西南交通大学 2017－2018 学年第（2）学期期末考试试卷

课程代码 1272005 课程名称 高等数学 BII（A 卷） 考试时间 120 分钟

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 与平面 $2x+y-z+2=0$ 的位置关系是（　　）.

(A) 平行；　(B) 在平面上；　(C) 垂直于平面；　(D) 与平面斜交.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在，则（　　）.

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在；　(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在；

(C) $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续；　(D) $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分.

3. 设 D 是平面上以 $A(1,1)$，$B(-1,1)$ 和 $C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(B) $2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(C) $\iint\limits_{D_1} (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(D) 0.

4. 已知 $\alpha>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 的范围是（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1$；　(B) $\dfrac{3}{2}\le\alpha<2$；　(C) $1<\alpha\le\dfrac{3}{2}$；　(D) $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$；

5. 设 $S(x)$ 是函数 $f(x)=\pi-x(x\in[0,\pi])$ 展开成的以 2π 为周期的正弦级数的和函数，则 $S(\dfrac{3}{2}\pi)=$（　　）.

(A) 0；　(B) π；　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$；　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $P(2,1,0)$ 处的切平面方程为__________.

7. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 点指向点 $B(3,-2,2)$ 的方向导数为__________.

8. 设曲线 L 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L(3x^2+4y^2+3xy)\mathrm{d}s=$__________.

9. 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S=$__________.

10. 将 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 展开为 x 的幂级数为________________.

三、解答题（每小题 8 分，共 32 分）

11. 计算$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D是由直线$y=1$，$x=2$以及$y=x$所围成的闭区域.

12. 计算$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的闭区域.

13. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为抛物面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=2$与$z=0$之间部分的下侧.

14. 已知L是第一象限中从点$O(0,0)$沿圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$到点$A(2,0)$，再沿圆周$y=\sqrt{4-x^2}$到点$B(0,2)$的有向曲线. 计算曲线积分$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y$.

四、解答题（每小题 9 分，共 18 分）

15. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}x^n$的收敛半径，收敛域及其和函数.

16. 已知平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\ (a,b,c>0)$经过点$\left(2,1,\dfrac{1}{3}\right)$试问$a,b,c$为多少时平面与三坐标面在第一卦限所围四面体的体积最小?

五、证明题（共 5 分）

17. 设正项数列$\{a_n\}$单调递减，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

2017-2018 学年高数 BII 期末考试评分参考

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、A　2、 B　3、B　4、D　5、C

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6、曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $P(2,1,0)$ 处的切平面方程是 $\underline{x + 2y = 4}$.

7、函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 点指向点 $B(3,-2,2)$ 的方向导数为 $\underline{\frac{1}{2}}$.

8、设曲线 L 为椭圆周 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$，其周长为 a，则 $\oint_L (3x^2 + 4y^2 + 3xy)\mathrm{d}s = \underline{12a}$.

9、设曲面 $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} z^2 \mathrm{dS} = \underline{\frac{4}{3}\pi}$.

10、将 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 展开为 x 的幂级数为 $\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}}\ \underline{(x \in (-2,2))}$.

三. 解答题（每小题 8 分，共 32 分）（注意一题多解）

11、计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由直线 $y=1$，$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解：（法一）$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y$　（3 分）

$$= \int_1^2 \frac{x^3 - x}{2}\mathrm{d}x \quad （6 分）$$

$$= \frac{9}{8} \quad （8 分）$$

（法二）$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 xy\mathrm{d}y$　（3 分）

$$= \int_1^2 \frac{4y - y^3}{2}\mathrm{d}x \quad （6 分）$$

$$= \frac{9}{8} \quad （8 分）$$

12、计算$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的闭区域.

解：（法一 球面坐标法）$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r$ （4 分）

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r \quad （6 分）$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{\pi}{2} \quad （8 分）$$

（法二 柱面坐标法）$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\mathrm{d}z$ （4 分）

$$=2\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho \quad （6 分）$$

$$=\frac{\pi}{2} \quad （8 分）$$

（法三 先二后一法）$I=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{Z_1}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{Z_2}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （4 分）

$$=\int_0^1\pi z^3\mathrm{d}z+\int_1^{\sqrt{2}}\pi z(2-z^2)\mathrm{d}z \quad （6 分）$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \quad （8 分）$$

13、计算$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为抛物面$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$介于平面$z=2$与$z=0$之间部分的下侧.

解：（法一 高斯公式）令平面$\Sigma_1: z=2(x^2+y^2\le 4)$，取上侧，$\Sigma_1$与$\Sigma$所围的闭区域为$\Omega$，由高斯公式：

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1-1)\mathrm{d}v=0 \quad （4 分）$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\cdot 4\pi=-8\pi \quad （7 分）$$

所以$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-(-8\pi)=8\pi$ （8 分）

（法二 投影面转换法）由两类曲面积分之间的联系，可得

$$\iint_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\cos\alpha\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在曲面Σ上，有$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$， $\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$，

故$\iint_{\Sigma}\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left[\left(x+z^2\right)(-x)-z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （4 分）

$$=\iint_{\Sigma}\left[\left(x+\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2\right)(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\left[x^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2)\mathrm{d}\rho$$ （7 分）

$$=8\pi$$ （8 分）

14、已知L是第一象限中从点$O(0,0)$沿圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$到点$A(2,0)$，再沿圆周$y=\sqrt{4-x^2}$到点$B(0,2)$的有向曲线.计算曲线积分$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y$.

解：设区域D为有向曲线L与线段BO所围成的闭区域，由格林公式

$$\int_{L+BO}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y=\iint_D(3x^2+1-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （4 分）

$$=\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\cdot4\pi-\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}$$ （6 分）

$$\int_{BO}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y=\int_2^0 2y\mathrm{d}y=-4$$ （7 分）

所以 $I=\dfrac{\pi}{2}+4$. （8 分）

四、解答题（每小题 9 分，共 18 分）

15、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}x^n$的收敛域与和函数.

解：（1）求收敛域.因为$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}=1$，所以收敛半径$R=1$， （2 分）

且$x=\pm1$时级数发散，故收敛域为$(-1,1)$. （3 分）

（2）求和函数.令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n \quad (-1<x<1)$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (5\text{ 分})$$

$$=\frac{x}{1-x}+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{1-x}+\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x) \qquad (9\text{ 分})$$

16、已知平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a,b,c>0$）经过点 $(2,1,\frac{1}{3})$，试问 a,b,c 为多少时平面与三坐标面在第一卦限所围四面体的体积最小?

解：四面体体积 $V(a,b,c)=\frac{1}{6}abc$，约束条件为 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$ （2 分）

设 $L(a,b,c)=\frac{1}{6}abc+\lambda(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}-1)$ （4 分）

$$令\begin{cases}L_a=\frac{1}{6}bc-\lambda\frac{2}{a^2}=0\\ L_b=\frac{1}{6}ac-\frac{\lambda}{b^2}=0\\ L_c=\frac{1}{6}ab-\frac{\lambda}{3c^2}=0\end{cases} \qquad (7\text{ 分})$$

得唯一解 $a=6$，$b=3$，$c=1$，由题意当平面为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+z=1$ 时所围四面体的体积最小. （9 分）

五、证明题（共 5 分）

17、设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试证：$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 收敛.

证明：因为正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减，所以由单调有界定理 $\{a_n\}$ 一定存在极限，设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\geq 0$. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，所以 $a>0$. （3 分）

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{a_n+1})^n}=\frac{1}{a+1}<1$，由根值判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 收敛. （5 分）