 时，$F(x) = 1$

所以得

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

故，$P\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\} = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

三、（15）设 K 在 $(0,\ 5)$ 服从均匀分布，求 x 的方程

$$4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$$

有实根的概率。

解:据题 K 的概率密度为

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 < k < 5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

方程有实根的条件为

$$\Delta = 4K^2 - 4 \times 4(K+2) \ge 0$$

得，$K \ge 2$ 或 $K \le$ -1

则方程有实根的概率为 $P\{K \ge 2\} = \frac{3}{5} = 0.6$

四、（16 分）设随机变量X的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_k	0.2	0.25	a	0.3	0.05

试求：（1）求 a 的值；（2）$Y = X^2$ 的分布律及分布函数；（3）$Z = e^{2X+1}$ 的分布律及分布函数。

解：（1）据题，$0.2 + 0.25 + a + 0.3 + 0.05 = 1$，得 $a = 0.2$

（2）Y 的分布律为

$Y = X^2$	0	1	4	9
p_k	0.2	0.55	0.2	0.05

其分布函数为$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 0.2, & 0\le y<1\\ 0.75, & 1\le y<4\\ 0.95, & 4\le y<9\\ 1, & y\ge 9\end{cases}$

（3）Z 的分布律为

$Z=e^{2X+1}$	e^{-3}	e^{-1}	e	e^{3}	e^{7}
p_k	0.2	0.25	0.2	0.3	0.05

其分布函数为$F(z)=\begin{cases}0, & z<e^{-3}\\ 0.2, & e^{-3}\le z<e^{-1}\\ 0.45, & e^{-1}\le z<e\\ 0.65, & e\le z<e^{3}\\ 0.95, & e^{3}\le z<e^{7}\\ 1, & z\ge e^{7}\end{cases}$

五、（16）设某物体的温度$T(°F)$是一个随机变量，且有$T\sim N(53,\ 4)$，试求：

（1）$Q=\frac{9}{5}(T-32)(°C)$的概率密度函数；（2）概率$P\{36<Q<38\}$。

解：（1）$Q\sim N\left(\frac{189}{5},\ \left(\frac{18}{5}\right)^2\right)$,则 Q 的概率密度函数为，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{18}{5}}e^{-\frac{\left(x-\frac{189}{5}\right)^2}{2\times\left(\frac{18}{5}\right)^2}}=\frac{5}{18\times\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{5^2\left(x-\frac{189}{5}\right)^2}{2\times 18^2}},-\infty<x<+\infty$$

（2）

$$P\{36<Q<38\}=\Phi\left(\frac{38-\frac{189}{5}}{\frac{18}{5}}\right)-\Phi\left(\frac{36-\frac{189}{5}}{\frac{18}{5}}\right)=\Phi\left(\frac{1}{18}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{1}{18}\right)+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1=0.5239+0.6915-1=0.2154$$

六、（20 分）某种型号器件的寿命X（以小时计）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

现有一大批此种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多大？

解：记寿命大于 1500 的器件的个数为随机变量Y，则$Y \sim B(5,\dfrac{2}{3})$

$$p=P\{\mathrm{X}>1500\}=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}$$

至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率为

$$\begin{aligned}P\{\mathrm{Y}\geq 2\}&=1-P\{\mathrm{Y}=0\}-P\{\mathrm{Y}=1\}\\&=1-\left(\frac{1}{3}\right)^5-C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{232}{243}=0.955\end{aligned}$$