《大学物理 AI》作业　　No.04　机械能　机械能守恒定律

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ______

****************************本章教学要求****************************

1、理解质点、质点系的动能概念，会计算定轴转动刚体的转动动能；
2、理解功的概念，熟练掌握变力作功的计算；
3、理解保守力作功的特点，掌握保守系统的势能计算方法，掌握保守力与势能的关系；
4、掌握质点、质点系、定轴转动刚体的动能定理和功能原理，并且熟练进行有关计算；
5、掌握机械能守恒条件，熟练应用机械能守恒定律求解有关问题；
6、能联合运用动量守恒、角动量守恒、机械能守恒定律求解力学综合性问题，掌握分析求解力学综合问题的基本方法。

一、填空题

1.一质点质量为 m，速度为 v，则该质点的动能为 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$；一刚体的总质量为 M，转动惯量为 J，质心速度为 v_c，转动角速度为 ω，则该刚体的总动能为 $E_k=\frac{1}{2}\mathrm{M}v_c{}^2+\frac{1}{2}J\omega^2$。

2.弹簧的劲度系数为 k，原长为 x，伸长量为 Δx，以弹簧平衡位置为势能零点，则该弹簧具有的势能为 $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$。

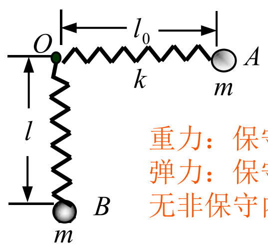
3.一质点系存在外力与内力的作用，外力可改变质点系的动量，外力与内力可改变质点系的动能，其动能的增量等于质点系内所受外力和内力作功的代数和，其机械能的增量等于质点系外力作功和非保守内力作功的代数和。

4.保守力做功的特点是作功大小与路径无关，只与初末位置有关，沿闭合路径作功的大小为零；保守力作功等于其相关势能增量的负值，保守力等于其相关势能函数梯度的负值。

5.对于一个系统来说，动量守恒的条件是合外力为零，角动量守恒的条件是外力矩之和为零，机械能守恒的条件是外力作功与非保守内力作功之和为零。

6. 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以，两者冲量的代数和为零，所做的功的代数和不一定为零（填 “一定，不一定”）。

7．如图所示，质量为 m 的小球系在劲度系数为 k 的轻弹簧一端，弹簧的另一端固定在 O 点。初始时，弹簧在水平位置，原长为 l_0 处于自然状态。小球由位置 A 释放，下落到 O 点正下方位置 B 时，弹簧的长度变为 l，则小球到 B 点时的速度大小为 $v_B=\sqrt{2gl-\frac{k}{m}(l-l_0)^2}$。



重力：保守力
弹力：保守力
无非保守内力

高度变化->重力势能，弹簧变化->弹性势能，势能变化用功能原理，若没有，用动能定理。

外力做功与非保守内力做功代数和为0

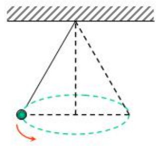
↓

解：以小球、弹簧和地球组成的系统为研究对象，系统在小球运动过程中机械能守恒。设 B 点重力势能为零，弹簧原长弹性势能为零，则对于 A 点，机械能为：mgl，对于 B 点，机械能为：$\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+\frac{1}{2}mv_B^2$，由系统机械能守恒有：$mgl=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+\frac{1}{2}mv_B^2$，所以

势能相对，先选定零势能点

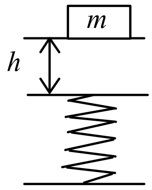
$$v_B=\sqrt{2gl-\frac{k}{m}(l-l_0)^2}$$

8. 如图所示，做圆锥摆运动的小球在水平面内作匀速率圆周运动，重力对小球作功为 ___零___，绳子的张力对小球作功为__零__。



解：无论是重力还是绳子张力与小球位移都时候垂直，所以都不作功。

9．如图，一质量为 m 的物体，位于质量可以忽略的直立弹簧正上方高度为 h 处，该物体从静止开始落向弹簧，若弹簧的劲度系数为 k，不考虑空气阻力，则物体下降过程中可能获得的最大动能是 $\underline{mgh+\frac{m^2g^2}{2k}}$ 。

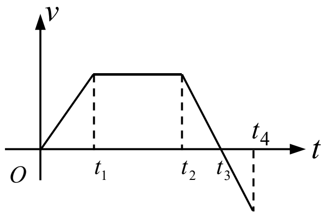


解：以 m、弹簧、地球所组成的系统作为研究对象，系统机械能守恒。

物体动能最大时，位于物体所受合外力为零的地方，即弹力等于重力的地方：$mg=kx\Rightarrow x=\frac{mg}{k}$，以此位置作为重力势能 0 点，根据机械能守恒：$mg(h+x)=\frac{1}{2}mv_{max}{}^2+\frac{1}{2}kx^2$，将 $x=\frac{mg}{k}$ 代入得到

$$\frac{1}{2}mv_{max}{}^2=mg\left(h+\frac{mg}{k}\right)-\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=mgh+\frac{m^2g^2}{2k}$$

10．一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作的功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3， 则 W_1 ___等于___零，W_2 ___小于___零，W_3___大于___零（填“大于，等于，小于”）。



解：根据质点的动能定理 $W=\Delta E_k$

$t_1\sim t_2$间, v 不变, $\Delta E_k=0$, 所以$W_1=0$

$t_2\sim t_3$间, v减小 $\Delta E_k<0$, $W_2<0$

$t_3\sim t_4$间, $|v|$增大 $\Delta E_k>0$, $W_3>0$

二、简答题

1.判断下列说法是否正确，并说明理由。

（1）质点系的内力可以改变系统的总动能，因此，也改变系统的总动量；

（2）内力都是保守力的系统，当它所受的合外力为零时，它的机械能必然守恒；

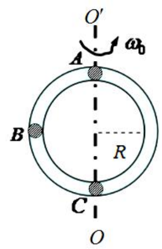
（3）只有保守内力作用又不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然都守恒。

答：（1）不正确，质点系内力作功的代数和不一定为 0，因而可以改变系统的总动能，质点系的内力的矢量和为 0，所以不会改变系统的总动量；
（2）不正确。合外力为零，但各分力作功的位移可不相同，合外力做功不一定为零，所以机械能不一定守恒；
（3）正确。因为同时满足动量守恒和机械能守恒的条件。

2.判断下列情况下所研究系统的动量与机械能是否守恒，并说明理由。
（1）子弹水平射入放在光滑水平桌面上的木块内，以子弹和木块为研究系统。
（2）物体沿光滑固定斜面下滑，以物体和地球为研究系统。
（3）斜面置于光滑水平面上，一物体沿斜面无摩擦下滑，以物体和地球为研究系统。

答：（1）系统受的合外力为零，入射过程中子弹与木块有相对运动，存在摩擦力内力，为非保守力，因此，系统动量守恒，机械能不守恒。
（2）忽略宇宙间万有引力作为外力的影响，地球对物体的引力为保守内力，因此，系统动量守恒，机械能守恒。
（3）与第（2）问的分析方法相同，此时系统多了个可无摩擦运动的斜面，应该是斜面、物体、地球为系统的动量守恒，机械能守恒。但是提问中没有把斜面当作系统，因此，动量不守恒，机械能不守恒。

3.一个内壁光滑的圆形细管，正绕竖直光滑固定轴 OO' 自由转动。管是刚性的，转动惯量为 J。环的半径为 R，初角速度为 ω_0，一个质量为 m 的小球静止于管内最高点 A 处，如图所示，由于微扰，小球向下滑动。试判断小球在管内下滑过程中：

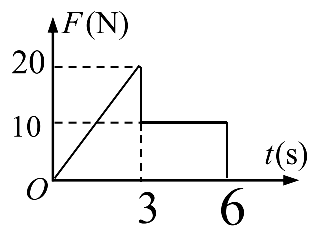


（1）地球，环与小球系统的机械能是否守恒？
（2）小球的动量是否守恒？
（3）小球与环组成的系统对 OO' 轴的角动量是否守恒？
回答让述问题，并说明理由。

答：（1）守恒。因为整个系统，外力的功为零，非保守内力是小球与管壁的作用力与反作用力 N 和 N'。在小球下滑过程中，小球受壁的压力 N 始终与管壁垂直，也始终与小球相对管壁的速度方向垂直，所以 N 和 N' 作功为零，满足机械能守恒。
（2）不守恒。小球在下落过程中，受到重力和管壁的作用力，这两个力的合力不为零，所以小球的动量会不断变化。
（3）守恒。小球与环组成的系统，受到的外力为重力和通过轴的支持力，重力的方向与 OO' 轴的方向平行，支持力的方向通过轴，因此它们对 OO' 轴力矩都为零。因此整个系统角动量守恒。

三、计算题

1.一质量为 m=4kg 的物体，在 0 到 6 秒内，受到如图所示的变力 F 的作用，由静止开始沿 x 轴正向运动，而力的方向始终为 x 轴的正方向，求 6 秒内变力 F 所做的功。



解：由图可知，物体受力为 $F(t)=\begin{cases}\frac{20}{3}t & 0\le t\le 3\\ 10 & 3\le t\le 6\end{cases}$

0 ~ 3 秒内应用动量定理 $\int_0^3 \frac{20}{3}t\,\mathrm{d}t = mv_3 - 0$ 得 $v_5 = \frac{\frac{10}{3}\times 3^2}{4} = 7.5\,(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$

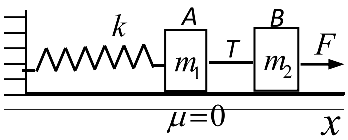
3 ~ 6 秒内再应用动量定理 $\int_3^6 10\,\mathrm{d}t = mv_6 - mv_3$

$$v_6 = \frac{10(6-3)}{4} + v_3 = 7.5 + 7.5 = 15 \quad (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

根据质点的动能定理，6 秒内变力的功为

$$A = \frac{1}{2}mv_6^2 - 0 = \frac{1}{2}\times 4\times 15^2 = 450\,(\mathrm{J})$$

2.如图所示，劲度系数为 k 的弹簧，一端固定于墙上，另一端与一质量为 m_1 的木块 *A* 相接，*A* 又与质量为 m_2 的木块 *B* 用轻绳相连，整个系统放在光滑水平面上。然后以不变的力 $\vec{F}$ 向右拉 m_2，使 m_2 自平衡位置由静止开始运动，求木块 *A*、*B* 系统所受合外力为零时的速度，以及此过程中绳的拉力 *T* 对 m_1 所作的功，恒力 $\vec{F}$ 对 m_2 所作的功。



解：在水平方向上作受力分析，设木块 A、B 系统在外力 *F* 及弹簧弹力作用下达到平衡时，弹簧伸长量为 x_1，则

$$F - kx_1 = 0\,,\quad x_1 = \frac{F}{k} \qquad (1)$$

设绳的拉力 $\vec{T}$ 对 m_1 和 m_2 所作的功分别为 A_{T1} 和 A_{T2}，由于绳拉 m_1 和 m_2 的力大小相等方向相反，而 A 和 B 的位移相同，所以 $A_{T1}=-A_{T2}$。

设恒力 $\vec{F}$ 对 m_2 作功为 A_F，A、B 系统所受合外力为零时速度为 *v*,，弹簧在此过程中作功为 A_k，对系统，由动能定理有

$$A_F + A_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 - 0 \qquad (2)$$

对 m_2，由动能定理有

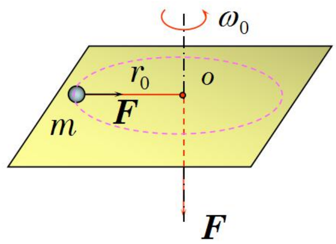
$$A_F + A_{T2} = \frac{1}{2}m_2 v^2 - 0 \qquad (3)$$

又弹力作功 $$A_K = -\frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{F^2}{2k} \qquad (4)$$

外力作功 $$A_F = Fx_1 = \frac{F^2}{k} \qquad (5)$$

由以上各式可得：$v = \dfrac{F}{\sqrt{k(m_1+m_2)}}$，　$A_{T1} = -A_{T2} = \dfrac{F^2(2m_1+m_2)}{2k(m_1+m_2)}$

3、细线一端连接一质量 m 小球，另一端穿过水平桌面上的光滑小孔，小球以角速度 ω_0 转动，用力 F 拉线，使转动半径从 r_0 减小到 $r_0/2$。求：



（1）小球的角速度；（2）拉力 F 做的功。

解：（1）由于线的张力过轴，小球受的合外力矩为 0，角动量守恒。

$J_0\omega_0 = J\omega \quad mr_0{}^2\omega_0 = mr^2\omega$， $r = r_0/2$

$\therefore \omega = 4\omega_0$

（2）由动能定理 $W = E_k - E_{k0}$， $W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0{}^2 = \frac{1}{2}m(\frac{r_0}{2})^2(4\omega_0)^2 - \frac{1}{2}mr_0{}^2\omega_0{}^2 = \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$