西南交通大学 2014－2015 学年第(1)学期测 1 解答

课程代码 6011310 课程名称 高等数学 I 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师请注意：计算题、解答题要给步骤分，错处要用红笔标出，大题首、卷首都要打分。

密封装订线 姓名 学号 班级

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
(本大题分 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$，极限的值是（　　　　）

$A.0$　　$B.1$　　$C.\dfrac{3}{2}$　　$D.\dfrac{6}{5}$

答（ D ）

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{x}\ (a>0)$,极限的值是（　　）

$A.0$　　$B.1$　　$C.\ a$　　$D.\dfrac{1}{a}$

答（ D ）

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{2}{n}}\cdots e^{\frac{n-1}{n}}\cdot e}$ ，极限的值是（　　　　）

$A.0$　　$B.\ e$　　$C.\sqrt{e}$　　$D.\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

答（ C ）

4. 方程$x^3-3x+1=0$在$(0,\sqrt{3})$内的实根的个数为（　　）

$A.\ 3$　　$B.\ 2$　　$C.\ 1$　　$D.\ 0$

答（ B ）

密封装订线

二　填空题（4 小题，每题 6 分，共 24 分）

5. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-1}=$________________。

答：e^{-2}

6. $\lim_{n\to\infty} n\pi\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$______________________________

答： π

7. 设 $y = x\cos x - \ln a^x + \sin e, (a>0)$ 则 $y' =$______________________________

答：$\cos x - x\sin x - \ln a$

8. 设 $y = x^2 \arctan\sqrt{x-1}$，$x>1$，则 $d\ y =$ ______________________________ .

答：$\frac{x}{2}(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 4\arctan\sqrt{x-1})dx$

三 计算题（5 小题, 每题 6 分，共 30 分）（要给步骤分）

9. 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{\sin(x^3)}$

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x} = -\frac{1}{2}$

10. 设 $f(x)$在$x=a$ 可导，且 $f'(a) = b \neq 0$,

计算 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(a+\sin x)-f(a-\sin x)}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(a+\sin x)-f(a-\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(a+\sin x)-f(a)}{x} - \frac{t(a-\sin x)-f(a)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(a+\sin x)-f(a)}{\sin x}\frac{\sin x}{x} + \frac{f(a-\sin x)-f(a)}{-\sin x}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2b}$$

11. 设$y = (\tan x)^x$ 求 y'

解：

$$y=(\tan x)^{x} \quad \ln y = x\ln(\tan x) \quad y' = (\tan x)^{x}[\ln(\tan x)+\frac{x\cdot\sec^{2}x}{\tan x}]$$

12.

设曲线方程为$\begin{cases} x=t+2+\sin t \\ y=t+\cos t \end{cases}$,求此曲线在 x=2 的点处的切线方程,及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$x=2$时 $y=1, t=0$ $\quad y'=\dfrac{1-\sin t}{1+\cos t}$ $\quad y'\big|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$ 切线方程：$y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$

$$y''=\frac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^{3}}$$

13. 设 y 是由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定的 x 的函数，求$y'(0)$.

解：$y(0)=1$

$$\cos(xy)(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1$$

$$y'=\frac{1+\dfrac{1}{y-x}-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+\dfrac{1}{y-x}} \qquad y'(0)=1$$

四 解答题（3 小题,14、15 小题每题 7 分，16 小题 8 分，共 22 分）(要给步骤分)

14. 设 $y=\dfrac{1}{1-x}$，求$y^{(n)}$.

解：

$$y=-(x-1)^{-1}$$
$$y'=-(-1)\cdot(x-1)^{-2}=(x-1)^{-2}$$
$$y''=(-2)\cdot(x-1)^{-3}$$
$$y^{(n)}=(-2)\cdots(-n)(x-1)^{-n-1}=(-1)^{n+1}n!\,(x-1)^{-n-1}$$

15. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$的连续性($n$为正整数)，若有间断点，写出间断点的类型。

解：

$$f(x)=\begin{cases} -1 & -\infty<x<-1 \\ 1 & -1<x<1 \\ -1 & 1<x<\infty \\ 0 & x=-1,\ 1 \end{cases}$$

显然当$x\in R$,且$x\neq\pm1$时，$f(x)$连续， $x\neq\pm1$是 $f(x)$ 的跳跃间断点。

16. 已知$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\le 0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的可导性，并写出$f'(x)$.

解：

当$x<0$时, $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, 当$x>0$时, $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$

当$x=0$时

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

左右导数不等，当$x=0$时 导数不存在。

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$