《大学物理 AII》作业 No.02 波动方程（参考答案）

班级________学号 ________姓名_________成绩 _______

*******************本章教学要求******************

1、理解波动产生的条件、传播的特性及波的分类。

2、掌握描述波的特征量：周期、频率、波长、波速的物理意义及其相互关系，并能与振动的特征量相区分。

3、掌握相位传播、波形传播意义，并能根据质点简谐运动方程或振动曲线建立面简谐波的波函数。理解波函数与波形曲线、振动曲线和行波的关系。

4、理解波的能量密度、能流、能流密度及波的强度等概念。行波的传播过程就是能量的传播过程。

5、理解多普勒效应产生的机制及应用。

一、填空题

1、__振动__在空间的传播形成波动，波动传播的是__振动的相位__和__能量__，而非振动质点本身。沿波传播的方向上，各质点的__相位__依次落后。

2、波的传播，实质也是能量的传播。在机械波传播的介质中，介质元的动能和势能是__同相__变化的（填同相或反相），介质元的总机械能是__不守恒__的(填守恒或不守恒)。介质元总是从前一个质元__吸收__能量，然后把能量__传递给__后面相邻的质元。

3、单位时间内通过垂直于波传播方向上单位面积的能量称为波的__平均能流密度（强度）__，它与振幅的关系为__正比于振幅的平方__。

4、波源或观察者的运动会使接收到的波动频率与波源的振动频率不相等，这种现象称为__多普勒效应__。若波源静止，观察者向着波源运动，则观察者接收到波的频率将__增大__；若观察者静止，波源向着远离观察者的方向运动，则观察者接收到的频率将__减小__；若波源和观察者同时相对于介质相向运动，则观察者接收到的频率将__增大__。（选填：增大，减少，不变）

5. 一平面简谐波的表达式 $y = A\cos\omega(t - x/u) = A\cos(\omega t - \omega x/u)$，其中 x/u 表示

__波从坐标原点传至 x 处所需时间__；$\omega x/u$ 表示__x 处质点比原点处质点滞后的

相位。

6. 一平面简谐波，波速为 50m/s，振动周期为 0.01s，则波长为<u> 0.5m   </u>。在波的传播方向上，有两质点的振动相位差为$2\pi/5$，此两质点相距为<u> 0.1m </u>。

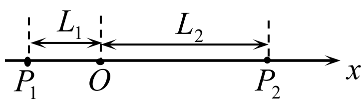
解：由$\lambda = uT$ 可得$\lambda = 50\times 0.01 = 0.5\,(\mathrm{m})$；

$$\text{由}\ \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}，\text{得}\quad \Delta x = \frac{\Delta\varphi\cdot\lambda}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi}{5}\times 0.5}{2\pi} = 0.1\,(\mathrm{m})。$$

7. 如图所示，一平面简谐波沿Ox轴负方向传播，波长为λ，$L_1 = |OP_1|$，$L_2 = |OP_2|$

若P_1点处质点的振动方程为$y_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$，则$P_2$点处质点的振动方程为

$$y_2 = A\cos\left[\omega t+\varphi+\frac{2\pi}{\lambda}(L_1+L_2)\right]$$



解：因为波沿Ox轴负方向传播，故P_2的相位比P_1超前$\frac{2\pi}{\lambda}(L_1+L_2)$。

二、选择题

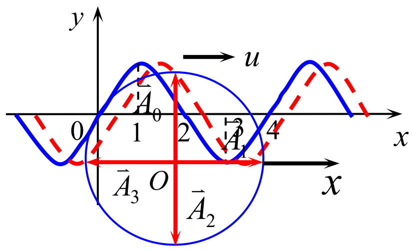
1. 图示为一沿x轴正向传播的平面简谐波在$t=0$时刻的波形。若振动以余弦函数表示，且此题各点振动初相取$-\pi$到π之间的值，则

[A] (A) 1 点的初位相为$\varphi_1 = 0$。

(B) 0 点的初位相为$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$。

(C) 2 点的初位相为$\varphi_2 = 0$。

(D) 3 点的初位相为$\varphi_3 = 0$。



解：$t=0$时，各点旋转矢量位置如图所示，可见

$$\varphi_1 = 0, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_3 = \pi$$

2、一平面简谐波表达式为$y = -0.05\sin\pi(t-2x)$ (SI)，则该波的频率ν(Hz)、波速u($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)及波线上各点振动的振幅A(m)依次为：

[C] (A) 1/2，1/2，－0.05 (B) 1/2，1，－0.05
(C) 1/2，1/2，0.05 (D) 2 ，2，0.05

解： 平面简谐波表达式可改写为

$$y=-0.05\sin\pi(t-2x)=0.05\cos(\pi t-2\pi x+\frac{\pi}{2}) \quad \text{(SI)}$$

与标准形式的波动方程 $y=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})+\varphi]$ 比较，可得

$A=0.05\ \text{(m)}$， $\nu=\frac{1}{2}\ \text{(Hz)}$， $u=\frac{1}{2}\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 。

3. 一简谐横波沿 Ox 轴传播。若 Ox 轴上 P_1 和 P_2 两点相距 $\lambda/4$ (其中 λ 为该波的波长)，则在波的传播过程中，这两点振动速度的

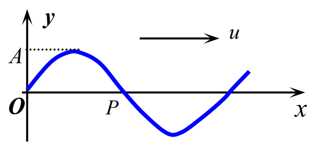
[C] (A)方向总是相同。 (B)方向总是相反。
(C)方向有时相同，有时相反。 (D)大小总是不相等。

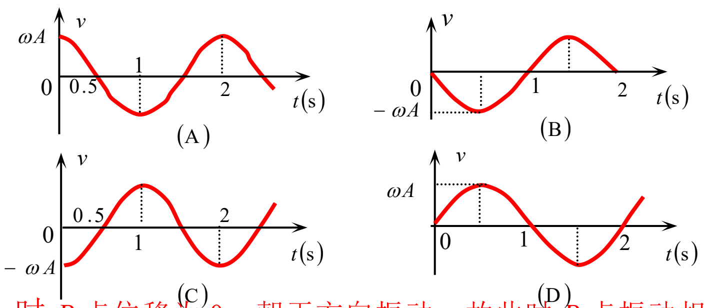
解： P_1 和 P_2 两点位相差， $\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}=2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda}=\frac{\pi}{2}$ 。

故这两点的振动速度方向有时相同，有时相反。

4. 一简谐波沿 Ox 轴正方向传播，$t=1\text{s}$ 时刻波形曲线如左下图所示，其周期为 2 s。则 P 点处质点的振动速度 v 与时间 t 的关系曲线为：

[C]





解： 由波形曲线知：$t=1\text{s}$ 时 P 点位移为 0，朝正方向振动，故此时 P 点振动相位 $\varphi_P=\frac{3\pi}{2}$，又周期为 2s，所以 P 点振动初相为 $\varphi_{P0}=\frac{3\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{2}$

P 点的振动方程为 $$y_P=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

P 点的振动速度 $$v=\frac{\mathrm{d}y_P}{\mathrm{d}t}=-\pi A\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=\pi A\cos(\pi t+\pi)$$

则 $t=0$ 时，$v=-\omega A=-\pi A$，可见振动速度 v 与时间 t 的关系曲线应为(C)。

5. 一平面简谐波在弹性介质中传播，在介质质元从最大位移处运动到平衡位

置的过程中：

[　 C 　] (A) 它的动能转换成势能。

(B) 它的势能转换成动能。

(C) 它从相邻的一段质元获得能量，其能量逐渐增大。

(D) 它把自己的能量传给相邻的一段质元，其能量逐渐减小。

解：介质质元在最大位移处时，动能和势能（因形变为 0）都为 0，而当介质质元运动到最大位移处时，动能和势能（此时形变最大）都达到最大。

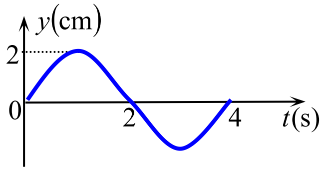
三、计算题

1. 一列平面简谐波在介质中以波速 $u = 6\text{m/s}$ 沿 x 轴负向传播，原点 O 处质元的振动曲线如图所示。

(1)求该波的波动方程；

(2)画出 x＝24 m 处质元的振动曲线。

(3)画出 t＝3 s 时的波形曲线。



解：(1)O 点振动方程为 $y_O = 2\times10^{-2}\cos\left(\frac{2\pi}{4}t-\frac{\pi}{2}\right) = 2\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)$

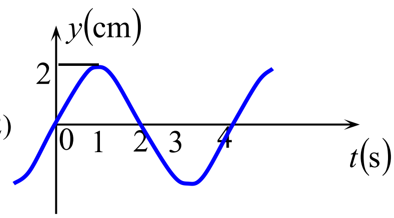
波动方程为 $y = 2\times10^{-2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t+\frac{x}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$ (SI)

(2)将 x＝24m 代入上式，得该处振动方程

$$y = 2\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{3}{2}\pi\right) \qquad \text{(SI)}$$

曲线如图(2)所示。

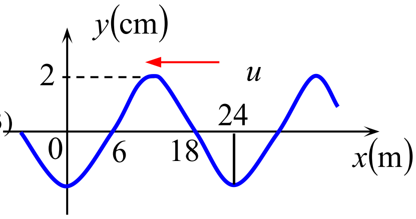
图(2)



(3)将 t＝3s 代入波动方程，得波形曲线方程

$y = 2\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi x}{12}+\pi\right)$，波形曲线如图(3)所示。

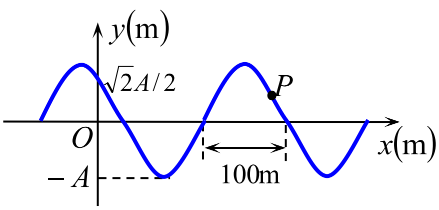
图(3)



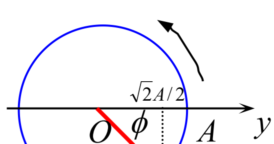
2. 如图所示为一平面简谐波在 t=0 时刻的波形图，O 点位移为 $\sqrt{2}A/2$。设此简谐波的频率为 10Hz，且此时质点 P 的运动方向向上，求

(1) 该波的波动方程；

(2) 在距原点 O 沿 x 正方向 100m 处质点的振动方程与振动速度表达式。



解：(1)由于 P 点向上运动，可以判定波向(+x)传播。根据旋转矢量图可知 O 点振动初相



$\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$，所以 O 点的振动方程为 $y_0 = A\cos\left(20\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

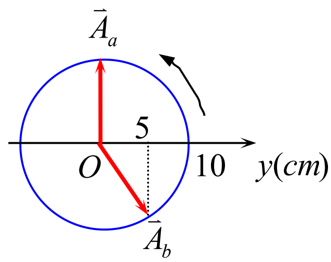
又由图可知 $\lambda = 200\text{m}$，波动方程为

$$y = A\cos\left[2\pi\left(10t - \frac{x}{200}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = A\cos\left[20\pi t - \frac{\pi x}{100} - \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{(SI)}$$

(2) 将 $x=100\text{m}$ 代入上式，得该处的振动方程 $y_{100} = A\cos\left(20\pi t - \dfrac{5}{4}\pi\right)$ (SI)

振动速度表达式为 $v_{100} = \dfrac{\mathrm{d}y_{100}}{\mathrm{d}t} = -20\pi A\sin\left(20\pi t - \dfrac{5}{4}\pi\right)$ (SI)

3. 一平面简谐横波沿 x 轴正向传播，振幅 A=10cm，圆频率 $\omega = 2\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，当 t＝0 时，x＝1m 处的 a 质点振动状态为处于平衡位置且向 y 轴负向运动；此时 x＝2m 处的 b 质点振动状态为 $y_b = 5.0\text{cm}$ 且向 y 轴正向运动。设该波波长 $\lambda > 1\text{m}$，求波的表达式。



解：由 t=0 时 a、b 两质点的振动状态可得如右矢量图，

可得：$\varphi_a = \dfrac{\pi}{2}$，则 a 点振动方程为：

$$y_a = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}),$$

又因为波沿 x 轴正向传播，故 b 点的相位落后于 a 点，且 $\lambda > 1\text{m}$，故由旋转矢量图知：$\varphi_b = -\dfrac{\pi}{3}$，

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{2\pi}{\lambda}(x_b - x_a) \qquad 可得 \qquad \lambda = \frac{12}{5}m \quad ,$$

所以波的表达式为

$$y = 0.1\cos\left[\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}(x-1)\right] = 0.1\cos\left(2\pi t - \frac{5\pi x}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) \qquad \text{(SI)}$$