2017－2018 学年第一学期《高等数学 BI》期末试题

一． 选择题（每小题 4 分，共 4 个小题，共 16 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中与 x^2 为同阶无穷小的是【　　】

（A）$1-e^x$；　（B）$\ln\left(1-x^3\right)$；　（C）$\arcsin\left(2x^2\right)$；　（D）$\sqrt{1+x^4}-1$.

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}=-1$，则以下说法正确的是【　　】

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点；　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但 $f'(0)\neq 0$.

3. 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围图形的面积为【　　】

（A）$\int_0^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$；　（D）$\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x-\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$.

4. 设方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x),C$ 为任意常数，则该方程的通解是【　　】

（A）$C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$；　（B）$y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$；

（C）$C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$；　（D）$y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.

二． 填空题（每小题 4 分，共 5 个小题，共 20 分）

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

6. 设 $F(x)$ 是 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}\left[F(x^2)\right]=$________.

7. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是________.

8. $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}=$________.

9. 曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凸区间是________.

三． 计算题（每小题 7 分，共 3 道题，共 21 分，要求写出必要的解题步骤）

10．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\tan 2x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}$.

11．计算定积分 $I=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$.

12．计算不定积分 $I=\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

四. 解答题（每小题 10 分，共 3 道题，共 30 分，要求写出必要的解题步骤）

13．求 $y''+4y=3\sin x$ 的一条积分曲线，使其与曲线 $y=\tan(3x)$ 相切于原点.

14．求由平面曲线 $y=x\sin x$ 与 $y=x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 所围图形的面积以及此图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

15．有一个体积为 V 的无盖圆柱形容器，问如何确定底面半径和容器高的比例使容器的表面积最小？

五. 证明题（第 16 题 6 分，第 17 题 7 分，共 13 分，要求写出必要的解题步骤）

16．证明:方程 $\int_a^x \frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$ 在区间 (a,b) 内有且只有一个实根.

17．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=2\int_0^{0.5} xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$.