西南交通大学 2015－2016 学年第 1 学期第 1 次测试卷

课程名称 高等数学 I 考试时间 **60 分钟**

题号	一	二	总成绩
得分			

阅卷教师签字：

一. 填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1、已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2+bn+5}{3n-2}=2$，则 $a=$ 任意常数 ，$b=$ 6 .

2、设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ $\dfrac{1}{1-2a}$.

3、当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量，

则 $k=$ $\dfrac{3}{4}$.

4、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点 $x=$ 0 .

二. 计算和解答题（共 80 分）

1、计算下列极限：(每小题 6 分，共 24 分)

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}$；

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}$；

解：原式=

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}.$$

密封装订线 姓 名 学 号 班 级

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

解：原式=

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x\cdot x/2\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.$$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]$.

解：$\dfrac{2}{x}-1<\left[\dfrac{2}{x}\right]\le\dfrac{2}{x}$，当 $x>0$ 时，有

$2-x<x\left[\dfrac{2}{x}\right]\le 2$；当 $x<0$ 时，有

$2-x>x\left[\dfrac{2}{x}\right]\ge 2$．而 $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$，

故利用夹逼定理知，$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]=2$．

2、确定 α,β 的值，使得 $f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \beta, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.（10 分）

解：当 $\alpha\le 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在；（5 分）

当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=0$．故当 $\alpha>0$，$\beta=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.（5 分）

3、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.（11 分）

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.（5 分）

极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 不存在，因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.（6 分）

4、计算下列函数的导数：（每小题 6 分，共 24 分）

（1）求 $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$ 的导数.　（2）求 $y=\arcsin e^{\sqrt{\arctan x}}$ 的导数.

解：（1）$y'=2\sin x\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot 2x\cos(x^2)$；

(2) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{\arctan x}}}}\cdot e^{\sqrt{\arctan x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\arctan x}}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$.

（3）求 $y=x^2\ln x\cos x$ 的导数.　（4）求 $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ 的导数.

解：（3）$y'=2x\cos x\cdot\ln x+x\cos x-x^2\sin x\ln x$；

(4) $y'=\dfrac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$.

5、设 $y=f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限值）. 证明：

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.（11 分）

证明：（注意：本题证明过程的写法不是唯一的，关键在于证明的思路是否正确）

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以对于 $\varepsilon=1$（也可以取其它的数），存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<1$，即 $A-1<f(x)<A+1$.（4 分）又因为 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上存在最大值 M 和最小值 m.（4 分）取 $K=\max\{|M|,|m|,|A-1|,|A+1|\}$，对一切 $x\in[a,+\infty)$，有 $|f(x)|\le K$，即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.（3 分）