密封装订线 密封装订线 密封装订线

姓 名____________ 学 号____________ 班 级____________

西南交通大学 2018－2019 学年第 1 学期半期测试卷

课程代码 1271046 课程名称 高等数学 BI 考试时间 **90 分钟**

参考评分标准

一. 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、关于数列极限，以下说法正确的是（ D ）.

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $x_n<y_n$（$\forall n$），则 $a<b$

（C）数列 $\{\frac{1}{n}\cos n\pi\}$ 是发散的

（D）数列 $\{n\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)\}$ 是无界的，但非无穷大量

2、下列结论中正确的是（ B ）.

（A）$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=1$　　（B）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

（C）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

3、已知 $x\to 0$ 时 $(1+a\sin x^2)^{\frac{2}{3}}-1$ 与 $\cos 2x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$（ A ）.

（A）-3　（B）3　（C）-6　（D）-12

4、设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1} & x\neq\pm1\\ 0 & x=\pm1\end{cases}$ 则（ C ）.

（A）$f(x)$ 在 $x=1$ 连续，在 $x=-1$ 间断　　（B）$f(x)$ 在 $x=1$，$x=-1$ 都连续

（C）$f(x)$ 在 $x=1$ 间断，在 $x=-1$ 连续　　（D）$f(x)$ 在 $x=1$，$x=-1$ 都间断

5、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\neq 0$，若 $f(a)=f(b)$，则方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内有（ C ）个实根.

（A）3　（B）2　（C）1　（D）0

二. 填空题（每小题 5 分，共 20 分）

6、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+5^n}=$ ____5____.

7、若 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ____-1____.

8、设函数 $y=e^{f(\tan x)}$，其中 $f(x)$ 为可导函数，则 $\mathrm{d}y=$ ____$e^{f(\tan x)}f'(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x$____.

9、当 $n>2$ 时，函数 $y=x^2e^x$ 的 n 阶导数为____$e^x\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)$____.

三. 计算题（每小题 7 分，共 21 分）注意：解题方法不唯一

10、求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

解：原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{\frac{1}{2}x^2}$ （3 分）

$$=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}2\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$ （6 分）

所以原极限 $=e^{-\frac{1}{3}}$ （7 分）

11、求 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$；

解：原极限 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$ （3 分）

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{(x-1)+x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=\frac{1}{2}$$ （7 分）

12、已知 $y=f(\dfrac{3x-2}{3x+2})$， $f'(x)=\arctan x^2$，求 $y'|_{x=0}$.

解： $y'=f'(\dfrac{3x-2}{3x+2})(1-\dfrac{4}{3x+2})'=f'(\dfrac{3x-2}{3x+2})\dfrac{12}{(3x+2)^2}$ （4 分）

$$y'\big|_{x=0}=3f'(-1)=3\arctan 1=\frac{3}{4}\pi$$ （7 分）

四. 解答题（13 小题 9 分，14、15 小题每题 10 分，共 29 分）

13、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\left(x^2+y\right)=xy+\cos xy^2-1$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线方程.

解：方程两边关于 x 求导得：

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=y+xy'-\left(\sin xy^2\right)(y^2+2xyy')$$ （5 分）

将 $x=0,y=1$ 代入上式得 $y'(0)=1$ （7 分）

所以所求切线方程为 $y=x+1$. （9 分）

14、求由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t^2\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 确定的函数的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\ln(\sqrt{1+t^2}))'}{(\arctan t^2)'}=\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^4}}=\frac{1+t^4}{2(1+t^2)}$$ （5 分）

考虑参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t^2\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+t^4}{2(1+t^2)}\end{cases}$ 对 x 求导，得：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(\frac{1+t^4}{2(1+t^2)})'}{(\mathrm{arctant}^2)'}=\frac{t^5+2t^3-t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1+t^4}{2t}=\frac{\left(t^4+2t^2-1\right)\left(1+t^4\right)}{2(1+t^2)^2}$$ （10 分）

15、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解： 当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$；（3 分）

当 $x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$；（7 分）

所以 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$.

因$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$极限不存在，故$f'(x)$在$x=0$不连续. （10 分）

五. 证明题（共 10 分）

16、设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$\left(0,1\right)$上可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：存在$\xi\in\left(0,1\right)$，使得$f'(\xi)=1$.

证明：设$F(x)=f(x)-x$　（3 分）

因为$F(1)=f(1)-1=-1$，$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以由零点定理可知，存在$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$F(\eta)=0$.（7 分）

且$F(0)=0$，由中值定理知存在$\xi\in\left(0,\eta\right)\subset\left(0,1\right)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=1$.（10 分）