概率论与数理统计 B(1271031)期末考试试卷

2016-2017 学年第 2 学期

$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(0.8) = 0.7881, \Phi(1.28) = 0.9, \Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.25) = 0.8944,\ z_{0.05} = 1.645,$

$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488,\ \chi^2_{0.975}(15) = 6.262,\ \chi^2_{0.025}(16) = 28.845,\ \chi^2_{0.975}(16) = 6.908,$

$t_{0.025}(15) = 2.1314,\ t_{0.05}(15) = 1.7531,\ t_{0.025}(16) = 2.1199,\ t_{0.05}(16) = 1.7459.$

一、选择题 (6×4=24 分)

1. 设随机变量$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, (i = 1,2)$，且满足$P\{X_1X_2 = 0\} = 1$，则$P\{X_1 = X_2\}$等于( ).

(A) 0 (B) 1/4 (C) 1/2 (D) 1

2. 设两个相互独立的随机变量X与Y分别服从正态分布$N(0,1)$与$N(1,1)$，则( ).

(A) $P\{X + Y \le 0\} = 1/2$ (B) $P\{X + Y \le 1\} = 1/2$

(C) $P\{X - Y \le 0\} = 1/2$ (D) $P\{X - Y \le 1\} = 1/2$

3. 设随机变量X与Y的方差存在且不为 0，则$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$是X和Y( ).

(A) 不相关的充分条件，但不是必要条件 (B) 独立的充分条件，但不是必要条件

(C) 不相关的充分必要条件 (D) 独立的充分必要条件

4. 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度t_0，电炉就断电.以E表示事件“电炉断电”，设$T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le T_{(4)}$为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件E等于事件( ).

(A) $\{T_{(1)} \ge t_0\}$ (B) $\{T_{(2)} \ge t_0\}$ (C) $\{T_{(3)} \ge t_0\}$ (D) $\{T_{(4)} \ge t_0\}$

5. 将一枚硬币重复抛n次，以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数，则X和Y的相关系数等于( ).

(A) -1 (B) 0 (C) 1/2 (D) 1

6. 设随机变量$X \sim t(n), (n > 1)$，$Y = 1/X^2$，则( ).

(A) $Y \sim \chi^2(n)$ (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$ (C) $Y \sim F(n,1)$ (D) $Y \sim F(1,n)$

二、解答题

1. (12 分) 在天平上重复称一重为α的物品，假设各次称量结果相互独立且同时服从正态分布$N(\alpha,0.2^2)$.以$\bar{X}_n$表示n次称量结果的算术平均值，试求为使$P\{|\bar{X}_n-\alpha|<0.1\}\geq 0.95$，样本容量$n$的最小值.

2. (12 分) 某班车起点站上车人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为$p,(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立.以Y表示中途下车的人数，求：

(1) 在发车时有n位乘客的条件下，中途有m人下车的概率；

(2) 二维随机变量(X,Y)的概率分布.

3. (12 分) 设两个随机变量X与Y相互独立，且都服从均值为 0，方差为 1/2 的正态分布，试求随机变量$|X-Y|$的方差.

4. (12 分) 假设一条生产线生产的产品合格率是 0.8，要使一批产品的合格率达到在 76%与 84%之间的概率不小于 90%，问这批产品至少要生产多少件？

5. (14 分) 设某机床加工的零件长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽查 16 个零件，测得长度(单位: mm)为：

12.15, 12.12, 12.01, 12.08, 12.09, 12.16, 12.03, 12.01, 12.06, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.01, 12.03, 12.06

试求：

(1) σ^2的置信度为 95% 的置信区间;

(2) 在 5%的显著性水平下，能否认为该机床加工的零件长度为 12.10mm.

6. (14 分) 设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0 & ,x\leq\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$是未知参数，从总体X中随机地抽取简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，记$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

(1) 求总体X的分布函数$F(x)$；

(2) 求统计量$\hat{\theta}$的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用$\hat{\theta}$作为θ的估计量，讨论它是否具有无偏性.

参 考 解 析

一、选择题

1. 答案：**A**

解：$P\{X_1X_2=0\}=1$，则$X_1\neq 0$时$X_2=0$，$X_2\neq 0$时$X_1=0$，由$P\{X_i=0\}=1/2$知二者相等概率为 0.

2. 答案：**B**

解：$A=(X+Y)\sim N(1,2)$，$B=(X-Y)\sim N(-1,2)$，故$P(X+Y\le 1)=1/2$，$P(X-Y\le -1)=1/2$.

3. 答案：**C**

解：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0\Leftrightarrow \rho_{X,Y}=0\Leftrightarrow\ X,Y$不相关.

4. 答案：**C**

解：两个温控器显示温度不低于临界温度则E发生，所以温度第二高的温控器不低于临界温度时E发生.

5. 答案：**A**

解：$Cov(X,Y)=Cov(X,n-X)=-DX$，$DX=DY$，所以$\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}}=-1$.

6. 答案：**C**

解：设$A\sim N(0,1)$，$B\sim\chi^2(n)$，令$X=t(n)=\frac{A}{\sqrt{B/n}}$，则$Y=\frac{1}{X^2}=\frac{B/n}{A^2}=\frac{B/n}{A^2/1}=F(n,1)$.

二、解答题

1. **解**：设第i次称量结果为X_i，$i=1,2,\cdots,n$，由题设知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且同时服从正态分布$N(\alpha,0.2^2)$，所以其算术平均值：

$$\bar{X}_n\sim N(\alpha,\frac{0.2^2}{n})$$

于是：

$$P\{|\bar{X}_n-\alpha|<0.1\}=P\{\frac{|\bar{X}_n-\alpha|}{0.2/\sqrt{n}}<\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\}=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\ge 0.95$$

于是$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.975$，查表得 $\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.96$，即：

$$n\ge(2\times 1.96)^2=15.3664$$

n的最小值为 16.

2. **解**：(1) 因为每位乘客中途下车与否相互独立，中途下车的概率为p，在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率为条件概率，再根据n重贝努利概型可得：

$$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\ 0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

(2) 因为$X\sim\pi(\lambda)$，其概率分布为：

$$P\{X=n\}=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ \ n=0,1,2,\cdots$$

于是二维随机变量(X,Y)的概率分布为：

$$P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m|X=n\}=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\ \ 0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

3. **解**：令随机变量$Z=X-Y$，因为X与Y相互独立且同分布$N(0,1/2)$，则：

$$Z=X-Y\sim N(0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=N(0,1)$$

所以：

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}z\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}})_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|Z|^2)=E(Z^2)=1$$

$$D(Z)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$$

4. **解**：令

$$X_i=\begin{cases}1,\ \text{若第 i 个产品是合格品}\\0,\ \text{其他}\end{cases}$$

而至少要生产n件，则$i=1,2,\dots,n$，且$X_1,X_2,\dots,X_n$独立同分布，$p=P\{X_i=1\}=0.8$，现要求n,使得：

$$P\{0.76\le\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\le 0.84\}\ge 0.9$$

即：

$$P\{\frac{0.76n-0.8n}{\sqrt{n\times 0.8\times 0.2}}\le\frac{\sum_{i=1}^n X_i-0.8n}{\sqrt{n\times 0.8\times 0.2}}\le\frac{0.84n-0.8n}{\sqrt{n\times 0.8\times 0.2}}\}\ge 0.9$$

由中心极限定理得：

$$\Phi\left(\frac{0.84n-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right)-\Phi\left(\frac{0.76n-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right)\ge 0.9$$

整理得$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right)\ge 0.95$，查表得$\frac{\sqrt{n}}{10}\ge 1.645$

所以$n\ge 270.60$，故取$n=271$.

5. **解**：由数据计算得：

$$\bar{x} = 12.075,\ s^2 = 0.00244,\ s = 0.049396$$

$$1-\alpha = 0.95,\ n = 16,\ \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(15) = 27.488,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(15) = 6.262$$

则σ^2的置信水平为 0.95 的区间估计为：

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] = \left[\frac{15\times 0.00244}{27.488}, \frac{15\times 0.00244}{6.262}\right] = [0.0013,\ 0.0058]$$

本问题是方差未知的条件下，$\mu = 12.10$的假设检验，故：

$$H_0\colon \mu = 12.10,\ H_1\colon \mu \neq 12.10,\ \alpha = 0.05,\ n = 16$$

$$T = \frac{\overline{X} - 12.1}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

H_0的拒绝域为：

$$|T| = \left|\frac{\overline{X} - 12.1}{S/\sqrt{16}}\right| \geq t_{0.025}(15) = 2.1314$$

故：

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - 12.1}{s/\sqrt{16}}\right| = \left|\frac{12.075 - 12.1}{0.049396/4}\right| = 2.02444 < 2.1314$$

所以接受H_0，即认为该机床加工的零件长度为 12.10mm.

6. **解**：(1) 总体X的分布函数：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\theta)\mathrm{d}t$$

当$x \leq \theta$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\theta)\mathrm{d}t = 0$

当$x > \theta$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\theta)\mathrm{d}t = \int_{\theta}^{x} 2\mathrm{e}^{-2(t-\theta)}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-2(t-\theta)}$

即得：

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

(2) $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$为：

$$F_{\hat{\theta}}(x) = P\{\hat{\theta} \leq x\} = P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leq x\} = 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} > x\}$$

$$= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}\cdots P\{X_n > x\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > x\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P\{X_i \leq x\}]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F(x)] = 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$$

(3) 因为$\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的概率密度函数为：

$$f_{\hat{\theta}}(x) = F_{\hat{\theta}}^{'}(x) = \begin{cases} 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}) = \int_{\theta}^{+\infty} x2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}|_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\,\mathrm{d}x = \theta + \frac{1}{2n} \ne \theta$$

所以$\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$不是$\theta$的无偏估计.