《大学物理 AI》作业　　No.07　电势

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ______

********************************本章教学要求********************************

1、理解静电力做功的特点，理解静电场的保守性；
2、掌握静电场的环路定理；
3、理解电势、电势差的概念，掌握利用场强积分和叠加原理求电势的方法；
4、理解电势梯度的意义，并能利用它求电场强度；
5、掌握点电荷、均匀带电球面、均匀带电球体等典型带电体的电势分布。

一、填空题

1.以无穷远为电势零点，半径为 0.1m 的孤立导体球电势为 300V，则距离导体球中心 30cm 处的电势为______**100**______V。

答案：$U = Q / (4\pi\varepsilon_0 r) = U_0 R / r = \mathbf{100\ V}$

其中，$U_0 = Q / (4\pi\varepsilon_0 R)$

2. 当导体表面电场强度足以击穿周围空气时，导体表面净电荷将流失，从而导致无法维持导体表面原有的电场强度。已知空气的击穿场强为 3 MV/m，则处于空气中的一个半径为 0.8 m 的球形导体能达到的最高电势为____**2.4**__________MV。（其中 1M=10^6，以无穷远为零电势点）

答案：$U = Q / (4\pi\varepsilon_0 R) = R\,Q / (4\pi\varepsilon_0 R^2) = R\,E = \mathbf{2.4\ MV}$

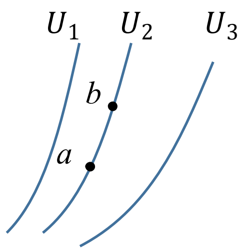
3. 金原子核可看做均匀带电球，其半径为 6.60×10^{-15} m，电荷为 $79\times1.60\times10^{-19}$ C。一个粒子的荷质比 $\alpha = 4.78\times10^7$ C/kg，已知该粒子沿着二者连线方向以 1.50×10^7 m/s 的速度从很远处射向金原子核，则该粒子能到达距离金原子核的最近距离为__**4.8×10^{-14}**__m。（基本电荷 $e = 1.60\times10^{-19}$ C，真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$）

答案：当到达最近距离时，粒子的动能完全转变为电势能，即 $m\,v^2 / 2 = q\,U$

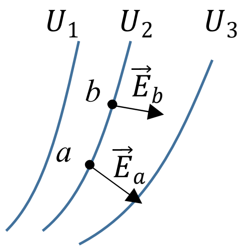
其中，$U = Q / (4\pi\varepsilon_0 d)$，　$Q = 79\,e$，$q/m = \alpha$

联立以上关系，得 $\boldsymbol{d = 4.8\times10^{-14}}$ **m**

4. 图中所示为静电场的等势线图，已知 $U_1>U_2>U_3$。在图上画出 a、b 两点电场强度的方向，并比较它们的大小。E_a___**>**___E_b (选填<、=、>)



答案：**见图，>**

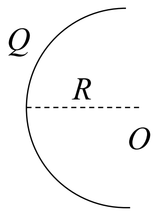


由于 a 点处等势线更加稠密，因此该点的电场强度较大。

5. 一半径为 R 的均匀带电球面，带有电荷 Q。若设该球面上电势为零，则球面内各点的电势 $U=$ ___**0**___。

答案：**0**

6. 真空中有一半径为 0.2 m 的半圆细环，均匀带电 10^{-9} C，如图所示。设无穷远处为电势零点，将一电量为 10^{-10} C 的点电荷从无穷远处移到该细环圆心处，则电场力做功 **-4.5×10^{-9}**___J。（真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2}$）



答案：A = $-qQ/(4\pi\varepsilon_0 R)$ = **-4.5×10^{-9} J**

7.设有 n 个分散的很开的球状小水滴，具有相同半径并带相同电荷。若将他们聚集成一个球状的大水滴，此大水滴的电势将为小水滴电势的______**$n^{2/3}$**______倍。

(设电荷分布在水滴表面上，水滴聚集时总电荷无损失。)

答案：设小水滴半径为 r、电荷 q；大水滴半径为 R、电荷为 $Q = nq$．n 个小水滴聚成大水滴，其体积相等

$$n(4\pi r^3/3) = 4\pi R^3/3$$

得 $R = n^{1/3} r$

小水滴电势 $q/(4\pi\varepsilon_0 r)$

大水滴电势 $Q/(4\pi\varepsilon_0 R) = n^{2/3} q/(4\pi\varepsilon_0 r)$

因此，大水滴的电势将为小水滴电势的 **$n^{2/3}$** 倍。

8.真空中一"无限大"均匀带电平面，其电荷面密度 $\sigma = 5.1\times10^{-7}$ C·m^2。在平面附近有一个质子。则当质子在电场力作用下从静止开始垂直于平面方向运动了 $l = 26$ cm 时的速率为 **1.2×10^6**____m/s。设重力的影响可以忽略不计。（真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}，质子的荷质比 $\alpha = 9.58\times10^7$ C/kg）

答案：粒子的动能来自于电势能，即 $mv^2/2 = qU$

其中，$U = l\sigma/(2\varepsilon_0)$，$q/m = \alpha$

联立以上关系，得 v = **1.2×10^6** m/s

9.已知某静电场的电势函数 $U=6x-6x^2y-7y^2$ (SI)．由场强与电势梯度的关系式可得点(2，3，0)处的电场强度 $\vec{E}$ = __**-66**__ $\vec{i}$ + __**- 66**__ $\vec{j}$ + __**0**__ $\vec{k}$ (SI)．

答案：$\vec{E} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 6 - 12xy = 6 - 12\times2\times3 = -66,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -6x^2 - 14y = -6\times 2^2 - 14\times 3 = -66，$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

10.一质量为 0.01kg、电荷为 6.5×10^{-9} C 的小球，在电场力的作用下，从电势为 5000V 的 a 点移动到电势为 0 的 b 点。若已知小球在 b 点的速率为 0.18m/s，则小球在 a 点的速率为 **0.16**______m/s。

答案：小球动能的增量为电势能增量的相反数。

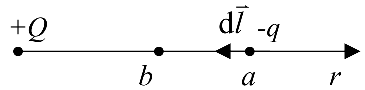
不难得到 $v_a = \sqrt{v_b^{\ 2} - 2qU/m} = 0.16\text{m/s}$

11.在静电场中取一任意闭合环路，将检验电荷从环路上任意点出发，沿着该环路移动一周又回到原点。在这一过程中，电场力做功为_______________，即静电场中电场强度沿任意闭合环路的线积分_______________（选填：恒等于零、无穷大、结果不确定），它说明静电场是_______________场，它是反映静电场基本性质的两条基本定理之一。

答案：零、恒等于零、保守（或有势）

二、简答题

1.在电荷为 Q 的点电荷的静电场中，把电荷为 $-q$ 的点电荷从 a 点移动到 b 点，如图所示。



有人这样计算电场力的功：

$$A = \int_a^b -q\vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\int_a^b E\,dl\cos\pi = q\int_a^b E\,dl$$

$$= q\int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) < 0$$

你认为上述计算过程和所得结果是否正确？如有错误请指出并改正。

答案： A<0 是错的。正确的结果应该是 $A = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) > 0$

在计算过程中，认为 $dl = dr$ 是错的，应为 $dl = -dr$

2.在“孤立”的半径为 R 的带电导体球外作一个半径为 r 的同心球面。则下列说法是否正确？如有错误请改正。

① 球面上电场均匀

② 通过球面上任一单位面积的电场强度通量相等。

③ 一检验电荷从球面上各个不同点沿着任意路径移动到无穷远处，电场力做功不相等。

答案：① 错，球面上各点场强大小相等，但因方向不相同，所以不能说球面上电场均匀。

② 正确

③ 错，球面是等势面，电场力做功相等。

三、计算题

1.电荷以相同的面密度 σ 分布在半径为 10cm 和 20cm 的两个同心球面上。设无限远处电势为零，球心处的电势为 300V。求

（1） 电荷面密度 σ

（2） 若要使球心处的电势也为零，外球面上应放掉多少电荷？

（真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$）

答案：解：（1）球心处的电势为两个同心带电球面各自在球心处产生的电势的叠加，即

$$U_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi r_1^2\sigma}{r_1}+\frac{4\pi r_2^2\sigma}{r_2}\right)$$

$$=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(r_1+r_2)$$

$$\sigma=\frac{U_0\varepsilon_0}{r_1+r_2}=8.85\times10^{-9}\frac{\mathrm{C}}{m^2}$$

（2）设外球面上放电后电荷面密度为σ'，则应有

$$U_0^{'}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sigma r_1+\sigma^{'}r_2\right)=0$$

即

$$\sigma^{'}=-\frac{r_1}{r_2}\sigma$$

外球面上应变成带负电，共应放掉电荷

$$
\begin{aligned}
q' &= 4\pi r_2^2(\sigma - \sigma') = 4\pi r_2^2 \sigma \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \\
&= 4\pi\sigma r_2(r_1 + r_2) = 4\pi\varepsilon_0 U_0 r_2 \\
&= 6.67 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

2.一半径为 R 的"无限长"圆柱形带电体，其电荷体密度为 $\rho=Ar$ ($r\le R$)，式中 A 为常量。试求：圆柱体内、外各点的电势分布。（利用场强积分法解此题，以圆柱体表面为零电势面）

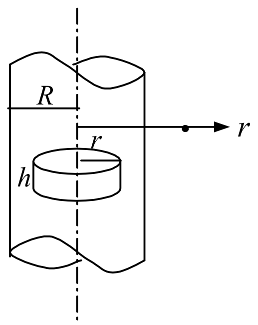
解：（1）先求圆柱体内、外场强分布

取半径为 r、高为 h 的高斯圆柱面(如图所示)。面上各点场强大小为 E 并垂直于柱面，则穿过该柱面的电场强度通量为：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi rhE = \frac{\sum_S q_{内}}{\varepsilon_0}$$

为求高斯面内的电荷，$r<R$ 时，取一半径为 r'，厚 $\mathrm{d}r'$、高 h 的薄圆筒，其电荷为 $\rho\,\mathrm{d}V = 2\pi Ahr'^2\,\mathrm{d}r'$，则 $r<R$ 包围在高斯面内的总电荷为

$$\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^r 2\pi Ahr'^2\,\mathrm{d}r' = 2\pi Ahr^3/3 \qquad (r<R)$$



由高斯定理得 $2\pi rhE = 2\pi Ahr^3/(3\varepsilon_0)$ 解出

$$E = Ar^2/3\varepsilon_0 \qquad (r<R)$$

当 $r>R$ 包围在高斯面内的总电荷为

$$\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^R 2\pi Ahr'^2\,\mathrm{d}r' = 2\pi AhR^3/3$$

由高斯定理得 $2\pi rhE = 2\pi AhR^3/(3\varepsilon_0)$ 解出

$$E = AR^3/3r\varepsilon_0 \qquad (r>R)$$

（2）由场强积分法计算电势分布

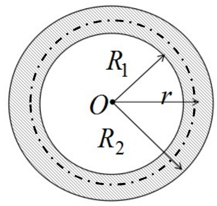
$r\le R$ 时：

$$U = \int_r^R E\,\mathrm{d}r = \int_r^R \frac{A}{3\varepsilon_0}r^2\,\mathrm{d}r = \frac{A}{9\varepsilon_0}\left(R^3 - r^3\right)$$

$r>R$ 时：

$$U = \int_r^R \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_r^R -\frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$$

3.图示一个均匀带电的球壳，其电荷体密度为ρ，球层内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远处为电势零点，求球层中半径为r处的电势。（利用电势叠加原理解此题）



解：r处的电势等于以r为半径的球面以内的电荷在该处产生的电势U_1和球面以外的电荷产生的电势U_2之和，即 $U=U_1+U_2$。

在球层中半径为r的球面内、外分别取$r'\to r'+\mathrm{d}r'$的薄层，其电荷为

$$\mathrm{d}q=\rho\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$$

由典型电荷均匀带电球面电势分布规律$U=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r\le R)\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$（$R$为球面半径）

和电势叠加原理可得：

以r为半径的球面以内的电荷在该处产生的电势

$$U_1=\int \mathrm{d}U_1=\frac{\int_{R_1}^{r}\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\int_{R_1}^{r}\rho\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^2-\frac{R_1^3}{r}\right)$$

以r为半径的球面外电荷产生的电势

$$U_2=\int \mathrm{d}U_2=\int_r^{R_2}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r'}=\int_r^{R_2}\frac{\rho\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r'}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2-r^2\right)$$

于是全部电荷在半径为r处产生的电势为

$$U=U_1+U_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^2-\frac{R_1^3}{r}\right)+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2-r^2\right)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r}\right)$$