2018-2019（二）高等数学 BII 半期考试参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1、B　　2、A　　3、D　　4、D　　5、C　　6、D

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7、$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$（或 $x^2+y^2+(x+y)^2=1$）　　8、$2\sqrt{3}$

9、$\frac{9}{4}$　　10、$\frac{2}{3}\pi$

三. 解答题（每小题 10 分，共 50 分）

11、解：设切平面与曲面的切点为 (x,y,z)，则切平面的法向量为

$$n=(2x,4y,6z)=2(x,2y,3z)$$

曲线在 $t=1$ 处的切线的切向量 $s=\left(1,2t,3t^2\right)\Big|_{t=1}=(1,2,3)$

由切平面与切线垂直得 $n//s$，故 $x=y=z$

联立 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 解得切点 $x=y=z=1$ 或 $x=y=z=-1$

所求切平面方程为 $x+2y+3z=6$ 或 $x+2y+3z=-6$

12、解：$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 时 $z=0$

设 $F(x,y,z)=e^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$

则 $F_x=1$, $F_y=2ze^{2yz}+2y$, $F_z=2ye^{2yz}+1$

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{1}{2ye^{2yz}+1}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\left.\frac{2ze^{2yz}+2y}{2ye^{2yz}+1}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$

（注：此题可用直接求导法）

13、解：由 $\begin{cases} f_x = 2x-6=0 \\ f_y = 2y+8=0 \end{cases}$ 得驻点 $(3,-4)$，且 $(3,-4)\in D$

在区域 D 的边界 $x^2+y^2=100$ 上，引入拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-6x+8y+\lambda(x^2+y^2-100)$$

由 $\begin{cases} F_x = 2x-6+2\lambda x=0 \\ F_y = 2y+8+2\lambda y=0 \\ F_\lambda = x^2+y^2-100=0 \end{cases}$，求得驻点 $(x,y)=(6,-8)$ 或 $(-6,8)$

计算 $f(3,-4)=-25$， $f(6,-8)=0$， $f(-6,8)=200$

比较得最大值 $f_{\max}=f(-6,8)=200$

（注：在边界上讨论时可用无条件极值，也可设拉格朗日函数为：

$F(x,y,\lambda)=100-6x+8y+\lambda(x^2+y^2-100)$ ）

14、解：圆的极坐标方程 $\rho=2\sin\theta$，

区域 D 用极坐标表示为：$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2\sin\theta$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

15、解：$m=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}(\rho-\rho^5)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=\frac{\pi}{3}$$

（注：此题也可用先二后一法）