密封装订线 姓名______ 学号______ 班级______ 密封装订线 密封装订线

西南交通大学 2019－2020 学年第一学期期末考试

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B(A 卷) 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：____________________

说明：（1）本试卷共四页，17 道题；

（2）试卷中 A^T 表示矩阵 A 的转置，A^{-1} 表示可逆方阵 A 的逆矩阵，A^* 表示方阵 A 的伴随矩阵，$|A|$ 表示 A 的行列式.

一、选择题（5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

CCBCD

二、填空题（5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

6. $n+1$； **7.** $\sqrt{14}$； 8. -1；

9. 135； 10. $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

11. 设 A 是三阶矩阵，$|A| = 4$，X 是满足等式 $XA^* = A^{-1} + 2X$ 的三阶矩阵. 判定矩阵 X 是否可逆？并在可逆时，求其逆矩阵.

解：由 $|A| = 4 \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆

且 $AA^* = |A|E = 4E$，从而 $A^* = 4A^{-1}$

代入 $XA^* = A^{-1} + 2X$，得 X（$4E - 2A) = E$

因此矩阵 X 可逆，且 $\boldsymbol{X}^{-1} = 4\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}$.

12. 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}a\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，

（1）求参数a的值，使得向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关；

（2）在（1）条件下求向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表出.

解： $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & \boldsymbol{a}\\-1 & 1 & 3 & -1\\1 & 1 & 1 & -1\\1 & \boldsymbol{a} & 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+1)\\0 & 0 & 0 & (\boldsymbol{a}-1)(\boldsymbol{a}+2)\end{pmatrix}$$

（1）当$a=1$或$a=-2$时，R（α_1, α_2, α_3, α_4）$=3<4$，

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关；

（2）当$a=1$时，（α_1, α_2, α_3, α_4）$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为最大无关组，且$\alpha_4=\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3$.

当$a=-2$时，（α_1, α_2, α_3, α_4）$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为最大无关组，且$\alpha_4=-\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_3$.

13. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=B$.

解：因为 $A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，$A^{-1}$存在，

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B.$$

又

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

所以 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & -\frac{5}{2} & -2\\ 0 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

另解：由 $(A,\ E)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

可得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & -\frac{5}{2} & -2\\ 0 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

14. 求非齐次线性方程组$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1-5\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3-3\boldsymbol{x}_4=11\\ 5\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_2+6\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_4=-1\\ 2\boldsymbol{x}_1+4\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_4=-6\end{cases}$的通解.

解：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{9}{7}&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{7}&\frac{1}{2}&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于$R(A)=(A,\beta)=2<4$，所以方程组有无穷多解

原方程组的通解方程组为：

$$\begin{cases}x_1=-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4+1\\ x_2=\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4-2\end{cases}$$

令$x_3=7k_1,x_4=k_2$，得$x_1=-9k_1+k_2+1,x_2=k_1-k_2-2$

原方程组的通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\7\\0\end{pmatrix}(k_1,k_2\in R)$

另解：原方程组的同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\ \quad 14x_2-2x_3+7x_4=-28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-9x_2-4x_4-17\\ x_3=7x_2+\frac{7}{2}x_4+14\end{cases}$$

原方程组的通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-8\\0\\7\\2\end{pmatrix}(k_1,k_2\in R)$.

15. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=2{x_1}^2-{x_2}^2+a{x_3}^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$是 3 元实二次型，已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的秩为 2.

(1)求a的值；

(2)求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型.

解：（1）二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{pmatrix}$

因为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 2，所以 A 的秩为 2，从而 $|A|=-3a+6=0\Rightarrow a=2$.

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -4\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ -4 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$，

令$|A-\lambda E|=0$得A的特征值：$\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$

当$\lambda_1=-3$时，解方程组（$A+3E$）$x=0$得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

当$\lambda_2=0$时，解方程组$Ax=0$得基础解系：$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$；

当$\lambda_3=6$时，解方程组（$A-6E$）$x=0$得基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

令 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$， $p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$， $p_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

$$Q=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$，正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 即为所求.

四、证明题（2 个小题，每小题 5 分，共 10 分）

16. 设 η^* 是非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的一个解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax=0$ 的一组基础解系，证明：$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\eta^*+\xi_2,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关.

证明：由题知：$A\eta^*=\beta$，$A\xi_1=0,A\xi_2=0,\cdots,A\xi_{n-r}=0$，

且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

设存在数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使得：

$$k\eta^*+k_1(\eta^*+\xi_1)+k_2(\eta^*+\xi_2)+\cdots+k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=0\cdots\cdots(1)$$

即：$(k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0\cdots\cdots(2)$

(2)式两边左乘矩阵 A 得：

$$(k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})A\eta^*+k_1A\xi_1+k_2A\xi_2+\cdots+k_{n-r}A\xi_{n-r}=0$$

从而有：$(k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\beta=0$，而 $\beta\neq 0$，所以有

$$k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=0\cdots\cdots(3)$$

将（3）式代入式（2）得：

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，故 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$

代入（3）得：$k=0$

从而 $k=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，由定义知：结论成立.

另解：由题知：$A\eta^{*}=\beta$ $A\xi_1=0, A\xi_2=0,\cdots,A\xi_{n-r}=0$，且$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

$$\left(\eta^{*},\eta^{*}+\xi_1,\eta^{*}+\xi_2,\cdots,\eta^{*}+\xi_{n-r}\right)\overset{c}{\sim}\left(\eta^{*},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}\right)$$

由等价等秩可得，要证$\eta^{*},\eta^{*}+\xi_1,\eta^{*}+\xi_2,\cdots,\eta^{*}+\xi_{n-r}$线性无关，只需证明$\eta^{*},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关。

利用反证法，假设$\eta^{*},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性相关，由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关知，$\eta^{*}$**可由**$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出，不妨设

$$\eta^{*}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_{n-r}.$$

两边左乘矩阵A得$A\eta^{*}=o$，这与$A\eta^{*}=\beta\neq o$矛盾.

从而$\eta^{*},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，于是$\eta^{*},\eta^{*}+\xi_1,\eta^{*}+\xi_2,\cdots,\eta^{*}+\xi_{n-r}$线性无关.

17. 设n阶矩阵A满足$A^T=-A$，且$E-A$，$B=(E-A)^{-1}(E+A)$，

证明：B是正交矩阵.

证明：由$A^T=-A$，$B=(E-A)^{-1}(E+A)$

有 $B^T=\left[(E-A)^{-1}(E+A)\right]^T$

$=(E+A)^T\left[(E-A)^{-1}\right]^T$

$=(E-A)(E+A)^{-1}$

$$BB^T=\left[(E-A)^{-1}(E+A)\right]\left[(E-A)(E+A)^{-1}\right]$$

$=E$

从而B是正交矩阵.