《线性代数 B》参考评分标准

一、选择题：

1.B； 2.C; 3.A；4.C； 5. D.

二、填空题：

6. $\frac{1}{a}$ 7. 0 8. 1 9. 21 10. 24

三、计算题

11.【解】： 因为

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&2\\2&1&7&3\\4&2&14&k\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&1\\0&0&0&k-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\ (6\text{分})$$

所以

（1）当 $k=6$ 时，该向量组的秩为 2，一个极大线性无关组为：α_1,α_2；（1 分）

（2）当 $k\neq 6$ 时，该向量组的秩为 3，一个极大线性无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_4$.（1 分）

12.【解】：由 $AX=2X+B$，得 $(A-2E)X=B$； ……………………（2 分）

由 $|A-2E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$ 可知，$A-2E$ 可逆，且

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3\text{分})$$

故 $X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$. ……… （3 分）

13.【解】: 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&3&6&1\\1&-5&-10&12\\3&-1&\lambda&15\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\3\\\mu\\3\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则原方程组可用矩阵乘法表示为 $Ax=b$.

(1) $$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\1&-5&-10&12&\mu\\3&-1&\lambda&15&3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&\lambda+2&2&4\\0&0&0&3&\mu+5\end{array}\right)\quad ①$$

由条件知，$R(A)=3$，所以 $\lambda+2=0$，即 $\lambda=-2$.

继续对①作初等行变换，得

$$(A|b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&2&4\\0&0&0&0&\mu-1\end{array}\right)\cdots\cdots②$$

又由题设条件知 $Ax=b$ 有解，于是 $R(A)=R(A,b)=3$，所以

$\mu=1$. …… (7 分)

(2) 将②化为行简单阶梯形

$$(A|b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以,原方程组的通解为 $x=\begin{pmatrix}-8\\3\\0\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},c\in R$. ……… (5 分)

14.【解】:（1）设 $p_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,根据题意有$\begin{cases}<p_1,p_3>=p_1^Tp_3=0\\<p_2,p_3>=p_2^Tp_3=0\end{cases}$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases},$$

得基础解系：$\xi=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，故 p_3 可取为 ξ，即 $p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；……（4 分）

（2）取 $q_1=\frac{1}{\|p_1\|}p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$q_2=\frac{1}{\|p_2\|}p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$,$q_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，并设

$Q=(q_1,q_2,q_3)$，则 Q 为正交阵，且有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$，故

$$A=Q\Lambda Q^T=(q_1,q_2,q_3)\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}(q_1,q_2,q_3)^T=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$ ………（5 分）

或者由 $(p_1,p_2,p_3)^{-1}A(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$ 可得

$$A=(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}(p_1,p_2,p_3)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&2\\1&1&-2\\3&-3&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

（3）设$\beta = y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3$，解得$y_1 = y_2 = 2, y_3 = 0$，由特征值的性质有

$$A^{-1}\beta = A^{-1}(2p_1 + 2p_2) = 2A^{-1}p_1 + 2A^{-1}p_2$$

$$= 2\times\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\times\tfrac{1}{3}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}。$$ ………（4 分）

15.解:（1）二次型的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix}6 & -2 & 4\\-2 & 9 & 2\\4 & 2 & 6\end{pmatrix};$$ …………………………（2 分）

（2）$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}6-\lambda & -2 & 4\\-2 & 9-\lambda & 2\\4 & 2 & 6-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}10-\lambda & -20+2\lambda & 0\\-2 & 9-\lambda & 2\\0 & 20-2\lambda & 10-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (10-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 9-\lambda & 2\\0 & 2 & 1\end{vmatrix} = (10-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 5-\lambda & 2\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$= -(10-\lambda)^2(\lambda-1)=0$$

解得方阵 A 的特征值分别为:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 10$. …………………………（4 分）

对特征值$\lambda_1 = 1$，

$$A-E = \begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\-2 & 8 & 2\\4 & 2 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

对应于$\lambda_1=1$的一个线性无关的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，单位化得$q_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$；

对特征值$\lambda_2=\lambda_3=10$，则

$$A-10E=\begin{pmatrix}-4&-2&4\\-2&-1&2\\4&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

对应于$\lambda_2=\lambda_3=10$的两个线性无关的特征向量为： $p_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

对 p_2,p_3 使用施密特正交规范化方法，可得正交的特征向量：

$$q_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\2\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}, q_3=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}4\sqrt{5}\\2\sqrt{5}\\5\sqrt{5}\end{pmatrix},$$

取正交阵$Q=(q_1,q_2,q_3)$,故所求正交变换为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$； ·········（6 分）

注：Q 不唯一，例如$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}$等也可以.

（3）在此正交变换下，二次型的标准形为

$$f=y_1^2+10y_2^2+10y_3^2$$ ··················（2 分）

四、证明题：

16.【证明】：设存在数$k_1,k_2,...,k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \qquad (1)$$ ············ （1 分）

用$\alpha_1^T A$左乘（1），有

$$k_1\alpha_1^T A\alpha_1 + k_2\alpha_1^T A\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_1^T A\alpha_s = 0 \qquad (2)$$

因为 $\alpha_i^T A\alpha_j = 0(i \neq j)$，（2）变为

$$k_1\alpha_1^T A\alpha_1 = 0$$

由 A 为正定阵，$\alpha_1 \neq 0$，可得$\alpha_1^T A\alpha_1 > 0$，故必有$k_1 = 0$. ……（3 分）

同理，可证$k_2 = 0, \cdots, k_s = 0$.

因此，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关. ………（1 分）