密封装订线　密封装订线　密封装订线

班 级________　学 号________　姓 名________

西南交通大学 2017－2018 学年第(1)学期中期考试试卷

课程代码 6010400 课程名称 线性代数 A 考试时间 90 分钟

（请考生注意，本试卷共四页，14 道题）

题目	一	二	三				四	总分
			10	11	12	13	14	
得分								

阅卷教师签字：________________

一、单项选择题（每小题 5 分，共 25 分）。

1、 已知 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\2&1&3&1\\1&2&1&3\end{vmatrix}=12$， 则 $3A_{41}+6A_{42}+3A_{43}+9A_{44}=$（ B ），

其中 A_{ij} 表示 D 的第 i 行 j 列的代数余子式。

(A) 0　(B) 36　(C) 48　(D) 6

2、方程 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&2&-1\\1&x^2&4&1\\1&x^3&8&-1\end{vmatrix}=0$ 的根为（ A ）。

（A）$1,-1,2$；（B）$1,-1,-2$；（C）$3,4,5$；（D）$2,4,8$。

3、设下列说法正确的是（ D ）。

（A） A,B 是 n 阶方阵，则必有 $|A+B|=|A|+|B|$；

（B） $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|A||D|-|B||C|$，其中 A,B,C,D 是 n 阶方阵；

（C） A 是 n 阶方阵，k 为非零实数，则 $|kA|=|k|^n|A|$；

（D） A,B 是 n 阶方阵，则必有 $|AB|=|BA|$。

4、设下列说法正确的是(　　B　　　)。

(A) A与B为n阶方阵，则必有$\left(A+B\right)^2=A^2+2AB+B^2$；

（B） A与B为n阶方阵且$A+B=E$，则必有$AB=BA$，其中E为n阶单位阵；

（C）若$A^2=A$，则$A=O$或$A=E$，其中O为零矩阵、E为单位阵；

（D）若A可逆且$AB=CA$，则必有$B=C$。

5、设A是5×3矩阵，且A的秩$R\left(A\right)=2$，又$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\4&7&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$，则$R\left(AB\right)=$(　　A　　)。

（A）2；　（B）3；　（C）1；　（D）无法确定。

二、填空题（每小题 6 分，共 24 分）。

6、 已知A为三阶方阵，且$|A|=2$，那么$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-5A^*\right|=$____$-108$________，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵。

7、若方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+kx_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$有非零解，则$k=$______1________。

8、由拉普拉斯定理对行列式$\begin{vmatrix}2&3&0&0\\1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{vmatrix}$按第 1 行和第 2 行展开得，

$$\begin{vmatrix}2&3&0&0\\1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\1&3\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}$$ ________

$$+\begin{vmatrix}3&0\\2&3\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}0&3\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0\\2&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\3&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}$$

____。

9、若$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，那么$P^{2017}AP^{2018}=$______$\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$________。

三、**解答下列各题（每小题 11 分，共 44 分）**。（解法不唯一，仅供参考）

10、求行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$ 的值，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

$$D_n \xlongequal{r_i-r_1;\,i=2,\cdots,n} \begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+\frac{a_1}{a_j}C_j,\,j=2,\cdots,n} \begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{a_1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)$$

批注 [微软用户1]: 5 分

批注 [微软用户2]: 10 分

批注 [微软用户3]: 11 分

11、 a 取何值时线性方程组 $\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3=0\\ 3x_1-6x_2+4x_3=c\\ 4x_1-ax_2+3x_3=0\end{cases}$ 有唯一解，并求出唯一解。

解 线性方程组系数行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ 3 & -6 & 4\\ 4 & -a & 3\end{vmatrix}=7(8-a)$，故当 $a\neq 8$ 时，方程有唯一解

且为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & -4 & 5\\ c & -6 & 4\\ 0 & -a & 3\end{vmatrix}}{D}=\frac{(12-5a)c}{7(8-a)},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 3 & c & 4\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix}}{D}=\frac{2c}{a-8}\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}2 & -4 & 0\\ 3 & -6 & c\\ 4 & -a & 0\end{vmatrix}}{D}=\frac{(16-2a)c}{7(8-a)}$$

批注 [微软用户4]: 5 分

批注 [微软用户5]: 11 分

12、A,B为三阶可逆矩阵满足 $A^{-1}B+4E-B=O$，其中 O 为零矩阵，若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 A.

解 $A^{-1}B+4E-B=O \Rightarrow A^{-1}B=B-4E \Rightarrow A^{-1}=(B-4E)B^{-1} \Rightarrow A=B(B-4E)^{-1}$

批注 [微软用户6]: 3 分

$$(B-4E,E)=\begin{pmatrix}-3&-2&0&1&0&0\\1&-2&0&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1,-\frac{1}{2}r_3,}\begin{pmatrix}1&-2&0&0&1&0\\-3&-2&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_1,}\begin{pmatrix}1&-2&0&0&1&0\\0&-8&0&1&3&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{8}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

批注 [微软用户7]: 8 分

$$A=B(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

批注 [微软用户8]: 11 分

13、设 $A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩。

解 $A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\0&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&7&17&3\\\lambda&4&10&1\\3&1&1&4\\2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\lambda r_1,r_3-3r_1,r_4-2r_1}$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\0&-20&-50&-5\\0&-12&-30&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{-1}{5}r_3,\frac{-1}{3}r_4}\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\0&4&10&1\\0&4&10&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\0&4&10&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{4-7\lambda}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&\frac{\lambda}{2}&-\frac{5}{4}\lambda\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故当 $\lambda=0$ 时 A 变为阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时 A 的秩为 2；

故当 $\lambda\neq0$ 时 A 变为阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&\frac{\lambda}{2}&-\frac{5}{4}\lambda\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时 A 的秩为 3

四、（7 分）（解法不唯一，仅供参考）

14、设方阵 A 不可逆矩阵，证明 A 的伴随矩阵 A^* 也不可逆。

证明：A 不可逆，则 $A^*A=|A|E=O$（1），

假设 A^* 可逆，则（1）可知

$$A=O$$

若 $A=O$，则 $A^*=O$，

这与 A^* 可逆矛盾，故假设错误，这说明 A^* 不可逆。

批注 [微软用户9]: 7 分

批注 [微软用户10]: 9 分

批注 [微软用户11]: 11 分

批注 [微软用户12]: 2 分

批注 [微软用户13]: 4 分

批注 [微软用户14]: 6 分

批注 [微软用户15]: 7 分