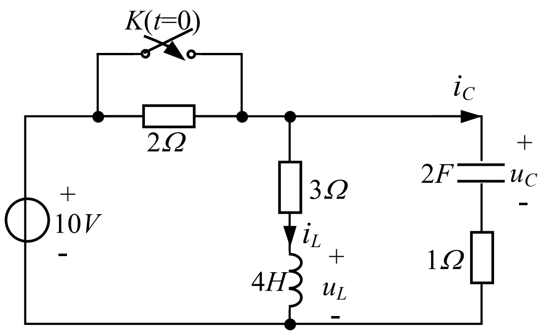
12-1　题 12-1 图示电路原处于稳态，t=0 时开关 K 闭合，

求 $u_C(0_+)$、$\frac{du_C}{dt}|_{0_+}$、$i_L(0_+)$、$\frac{di_L}{dt}|_{0_+}$。



题 12-1

解：t<0 时 $i_L(0_-)=\frac{10}{2+3}=2A$　　$u_C(0_-)=3i_L(0_-)=6V$

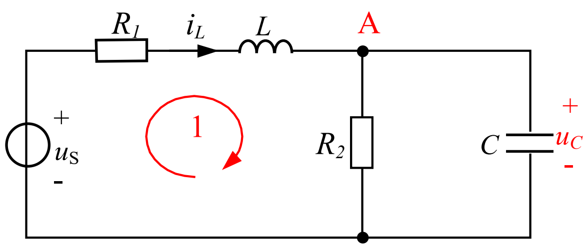
由换路定则有:

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2A,u_C(0_+)=u_C(0_-)=6V$$

$$\frac{di_L}{dt}|_{0+}=\frac{u_L(0_+)}{L}=\frac{-3i_L(0_+)+10}{4}=\frac{4}{4}=1A/s$$

$$\frac{du_C}{dt}|_{0+}=\frac{i_C(0_+)}{C}=\frac{(0-u_C(0_+))}{2}=2V/s$$

12-2　电路如题 12-2 图所示，建立关于电感电流 i_L 的微分方程。



题 12-2 图

解：回路 1：$R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt}+u_C=u_S$ ……(1)

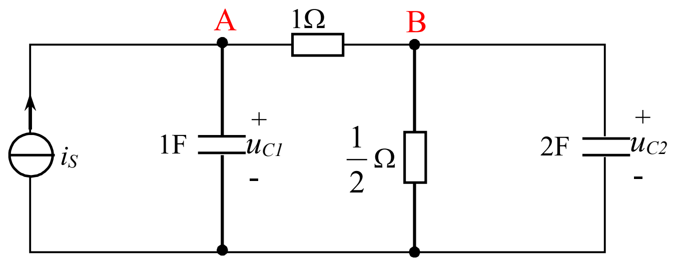
对 A 点:$C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R_2}=i_L$ ……………(2)

由(1)式得：$u_C=u_L-R_1 i_L-L\frac{di_L}{dt}$

代入(2)整理得：

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+(R_1C+\frac{L}{R_2})\frac{di_L}{dt}+(1+\frac{R_1}{R_2})i_L=C\frac{du_S}{dt}+\frac{1}{R_2}u_S$$

12-3　电路如题 12-3 图所示，建立关于 u_{C2} 的微分方程。



题 12-3 图

解：列 A 点 KCL 的方程

$$\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}+u_{C1}-u_{C2}=i_S\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

列 B 点 KCL 的方程

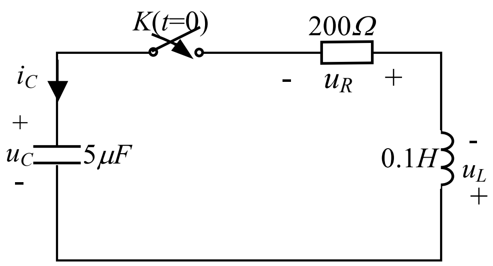
$$2\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}+2u_{C2}+u_{C2}-u_{C1}=0\ldots\ldots(2)$$

由(2)得： $u_{C1}=2\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}+3u_{C2}$

代入(1)得： $2\frac{\mathrm{d}^2u_{C2}}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}+2\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}+3u_{C2}-u_{C2}=i_S$

整理得： $2\frac{\mathrm{d}^2u_{C2}}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}+2u_{C2}=i_S$

12-4　题 12-4 图示电路中，已知 $u_C(0_-)=200V$，$t=0$ 时开关闭合，求 $t\geq 0$ 时的 u_C。



题 12-4 图

解：1、列写以 u_C 为变量的二阶微分方程

电容的电流 $i_C=5\times10^{-6}\frac{du_C}{dt}$　　　(1)

电阻的电压 $u_R=200i_C=200\times5\times10^{-6}\frac{du_C}{dt}$

电感的电压 $u_L=0.1\frac{di_C}{dt}=0.1\times5\times10^{-6}\frac{d^2u_C}{dt^2}$

因为　$u_L+u_R+u_C=0$

所以 $0.1\times5\times10^{-6}\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+200\times5\times10^{-6}\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2000\frac{du_C}{dt}+2\times10^6u_C=0$$

2、特征方程及特征根

$p^2+2000p+2\times10^6=0$

$$p_{1,2}=\frac{-2000\pm\sqrt{4\times10^6-8\times10^6}}{2}=\frac{-2000\pm j2\times10^3}{2}=-10^3\pm j10^3$$

3、微分方程的解的形式

$$\therefore u_C(t)=Ke^{-10^3t}\sin(10^3t+\varphi) \qquad (2)$$

4、求初值 $u_C(0+)$和 $u'_C(0+)$

$u_C(0+)=u_C(0-)=200V$ $i_C(0+)=i_C(0-)=0A$ ($i_C(t)$为电感的电流)

由(1)式有：$i_C(0+)=5\times10^{-6}\dfrac{du_C}{dt}(0+)$

$$0=5\times10^{-6}\frac{du_C}{dt}(0+) \qquad \frac{du_C}{dt}(0+)=0$$

5、利用初值 $u_C(0+)=200V$ 和 $\dfrac{du_C}{dt}(0+)=0$ 确定待定系数 K、φ

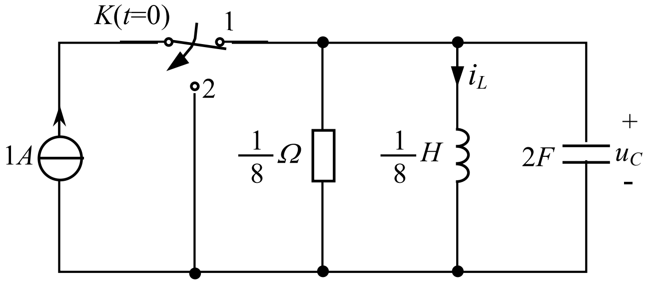
将初值代入(2)式，有：$\begin{cases}200=K\sin\varphi\\0=-10^3K\sin\varphi+10^3K\cos\varphi\end{cases}$

解得 $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=1,\varphi=45^\circ,K=200\sqrt{2}$

6、结果

$$u_C(t)=200\sqrt{2}e^{-3t}\sin(10^3t+45^\circ)V,t\ge0$$

12-5 题 12-5 图示电路原处于稳态，t=0 时开关由位置 1 换到位置 2，求换位后的 $i_L(t)$和 $u_C(t)$。



题 12-5 图

解：t<0 时　i_L(0-)=1A　　u_C(0-)=0

1、列写以 i_L 为变量的二阶微分方程

$$\frac{1}{8}\times 2\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{di_L}{dt}+i_L=0.$$

2、特征方程及特征根

$$p^2+4p+4=0.$$
$$p_{1,2}=-2$$

3、微分方程的解的形式

$$i_L(t)=(K_1+K_2 t)e^{-2t}$$

4、求初值 i_L(0+)和 i'_L(0+)

i_L(0+)= i_L(0-)=1A　　u_C(0+)= u_C(0-)=0

$$\because u_C(t)=\frac{1}{8}\frac{di_L}{dt} \qquad \therefore \frac{di_L}{dt}(0+)=8u_C(0+)=0$$

5、利用初值 i_L(0+)=1A 和 $\frac{di_L}{dt}(0+)=0$ 确定待定系数 K_1、K_2

$$i_L(t)=(K_1+K_2 t)e^{-2t}$$

$$\frac{di_L}{dt}=K_2 e^{-2t}-2(K_1+K_2 t)e^{-2t}$$

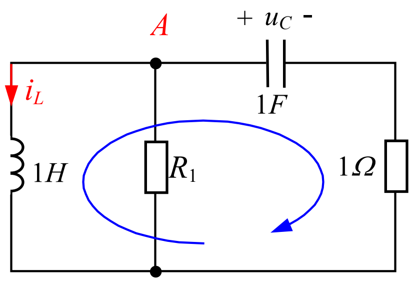
代入初值得：$\begin{cases}1=K_1\\ 0=K_2-2K_1\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}K_1=1\\ K_2=2\end{cases}$

6、结果

$$\therefore i_L(t)=(1+2t)e^{-2t}A, t\geq 0.$$

$$u_C(t)=\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{8}[2e^{-2t}-2(1+2t)e^{-2t}]=-0.5te^{-2t}V, t\geq 0$$

12-6　题 12-6 图示电路为换路后的电路，电感和电容均有初始储能。问电阻 R_1 取何值使电路工作在临界阻尼状态？



题 12-6 图

解：列 A 点的 KCL 方程

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R_1}\frac{di_L}{dt}+i_L=0 \qquad (1)$$

列回路方程

$$\frac{du_C}{dt}+u_C=\frac{di_L}{dt} \qquad （2）$$

(2)式代入(1)式： $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R_1}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R_1}u_C+i_L=0$

$$i_L=-(1+\frac{1}{R_1})\frac{du_C}{dt}-\frac{1}{R_1}u_C \qquad (3)$$

(3)式代入(2)式得： $\frac{du_C}{dt}+u_C=-(1+\frac{1}{R_1})\frac{d^2u_C}{dt^2}-\frac{1}{R_1}\frac{du_C}{dt}$

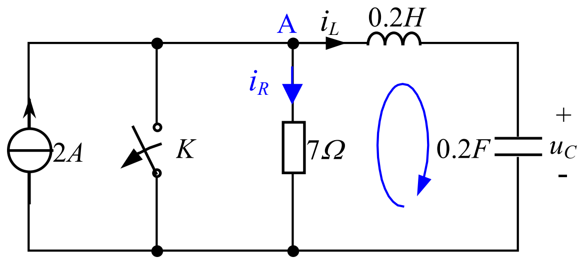
即： $(1+\frac{1}{R_1})\frac{d^2u_C}{dt^2}+(1+\frac{1}{R_1})\frac{du_C}{dt}+u_C=0$

当 $(1+\frac{1}{R_1})^2-4(1+\frac{1}{R_1})=0$ 时为临界阻尼状态

$$(1+\frac{1}{R_1})(1+\frac{1}{R_1}-4)=0$$

故 $R_1=\frac{1}{3}\Omega.$

12-7　题 12-7 图示电路。T<0 时电路为稳态，t=0 时开关 K 打开，求当开关打开后的 $u_C(t)$和 $i_L(t)$。



题 12-7 图

解：t<0 时　$i_L(0-)$=1A　　$u_C(0-)$=0

1、列写以 u_C 为变量的二阶微分方程

A 结点：$2=i_R+i_L$　　　　(1)

回路：$0.2\frac{di_L}{dt}+u_C-7i_R=0$ 　　　　(2)

对电容元件: $i_L = 0.2\dfrac{du_C}{dt}$ (3)

由(1)式得: $i_R = 2 - i_L$ (4)

将(4)式代入(2)式，有: $0.2\dfrac{di_L}{dt} + u_C - 7(2 - i_L) = 0$ (5)

将(3)式代入(5)式，有:

$$0.2 \times 0.2\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C - 7(2 - 0.2\frac{du_C}{dt}i_L) = 0$$

$$0.04\frac{d^2u_C}{dt^2} + 1.4\frac{du_C}{dt} + u_C = 14$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 35\frac{du_C}{dt} + 25u_C = 350$$

2、特征方程及特征根

$$p^2 + 35p + 25 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 100}}{2} = \frac{-35 \pm 33.54}{2}$$

p_1=-0.73　　　　p_2=-34.27

3、微分方程的解的形式

特解: $u_{Cp} = 14$(稳态解)

齐次方程的解: $u_{Ch} = K_1e^{-0.73t} + K_2e^{-34.27t}$

所以 $u_C = u_{Ch} + u_{Cp} = K_1e^{-0.73t} + K_2e^{-34.27t} + 14$

4、求初值 $u_C(0+)$和 $u'_C(0+)$

$u_C(0+) = u_C(0-) = 0$　　$i_L(0+) = i_L(0-) = 0A$

由(3)式得: $i_L(0+) = 0.2\dfrac{du_C}{dt}(0+)$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = 5i_L(0+) = 0$$

5、利用初值 $u_C(0+)=0V$ 和 $\dfrac{du_C}{dt}(0+) = 0$ 确定待定系数 K_1、K_2

$$u_C = K_1e^{-0.73t} + K_2e^{-34.27t} + 14$$

$$\frac{du_C}{dt} = -0.73K_1e^{-0.73t} - 34.27K_2e^{-34.27t}$$

代入初值得：$\begin{cases} 0 = K_1 + K_2 + 14 \\ -0.73K_1 - 34.27K_2 = 0 \end{cases}$　　解得：K_1= -14.1　　K_2=0.3

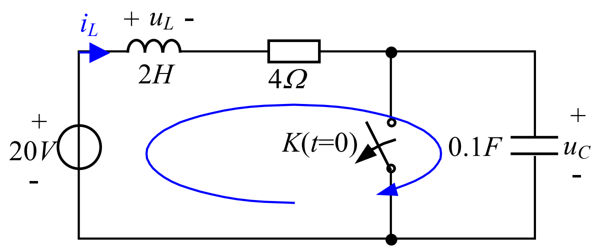
6、结果

$$u_C = -14.1e^{-0.73t} + 0.3e^{-34.27t} + 14V, t \ge 0$$

$$i_L = 0.2\frac{du_C}{dt} = 0.2 \times 14.1 \times 0.73e^{-0.73t} - 0.2 \times 0.3 \times 34.27e^{-34.27t}$$

$$= 2.1e^{-0.73t} - 2.06e^{-34.27t} A, t \ge 0$$

12-8　题 12-8 图示电路原处于稳态，t=0 时开关 K 打开，求 $u_C(t)$、$u_L(t)$。



题 12-8 图

解：t<0 时　i_L(0-)=5A　　u_C(0-)=0

1、列写以 u_C 为变量的二阶微分方程

对电容元件：$i_L = 0.1\frac{du_C}{dt}$　　　　(1)

回路：$2\frac{di_L}{dt} + 4i_L + u_C = 20$　　　　(2)

将(1)式代入(2)式，有：$0.2\frac{d^2u_C}{dt^2} + 0.4\frac{du_C}{dt} + u_C = 20$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\frac{du_C}{dt} + 5u_C = 100$$

2、特征方程及特征根

$$p^2 + 2p + 5 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm j2$$

3、微分方程的解的形式

特解: $u_{Cp}=100$(稳态解)

齐次方程的解: $u_{Ch}=K_1e^{-t}\cos 2t+K_2e^{-t}\sin 2t$

所以 $u_C=u_{Ch}+u_{Cp}=K_1e^{-t}\cos 2t+K_2e^{-t}\sin 2t+20$

4、求初值 $u_C(0+)$和 $u'_C(0+)$

$u_C(0+)=u_C(0-)=0$　　$i_L(0+)=i_L(0-)=5\text{A}$

由(1)式得：$i_L(0+)=0.1\dfrac{du_C}{dt}(0+)$

$$\frac{du_C}{dt}(0+)=10i_L(0+)=50$$

5、利用初值 $u_C(0+)=0V$ 和 $\dfrac{du_C}{dt}(0+)=50$ 确定待定系数 K、φ

$$u_C=K_1e^{-t}\cos 2t+K_2e^{-t}\sin 2t+20$$

$$\frac{du_C}{dt}=K_1(-e^{-t}\cos 2t-2e^{-t}\sin 2t)+K_2(-e^{-t}\sin 2t+2e^{-t}\cos 2t)$$

代入初值得：$\begin{cases}0=K_1+20\\ 50=-K_1+2K_2\end{cases}$　　解得：K_1= -20　　K_2=15

6、结果

$$u_C(t)=-20e^{-t}\cos 2t+15e^{-t}\sin 2t+20V,t\geq 0$$

$$u_L(t)=20-u_C-0.4\frac{du_C}{dt}$$

$$=20+20e^{-t}\cos 2t-15e^{-t}\sin 2t-20$$

$$-0.4[20e^{-t}\cos 2t+40e^{-t}\sin 2t-15e^{-t}\sin 2t+30e^{-t}\cos 2t]$$

$$=25e^{-t}\sin 2tV,t\geq 0$$

另一方法求：

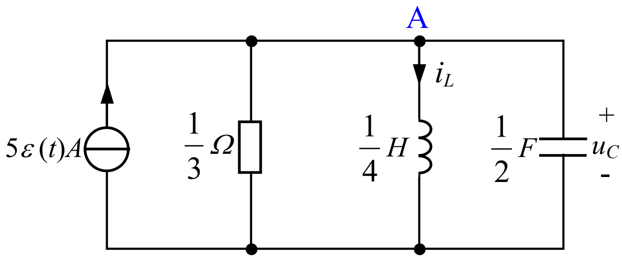
$$i_L=0.1\frac{du_C}{dt}=0.1[20e^{-t}\cos 2t+40e^{-t}\sin 2t-15e^{-t}\sin 2t+30e^{-t}\cos 2t]$$

$$=5e^{-t}\cos 2t+2.5e^{-t}\sin 2tA,t\geq 0$$

$$u_L=2\frac{di_L}{dt}=2[-5e^{-t}\cos 2t-10e^{-t}\sin 2t-2.5e^{-t}\sin 2t+5e^{-t}\cos 2t]$$

$= -25e^{-t}\cos 2tV, t \geq 0$

12-9　题 12-9 图示电路为零状态电路，求 $u_C(t)$、$i_L(t)$。



题 12-9 图

解：$t<0$ 时　$i_L(0-)=0A$　　$u_C(0-)=0$

1、列写以 i_L 为变量的二阶微分方程

A 点：　$5\varepsilon(t) = 3u_C(t) + i_L + \frac{1}{2}\frac{du_C}{dt}$　　　(1)

对电感元件　$: u_C = \frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}$　　　(2)

将(2)式代入(1)式，有：　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{3}{4}\frac{di_L}{dt} + i_L = 5\varepsilon(t)$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 6\frac{di_L}{dt} + 8i_L = 40\varepsilon(t)$$

2、特征方程及特征根

$p^2 + 6p + 8 = 0$

$p_1 = -2$　　$p_2 = -4$

3、微分方程的解的形式

特解：$i_{LP} = 5A.$ (稳态解)

齐次方程的解：$i_{Ch} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t}$

所以　$i_L = i_{Ch} + i_{Cp} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} + 5$

4、求初值 $i_L(0+)$和 $i'_L(0+)$

$i_L(0+)= i_L(0-)=0A$　　$u_C(0+)= u_C(0-)=0V$

由(2)式有：　$u_C(0+) = \frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}(0+)$

$$\frac{di_L}{dt}(0+) = 4u_C(0+) = 0$$

5、利用初值 $i_L(0+)=0A$ 和 $\frac{di_L}{dt}(0+)=0$ 确定待定系数 K_1、K_2

$$i_L(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-4t}+5$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}=-2K_1e^{-2t}-4K_2e^{-4t}$$

代入初值得：$\begin{cases}0=K_1+K_2+5\\0=-2K_1-4K_2\end{cases}$　　解得：K_1= -10　　K_2= 5

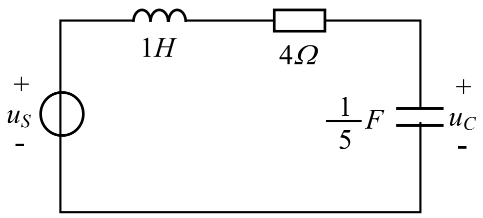
6、结果

$$i_L=-10e^{-2t}+5e^{-4t}+5A,t\geq 0$$

$$u_C=L\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{4}[20e^{-2t}-20e^{-4t}]=5e^{-2t}-5e^{-4t}V,t\geq 0.$$

12-10　求题 12-9 图示电路的零状态响应 $u_C(t)$。已知电源 $u_S(t)$的取值分别为：

(1) $u_S=\varepsilon(t)V$；　　(2) $u_S=\delta(t)V$。



题 12-10 图

解：(1) 列写以 u_C 为变量的二阶微分方程(方程的列写参考 12-4 题)

$$u_C+4\times\frac{1}{5}\frac{du_C}{dt}+1\times\frac{1}{5}\frac{d^2u_C}{dt^2}=\varepsilon(t)$$

特征方程及特征根

$$\frac{1}{5}p^2+\frac{4}{5}p+1=0 \qquad\qquad p_{1,2}=-2\pm j1$$

微分方程的解的形式

特解: $u_{cp}=1$ (稳态解)

齐次方程的解: $u_{Ch}=Ke^{-2t}\sin(t+\varphi)$

所以 $u_C=u_{Ch}+u_{Cp}=Ke^{-2t}\sin(t+\varphi)+1$

求初值 $u_C(0+)$和 $u'_C(0+)$

$u_C(0+)= u_C(0-)=0A$　　$u'_C(0+)=0$(参考题 12-4 的答案)

利用初值 $u_C(0+)=0V$ 和 $\frac{du_C}{dt}(0+)=0$ 确定待定系数 K、φ

$$u_C = Ke^{-2t}\sin(t+\varphi)+1$$

$$\frac{du_C}{dt} = K[-2e^{-2t}\sin(t+\varphi)+e^{-2t}\cos(t+\varphi)]$$

将代入初值有: $\begin{cases} K\sin\varphi + 1 = 0 \\ -2K\sin\varphi + K\cos\varphi = 0 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} K = -\sqrt{5} \\ \varphi = 26^\circ \end{cases}$

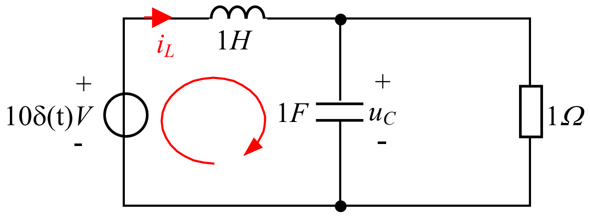
结果

$$u_C(t) = [-\sqrt{5}e^{-2t}\sin(t+26^\circ)+1]\varepsilon(t)$$

(2)当激励为单位冲激函数时，此时的零状态响应是(1)中的响应的导数单位冲激响应是:

$$h(t) = \frac{du_C(t)}{dt} = [2\sqrt{5}e^{-2t}\sin(t+26^\circ) - \sqrt{5}e^{-2t}\cos(t+26^\circ)]\varepsilon(t)$$

12-11 求题 12-9 图示电路的冲击响应 $u_C(t)$。



题 12-11 图

解: $t<0$ 时 $i_L(0\text{-})=0A$ $u_C(0\text{-})=0$

1、列写以 u_C 为变量的二阶微分方程

回路方程: $10\delta(t) = \dfrac{di_L}{dt} + u_C$ (1)

对电阻元件: $u_C = 1\times(i_L - \dfrac{du_C}{dt})$

$$i_L = \frac{du_C}{dt} + u_C \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式，有: $\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{du_C}{dt} + u_C = 10\delta(t)$

2、特征方程及特征根

$$p^2 + p + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3、微分方程的解的形式

$$u_C(t) = K_1 e^{-0.5t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + K_2 e^{-0.5t} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

4、求初值 $u_C(0+)$和 $u'_C(0+)$

$u_C(0+)= u_C(0-)=0V$　　$i_L(0-)=0A$

由(2)式得：$i_L(0-) = \frac{du_C}{dt}(0-) + u_C(0-)$

$$\frac{du_C}{dt}(0-) = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} + u_C = 10\delta(t)$$

方程两边取(0-，0+)积分，有：

$$\int_{0-}^{0+}\frac{d^2u_C}{dt^2}dt + \int_{0-}^{0+}\frac{du_C}{dt}dt + \int_{0-}^{0+}u_C dt = 10\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt$$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) - \frac{du_C}{dt}(0-) + u_C(0+) - u_C(0-) = 10$$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = 10$$

5、利用初值 $u_C(0+)=0V$ 和 $\frac{du_C}{dt}(0+) = 10$ 确定待定系数 K_1、K_2

$$u_C(t) = K_1 e^{-0.5t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + K_2 e^{-0.5t} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -(0.5K_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}K_2)e^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + (\frac{\sqrt{3}}{2}K_1 - 0.5K_2)e^{-0.5t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

代入初值得：$\begin{cases} 0 = K_2 \\ 10 = \frac{\sqrt{3}}{2}K_1 - 0.5K_2 \end{cases}$　　解得：$K_1 = \frac{20}{\sqrt{3}}$　　$K_2= 0$

6、结果

$$u_C(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \varepsilon(t)V$$