西南交通大学2014－2015学年第(一)学期考试试卷

课程代码 6024000 课程名称 概率与数理统计B(A卷) 考试时间 120分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总成绩
得 分									
阅卷人									

($t_{0.025}(8)=2.306$, $t_{0.025}(9)=2.262$, $t_{0.025}(14)=2.145$, $t_{0.025}(15)=2.131$, $\chi^2_{0.025}(14)=26.119$, $\chi^2_{0.975}(14)=5.629$, $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$, $\chi^2_{0.975}(15)=6.262$)

一、(10分) 设ξ和η是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，且已知ξ的分布律为$P(\xi=i)=\frac{1}{3}$ $(i=1,2,3)$，又设$X=\max(\xi,\eta)$, $Y=\min(\xi,\eta)$。试求: (1) 二维随机变量(X,Y)的分布律; (2) 随机变量X的数学期望。

解:

(1) 由于总有$X\geq Y$，故当$i<j$时，$P(X=i,Y=j)=0$

当$i=j$时，$P(X=i,Y=i)=P(\xi=i,\eta=i)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$， i=1, 2, 3

当$i>j$时，$P(X=i,Y=j)=P(\xi=i,\eta=j)+P(\xi=j,\eta=i)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(6分)

(2) X的分布律为

X	1	2	3
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{5}{9}=\frac{22}{9}$$ (4分)

密封装订线
密封装订线

二、(15分) (X,Y) 的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}k(x+y), & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0; & 其它.\end{cases}$

设$F(x,y)$是X, Y的联合分布函数, $F_X(x)$是关于X的边缘分布函数。试求: (1) 常数k; (2) 条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$; (3) $F(0.5,0.5)$, $F_X(0.2)$。

解: (1)

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 k(x+y)dxdy=k\Rightarrow k=1 \qquad (5分)$$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

当$0<x<1$ 时

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{2x+2y}{2x+1}, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases} \qquad (5分)$$

(3)

$$F(0.5,0.5)=\int_{-\infty}^{0.5}\int_{-\infty}^{0.5}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{0.5}\int_0^{0.5}(x+y)dxdy=0.125$$

$F_X(0.2)=\int_{-\infty}^{0.2}f_X(x)dx=\int_0^{0.2}(x+\frac{1}{2})dx=0.12$ (5分)

三、(10分) 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 又

知$E(X)=\frac{1}{3}$, 试求: (1) 常数a, b; (2) $E(X^2+1)$, $D[XE(X)+8]$。

解: (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b$

$\frac{1}{3}=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(ax+b)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$

可以解得: $a=-2$, $b=2$ (5分)

(2) $E(X^2)=\int_0^1 x^2(-2x+2)dx=\frac{1}{6}$

$E(X^2+1)=E(X^2)+1=\frac{7}{6}$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{18}$$

$$D[XE(X)+8]=E^2(X)D(X)=\frac{1}{162} \qquad (5分)$$

四、(15分) 某报亭出售3种报纸，其价格分别为1元, 3元, 9元，并且这3种报纸售出的概率分别为0.8, 0.1, 0.1。若某天该报亭共售出报纸100份，试用中心极限定理计算: (1) 该报亭这天收入至少为250元的概率; (2) 这天1元报纸至少售出90份的概率。(结果用标准正态分布分布函数表示)

解: (1) 以X_k $(k=1,2,\cdots,100)$ 表示出售的第k 份报纸的收入。

则X_k 的分布律为

X_k	1	3	9
p_k	0.8	0.1	0.1

故可得: $E(X_k)=2,\qquad D(X_k)=5.8,\qquad k=1,2,\cdots,100$

而该报亭这天收入$X=\sum\limits_{k=1}^{100}X_k$, 根据独立同分布的中心极限定理

$$P(X\geq 250)=P\left(\frac{X-100\times 2}{\sqrt{100\times 5.8}}\geq\frac{250-100\times 2}{\sqrt{100\times 5.8}}=2.07\right)\approx 1-\Phi(2.07) \qquad (8分)$$

(2) 以Y 表示售出的100份报纸中1元报纸的份数，则$Y\sim B(100,0.8)$，由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

$$P(Y\geq 90)=P\left(\frac{Y-100\times 0.8}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\geq\frac{90-100\times 0.8}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}=2.5\right)\approx 1-\Phi(2.5) \qquad (7分)$$

五、(15分) 从正态总体$N(2,3)$ 中随机抽取一容量为3的样本X_1, X_2, X_3。试求: (1) $P(\overline{X}<2)$; (2) $P(\overline{X}=5)$; (3) $P(X_1<X_2)$;

解: (1) 由于$\overline{X}\sim N(2,1)$，所以$P(\overline{X}<2)=\Phi\left(\frac{2-2}{1}\right)=\Phi(0)=0.5$ (7分)

(2) 由于$\overline{X}$ 是连续型随机变量，所以$P(\overline{X}=5)=0$ (4分)

(3) 由于X_1, X_2 独立同正态分布$N(2,3)$, 所以$X_1-X_2\sim N(0,6)$. 则$P(X_1<X_2)=P(X_1-X_2<0)=\Phi(0)=0.5$ (4分)

六、(10分) 设总体X 的概率密度为:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$是该总体的一组样本值，求参数θ的极大似然估计。

解: 似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=2^n\theta^{-2n}\prod_{i=1}^{n} x_i \quad (0<x_i<\theta, i=1, 2, \cdots, n)$

对数似然函数为$\ln L(\theta)=n\ln 2-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

似然方程为

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{2n}{\theta}<0 \qquad (6分)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的顺序统计值为$x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}$

为了使似然函数达到最大，θ 应尽可能小，且应满足: $0<x_i<\theta, i=1, 2, \cdots, n,$

即$0<x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}<\theta$

故参数θ 的极大似然估计值为$\hat{\theta}=x_{(n)}$

故参数θ 的极大似然估计量为$\hat{\theta}=X_{(n)}$ (4分)

七、(15分) 设总体X 服从$N(\mu,\sigma^2)$，已知$\sum_{i=1}^{15} x_i=8.7$, $\sum_{i=1}^{15} x_i^2=25.05$, 分别求$\mu$ 和σ^2 的置信水平为0.95的区间估计。

解：置信水平$1-\alpha=0.95$, $n=15$, $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(14)=2.145$, $\overline{x}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i=0.58$, $s^2=\frac{1}{14}[\sum_{i=1}^{15}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{15}x_i)^2}{15}]=1.43$

则μ 的置信水平为0.95的区间估计为

$$\left[\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]=[-0.082,\ 1.24] \qquad (8分)$$

$\chi^2_{0.025}(14)=26.119$, $\chi^2_{0.975}(14)=5.629$

则σ^2 的置信水平为0.95的区间估计为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]=[0.7658,\ 3.55] \qquad (7分)$$

八、 (10分) 设某商场日营业额X(万元)服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 任取该商场日营业额的9个样品，分别为：6.3, 5.8, 5.9, 6.6, 7.4, 6.4, 5.7, 6.2, 5.5。在显著性水平$\alpha=0.05$下，能否认为该商场平均日营业额为6.5万元?

解:

(a) 提出假设：$H_0:\mu=6.5$;　　$H_1:\mu\neq 6.5$;

(b) 选定显著性水平$\alpha=0.05$, 确定样本容量$n=9$;

(c) 选择恰当的统计量: $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$, 在$H_0$真时，检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-6.5}{S/\sqrt{9}}\sim t(8)$$

(d) 查t分布表可得$t_{0.05/2}(8)=2.306$，确定H_0的拒绝域:

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-6.5}{s/\sqrt{9}}\right|\geq t_{0.025}(8)=2.306$$

(e) 根据样本值计算样本均值$\bar{x}=6.2$与样本方差$s^2=0.33$, 及检验统计量的观测值

$$|t|=\left|\frac{6.2-6.5}{0.5745/\sqrt{9}}\right|=1.5666<t_{0.025}(8)=2.306$$

所以应接受H_0，认为该商场平均日营业额为6.5万元是合理的。　　(10分)