西南交通大学 2020—2021 学年第（ 一 ）学期考试试卷

西南交通大学本科考试试卷

课程代码 MATH000812 课程名称 高等数学I（A卷） 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	总成绩
得分						

阅卷教师签字：

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}-x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$（ C ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) ∞

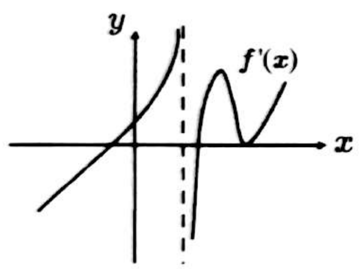
2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+b}{\ln x}, & x>0且x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，则（ A ）.

(A) $a=1$，$b=-1$　　(B) $a=-1$，$b=-1$　　(C) $a=-1$，$b=1$　　(D) $a=1$，$b=1$

3. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=1$，对任意常数 k，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f'(x+k)-f'(x)\right]=$（ D ）.

(A) $kf''(k)$　　(B) 1　　(C) 0　　(D) k

4. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导函数 $f'(x)$ 图像如下，则 $f(x)$ 在所示范围内有（ C ）.



(A) 2个极值点，2个拐点　　(B) 2个极值点，3个拐点

(C) 3个极值点，2个拐点　　(D) 3个极值点，1个拐点

5. 下列积分计算正确的是（ D ）.

(A) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\,dx=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$　　(B) $\int_{x}^{1}\dfrac{1}{1+t^2}\,dt=\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{1}{1+t^2}\,dt\ (x>0)$

(C) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^3}\,dx=0$　　(D) $\int_{0}^{1}x^2(1-x)^3dx=\int_{0}^{1}x^3(1-x)^2dx$

6. 在区间$[a,b]$上$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令$S_1=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}\left(f(b)+f(a)\right)(b-a)$，则（ B ）.

(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_1<S_3$ (C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_3<S_1$

二、 填空题（每小题 4 分，共 16 分）

7. 设函数$f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$有无穷间断点$x=0$和可去间断点$x=1$，则$a=$ e.

8. 抛物线$y=ax^2+bx+c$上曲率最大的点的横坐标为 $-\frac{b}{2a}$.

9. 设$\lambda>0$，反常积分$\int_0^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{\lambda}$.

10. 微分方程$\sec^2x\cdot\tan y\mathrm{d}x+\sec^2y\cdot\tan x\mathrm{d}y=0$的通解为 $\tan x\cdot\tan y=C$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

11. 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin 2x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{1-\cos x}$ $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin2x)\cdot2\cos2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin2x}{\sin x}=4$

12. 设函数$y=f(x)$由方程$x^2+y-1=e^{xy}$所确定，求$y'(0)$，并计算$\lim\limits_{n\to\infty}n[f\left(\frac{2}{n}\right)-2]$.
$=2$ $=4$

13. 计算不定积分$I=\int\sin\ln x\mathrm{d}x$ $=x\sin\ln x-\int x\cdot\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\sin\ln x-x\cos\ln x+\int x\cdot(-\sin$

$\Downarrow$

$I=\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x$

14. 计算定积分$I=\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2t}dt=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

四、 解答题（15、16 题每小题 8 分，17 题 10 分，共 26 分）

15. 求函数$f(x)=10\arctan x-3\ln x$的极值和极值点.
$x=\frac{1}{3}$取得极小值 $10\arctan\frac{1}{3}+3\ln3$
$x=3$ 取得极大值 $10\arctan3-3\ln3$

16. 求微分方程$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$满足初值条件$y|_{x=0}=-1$的特解.
$y=\frac{1}{x^2-1}(1+\sin x)$

17. 求曲线$y=x^2$在点$(1,1)$处的切线方程，以及切线与该曲线以及x轴所围成图形的面积，并求此图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积.
$S=\int_0^1(\frac{y+1}{2}-\sqrt{y})dy=\frac{1}{12}$
$V=\int_0^1\pi x^4dx-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{1}{30}\pi$

五、证明题（6 分）

18. 已知$f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$二阶可导，且$\lim\limits_{x\to0.5}\dfrac{f(x)}{x-0.5}=0$，$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在$\xi\in(0,2)$使得$f''(\xi)=0$.

证明：
- $\lim\limits_{x\to0.5}f(x)=\lim\limits_{x\to0.5}\frac{f(x)}{x-0.5}\cdot\lim\limits_{x\to0.5}(x-0.5)=0$. 由$f(x)$在$[0,2]$连续得$f(0.5)=\lim\limits_{x\to0.5}f(x)=0$
- $f'(0.5)=\lim\limits_{x\to0.5}\frac{f(x)-f(0.5)}{x-0.5}=\lim\limits_{x\to0.5}\frac{f(x)}{x-0.5}=0$
- 由积分中值定理，$\exists\xi_1\in(1,\frac{3}{2})$，s.t $\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2}f(\xi_1)$. 因此 $f(2)=f(\xi_1)$
  据Rolle定理得$\exists\xi_2\in(\xi_1,2)$，s.t $f'(\xi_2)=0$
- 由$f'(\frac{1}{2})=0$，$f'(\xi_2)=0$ $(\xi_2\in(1,2))$以及Rolle定理得，$\exists\xi\in(0,2)$. s.t $f''(\xi)=0$.