

西南交通大学 2015—2016 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 6010500 课程名称 线性代数 B 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：_____

一. 选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 设三阶方阵 A 的行列式 $|A| = 2$ ，则 $|(-2)A^{-1}| =$ (B)

(A) 4; (B) -4; (C) 8; (D) -8。

2. 已知向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 中线性相关， $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 线性无关。则下列说法正确的是 (B)

(A) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的秩为 5; (B) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的秩为 4;

(C) α_5 可以由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的线性表示; (D) α_3 可以由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的线性表示。

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵， $n \geq 3$ 。则下列等式正确的是 (A)

(A) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$; (B) $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$;

(C) $(A^*)^* = |A|^n A$; (D) $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$ 。

4. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵， $R(A) = m$ ，以下结论成立的是 (B)

(A) A 的行向量组线性相关; (B) A 的行向量组线性无关;

(C) A 的列向量组线性相关; (D) A 的列向量组线性无关。

二. 填空题（每小题 5 分，共 25 分）

5. 设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 1, 2, 3，则 $|4A^{-1} - E| =$ 1。

6. 设 $\alpha^T = (1, 1, 1)$, $\beta = (1, 0, k)$ 且 $\alpha \cdot \beta$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k = \underline{2}$ 。

7. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$ 有解, 则 $a = \underline{1 \text{ 或 } 2}$ 。

8. 设四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, 则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{-4}$ 。

9. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围是 $-\sqrt{6} < t < \sqrt{6}$ 。

三. 计算和解答题 (每题 12 分, 共计 48 分)

10. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3+a \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4+a \end{pmatrix}$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相

关。求 a 和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组。

解 因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 故

$$|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)| = a^3(a+10) = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

从而 $a = 0$ 或 $a = -10$. (2 分)

当 $a = 0$ 时, α_1 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组。 (2 分)

当 $a = -10$ 时,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组。 (2 分)

$$\text{法 2: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+4 \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & -a(a+10) \end{pmatrix}. \quad (6 \text{ 分})$$

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 故 $a=0$ 或 $a=-10$. (2 分)

当 $a=0$ 时, α_1 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组. (2 分)

当 $a=-10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组. (2 分)

$$11. \text{ 求线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \text{ 的通解.}$$

解 线性方程组的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{同解方程组 } \begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{对应齐次方程组的基础解系为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{方程组的一个特解为 } \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

故方程组的通解为 $x = \eta + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$, $k_1, k_2 \in R$. (2 分)

12. 设 A 为三阶实对称矩阵, 其特征值分别为 $1, 2, -2$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 A 属于特征值 1 的

特征向量, $B = A^5 - 4A^3 + E$. 验证 α 是 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值和特征向量。

解: 由于 α 是矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量, 故 $A\alpha = \alpha$. (2 分)

从而 $B\alpha = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha = \alpha - 4\alpha + \alpha = (-2)\alpha$ ，即 α 是 B 的属于特征值 -2 的特征向量。(2分)

B 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ 。(2分)

B 的属于特征值 -2 特征向量为 $k\alpha$ ， $k \neq 0$ 。(2分)

由于 B 为实对称矩阵， B 的属于特征值 1 的特征向量与属于特征值 -2 的特征向量正交。故 B

的属于特征值 1 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 满足 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 。(2分)

故 B 的属于特征值 1 的特征向量为 $\xi = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ 。(2分)

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ ，利用正交变换将其化为标准型，并写出所作的正交变换。

解：二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 。(2分)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$

故 A 的特征值为 $\lambda = -1, \lambda = 5$ 。(2分)

当 $\lambda_1 = -1$ 时，解方程组 $(-E - A)x = 0$

$$-E - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为： $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2分)

$$\text{令 } \beta_1 = \xi_1, \quad \beta_2 = \xi_2 - \frac{\langle \xi_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{单位化: } p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ 分})$$

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程组 $(5E - A)x = 0$

$$5E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{基础解系为 } \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 单位化: } p_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

令 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 作正交变换 $x = Py$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$. (2 分)

四. 证明题 (共计 7 分)

14. A 为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位阵, 1) 若 $A^3 = 0$. 证明 $A + E$ 是可逆矩阵;

$$(A + E)(A^2 - A + E) = A^3 - A^2 + A + A^2 - A + E = A^3 + E = E, \quad (3 \text{ 分})$$

故 $A + E$ 是可逆矩阵。 (1 分)

2) 若存在非零矩阵 B 使 $AB = 0$, 则 $|A| = 0$. (3 分)

法 1: 假设 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, 有 $A^{-1}AB = 0, B = 0$, 矛盾. 命题得证.

法 2: 因为 $B \neq 0$, 所以 $AX = 0$ 有非零解. 由克莱姆法则有 $|A| = 0$