姓名________ 学号________ 班级________

密封装订线

西南交通大学 2017－2018 学年第(2)学期考试试卷

课程代码 1272005 课程名称 高等数学 BII（B 卷）考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	总成绩
得分						

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　　　）

(A) 不连续　(B) 连续但偏导数不存在　(C) 偏导数存在但不可微　(D) 可微.

2、设 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，则下面结论正确的是（　　　　）

（A）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点　（B）点 $(2,2)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

（C）点 $(2,2)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，且为极大值点

（D）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，但不是极值点.

3、在极坐标系 (ρ,θ) 中，圆 $\rho=1$ 之外和圆 $\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 之内的公共部分的面积 $S=$（　　　　）

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho$　（B）$2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho$　（D）$2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho$.

4、设曲面 S：$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$，S_1 为 S 在第一卦限中的部分，则有（　　　　）

（A）$\iint_S x\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$　（B）$\iint_S y\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$

（C）$\iint_S z\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$　（D）$\iint_S xyz\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}xyz\mathrm{d}S$.

5、设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是（　　　　）

（A）若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

（B）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$

（C）若存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散

（D）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6、已知函数$z = f(x,y)$在点$(1,2)$处可微，且$f(1,2)=1$，$f_1'(1,2) = 2$，$f_2'(1,2) = 3$，设函数$\varphi(x) = f(x, 2f(x,2x))$，则$\varphi'(1) =$____________.

7、平行于平面$x + y + z = 100$且与球面$x^2 + y^2 + z^2 = 4$相切的平面方程为____________

8、累次积分$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y =$________.

9、已知曲线$L: x^2 + y^2 = 1$，则$\oint_L x\,\mathrm{d}s =$____________.

10、将函数$f(x) = 4 - x(0 \le x \le \pi)$展开成以$2\pi$为周期的正弦级数，设此级数的和函数为$\varphi(x)$，则$\varphi(-7\pi) =$____________.

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

11、设$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ D表示全平面，计算二重积分$I = \iint_D f(x) g(y-x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12、设曲线积分$\int_C xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$\varphi(x)$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算曲线积分$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$.

13、计算$\iint_{\Sigma} \left(x + z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中　为抛物面$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$介于平面$z = 2$与$z = 0$之间部分的下侧.

四、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

14、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$的收敛域及和函数.

15、求函数$u = xyz$在约束条件$x^2 + y^2 + z^2 = 3$下的最大值和最小值.

五、证明题（5 分）

16、证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$也收敛.

西南交通大学 2017－2018 学年第(2)学期考试

参考答案与评分标准

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、C　2、A　3、D　4、C　5、C

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6、已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处可微，且 $f(1,2)=1$，$f_1'(1,2)=2$，$f_2'(1,2)=3$，设函数 $\varphi(x)=f(x,2f(x,2x))$，则 $\varphi'(1)=$ ___50___.

7、平行于平面 $x+y+z=100$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程为 $\underline{x+y+z=\pm 2\sqrt{3}}$.

8、累次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y=\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$.

9、已知曲线 $L: x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x\,\mathrm{d}s=$ ___0___.

10、将函数 $f(x)=4-x(0\le x\le\pi)$ 展开成以 2π 为周期的正弦级数，设此级数的和函数为 $\varphi(x)$，则 $\varphi(-7\pi)=$ ___0___.

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

11、设 $f(x)=g(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ D 表示全平面，计算二重积分 $I=\iint_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：由题设知

$$f(x)g(y-x)=\begin{cases} x(y-x), & 0\le x\le 1, 0\le y-x\le 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$ ……………………5 分

令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y-x\le 1\}=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x\le y\le x+1\}$，　则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_1} x(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_x^{x+1}(y-x)\mathrm{d}y \end{aligned}$$ ……………………8 分

$$=\int_0^1 \frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$ ……………………10 分

12、设曲线积分$\int_C xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$\varphi(x)$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算曲线积分$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$.

解：由题设知

$$\frac{\partial(y\varphi(x))}{\partial x}=\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} \qquad \cdots\cdots3\text{分}$$

再由$\varphi(0)=0$，可得：$\varphi(x)=x^2$. ……5 分

所以，$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{d}y$ ……7 分

$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y^2)=[\frac{1}{2}x^2y^2]_{(0,0)}^{(1,1)} \qquad \cdots\cdots9\text{分}$$

$$=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots10\text{分}$$

13、计算$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为抛物面$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$介于平面$z=2$与$z=0$之间部分的下侧.

解：令平面$\sum_1 : z=2(x^2+y^2\le 4)$，取上侧，$\sum_1$与$\Sigma$所围的闭区域为$\Omega$，由高斯公式：

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1-1)\mathrm{d}v$$

$$=0 \qquad \cdots\cdots（5\text{分}）$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}(-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\cdot 4\pi=-8\pi \qquad \cdots\cdots（8\text{分}）$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-(-8\pi)=8\pi \qquad \cdots\cdots（10\text{分}）$$

四、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

14、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$的收敛域及和函数.

解：令 $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\Big/\frac{x^{2n}}{n}=x^2<1$， 则幂级数的收敛半径$r=1$. ………………………3 分

当$x=\pm1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是调和级数，发散，得其收敛域为$(-1,1)$ ……………5 分

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}, x\in(-1,1)$，则$s'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}$. …………………………8 分

由于$s(0)=0$，所以$s(x)=\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t+s(0)=-\ln(1-x^2)$， $x\in(-1,1)$. ……………10 分

15、求函数$u=xyz$在约束条件$x^2+y^2+z^2=3$下的最大值和最小值.

解：令$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$. ………………………………………3 分

解方程组：$\begin{cases}L'_x(x,y,z,\lambda)=yz+2\lambda x=0,\\ L'_y(x,y,z,\lambda)=xz+2\lambda y=0,\\ L'_z(x,y,z,\lambda)=xy+2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2-3=0\end{cases}$ ………………………………………6 分

解得：$x^2=y^2=z^2=1$， ………………………………………………………8 分

因为$u(1,1,1)=u(1,-1,-1)=u(-1,1,-1)=u(-1,-1,1)=1$，

$u(-1,1,1)=u(1,-1,1)=u(1,1,-1)=u(-1,-1,-1)=-1$ …………9 分

所以所求函数的最大值为 1，最小值为-1. ……………………10 分

五、证明题（5 分）

16、证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$也收敛.

证明：由于$\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$， ………………………………………………2 分

已知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，可得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$绝对收敛， ……………………4 分

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$收敛. ………………………………………5 分