密封装订线

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总成绩
得分									
阅卷人									

$\Phi(1.96)=0.975$， $\Phi(1.645)=0.95$， $t_{0.8427}(15)=1.0405$， $t_{0.975}(5)=2.5706$， $\Phi(2.34)=0.9904$

一、（10 分）m 个人相互传球，球从甲手开始传出，每次传球时，传球者等可能地把球传给其余 m-1 个人中的任何一个人，试求第 n 次传球时由甲传出的概率。

解：设时间 Ai 为第 i 次传球时由甲传出，$P_i=P(A_i), i=1,2\cdots n$，显然

$P_1=P(A_1)=1$，$P_2=P(A_2)=0$，$P(A_{i+1}\mid A_i)=0$，$P(A_{i+1}\mid \bar{A}_i)=\dfrac{1}{m-1}$————（3 分）

所以，由全概率公式

$$P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n\mid A_{n-1})+P(\bar{A}_{n-1})P(A_n\mid \bar{A}_{n-1})=\frac{1}{m-1}(1-P_{n-1})\quad n\ge 2$$————（3 分）

密封装订线

$$P_n-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m-1}(P_{n-1}-\frac{1}{m})\quad n\ge 2$$————（3 分）

$$\to P_n-\frac{1}{m}=(\frac{-1}{m-1})^{n-2}(P_2-\frac{1}{m})\quad n=3,4\cdots$$————（1 分）

$$\to P_n=\frac{1}{m}[1-(\frac{-1}{m-1})^{n-2}]\quad n=3,4\cdots$$

$$\to P_n=\frac{1}{m}[1-(\frac{-1}{m-1})^{n-2}]\quad n=2,3,4\cdots$$

二、（15 分）某盒子中有红球 4 个白球 2 个，每次抽取一个，有放回的抽取，一直抽取到红球白球都出现为止，记 X 为直到红球白球都出现的次数。试求(1) X 的分布律；(2)EX。

解：（1） $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p+p^{k-1}(1-p), k=2,3,4,\cdots$

$p=\dfrac{2}{3}$————（5 分）

密封装订线

（2） $E(X)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}k[(1-p)^{k-1}p+p^{k-1}(1-p)]$————（3 分）

$$=p\sum_{k=2}^{+\infty}(x^k)'|_{x=1-p}+(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty}(x^k)'|_{x=p}=p(\frac{x^2}{1-x})'|_{x=1-p}+(1-p)(\frac{x^2}{1-x})'|_{x=p}$$————（3 分）

$$==p(-1+\frac{1}{p^2})+(1-p)((-1+\frac{1}{(1-p)^2})=\frac{1}{p(1-p)}-1$$————（4 分）

三、(15 分)设随机变量 X 和 Y 同分布，已知事件 $A=\{X>a\}$ 和事件 $B=\{Y>a\}$ 相互独立，而 $P(A\cup B)=3/4$，随机变量 X 和 Z 相互独立，它们的概率密度函数分别如下：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}\quad f(z)=\begin{cases}2z & 0\le z\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求：(1) 确定常数 a 和 X 的分布函数；(2) 确定 $M=X+2Z$ 的概率密度

解：(1) $\frac{3}{4}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-P^2(A)\to P(A)=0.5$

$$P(A)=\int_a^2\frac{3}{8}x^2dx=1-\frac{1}{8}a^3=0.5\to a=\sqrt[3]{4}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{8}x^3 & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$ ——(5 分)

(2) $F_M(m)=P(X+2Z\le m)$

当$m<0$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=0$

当$0\le m<2$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=\int_0^m dx\int_0^{\frac{m-x}{2}}\frac{3}{8}x^2\times 2zdz$

当$2\le m<4$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=\int_0^{m-2}dx\int_0^1\frac{3}{8}x^2\times 2zdz+\int_{m-2}^2 dx\int_0^{\frac{m-x}{2}}\frac{3}{8}x^2\times 2zdz$

当$m\ge 4$时, $F_M(m)=P(X+2Z\le m)=1$

$$f_M(m)=\frac{dF_M(m)}{dm}=\begin{cases}\frac{1}{64}m^4 & 0<m<2\\ \frac{3}{64}(m-2)^4-\frac{m}{16}(m-2)^3+\frac{m}{2}-\frac{3}{4} & 2<m<4\\ 0 & 其他\end{cases}$$ ——(10

六、(15 分)设 $x_1,x_2\cdots x_m$ 和 $y_1,y_2\cdots y_n$ 分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的两个独立样本，

(1) 试求 $\theta=(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$ 的极大似然估计；(2) 已知 m=16，$\bar{x}=9$、$s_X^2=5.32$，试求 $P(|\bar{X}-\mu_1|<0.6)$

解：（1）
$$l(x_1,x_2\cdots x_m,y_1,y_2\cdots y_n,\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})^{m+n}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2)$$ ------------2 分

$$Ln[l(x_1,x_2\cdots x_m,y_1,y_2\cdots y_n,\mu_1,\mu_2,\sigma^2)]=-\frac{m+n}{2}\ln 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2$$ ------------2 分

$$\frac{\partial LnL}{\partial\mu_1}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)=0；\quad \frac{\partial LnL}{\partial\mu_2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)=0$$ --------1 分

$$\frac{\partial LnL}{\partial\sigma^2}=-\frac{m+n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2]=0$$ ------------2 分

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i；\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i；$$ ---------------1 分

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2}{n+m}$$ ---------2 分

(2) $\frac{\bar{X}-\mu_1}{S}\sqrt{n}$ 服从自由度为 n-1 的 T 分布--------1 分

$$P(|\bar{X}-\mu_1|<0.6)=P(|\frac{\bar{X}-\mu_1}{S}\sqrt{n}|<\frac{0.6}{S}\sqrt{n})=2P(\frac{\bar{X}-\mu_1}{S}\sqrt{n}>\frac{0.6}{S}\sqrt{n})-1$$ --------2 分

$$=2P(t(n-1)>1.0405)-1=2*0.8427-1=0.6854$$ --------2 分

七、（10 分）设总体 X 的数学期望 μ 和方差 σ^2 都存在，$X_1,X_2\cdots X_n$ 为 X 的一个样本，样本均值为 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为 $S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，统计量 $T=C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，试求（1）常数 C，使得统计量 T 是方差 σ^2 的无偏估计。（2）$D(S_n^2)$

解：（1）$T=C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2=C\sum_{i=1}^{n-1}[(X_{i+1})^2-2X_iX_{i+1}+(X_i)^2]$

$$ET=C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2=C\sum_{i=1}^{n-1}EX_{i+1}{}^2-2C\sum_{i=1}^{n-1}EX_iEX_{i+1}+C\sum_{i=1}^{n-1}EX_i{}^2$$ --------2 分

$$=2C(n-1)(u^2+\sigma^2)-2C(n-1)u^2=2C(n-1)\sigma^2$$ ---------2 分

因为 $ET=\sigma^2$ 所以，$C=\frac{1}{2(n-1)}$ ---------2 分

（2）$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ □ $\chi^2(n-1)$--------1 分

$$D[\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}]=2(n-1)\text{———}2\text{ 分}$$

$$D[S_n^2]=\frac{2\sigma^4}{n-1}\text{———}1\text{ 分}$$

四、（15 分）设随机变量 X 服从参数 $p=0.6$ 的 0-1 分布，在 $X=1$ 和 $X=0$ 时关于 Y 的条件分布律分别为

Y	1	2	3
P(y=j|x=0)	1/4	1/2	1/4

Y	1	2	3
P(y=j|x=0)	1/2	1/6	1/3

试求(1)X 和 Y 的联合分布律；（2） DY；

（3） $P(X=1|Y<3)$.

解：(1) $P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1|X=0)=0.4\times\frac{1}{4}=0.1$

$P(X=0,Y=2)=P(X=0)P(Y=2|X=0)=0.4\times\frac{1}{2}=0.2$

$P(X=0,Y=3)=P(X=0)P(Y=3|X=0)=0.4\times\frac{1}{4}=0.1$

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1|X=1)=0.6\times\frac{1}{2}=0.3$

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2|X=1)=0.6\times\frac{1}{6}=0.1$

$P(X=1,Y=3)=P(X=1)P(Y=3|X=1)=0.6\times\frac{1}{3}=0.2$

————————————————（5 分）

（2） $EY=1\times0.4+2\times0.3+3\times0.3=1.9$

$EY^2=1^2\times0.4+2^2\times0.3+3^2\times0.3=4.3$

$DY=EY^2-(EY)^2=0.69$————————————————（5 分）

（3） $P(X=1|Y<3)=\frac{P(X=1,Y<3)}{P(Y<3)}=\frac{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)}{1-P(Y=3)}$

$=\frac{0.3+0.1}{1-0.3}=\frac{4}{7}$————————————————（5 分）

五、（10 分）设二维连续型随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为：

$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，（1）试求 Y 的概率密度，（2） $P(X\ge2|Y=4)$；

解：$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y} & y>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$ ——————————4 分

当 $y>0$ 时，

$$f_{x|y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{1}{y} & 0<x<y, \\ 0 & 其它\end{cases}$$ ——————————3 分

$$f_{x|y}(x\mid y=4)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0<x<4, \\ 0 & 其它\end{cases}$$ ——————————2 分

$P(X\geq 2\mid Y=4)=\int_2^4 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$ ——————————1 分

六、（15 分）设自总体概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k\theta} & \theta<x<(k+1)\theta, \\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中 k 是一个已知的正常数，$\theta>0$ 是一个待估计的参数，样本 $x_1,x_2\cdots x_n$ 是来自总体的一个随机样本，

（1）试求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_{极}$ 和矩估计 $\hat{\theta}_{矩}$；（2）$\hat{\theta}_{极}$ 是不是 θ 的无偏估计。

解：（1）$l(x_1,x_2\cdots x_n,\theta)=(\frac{1}{k\theta})^n$ ————2 分

$Ln[l(x_1,x_2\cdots x_n,\theta)]=-n\ln k-n\ln\theta$ ————2 分

$\frac{\partial LnL}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}<0$； ————1 分

$\theta\leq X_{(1)}\leq X_{(2)}\cdots\leq X_{(n)}\leq(k+1)\theta$

$\rightarrow\frac{X_{(n)}}{k+1}\leq\theta\leq X_{(1)}$ ————2 分

$\hat{\theta}_{极}=\frac{X_{(n)}}{k+1}$

$EX=\frac{k+2}{2}\theta \square \bar{X}$； ————1 分

$\hat{\theta}_{矩}=\frac{2}{k+2}\bar{X}$ ————2 分

(2) $F_n(z)=P(X_{(n)}\le z)=(F_X(z))^n=\begin{cases}0 & z<\theta\\ (\dfrac{z-\theta}{k\theta})^n & \theta\le z<(k+1)\theta,\\ 1 & z>(k+1)\theta\end{cases}$

$$f_n(z)=\begin{cases}\dfrac{n(z-\theta)^{n-1}}{(k\theta)^n} & \theta\le z<(k+1)\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_{极}=\frac{1}{k+1}\int_{\theta}^{(k+1)\theta}z\frac{n(z-\theta)^{n-1}}{(k\theta)^n}dz=\frac{nk\theta}{n+1}+\frac{\theta}{k+1}$$

七、(10 分)设总体 X 的数学期望μ和方差σ^2都存在，$X_1,X_2\cdots X_n$为 X 的一个样本，样本均值为$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，证明：样本方差$S_n^2$是方差$\sigma^2$的无偏估计，并计算$D(S_n^2)$。

(1) $E(S_n{}^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-\frac{n}{n-1}(\bar{X})^2\right]$

$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)^2-\frac{n}{n-1}E(\bar{X})^2$

而$E(X_i)^2=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2\qquad i=1,2,\cdots,n$

$E(\bar{X}^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$

故$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-\frac{n}{n-1}(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)=\sigma^2$

(2) $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ □ $\chi^2(n-1)$———1 分

$D[\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}]=2(n-1)$———2 分

$D[S_n^2]=\frac{2\sigma^4}{n-1}$------1 分

、(10 分)已知一批零件的长度 X(单位：cm)服从正态分布$N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，求μ的置信度为 95%的置信区间。($\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$)

解：总体$X\sim N(\mu,\sigma_0{}^2),\sigma_0=1$已知，$n=16,\bar{x}=40,1-\alpha=0.95$

所以 $u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，

μ的置信下限为：$\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}=40-1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}=39.51$

μ的置信上限为：$\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}=40+1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}=40.49$

故μ的置信区间为(39.51, 40.49)