

1. 试题构成表:

编号	题型	分数	说明
I	一、单项选择题	20	共 10 小题, 每小题 2 分
II	二、填空题	15	共 5 小题, 每小题 3 分 包括一些简单计算题, 部分内容可在第 3 章、第 5 章中选择
	三、简答题	15	共 3 小题, 每小题 5 分
III	四、计算题 (第 2 章、第 4 章)	25	共 2 题, 分别为 10 分、15 分
IV	四、计算题 (第 7 章、第 8 章)	25	共 2 题, 分别为 10 分、15 分
	合计	100	

➤ 在无失真的信源中, 信源输出由 $H(X)$ 来度量; 在有失真的信源中, 信源输出由 $R(D)$ 来度量。

➤ 要使通信系统做到传输信息有效、可靠和保密, 必须首先 信源 编码,

然后 加密 编码, 再 信道 编码, 最后送入信道。

➤ 带限 AWGN 波形信道在平均功率受限条件下信道容量的基本公式, 也就是有名的香农公式是 $C = W \log(1 + SNR)$; 当归一化信道容量 C/W 趋近于零时, 也即信道完全丧失了通信能力, 此时 E_b/N_0 为 -1.6 dB, 我们将它称作香农限, 是一切编码方式所能达到的理论极限。

➤ 保密系统的密钥量越小, 密钥熵 $H(K)$ 就越 小, 其密文中含有的关于明文的信息量 $I(M; C)$ 就越 大。

➤ 已知 $n=7$ 的循环码 $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$, 则信息位长度 k 为 3, 校验多项式

$$h(x) = \underline{x^3 + x + 1}.$$

➤ 设输入符号表为 $X = \{0, 1\}$, 输出符号表为 $Y = \{0, 1\}$, 输入信号的概率分布为 $p = (1/2, 1/2)$, 失真函数为 $d(0, 0) = d(1, 1) = 0$, $d(0, 1) = 2$, $d(1, 0) = 1$, 则 $D_{\min} = \underline{0}$, $R(D_{\min})$

$$= \underline{1 \text{ bit/symbol}}, \text{ 相应的编码器转移概率矩阵 } [p(y/x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D_{\max} = \underline{0.5}, R(D_{\max}) =$$

$$\underline{0}, \text{ 相应的编码器转移概率矩阵 } [p(y/x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

➤ 已知用户 A 的 RSA 公开密钥 $(e, n) = (3, 55)$, $p = 5, q = 11$, 则 $\phi(n) = \underline{40}$, 他的秘密密钥 $(d, n) = \underline{(27, 55)}$. 若用户 B 向用户 A 发送 $m=2$ 的加密消息, 则该加密后的消息为 8。

二、判断题

1. 可以用克劳夫特不等式作为唯一可译码存在的判据。

(√)

2. 线性码一定包含全零码。 (√)
3. 算术编码是一种无失真的分组信源编码, 其基本思想是将一定精度数值作为序列的编码, 是以另外一种形式实现的最佳统计匹配编码。 (×)
4. 某一信源, 不管它是否输出符号, 只要这些符号具有某些概率特性, 就有信息量。 (×)
5. 离散平稳有记忆信源符号序列的平均符号熵随着序列长度 L 的增大而增大。 (×)
6. 限平均功率最大熵定理指出对于相关矩阵一定的随机矢量 X , 当它是正态分布时具有最大熵。 (√)
7. 循环码的码集中的任何一个码字的循环移位仍是码字。 (√)
8. 信道容量是信道中能够传输的最小信息量。 (×)
9. 香农信源编码方法在进行编码时不需要预先计算每个码字的长度。 (×)
10. 在已知收码 R 的条件下找出可能性最大的发码 C_i 作为译码估计值, 这种译码方法叫做最佳译码。 (√)

三、计算题

某系统 $(7, 4)$ 码

$c = (c_6 \ c_5 \ c_4 \ c_3 \ c_2 \ c_1 \ c_0) = (m_3 \ m_2 \ m_1 \ m_0 \ c_2 \ c_1 \ c_0)$ 其三位校验位与信息位的关系为:

$$\begin{cases} c_2 = m_3 + m_1 + m_0 \\ c_1 = m_3 + m_2 + m_1 \\ c_0 = m_2 + m_1 + m_0 \end{cases}$$

- (1) 求对应的生成矩阵和校验矩阵;
- (2) 计算该码的最小距离;
- (3) 列出可纠差错图案和对应的伴随式;
- (4) 若接收码字 $R=1110011$, 求发码。

解: 1. $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $d_{\min}=3$

3.

S	E
000	0000000
001	0000001
010	0000010
100	0000100
101	0001000
111	0010000
011	0100000
110	1000000

4. $RH^T=[001]$ 接收出错

$E=0000001$ $R+E=C=1110010$ (发码)

四、计算题

已知 (X, Y) 的联合概率 $p(x, y)$ 为:

求 $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, $I(X; Y)$

$X \backslash Y$	0	1
0	1/3	1/3
1	0	1/3

解: $p(x=0) = 2/3$ $p(x=1) = 1/3$

$p(y=0) = 1/3$ $p(y=1) = 2/3$

$H(X) = H(Y) = H(1/3, 2/3) = 0.918 \text{ bit/symbol}$

$H(X, Y) = H(1/3, 1/3, 1/3) = 1.585 \text{ bit/symbol}$

$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 0.251 \text{ bit/symbol}$

五、计算题

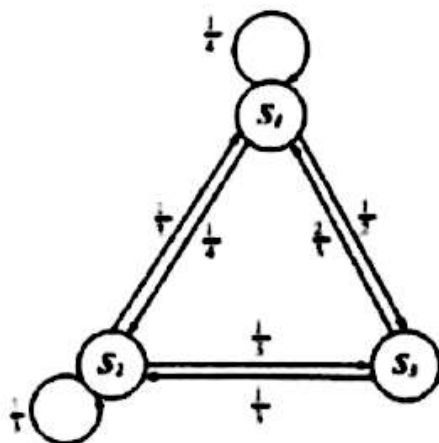
一阶齐次马尔可夫信源消息集 $X \in \{a_1, a_2, a_3\}$,

状态集 $S \in \{S_1, S_2, S_3\}$, 且令 $S_i = a_i, i=1,2,3$, 条件转移概率为

$[P(a_j / S_i)] = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$, (1)画出该马氏链的状态转移图;

(2)计算信源的极限熵。

解: (1)



$$(2) \begin{cases} \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{2}{3}w_3 = w_1 \\ \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3 = w_2 \\ \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{3}w_2 = w_3 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_1 = 0.4 \\ w_2 = 0.3 \\ w_3 = 0.3 \end{cases}$$

$$H(X|S_1) = H(1/4, 1/4, 1/2) = 1.5 \text{ 比特/符号}$$

$$H(X|S_2) = H(1/3, 1/3, 1/3) = 1.585 \text{ 比特/符号}$$

$$H(X|S_3) = H(2/3, 1/3) = 0.918 \text{ 比特/符号}$$

$$H_{\infty} = \sum_{i=1}^3 w_i H(X|S_i) = 0.4 \times 1.5 + 0.3 \times 1.585 + 0.3 \times 0.918 = 1.351 \text{ 比特/符号}$$

六、计算题

若有一信源 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$ ，每秒钟发出 2.55 个信源符号。

将此信源的输出符号送入某一个二元信道中进行传输

(假设信道是无噪无损的，容量为 1bit/二元符号)，

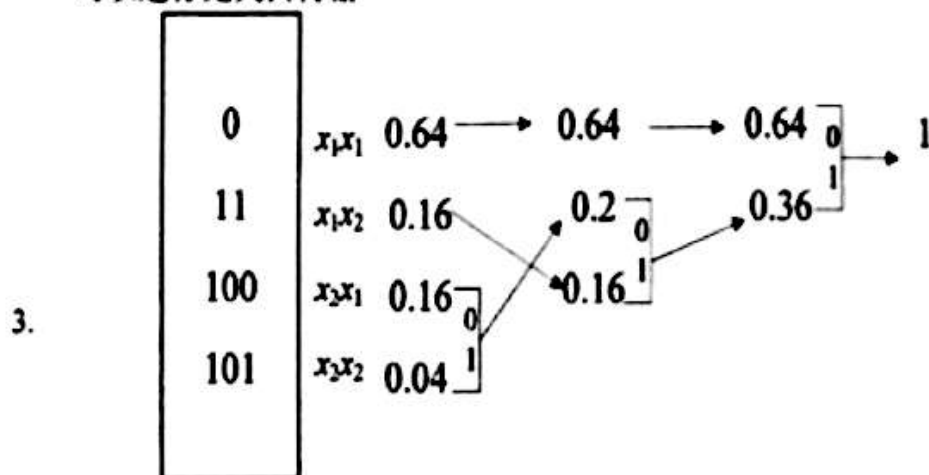
而信道每秒钟只传递 2 个二元符号。

- (1) 试问信源不通过编码 (即 $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 1$ 在信道中传输)
- (2) 能否直接与信道连接?
- (3) 若通过适当编码能否在此信道中进行无失真传输?
- (4) 试构造一种哈夫曼编码(两个符号一起编码)。
- (5) 使该信源可以在此信道中无失真传输。

解: 1. 不能, 此时信源符号通过 0, 1 在信道中传输, $2.55 \text{ 二元符号/s} > 2 \text{ 二元符号/s}$

2. 从信息率进行比较, $2.55 \times H(0.8, 0.2) = 1.84 < 1 \times 2$

可以进行无失真传输



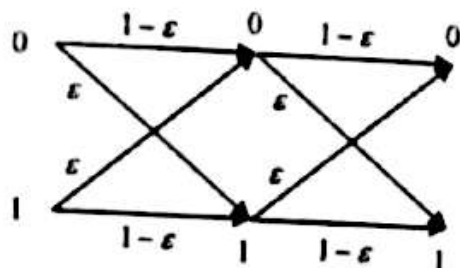
$$\bar{K} = \sum_{i=1}^4 p_i K_i = 0.64 + 0.16 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.56 \text{ 二元符号/2 个信源符号}$$

此时 $1.56/2 \times 2.55 = 1.989$ 二元符号/s < 2 二元符号/s

七、计算题

两个 BSC 信道的级联如右图所示:

- (1) 写出信道转移矩阵;
- (2) 求这个信道的信道容量.



解: (1)

$$P = P_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 & 2\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) & (1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$(2) C = \log 2 - H((1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2)$$

信息理论与编码试卷A答案

200 — 2010 学年 上 学期期末考试试题 时间 100 分钟

信息论基础 课程 学时 学分 考试形式: 闭 卷

专业年级: 总分 100 分, 占总评成绩 %

注: 此页不作答题纸, 请将答案写在答题纸上

一、填空题 (本题 20 分, 每小题 2 分)

- 1 无失真信源编码的中心任务是编码后的信息率压缩接近到 1 限失真压缩中心任务是在给定的失真度条件下, 信息率压缩接近到 2 .
- 2 信息论是应用近代数理统计方法研究信息的传输、存储与处理的科学, 故称为 3 ; 1948 年香农在贝尔杂志上发表了两篇有关的“通信的数学理论”文章, 该文用熵对信源的 4 的度量, 同时也是衡量 5 大小的一个尺度; 表现在通信领域里, 发送端发送什么有一个不确定量, 通过信道传输, 接收端收到信息后, 对发送端发送什么仍然存在一个不确定量, 把这两个不确定量差值用 6 来表示, 它表现了通信信道流通的 7 . 若把它取最大值, 就是通信线路的 8 , 若把它取最小值, 就是 9 .
- 3 若分组码 H 阵列列线性无关数为 n, 则纠错码的最小距离 d_{\min} 为 10 .

二、简答题 (本题 20 分, 每小题 4 分)

1. 根据信息理论当前无失真压缩在压缩空间和速度两个方向还有研究价值吗?
2. 我们知道, “猫” (调制解调器的俗称) 是在模拟链路上传输数字数据的设备, 它可以在一个音频电话线上传输二进制数据, 并且没有太高的错误率. 现在, 我们上网用的“猫”的速度已可达到 56Kbps 了, 但是, 如果你用网络蚂蚁或其它软件从网上下载东西时, 你会发现很多时候网络传输的速度都很低, 远低于 56Kbps (通常音频电话连接支持的频率范围为 300Hz 到 3300Hz, 而一般链路典型的信噪比是 30dB) (摘自中新网)
3. 结合信息论课程针对“信息”研究对象, 说明怎样研究一个对象.

4. 用纠错编码基本原理分析由下列两种生成矩阵形成线性分组码的优劣

$$(1) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. 新华社电, 2008 年 5 月 16 日下午 6 时半, 离汶川地震发生整整 100 个小时, 虚弱得已近昏迷的刘德云被救援官兵抬出来时, 看到了自己的女儿。随即, 他的目光指向自己的左手腕。女儿扑上去, 发现父亲左手腕上歪歪扭扭写着一句话: “我欠王老大 3000 元。”

请列出上面这段话中 信号、消息、信息。

三 计算编码题 (本题 60 分)

1. 从大量统计资料知道, 男性中红绿色盲的发病率为 7%, 女性发病率为 0.5%。(10 分)

(1) 若问一位女士: “你是否是色盲?” 他的回答可能是 “是”, 可能是 “否”, 问这两个回答中各含多少信息量? 从计算的结果得出一个什么结论?

(2) 如果问一位女士, 问她回答 (是或否) 前平均不确定性和回答 (是或否) 后得到的信息量各为多少?

2. 黑白气象传真图的消息只有黑色和白色两种, 即信源 $X = \{\text{黑}, \text{白}\}$ 。设黑色出现的概率为 $P(\text{黑}) = 0.5$, 白色出现的概率为 $P(\text{白}) = 0.5$ 。(10 分)

(1) 假设图上黑白消息出现前后没有关联, 求信源的 H -熵;

(2) 假设消息只前后有关联, 其依赖关系为 $P(\text{白}/\text{白}) = 0.8$, $P(\text{黑}/\text{白}) = 0.2$, $P(\text{白}/\text{黑}) = 0.4$, $P(\text{黑}/\text{黑}) = 0.6$, 求信源的 H -熵;

(3) 比较上面两个 H -熵的大小, 并说明其物理含义。

3. 离散无记忆信源 $P(x_1) = 8/16$; $P(x_2) = 3/16$; $P(x_3) = 4/16$; $P(x_4) = 1/16$;(10 分)

(1) 计算对信源的逐个符号进行二元定长编码码长和编码效率;

(2) 对信源编二进制哈夫曼码, 并计算平均码长和编码效率。

(3) 你对哈夫曼码实现新信源为等概的理解。

4. 设二元对称信道的传递矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

若 $P(0) = 3/4$, $P(1) = 1/4$, 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布; 并说明物理含义。(10 分)

5. 设信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ 通过一干扰信道, 接收符号为 $Y = \{y_1, y_2\}$, 信道转移

矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, 求: (10 分)

- (1) 收到消息 y_j ($j=1$) 后, 获得的关于 x_i ($i=2$) 的信息量;
- (2) 信源 X 和信宿 Y 的信息熵; 信道疑义度 $H(X/Y)$ 和噪声熵 $H(Y/X)$;
- (3) 接收到信息 Y 后获得的平均互信息量。

6 二元(7, 4)汉明码校验矩阵 H 为: (10分)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列置换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P^T | I_3)$$

- (1) 写出系统生成矩阵 G , 列出错误形式和伴随矢量表, 你能发现他们之间有什么联系, 若没有这个表怎么译码,
- (2) 若收到的矢量 0000011, 请列出编码后发送矢量、差错矢量、和编码前信息矢量。

一、填空题 (每空 2 分, 共 20 分)

1. 设 X 的取值受限于有限区间 $[a, b]$, 则 X 服从 均匀 分布时, 其熵达到最大; 如 X 的均值为 μ , 方差受限为 σ^2 , 则 X 服从 高斯 分布时, 其熵达到最大。
2. 信息论不等式: 对于任意实数 $z > 0$, 有 $\ln z \leq z - 1$, 当且仅当 $z = 1$ 时等式成立。
3. 设信源为 $X = \{0, 1\}$, $P(0) = 1/8$, 则信源的熵为 $1/8 \log_2 8 + 7/8 \log_2 (7/8)$ 比特/符号, 如信源发出由 m 个“0”和 $(100-m)$ 个“1”构成的序列, 序列的自信息量为 $m \log_2 8 + (100 - m) \log_2 (7/8)$ 比特/符号。
4. 离散对称信道输入等概率时, 输出为 等概 分布。
5. 根据码字所含的码元的个数, 编码可分为 定长 编码和 变长 编码。
6. 设 DMS 为 $\begin{bmatrix} U \\ P_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ 0.37 & 0.25 & 0.18 & 0.10 & 0.07 & 0.03 \end{bmatrix}$, 用二元符号表 $X = \{x_1 = 0, x_2 = 1\}$ 对其进行定长编码, 若所编的码为 {000, 001, 010, 011, 100, 101}, 则编码器输出码元的一维概率 $P(x_1) =$ 0.747, $P(x_2) =$ 0.253。

二、简答题 (30 分)

1. 设信源为 $\begin{bmatrix} X \\ P_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$, 试求 (1) 信源的熵、信息含量效率以及冗余度;
- (2) 求二次扩展信源的概率空间和熵。

解:

(1)

$$H(X) = 1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3)$$

$$\eta = H(X) / \log_2 2 = H(X)$$

$$\gamma = 1 - \eta = 1 - H(X)$$

(2) 二次扩展信源的概率空间为:

$X \backslash X$	x_1	x_2
x_1	1/16	3/16
x_2	3/16	9/16

$$H(XY) = 1/16 \log_2 16 + 3/16 \log_2 (16/3) + 3/16 \log_2 (16/3) + 9/16 \log_2 (16/9)$$

2. 什么是损失熵、噪声熵? 什么是无损信道和确定信道? 如输入输出为 $r \times s$, 则它们的分别信道容量为多少?

答: 将 $H(X|Y)$ 称为信道 $\{X, P_{Y|X}, Y\}$ 的疑义度或损失熵, 损失熵为零的信道就是无损信道, 信道容量为 $\log r$.

将 $H(Y|X)$ 称为信道 $\{X, P_{Y|X}, Y\}$ 的噪声熵, 噪声熵为零的信道就是确定信道, 信道容量为 $\log s$.

3. 信源编码的和信道编码的目的是什么?

答: 信源编码的作用:

(1) 符号变换: 使信源的输出符号与信道的输入符号相匹配;

(2) 冗余度压缩: 是编码之后的新信源概率均匀化, 信息含量效率等于或接近于 100%.

信道编码的作用: 降低平均差错率.

4. 什么是香农容量公式? 为保证足够大的信道容量, 可采用哪两种方法?

答: 香农信道容量公式: $C(P_s) = B \log_2 (1 + \frac{P_s}{N_0 B})$, B 为白噪声的频带限制, N_0 为常数.

输入 $X(t)$ 的平均功率受限于 P_s .

由此, 为保证足够大的信道容量, 可采用 (1) 用频带换信噪比; (2) 用信噪比换频带.

5. 什么是限失真信源编码?

答: 有失真信源编码的中心任务: 在允许的失真范围内把编码的信息率压缩到最小.

三、综合题 (20+15+15)

1. 设随机变量 $X = \{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2\} = \{0, 1\}$ 的联合概率空间为

$$\begin{bmatrix} XY \\ P_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & (x_2, y_1) & (x_2, y_2) \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

定义一个新的随机变量 $Z = X \times Y$ (普通乘积)

- (1) 计算熵 $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$, $H(XZ)$, $H(YZ)$, 以及 $H(XYZ)$;
- (2) 计算条件熵 $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Z)$, $H(Z|X)$, $H(Y|Z)$, $H(Z|Y)$, $H(X|YZ)$, $H(Y|XZ)$ 以及 $H(Z|XY)$;
- (3) 计算平均互信息量 $I(X; Y)$, $I(X; Z)$, $I(Y; Z)$, $I(X; Y|Z)$, $I(Y; Z|X)$ 以及 $I(X; Z|Y)$.

解: (1)

$X \backslash Y$	0	1	
0	1/8	3/8	1/2
1	3/8	1/8	1/2
	1/2	1/2	

$$H(X) = 1/2 \log_2 2 + 1/2 \log_2 2 = 1$$

$$H(Y) = 1/2 \log_2 2 + 1/2 \log_2 2 = 1$$

XYZ	000	001	010	011	100	101	110	111
	1/8	0	3/8	0	3/8	0	0	1/8

Z	0	1
	7/8	1/8

$$H(Z) = 7/8 \log_2 (8/7) + 1/8 \log_2 8$$

XZ	00	01	10	11
	1/2	0	3/8	1/8

$$H(XZ) = 1/2 \log_2 2 + 3/8 \log_2 (8/3) + 1/8 \log_2 8$$

YZ	00	01	10	11
	1/2	0	3/8	1/8

$$H(YZ) = 1/2 \log_2 2 + 3/8 \log_2 (8/3) + 1/8 \log_2 8$$

(2)

$$H(X|Y) = 1/2(1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3)) + 1/2(1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3))$$

$$H(Y|X) = 1/2(1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3)) + 1/2(1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3))$$

XZ	0	1	
0	1/2	0	1/2
1	3/8	1/8	1/2
	7/8	1/8	

$$H(X|Z) = 7/8(4/7 \log_2 (7/4) + 3/7 \log_2 (7/3)) + 1/8(0 \log_2 0 + 1 \log_2 1)$$

$$H(Z|X) = 1/2(1 \log_2 1 + 0 \log_2 0) + 1/2(3/4 \log_2 (4/3) + 1/4 \log_2 4)$$

YZ	0	1	
0	1/2	0	1/2
1	3/8	1/8	1/2
	7/8	1/8	

$$H(Y|Z) = 7/8(4/7 \log_2 (7/4) + 3/7 \log_2 (7/3)) + 1/8(0 \log_2 0 + 1 \log_2 1)$$

$$H(Z|Y) = 1/2(1 \log_2 1 + 0 \log_2 0) + 1/2(3/4 \log_2 (4/3) + 1/4 \log_2 4)$$

$$H(X|YZ) = 1/2(1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3)) + 3/8(1 \log_2 1 + 0 \log_2 0) + 1/8(1 \log_2 1 + 0 \log_2 0)$$

$$H(Y|XZ) = 1/2(1/4 \log_2 4 + 3/4 \log_2 (4/3)) + 3/8(1 \log_2 1 + 0 \log_2 0) + 1/8(1 \log_2 1 + 0 \log_2 0)$$

$$H(Z|XY) = 0$$

(3)

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$I(X;Z) = H(X) - H(X|Z)$$

$$I(Y;Z) = H(Y) - H(Y|Z)$$

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|YZ)$$

$$I(X;Z|Y) = H(X|Y) - H(X|ZY)$$

2. 设二元对称信道的输入概率分布分别为 $[P_X] = [3/4 \quad 1/4]$ ，转移矩阵为

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

(1) 求信道的输入熵，输出熵，平均互信息量；

(2) 求信道容量和最佳输入分布；

(3) 求信道剩余度。

解：(1) 信道的输入熵 $H(X) = 3/4 \log_2 (4/3) + 1/4 \log_2 4$ ；

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$[P_Y] = [7/12 \quad 5/12]$$

$$H(Y) = 7/12 \log_2(12/7) + 5/12 \log_2(12/5)$$

$$H(Y|X) = 3/4 H(1/2, 1/4) + 1/4 H(1/12, 1/6)$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

(2) 最佳输入分布为 $[P_X] = [1/2 \quad 1/2]$, 此时信道的容量为 $C = 1 - H(2/3, 1/3)$

(3) 信道的剩余度: $C - I(X;Y)$

3. 设有 DMC, 其转移矩阵为 $[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$, 若信道输入概率为

$[P_X] = [0.5 \quad 0.25 \quad 0.25]$, 试确定最佳译码规则和极大似然译码规则, 并计算出相应的平均差错率。

$$\text{解: } [P_{XY}] = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/6 & 1/12 \\ 1/24 & 1/8 & 1/12 \\ 1/12 & 1/24 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$\text{最佳译码规则: } \begin{cases} F(b_1) = a_1 \\ F(b_2) = a_1, \text{ 平均差错率为 } 1 - 1/4 - 1/6 - 1/8 = 11/24; \\ F(b_3) = a_3 \end{cases}$$

$$\text{极大似然规则: } \begin{cases} F(b_1) = a_1 \\ F(b_2) = a_2, \text{ 平均差错率为 } 1 - 1/4 - 1/8 - 1/8 = 1/2. \\ F(b_3) = a_3 \end{cases}$$