

复变函数与积分变换 B(6022900)期末考试 A 卷

2019-2020 学年第 1 学期

一、选择题

1. 已知 $|z|=1$, $\arg(z-2)=\frac{5}{6}\pi$, 则 $z=(\quad)$.

- A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ D. $2-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

2. 以下哪个表达式是正确的().

- A. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ B. $\sqrt[4]{z^2} = \sqrt{z}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ D. $2-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

3. 以下哪个复数项级数绝对收敛().

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{n}}$ B. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^n + \frac{i}{n} \right]$ D. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2-i)^n}$

4. 设 $L[f(t)] = F(s)$, 则 $L^{-1}[sF'(s)] = (\quad)$.

- A. $tf(t) - f'(t)$ B. $tf'(t) + f(t)$ C. $-tf'(t) - f(t)$ D. $-tf(t) + f'(t)$

二、填空题

1. 方程 $e^z = -2 + 2i$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z-3)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{3^n(n+1)^2}$ 的收敛圆环为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 令 $f(t) = u(t)$, 其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数, 若 $g(t) = u(t)\sin t$, 则 $f(t) * g(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\int_{-5}^2 t e^{-2t} \delta(t+3) dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 求 $-8i$ 的三次方根.

2. 求下列积分:

(1) $I = \int_C \bar{z} |1-z|^2 dz$, $C: 0 \rightarrow 2i$ 正向.

(2) $I = \oint_C \frac{1}{z^2+1} e^{\frac{1}{z}} dz$, $C: |z+i| = \frac{3}{2}$ 正向.

(3) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4x+5}$.

3. 设 $f(z) = u + iv$ 在 D 内解析, 且有 $v = u^2$, 试证明 $f(z)$ 在 D 内为常数.

4. 将 $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ 在 $2 < |z+1| < +\infty$ 内展开为洛朗级数.

5. 求 $f(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换.

6. 求 $f(z) = \frac{\tan z}{z(3z-\pi)^2}$ 的全部孤立奇点及所有孤立奇点的留数.