西南交通大学2013—2014学年第(一)学期考试试卷

课程代码 6024000 课程名称 概率与数理统计B(A卷) 考试时间 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总成绩
得分									
阅卷人									

$\Phi(0.2)=0.5793$, $\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(9)=1.833$, $t_{0.05}(10)=1.812$, $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{0.95}(9)=3.325$, $\chi^2_{0.05}(10)=18.307$, $\chi^2_{0.95}(10)=3.940$, $t_{0.025}(25)=2.060$, $t_{0.05}(25)=1.708$, $z_{0.05}=1.645$, $z_{0.025}=1.96$.

一、(15分) 设随机变量X在1, 2, 3, 4中等可能的取一个值；另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能的取一个值。试求(X,Y)的联合分布律和$Z=X+Y$的分布律。

解：由题意可知，$P(X=i)=\dfrac{1}{4}$ $(i=1,2,3,4)$

$$P(Y=j|X=i)=\begin{cases}\dfrac{1}{i}, & j\le i,\\ 0, & j>i.\end{cases}\quad (i,j=1,2,3,4)$$

$$\begin{aligned}P(X=i,Y=j)&=P(X=i)P(Y=j|X=i)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{4i}, & j\le i,\\ 0, & j>i.\end{cases}\quad (i,j=1,2,3,4)\end{aligned}$$

(X,Y)的联合分布表为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

(10分)

$Z=X+Y$的分布律为

Z	2	3	4	5	6	7	8
$P(Z=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

(5分)

二、(10分) 设连续型随机变量X的密度函数为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，求$X$的期望与方差。

解: 因为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right\}$

所以$X\sim N(1,\frac{1}{2})$

故$E(X)=1$, (5分)

$D(X)=\frac{1}{2}$ (5分)

三、(10分) 设二维随机变量(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)|0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，试求边长为$X$和$Y$的矩形面积$S$的概率密度。

解: 由题意知(X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ (2分)

设$F(s)=P(S\le s)$为S 的分布函数，则

当$s\le 0$时, $F(s)=0$;

当$s\ge 2$时, $F(s)=1$;

当$0<s<2$时,

$$F(s)=P(XY\le s)=1-P(XY>s)=1-\iint\limits_{xy>s}f(x,y)dxdy$$

$$=1-\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1\frac{1}{2}dy=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$$ (5分)

故$S=XY$ 的概率密度为

$$f(s)=F'(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0<s<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ (3分)

四、(15分) 设随机变量U在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\le -1,\\ 1, & U>-1,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & U\le 1,\\ 1, & U>1.\end{cases}$$

试求: (1) X和Y的联合分布; (2) $D(X+Y)$。

解:

(1) 二维随机变量(X,Y)有4个可能取值数对: $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$,

$$P(X=-1,Y=-1)=P(U\le -1,U\le 1)=P(U\le -1)=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}$$

$$P(X=-1,Y=1)=P(U\le -1,U>1)=P(\phi)=0$$

$$P(X=1,Y=-1)=P(U>-1,U\le 1)=P(-1<U\le 1)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}du=\frac{1}{2}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(U>-1,U>1)=P(U>1)=\int_{1}^{2}\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}$$

所以X和Y的联合分布如下:

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(10分)

(2) $X+Y$的分布律为

$X+Y$	-2	0	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X+Y)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0$$

$$E[(X+Y)^2]=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=2$$

$$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=2$$ (5分)

五、(10分) 假设每袋面粉的重量是随机变量，相互独立且服从相同的分布，其数学期望为100千克，标准差为1千克。现有100袋面粉需要运走，问一辆准载量为10020千克的卡车一次能将其运走的概率为多少？

解：设第k袋面粉的重量为$X_k, k=1,2,\cdots,100$，它们相互独立，且服从同一分布，

$$E(X_k)=100, \qquad D(X_k)=1 \qquad k=1,2,\cdots,100$$

故$Y=\sum\limits_{k=1}^{100}X_k$ 表示100袋面粉总重量，且

$E(Y)=E(\sum\limits_{k=1}^{100}X_k)=\sum\limits_{k=1}^{100}E(X_k)=10000$，

$D(Y)=D(\sum\limits_{k=1}^{100}X_k)=\sum\limits_{k=1}^{100}D(X_k)=100$ (5分)

根据独立同分布中心极限定理，产品合格的概率为

$$P(Y\leq 10020)=P\left(\frac{Y-10000}{\sqrt{100}}\leq\frac{20}{\sqrt{100}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{100}}\right)=\Phi(2)=0.9772 \qquad (5分)$$

六、(15分) 设总体X 的概率密度为：

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{6x}{\beta^3}(\beta-x), & 0<x<\beta,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是X的样本，试求参数β 的矩估计量$\hat{\beta}$和$D(\hat{\beta})$。

解: $E(X)=\int_0^\beta x\frac{6x}{\beta^3}(\beta-x)dx=\frac{\beta}{2}$

令 $E(X)=\overline{X}$

则 $\frac{\beta}{2}=\overline{X}$

得 $\hat{\beta}=2\overline{X}$ (10分)

因为 $D(\hat{\beta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)$

而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^\beta x^2\frac{6x}{\beta^3}(\beta-x)dx-(\frac{\beta}{2})^2=\frac{\beta^2}{20}$

所以 $D(\hat{\beta})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\beta^2}{5n}$ (5分)

七、(15分) 从自动车床加工的一批零件中随机抽取10个，测得其尺寸与规定尺寸的偏差(单位：微米)分别为: 2, 1, −2, 3, 2, 4, −2, 5, 3, 4, 记零件的尺寸偏差为X, 假定$X \sim N(\mu, \sigma^2)$。求: (1) μ 和σ^2 的无偏估计值; (2) μ 和σ^2 的置信水平为0.9的区间估计。

解:

(1) 由于$E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, $n = 10$, 而$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 分别是μ 和σ^2 的无偏矩估计量，

故 $\hat{\mu} = \overline{x} = 2$, $\hat{\sigma^2} = s^2 = \frac{52}{9}$ (5分)

(2) 置信水平$1-\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.1$, $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05}(9) = 1.833$, $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$, $\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$

则μ 的置信水平为0.9的区间估计为

$$\left[\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[2 - 1.833 \times \frac{\sqrt{52/9}}{\sqrt{10}},\ 2 + 1.833 \times \frac{\sqrt{52/9}}{\sqrt{10}}\right] = [0.607,\ 3.393] \qquad (5分)$$

σ^2 的置信水平为0.9的区间估计为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

$$= \left[\frac{9 \times \frac{52}{9}}{16.919},\ \frac{9 \times \frac{52}{9}}{3.325}\right] = [3.073,\ 15.639] \qquad (5分)$$

八、(10分) 设某产品指标服从正态分布，其均方差$\sigma = 150$小时，今从一批产品中随机抽查26个，测得指标的平均值为1637小时，问在5%的显著性水平下，能否认为这批产品的指标为1600小时?

解：本问题是方差已知的条件下, $\mu = 1600$ 的假设检验，故

(1) $H_0: \mu = 1600$, $H_1: \mu \neq 1600$ (2分)

(2) $\alpha = 0.05$, $n = 26$ (1分)

(3) $Z=\dfrac{\overline{X}-3.25}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (2分)

(4) H_0 的拒绝域为

$$|Z|=\left|\frac{\overline{X}-1600}{150/\sqrt{26}}\right|\geq z_{0.025}=1.96 \qquad (2分)$$

(5) 已知$\bar{x}=1637$

故

$$|z|=\left|\frac{\bar{x}-1600}{150/\sqrt{26}}\right|=\left|\frac{1637-1600}{150/\sqrt{26}}\right|=1.2577<1.96$$

所以接受H_0，即认为这批产品的指标为1600小时。 (3分)