2017－2018 学年第一学期《高等数学 BI》期末试题

一． 选择题（每小题 4 分，共 4 个小题，共 16 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中与 x^2 为同阶无穷小的是【 C 】

（A）$1-e^x$；（B）$\ln\left(1-x^3\right)$；（C）$\arcsin\left(2x^2\right)$；（D）$\sqrt{1+x^4}-1$.

解：因为当 $x\to 0$ 时，$1-e^x=-\left(e^x-1\right)\sim -x$，$\ln\left(1-x^3\right)=\ln\left[1+\left(-x^3\right)\right]\sim -x^3$，

$\arcsin\left(2x^2\right)\sim 2x^2$，$\sqrt{1+x^4}-1\sim \dfrac{1}{2}x^4$，所以本题应选 C.

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}=-1$，则以下说法正确的是【 A 】

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点；（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但 $f'(0)\neq 0$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}=-1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$，则根据函数极限与无穷小的关系，得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；

又函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，

即 $f(0)=0$；又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}=-1<0$，则根据函数极限的局部保号性，得 $\dfrac{f(x)}{x\sin x}<0\left(x\in\overset{0}{U}\left(0\right)\right)$；

而函数 $x\sin x>0\left(x\in\overset{0}{U}\left(0\right)\right)$，所以 $f(x)<0=f(0)\left(x\in\overset{0}{U}\left(0\right)\right)$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，

所以本题应选 A.

选项 C、D 均错误：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}\xlongequal[\text{变形}]{\text{恒等}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x\sin x}\xlongequal[\text{变形}]{\text{恒等}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\sin x}=-1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$，

则根据函数极限与无穷小的关系，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，

即 $f'(0)\xlongequal[\text{的导数的定义}]{\text{函数在某一点处}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

3. 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围图形的面积为【 B 】

（A）$\int_0^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$；（B）$\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$；（D）$\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x-\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$.

解：根据定积分的几何应用及对应平面图形可知，本体应选 B.

4. 设方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是【 D 】

（A） $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$；　　（B） $y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$；

（C） $C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$；　　（D） $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.

解：根据“齐次线性微分方程的解的性质”、“非齐次线性微分方程的解”与其对应的“齐次线性微分方程的解”之间的关系，结合已知条件，可得

$y_1(x)-y_2(x)$ 是非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 对应的齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的一个非零解，故 $y'+P(x)y=0$ 的通解为 $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$，

从而非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为 $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$ 或者 $y_2(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$. 　故本题应选 D.

二. 填空题（每小题 4 分，共 5 个小题，共 20 分）

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ __1__.

解：将 $x=0$ 代入原方程，得 $0+e^y=0+1\Rightarrow y=0$；
对原方程两边同时关于 x 求导，得 $y+x\bullet y'+e^y\bullet y'=1+0$，
将 $y(0)=0$ 代入上式，得 $0+0+e^0\bullet y'(0)=1\Rightarrow y'(0)=1$，即 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$.

6. 设 $F(x)$ 是 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的一个原函数，则 $d\left[F(x^2)\right]=\underline{\dfrac{2\sin\left(x^2\right)}{x}dx}$.

解：因为 $F(x)$ 是 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的一个原函数，则 $\int\dfrac{\sin x}{x}dx=F(x)+C$，即 $F'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；

从而 $$d\left[F(x^2)\right]\xlongequal[\text{微分法则}]{\text{复合函数}}F'(x^2)d(x^2)\xlongequal[\text{微分法则}]{\text{复合函数}}F'(x^2)\bullet 2xdx$$

$$\xlongequal{F'(x)=\frac{\sin x}{x}}2x\bullet\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}dx=\frac{2\sin\left(x^2\right)}{x}dx,$$

即 $d\left[F(x^2)\right]=\dfrac{2\sin\left(x^2\right)}{x}dx$.

7. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $\underline{xy=1}$.

解：因为 $xy'+y=\left(xy\right)'$，所以原方程即为 $\left(xy\right)'=0$，从而 $xy=C$；
又 $y(1)=1$，所以 $1\times1=C$，即 $C=1$，从而所求解为 $xy=1$.

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\underline{\frac{\pi}{4}}$.

解：因为$\int_0^{+\infty}\frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}\overset{\text{“凑微分”}}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(e^x\right)^2}\mathrm{d}\left(e^x\right)=\left[\arctan e^x\right]_0^{+\infty}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan e^x-\arctan e^0=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，

所以$\int_0^{+\infty}\frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}=\frac{\pi}{4}$.

9. 曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凸区间是$\underline{\left[0,\frac{2}{3}\right]\left(\text{注:区间开或闭都正确}\right)}$.

解：函数$y=3x^4-4x^3+1$的定义域为$\left(-\infty,+\infty\right)$，

而$y'=12x^3-12x^2=12\left(x^3-x^2\right)$，$y''=12\left(3x^2-2x\right)$，

无y''不存在的点，令$y''=0$，得$x_1=0$，$x_2=\frac{2}{3}$；则只有当$0<x<\frac{2}{3}$时$y''<0$，

故曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凸区间是$\left[0,\frac{2}{3}\right]\left(\text{注:区间开或闭都正确}\right)$.

三. 计算题（每小题 7 分，共 3 道题，共 21 分，要求写出必要的解题步骤）

10．计算极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan(2x)}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2\sin2x}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan(2x)}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2\sin2x}\overset{\text{等价无穷}}{\underset{\text{小代换}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan(2x)}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2\bullet2x}$

$\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\tan^2(2x)\right)\bullet\sec^2(2x)\bullet2}{6x^2}\overset{\text{等价无穷}}{\underset{\text{小代换}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(2x)^2\bullet\sec^2(2x)\bullet2}{6x^2}=\frac{4}{3}$，

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan(2x)}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2\sin2x}=\frac{4}{3}$.

11．计算定积分$I=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\,\mathrm{d}x$.

解：$I=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\,\mathrm{d}x\overset{\text{恒等}}{\underset{\text{变形}}{=\!=\!=}}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x(1-\sin^2x)}\,\mathrm{d}x\overset{\text{恒等}}{\underset{\text{变形}}{=\!=\!=}}\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\left|\cos x\right|\mathrm{d}x$

$\overset{\left(\text{去“绝对值”}\right)\text{定积分对}}{\underset{\text{积分区间具有可加性}}{=\!=\!=}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x$

$\overset{\text{“凑微分”}}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}(\sin x)=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}(1-0)-\frac{2}{5}\left[0-(-1)\right]=\frac{4}{5}$

所以$I=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$.

12．计算不定积分$I=\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

解：$I=\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$=x\sin(\ln x)-\left[x\cos(\ln x)-\int-\sin(\ln x)\mathrm{d}x\right]=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-I$，

所以 $I=\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C$.

四．解答题（每小题 10 分，共 30 分）

13．求 $y''+4y=3\sin x$ 的一条积分曲线，使其与曲线 $y=\tan(3x)$ 相切于原点.

解：微分方程 $y''+4y=3\sin x$ 对应的齐次方程 $y''+4y=0$ 的特征方程为 $r^2+4=0$，

解得特征根为 $r_1=2i$，$r_2=-2i$；

因为 $\lambda=i$ 不是特征方程的根，则可设原方程的一个特解为 $y^*=a\cos x+b\sin x$，

将 y^* 代入原方程，解得 $a=0$，$b=1$；故原方程的一个特解为 $y^*=\sin x$，

从而原方程的通解为 $y=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+\sin x$.

又由 $y=\tan(3x)$，得 $y'=3\sec^2(3x)$，得初值条件 $y(0)=0$，$y'(0)=3$，

因此 $C_1=0$，$C_2=1$，所求积分曲线为 $y=\sin(2x)+\sin x$.

14. 求由平面曲线 $y=x\sin x$ 与 $y=x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所围图形的面积以及此图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

解：因为 $x\sin x\le x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，故所围图形面积为

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\left\{\left[x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi^2}{8}+\left\{(0-0)-\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}=\frac{\pi^2}{8}-(1-0)=\frac{\pi^2}{8}-1；$$

旋转体体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(x^2-x^2\sin^2x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x^2-x^2\bullet\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos(2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\bullet\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}\left[\sin(2x)\right]=\frac{\pi^4}{48}+\frac{\pi}{4}\left\{\left[x^2\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\bullet 2x\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{\pi^4}{48}+\frac{\pi}{4}\left\{(0-0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left[\cos(2x)\right]\right\}=\frac{\pi^4}{48}+\frac{\pi}{4}\left\{\left[x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{\pi^4}{48}+\frac{\pi}{4}\left\{\left[\frac{\pi}{2}\bullet(-1)-0\right]-\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}=\frac{\pi^4}{48}+\frac{\pi}{4}\left[\frac{-\pi}{2}-(0-0)\right]=\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi^2}{8}，$$

即$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(x^2-x^2\sin^2 x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi^2}{8}$.

注：在计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos(2x)\mathrm{d}x$，也可以先用“列表法”求出不定积分$\int x^2\cos(2x)\mathrm{d}x$，然后再利用“牛顿–莱布尼兹公式”计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos(2x)\mathrm{d}x$，即

$$\int x^2\cos(2x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{列表法}}\frac{1}{2}x^2\sin(2x)+\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+C,$$

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos(2x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\sin(2x)+\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\sin(2x)+\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[0+\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}\bullet(-1)-0\right]-[0+0-0]=\frac{-\pi}{4}.$$

15．有一个体积为V的无盖圆柱形容器，问如何确定底面半径和容器高的比例使容器的表面积最小？

解：设圆柱形容器底面半径为x，则高$h=\frac{V}{\pi x^2}$，容器表面积为$S(x)=\pi x^2+\frac{2V}{x}$，

于是$S'(x)=2\pi x-\frac{2V}{x^2}=2\bullet\frac{\pi x^3-V}{x^2}\overset{\text{令}}{=}0$，求得唯一驻点$x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$；

且$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)=\left(2\pi+\frac{4V}{x^3}\right)\Bigg|_{x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}=2\pi+4V\bullet\frac{\pi}{V}=6\pi>0$，则$x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$为极小值点；

又极值点唯一，且该极值点是极小值点，故该极小值点就是最小值点，

此时$h=\frac{V}{\pi x^2}\Bigg|_{x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}=\sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3}\bullet\frac{\pi^2}{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}=x$，

即底面半径和容器高的比例为时$1:1$时，容器的表面积最小.

五. 证明题（第 16 题 6 分，第 17 题 7 分，共 13 分）

16．证明:方程$\int_a^x\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$在区间$(a,b)$内有且只有一个实根.

证明：设$f(x)=\int_a^x\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则$f(a)=\int_b^a\frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t<0$，$f(b)=\int_a^b\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t>0$，

则由零点定理可知，方程$\int_a^x\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$在区间$(a,b)$内一定有实根.

又因为$f'(x)=\frac{e^x}{1+x^2}+\frac{e^{-x}}{1+x^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{1+x^2}>0$，所以方程只有一个实根

17．设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足$f(1)=2\int_0^{0.5}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$，证明：

至少存在一点$\xi \in (0,1)$使得$f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$.

证明：令$F(x)=xe^{1-x}f(x)\left(x\in[0,1]\right)$,

因为$f(1)=2\int_0^{0.5}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$，则由积分中值定理，存在$\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$2\int_0^{0.5}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\text{值定理}]{\text{积分中}} 2\bullet\eta e^{1-\eta}f(\eta)\bullet(0.5-0)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$，即$f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$；

而$F(1)=f(1)$, $F(\eta)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)\left(\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$，所以$F(1)=F(\eta)\left(\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$；

由罗尔中值定理，至少存在一点$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$使得$F'(\xi)=0$.

而$F'(x)=e^{1-x}\left[f(x)+xf'(x)-xf(x)\right]$，所以$f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$.