《大学物理 AII》作业　　No.10　平衡态的气体动理论

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 _______

*****************************本章教学要求*****************************

1、理解热力学系统、热力学平衡态、热力学温标的概念。
2、理解理想气体状态方程的意义并能用它求解有关气体状态的问题。
3、理解理想气体的微观模型和统计假设，掌握理想气体压强微观公式的推导。
4、理解理想气体压强和温度的微观统计意义。
5、理解能量均分定理的意义及物理基础，并能由它导出理想气体内能公式。
6、理解速率分布函数及麦克斯韦速率分布定律的意义，理解并会计算三种速率 （最概然速率、平均速率、方均根速率）的统计值。
7、理解玻耳兹曼分布定律的意义和粒子在重力场中按高度分布的公式。
8、理解平均自由程、平均碰撞频率的概念并掌握其相关计算。

一、选择题：

1. 在标准状态下，若氧气（视为刚性双原子分子的理想气体）和氦气的体积比 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$，则其内能之比 E_1/E_2 为：

[C]　(A) 1/2　　(B) 5/3　　(C) 5/6　　(D) 3/10

解：理想气体的内能为：$E=\dfrac{m}{M}.\dfrac{i}{2}RT$，根据理想气体的状态方程：

$$pV=\frac{m}{M}RT，\ E=\frac{m}{M}.\frac{i}{2}RT=\frac{i}{2}pV$$

氧气是双原子分子，$i=5$，而氦气是单原子分子，$i=3$，标准状态下，二者压强相等，于是：$\dfrac{E_{O_2}}{E_{He}}=\dfrac{i_{O_2}}{i_{He}}.\dfrac{V_{O_2}}{V_{He}}=\dfrac{5}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$，因此选 C。

2．对于麦克斯韦速率分布中最概然速率的正确理解，应是：

[D]　(A) 最概然速率为分子速率分布中大部分气体分子具有的速率
(B) 最概然速率为分子速率分布中速率的最大值
(C) 最概然速率为分子速率分布函数的极大值
(D) 最概然速率附近单位速率区间内的分子数最多

解：“最概然”的意思是发生的可能性最大。如果吧整个速率区间范围分成许多相等的小区间，则分布在最概然速率所在区间的分子比率最大。而分子速率分布中的最大速率应为无穷大。因此答案为 D。

3．在容积 $V=1.0\times10^{-3}\ \text{m}^3$ 的容器中，装有压强 $p=2.0\times10^3$ Pa 的单原子理想气体，则容

器中所有气体分子的平均总动能为：

[B] (A) 1 J (B) 3 J

(C) 5 J (D) 6 J

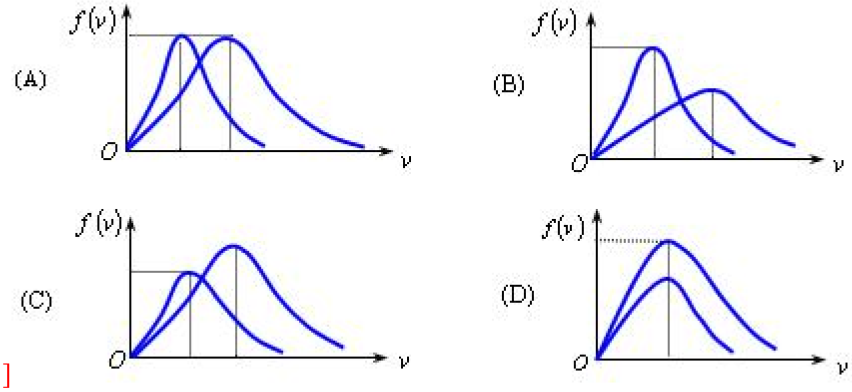
解：根据理想气体的状态方程：$p = nkT = \dfrac{N}{V}kT \Rightarrow N = \dfrac{pV}{kT}$

总的平均总动能为：

$$N\bar{\varepsilon}_i = N.\frac{i}{2}kT = N.\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}\times 2.0\times 10^3\times 1.0\times 10^{-3} = 3\text{J}$$

因此答案为 B

4. 下列各图所示的速率分布曲线，哪一图中的两条曲线是同一温度下氮气和氦气的分子速率分布曲线？



[B]

解：由归一化条件$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1$，说明$f(v)$曲线下面积都等于 1。若$v_p$大，则$v > v_p$的$f(v)$将减小。而在同一温度下，氮气和氦气的$v_p$不等，所以(D)不对。(A)、(C)中$v_p$大$f(v)$没有减小，所以(A)、(C)都不对。因此选 B。

5．在一个容积不变的容器中，储有一定量的理想气体，温度为T_0时，气体分子的平均速率为$\bar{v}_0$，分子平均碰撞次数为$\bar{Z}_0$，平均自由程为$\bar{\lambda}_0$。当气体温度升高为$4T_0$时，气体分子的平均速率为$\bar{v}$，平均碰撞次数$\bar{z}$和平均自由程$\bar{\lambda}$分别为：

[**B**] (A) $\bar{v} = 4\bar{v}_0$，$\bar{Z} = 4\bar{Z}_0$，$\bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$ (B) $\bar{v} = 2\bar{v}_0$，$\bar{Z} = 2\bar{Z}_0$，$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$

(C) $\bar{v} = 2\bar{v}_0$，$\bar{Z} = 2\bar{Z}_0$，$\bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$ (D) $\bar{v} = 4\bar{v}_0$，$\bar{Z} = 2\bar{Z}_0$，$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$

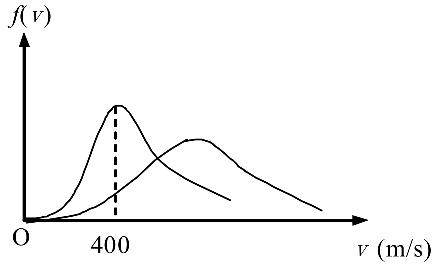
解：理想气体体积不变时其分子数数密度n不变，而平均速率$\bar{v} \propto \sqrt{T}$，则由平均自由程公式$\bar{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$和平均碰撞频率公式 $\bar{z} = \sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v}$ 知：选 B

二、填空题：

1. 在一容积不变的封闭容器内理想气体分子的平均速率若提高为原来的 2 倍，则温度为原来的___4___倍，压强为原来的___4___倍。

解： 理想气体分子的平均速率为：$\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$，如果平均速率提高为原来的 2 倍，则温度为原来的 4 倍；根据理想气体状态方程：$p=nkT$，分子数密度 n 不变，那么压强也变为原来的 4 倍。

2. 图示的曲线分别表示了氢气和氦气在同一温度下的分子速率的分布情况．由图可知，氦气分子的最概然速率为____________，氢气分子的最概然速率为______________。



解： 由归一化条件 $\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v=1$ 和 $v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\propto\frac{1}{\sqrt{m}}$，

说明题图左边曲线为氦气分子速率分布曲线，右边曲线为氢气分子速率分布曲线。

故氦气分子最概然速率为 $v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m_{氦}}}=400\,\mathrm{m.s^{-1}}$

氢气分子最概然速率为 $v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m_{氢}}}=\sqrt{\frac{2kT}{m_{氦}/2}}=400\sqrt{2}=565.6\mathrm{m.s^{-1}}$

3. 两种不同的理想气体，若它们的最概然速率相等，则它们的平均速率___相等___，方均根速率___相等___。 (填：相等、不相等)

解： 根据三种速率的定义可以判断若它们的平均速率相等，则它们的最概然速率和方均根速率也相等。

4．在两个相同的容器内分别放入 1mol 的 A 气体和 B 气体。A 气体的分子直径为 $2d_0$，平均速率为 v_0；B 气体的分子直径为 d_0，平均速率为 $2v_0$；在各自的容器内，__A__气体有更大的碰撞频率。

解：$\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v}$，直接将上述已知条件代入可以知道 A 气体的碰撞频率更大。

5．用总分子数 N、气体分子速率 v 和速率分布函数 $f(v)$ 表示下列各量：

(1) 速率大于 v_0 的分子数＝__________________；

(2) 速率大于 v_0 的那些分子的平均速率＝________________；

(3) 多次观察某一分子的速率，发现其速率大于 v_0 的概率＝____________。

解：因分布函数 $f(v)=\dfrac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}$ 得

速率大于 v_0 的分子数 $\Delta N_{v_0\to\infty}=N\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v$

速率大于 v_0 的那些分子的平均速率 $\Delta N_{v_0\to\infty}=\dfrac{\int_{v_0}^{\infty}v\mathrm{d}N}{\Delta N_{v_0\to\infty}}=\dfrac{N\int_{v_0}^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v}{N\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v}=\dfrac{\int_{v_0}^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v}{\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v}$

发现其速率大于 v_0 的概率 $\dfrac{\int_{v_0}^{\infty}\mathrm{d}N}{N}=\dfrac{N\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v}{N}=\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v$

6. 理想气体分子模型在气体动理论中讨论不同问题是有所不同，说明如下情况中使用的气体分子模型。在压强和温度公式的推导中____________________；

在能均分定律中____________________；

在分子平均碰撞自由程的推导中____________________。

解：在压强和温度公式的推导中 视为有质量而无大小的**质点**；

在能均分定律中 视为有结构的物体——**质点组**，可以发生平动、转动和振动；

在分子平均碰撞自由程的推导中 有一定大小(体积)的**刚性小球**。

7．已知大气压强高度变化的规律为 $p=p_0\exp\left(-\dfrac{M_{\mathrm{mol}}gh}{RT}\right)$。拉萨海拔约为3600m，设大气温度 t ＝27℃，而且处处相同，则拉萨的气压 p＝________________。

(空气的摩尔质量为 $M_{\mathrm{mol}}=29\times10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$，摩尔气体常量 $R=8.31\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$，海平面处的压强 $p_0=1\mathrm{atm}$，符号 $\exp\{a\}$，即 e^a)

解：由恒温气压公式有 $p=p_0e^{-\frac{M_{\mathrm{mol}}gh}{RT}}=1\times e^{-\frac{29\times10^{-3}\times9.81\times3600}{8.31\times300}}=0.663(\mathrm{atm})$

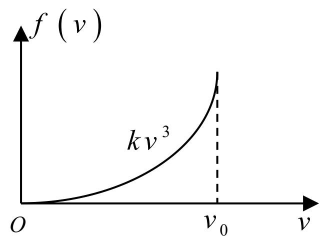
三、计算题：

1、已知某粒子系统中粒子的速率分布曲线如图所示，即

$$f(v)=\begin{cases}kv^3 & (0<v<v_0)\\ 0 & (v_0<v<\infty)\end{cases}$$

求：(1) 比例常数 k=？ (2) 粒子速率立方的平均值 $\overline{v^3}$=？ (3) 速率在 0~v_1 之间的粒子占总粒子数的 1/16 时，v_1=？ (答案均以 v_0 表示)

解：



（1）由归一化条件 $\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v=1$

有 $\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} kv^3\mathrm{d}v=\dfrac{kv_0^4}{4}=1$

所以 $k=\dfrac{4}{v_0^4}$

（2）$\overline{v^3}=\int_0^{\infty} v^3 f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} v^3 kv^3\mathrm{d}v=k\dfrac{v_0^7}{7}=\dfrac{4}{7}v_0^3$

（3）$\dfrac{\Delta N}{N}=\int_0^{v_1} f(v)\mathrm{d}v$

$$\frac{1}{16}=\int_0^{v_1} f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_1} kv^3\mathrm{d}v=k\frac{v_1^4}{4}=\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^4$$

$$v_1=\frac{1}{2}v_0$$

2. 一容积为 10 cm^3 的电子管，当温度为 300 K 时，用真空泵把管内空气抽成压强为 5×10^{-6} mmHg 的高真空，问此时管内有多少个空气分子？这些空气分子的平均平动动能的总和是多少？平均转动动能的总和是多少？平均动能的总和是多少？(已知 760 mmHg＝1.013×10^5 Pa，空气分子可认为是刚性双原子分子，波尔兹曼常量 k=1.38×10^{-23} J/K)

解：设管内总分子数为 N，　　由状态方程 $p=nkT=\dfrac{N}{V}kT$ 有

(1) 管内空气分子数为

$$N=\frac{pV}{kT}=\frac{5\times10^{-6}\times1.013\times10^{5}/760\times10\times10^{-6}}{1.38\times10^{-23}\times300}=1.61\times10^{12}\text{ 个}$$

由能量均分定律有

(2) 分子的平均平动动能的总和

$$\overline{E_t}=N\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.61\times10^{12}\times1.38\times10^{-23}\times300=1.00\times10^{-8}\text{ J}$$

(3) 分子的平均转动动能的总和

$$\overline{E_r} = N\frac{2}{2}kT = \frac{2}{2}\times1.61\times10^{12}\times1.38\times10^{-23}\times300 = 0.67\times10^{-8}\ \mathrm{J}$$

(4) 分子的平均动能的总和

$$\overline{E_k} = N\frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}\times1.61\times10^{12}\times1.38\times10^{-23}\times300 = 1.67\times10^{-8}\ \mathrm{J}$$

3. 有一密封房间的体积为$5\times3\times3\ \mathrm{m}^3$，室温为20℃，已知：空气密度$\rho=1.29\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$，摩尔质量$M=29\times10^{-3}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$，认为空气分子为刚性双原子分子。

求：

（1）室内空气分子热运动的平均平动动能的总和？

（2）如果气体的温度升高 1.0 K，而体积不变，气体的内能改变？

解：（1）室内空气分子总数为 ： $N=\dfrac{m}{M}N_A=\dfrac{\rho V}{M}N_A$

平均平动动能的总和为：

$$\begin{aligned} N\cdot\frac{3}{2}kT &= \frac{\rho V}{M}N_A k\frac{3}{2}T = \frac{\rho V}{M}\cdot\frac{3}{2}RT \\ &= \frac{1.29\times5\times3\times3}{29\times10^{-3}}\times\frac{3}{2}\times8.31\times(273+20) \\ &= 7.31\times10^{6}\quad(\mathrm{J}) \end{aligned}$$

（2）温度升高 1 K，内能变化量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m}{M}\cdot\frac{i}{2}R\Delta T = \frac{\rho V}{M}\cdot\frac{5}{2}R\Delta T \\ &= \frac{1.29\times5\times3\times3}{29\times10^{-3}}\times\frac{5}{2}\times8.31\times1 \\ &= 4.16\times10^{4}\quad(\mathrm{J}) \end{aligned}$$