西南交通大学 2017 —2018 学年第（ 一 ）学期中考试 A 卷

课程代码 6010500 课程名称 线性代数 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总成绩
得分											

阅卷教师签字：

密封装订线

姓名

学号

班级

一、选填题（每空 5 分，共 20 分）

1. 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=$ -2

2．设 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 均为三维列向量，记 $A=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3),B=(\gamma_1+2\gamma_2,3\gamma_1+4\gamma_3,5\gamma_2)$, 如果 $|A|=2$，则 $|B|=$ -40

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $R(A^3)=$ 1

4. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&3&4&2x\\1&3x&2&5\\3&5&-x&6\\1&2&3&4x\end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 为系数为 6

二、选择题（每空 5 分，共 20 分）

5. 设 A 为三阶方阵，且 $|A|=3$，A^* 为 A 的伴随阵，若交换 A 的第一行与第二行得 B，则 $|BA^*|=$（ **D** ）

A. 9 **B.** -9 **C.** 27 **D.** -27

6. 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A-2E=O$，则下列矩阵不一定可逆的是（ **C** ）

A. A B. $A+E$ C. $A+2E$ D. $A+3E$

7. 设 P，Q 均为三阶可逆矩阵矩阵，A 均为三阶方阵，则（ C ）

A. $R(AP)>R(QA)$ B. $R(AP)<R(QA)$ C. $R(AP)=R(QA)$

D. 由所给条件不能判定 $R(AP)$ 和 $R(QA)$ 的大小

8. 方程 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}=0$ 有（ D ）个实数根。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

三、计算题（每空 10 分，共 60 分）

9. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解：$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_4,\cdots]{c_1-c_2,c_2-c_3}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开（由下往上）}]{\text{按最后一列}} \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

解

$$(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})-\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{vmatrix}$$ ………………………………8 分

$$=(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})+a_1a_2\cdots a_{n-3}a_{n-2}a_n+\cdots+a_2a_3\cdots a_n$$

$$=(a_1a_2\cdots a_n)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$ ………………………………10 分

10. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ 4 & -3 & \multicolumn{2}{c}{O} \\ & & 2 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{O} & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $|A^8|$ 及 A^4

解 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ 4 & -3 & \multicolumn{2}{c}{O} \\ & & 2 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{O} & 2 & 2 \end{pmatrix}$，令 $A_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ ……2 分

故 $\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^8 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^8\end{pmatrix}$ ……4 分

$\left|\boldsymbol{A}^8\right|=\left|\boldsymbol{A}_1^8\right|\left|\boldsymbol{A}_2^8\right|=\left|\boldsymbol{A}_1\right|^8\left|\boldsymbol{A}_2\right|^8=10^{16}$ ……6 分

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^4 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4 & 0 & & \\ 0 & 5^4 & & \boldsymbol{O}\\ & & 2^4 & 0\\ & \boldsymbol{O} & 2^6 & 2^4\end{pmatrix}$$ ……10 分

11. 已知 $\alpha=(1,1,1)^T$, $\beta=(1,-1,1)^T$，求

（1） $\alpha^T\beta,\ \ \beta^T\alpha,\ \ \ \beta\alpha^T.$

（2） $\left(\beta\alpha^T\right)^{2017}.$

解：（1） $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=1\times1+1\times(-1)+1\times1=1$ ……4 分

$$\beta\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1,1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ ……6 分

（2） $\left(\beta\alpha^T\right)^{2017}=\left(\beta\alpha^T\right)\left(\beta\alpha^T\right)\cdots\left(\beta\alpha^T\right)\left(\beta\alpha^T\right)$

$=\beta\left(\alpha^T\beta\right)\cdots\cdots\left(\alpha^T\beta\right)\alpha^T$ ……8 分

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ ……10 分

12. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5\\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 的秩,并求一个最高阶非零子式。

解：$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2-2r_4 \\ r_3-3r_4}}{\overset{r_1-2r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3+2r_1}{\overset{r_2+3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3\div 14 \\ r_4\div 16 \\ r_4-r_3}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_4\leftrightarrow r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……6 分

秩为 3 ……8 分

三阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$. ……10 分

13. 问 λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$

有非零解？

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)^3 + (\lambda-3) - 4(1-\lambda) - 2(1-\lambda)(-3-\lambda)$ ……4 分

$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$ ……6 分

齐次线性方程组有非零解，则 $D = 0$

得 $\lambda = 0, \lambda = 2$ 或 $\lambda = 3$ ……8 分

由克莱姆法则可知，当 $\lambda = 0, \lambda = 2$ 或 $\lambda = 3$ 时，

该齐次线性方程组有非零解.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……10 分

14. 设 A 不可逆，证明 A^* 也不可逆。

证明：由 A 不可逆，可得 $A^*A=|A|E=O$ ………………………………………2’

若 A^* 可逆，则有 $\left(A^*\right)^{-1}A^*A=\left(A^*\right)^{-1}O$，即 $A=O$，则必有 $A^*=O$

则与 A^* 可逆矛盾，故 A^* 也不可逆。…………………………………………5’

15. 设 A 是 5 阶矩阵，证明 $A-A^T$ 不可逆。

证明 $\left|A-A^T\right|=\left|\left(A-A^T\right)^T\right|=\left|A^T-\left(A^T\right)^T\right|=\left|A^T-A\right|=\left|-\left(A-A^T\right)\right|$………..…….3’

$(-1)^5\left|A-A^T\right|=-\left|A-A^T\right|$，则 $\left|A-A^T\right|=0$，故 $A-A^T$ 不可逆。……………..5’