2017-2018 高等数学 BII 期中考试解答题

1、求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线方程和法平面方程.

2、已知直角三角形的斜边长为l，则其周长不可能超过多少?

3、计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线$y=x$及抛物线$x=y^2$所围成的区域.

4、设区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算三重积分$I=\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

参 考 答 案

1、求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线方程和法平面方程.

解：所给方程两边对x求导并整理，得

$$\begin{cases} yy'+zz'=-x \\ y'+z'=-1 \end{cases} \qquad (4\text{分})$$

由此得$y'=\dfrac{z-x}{y-z}$， $z'=\dfrac{x-y}{y-z}$

所以$y'(1)=0$， $z'(1)=-1$，切线方向向量$T=(1,0,-1)$. （8 分）

故所求切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$，法平面方程为$x-z=0$. （10 分）

2、已知直角三角形的斜边长为l，则其周长不可能超过多少?

解：设直角边为x， y

周长$S(x,y)=x+y+l$，约束条件为$x^2+y^2=l^2$

设$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$ （4 分）

$$令\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=l^2 \end{cases} \qquad (8\text{分})$$

得唯一解$x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$，此时$S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}l,\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)l$，由题意该周长为所求

最长周长. （10 分）

注：此题也可以用无条件极值

3、计算二重积分$\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线$y=x$及抛物线$x=y^2$所围

成的区域.

解：$\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\mathrm{d}x$ （4 分）

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(\sin y-y\sin y)\mathrm{d}y \qquad (7\text{分})$$

$$=-\cos y\big|_0^1+y\cos y\big|_0^1-\int_0^1\cos y\mathrm{d}y$$

$$=1-\sin 1 \qquad (10\text{分})$$

4、设区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解:（先二后一法）$I=\int_{-1}^{1} z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_Z} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （5 分）

$$=\int_{-1}^{1}\pi z^2(1-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{15}\pi$$ （10 分）

或（柱面坐标法）$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} z^2\mathrm{d}z$ （5 分）

$$=\frac{4}{3}\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{15}\pi$$ （10 分）

或（球面坐标法）$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}r$ （5 分）

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}\pi$$ （10 分）