姓 名 ________ 学 号 ________ 班 级 ________

密封装订线 密封装订线 密封装订线

西南交通大学 2018 —2019 学年第(一)学半期考试

课程代码 6010500 课程名称 线性代数 B 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：________

一、选填题（每空 5 分，共 25 分）

1. 设$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&0&0&2\\3&3&3&0\end{vmatrix}$，$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式， 则$A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}=$ $\underline{-12}$.

2．设$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为四维列向量，记$A=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4),B=(\gamma_1+2\gamma_2,3\gamma_1+4\gamma_3,\gamma_2,\gamma_4)$,如果$|A|=4$，则$|B|=$ $\underline{-16}$.

3. 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&7&9\\6&5&4\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$则$P^{2018}AP^{2019}=$ $\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&9&7\\6&4&5\end{pmatrix}$.

4. 设A,B均为三阶方阵，且$|A|=2,|B|=3$则$\left|-A^2B^3\right|=$ $\underline{-108}$.

5.计算行列式 $\begin{vmatrix}1717&1708\\2828&2819\end{vmatrix}=$ $\underline{9999}$ 。

二、选择题（每空 5 分，共 15 分）

1. 设A,B为三阶方阵，则下述结论正确的是（ C ）

A. A或B可逆，则AB可逆　　B. A且B可逆，则$A+B$可逆

C. A或B不可逆，则AB不可逆　　D. A与B不可逆，则$A+B$不可逆

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则 $A^3=$（ D ）

A. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&3\\0&0&3&3\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&0\\0&0&4&4\\0&0&4&4\end{pmatrix}$

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&\lambda&4\\2&3&4&5\\3&5&7&9\end{pmatrix}$，当 A 的秩为 2 时，$\lambda=$（ C ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、计算题（每题 11 分，共 44 分）

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+b&b&0&\cdots&0&0\\a&a+b&b&\cdots&0&0\\0&a&a+b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a+b&b\\0&0&0&\cdots&a&a+b\end{vmatrix}$

解：按第一行展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}，$$ ------------------------------------5

故 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$　(1)----------------------------8

由 a,b 的对称性知

$D_n-bD_{n-1}=a^n$　(2)

由 (1)与 (2)得

当$a \neq b$时 $D_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n$.**-------------------------10**

当$a = b$时 $D_n = aD_{n-1} + a^n = a^n + a(aD_{n-2} + a^{n-1}) = 2a^n + a^2 D_{n-2} = \cdots = (n+1)a^n$.

综上：$D_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n$. **--------11**

法二，由 (1)得

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n = a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \cdots$$ **--11**

$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n.$$

2. 设$f(x) = x^2 - x + 1$，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$[f(A)]^T$.

解：依定义得：

$$\boldsymbol{f(A) = A^2 - A + E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **--------------3**

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ **--------------9**

故

$$[f(A)]^T = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ **-------------11**

3. 已知$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,求解方程$AX + B = X$.

解： 因为$AX + B = X$,，所以$(E-A)X = B$,**----------2**

又 $E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且$|E-A| \neq 0$

则$E-A$可逆且$X = (E-A)^{-1}B$**------------5**

因此， $X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$**------------9**

$=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$。**------------11**

4.解非齐次线性方程组$\begin{cases}-2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=-2\\ \boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=1\\ \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_3=1\end{cases}$.

解：$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$**-----------6**

令 $\boldsymbol{x}_3=1$，得导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， **---------8**

令 $\boldsymbol{x}_3=0$，得原方程组的一个特解为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$， **---------10**

所以，方程组解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **---------11**

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设三阶方阵A满足$A^2-A-2E=O$,证明A及$A+2E$都可逆,并求A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$.

证明: 由$A^2-A-2E=O$得$A^2-A=2E$,两端同时取行列式: $|A^2-A|=8$

即 $|A||A-E|=8$,故 $|A|\neq 0$所以A可逆. **--------2**

而$A+2E=A^2$，$|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$ 故$A+2E$也可逆.**------4**

由$A^2-A-2E=O\Rightarrow A(A-E)=2E\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$**-------6**

又由$A^2-A-2E=O\Rightarrow(A+2E)A-3(A+2E)=-4E\Rightarrow(A+2E)(A-3E)=-4E$

$\therefore(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$

$\therefore (A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$ **------8**

2．设n阶矩阵A的伴随矩阵为A^*，证明：

(1) 若$|A|=0$,则$|A^*|=0$;

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明 (1) 用反证法证明．假设$|A^*|\neq 0$则有$A^*(A^*)^{-1}=E$ **-----2**

由此得$A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O\ \therefore A^*=O$ **-----4**

这与$|A^*|\neq 0$矛盾，故当$|A|=0$时有$|A^*|=0.$

(2) 由于$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，则$AA^*=|A|E$取行列式得到: $|A||A^*|=|A|^n$ ------6

若$|A|\neq 0$ 则$|A^*|=|A|^{n-1}$------7

若$|A|=0$由(1)知$|A^*|=0$此时命题也成立------10 故有$|A^*|=|A|^{n-1}$.------8