# 复变函数 A(3271018)期末考试 A 卷

2018-2019 学年第 1 学期

一、在复数域内解下列方程：（每小题 6 分，共 12 分）

1. $z^3+\mathrm{i}=0$；

2. $\mathrm{e}^z+1-\mathrm{i}=0$.

二、计算下列积分：（每小题 8 分，共 32 分）

1. $I=\int_C \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+1)}\mathrm{d}z$，其中 $C$ 是圆周 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，取逆时针方向；

2. $I=\int_C \dfrac{z^9}{z^{10}-1}\mathrm{d}z$，其中 $C$ 是圆周 $|z|=2$，取逆时针方向；

3. $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin\theta}$（要求使用复变函数方法）；

4. $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin 4x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$（要求使用复变函数方法）.

三、已知函数 $f(z)=3x^2-axy+by^2+\mathrm{i}(cx^2+dxy-y^2)$ 在复平面上处处解析，求 $a,b,c,d$ 的值，并求 $f'(z)$.（8 分）

四、求函数 $f(z)=\mathrm{e}^z\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.（8 分）

五、求分式线性变换 $w=L(z)$，将单位圆盘 $|z|<1$ 变成上半 $w$ 平面，并把 $z=\mathrm{i}$ 变成 $w=1$，把 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ 变成 $w=1+\mathrm{i}$.（10 分）

六、设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析（$r_0>0$），且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A(\neq\infty)$，证明：对任意的 $r>r_0$，

$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z=A$，其中 $K_r$ 是圆周 $|z-z_0|=r$，取逆时针方向.（8 分）

七、在扩充复平面判断 $f(z)=\dfrac{2z-\pi}{z^2\cos z}$ 的奇点类型，并求全部孤立奇点处的留数.（12 分）

八、利用鲁歇定理证明代数学基本定理：$n$ 次代数方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$

（$a_0\neq 0$）在复平面上有且仅有 $n$ 个根（计重数）.（10 分）

# 参 考 解 析

一、在复数域内解下列方程：（每小题 6 分，共 12 分）

1. $z^3+\mathrm{i}=0$.

$$z^3=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}，\ z=\sqrt[3]{-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\mathrm{i}}，\ k=0,1,2.$$

因此方程有三个解：$z_0=\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$，$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}=\mathrm{i}$，$z_2=\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}}=-\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$.

2. $\mathrm{e}^z+1-\mathrm{i}=0$.

$$\mathrm{e}^z=-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}，\ z=\mathrm{Ln}(-1+\mathrm{i})=\ln\sqrt{2}+\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\mathrm{i}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3+8k}{4}\pi\mathrm{i}，\ k\in\mathbf{Z}.$$

二、计算下列积分：（每小题 8 分，共 32 分）

1. $I=\int_C\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+1)}\mathrm{d}z$，其中 $C$ 是圆周 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，取逆时针方向.

$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+1)}$ 在 $C$ 内部有一个二阶极点 0，一个单极点 $\mathrm{i}$，

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to 0}[z^2f(z)]'=\lim_{z\to 0}\frac{(z^2-2z+1)\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}=1，$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}f(z)=\lim_{z\to\mathrm{i}}[(z-\mathrm{i})f(z)]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z+\mathrm{i})}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2}(-\sin 1+\mathrm{i}\cos 1)，$$

$$I=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}f(z)\right]=-\pi\cos 1+\pi(2-\sin 1)\mathrm{i}.$$

2. $I=\int_C\frac{z^9}{z^{10}-1}\mathrm{d}z$，其中 $C$ 是圆周 $|z|=2$，取逆时针方向.

$f(z)=\frac{z^9}{z^{10}-1}$ 在 $C$ 外部除 $\infty$ 外没有奇点，

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-\operatorname*{Res}_{t=0}\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t(t^{10}-1)}=-1，$$

$I = -2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi\mathrm{i}$.

3. $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3 - \sin\theta}$（要求使用复变函数方法）.

令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \le \theta \le 2\pi$，则 $\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 - 1}{2\mathrm{i}z}$，$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$.

于是 $I = -2\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 6\mathrm{i}z - 1}$，其中 $C$ 是圆周 $|z| = 1$.

$\frac{1}{z^2 - 6\mathrm{i}z - 1}$ 在 $|z| < 1$ 中有一个单极点 $\alpha = (3 - 2\sqrt{2})\mathrm{i}$，

$I = -4\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{z^2 - 6\mathrm{i}z - 1} = \left.\frac{-4\pi\mathrm{i}}{2z - 6\mathrm{i}}\right|_{z=\alpha} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

4. $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin 4x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$（要求使用复变函数方法）.

$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x\right]$

$f(z) = \frac{z\mathrm{e}^{4\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}$ 在上半平面有一个二阶极点 $\mathrm{i}$，

$(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}[(z-\mathrm{i})^2 f(z)]' = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^4}$，

因此 $I = \frac{\pi}{\mathrm{e}^4}$.

三、**解：**

$u = 3x^2 - axy + by^2$，$v = cx^2 + dxy - y^2$

$u_x = 6x - ay$，$u_y = -ax + 2by$，$v_x = 2cx + dy$，$v_y = dx - 2y$.

由 Cauchy-Riemann 方程 $u_x = v_y$，$u_y = -v_x$ 得

$6x - ay = dx - 2y$，$-ax + 2by = -2cx - dy$.

比较系数得 $a = 2, b = -3, c = 1, d = 6$.

于是 $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = 6x - 2y + \mathrm{i}(2x + 6y) = (6 + 2\mathrm{i})z$.

注：$f'(z)$ 可以不用写成 $(6+2\mathrm{i})z$ 的形式.

四、**解：**

$$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})z}+\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})z}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{i})^n z^n}{n!}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n}{n!}z^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\frac{n\pi\mathrm{i}}{4}}+(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi\mathrm{i}}{4}}}{n!}z^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n,\quad z\in\mathbf{C}.$$

五、**解：**

由分式线性变换的保对称点性，$w=L(z)$ 把 $z=\frac{\mathrm{i}}{2}$ 关于单位圆周的对称点 $z=2\mathrm{i}$ 变成 $w=1+\mathrm{i}$ 关于实轴的对称点 $w=1-\mathrm{i}$.

因此这个变换可以写成 $\left(\mathrm{i},\frac{\mathrm{i}}{2},2\mathrm{i},z\right)=(1,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i},w)$，

解得：$w=\dfrac{(3+\mathrm{i})z-1-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}z-1}$（$=\dfrac{(1-3\mathrm{i})z-3+\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$）.

六、**解：**

由多连通区域的 Cauchy 积分定理知 $\int_{K_r}f(z)\mathrm{d}z$ 是一个与 $r>r_0$ 无关的常数，并且当 $r>|z_0|+r_0$ 时，$\int_{K_r}f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z$，其中 $C_r$ 是圆周 $|z|=r$，仍取逆时针方向.

因此只需证明：$\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z=A$.

由 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得当 $|z|>R$ 时，$|zf(z)-A|<\varepsilon$.

由于 $\int_{C_r}\dfrac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}$，$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z-A=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r}\left[f(z)-\dfrac{A}{z}\right]\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r}\dfrac{zf(z)-A}{z}\mathrm{d}z$，

从而当 $r>R$ 时，

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z - A\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\left|\frac{zf(z)-A}{z}\right|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\frac{|zf(z)-A|}{r}\mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon}{2\pi r}\int_{C_r}\mathrm{d}s = \varepsilon .$$

于是得到 $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = A$.

七、**解**：

$z=\frac{\pi}{2}$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，因此 $\operatorname*{Res}\limits_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=0$.

$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点， $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right]'=\lim\limits_{z\to 0}\frac{2\cos z+(2z-\pi)\sin z}{\cos^2 z}=2$.

$z=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z},k\ne 0)$ 是 $f(z)$ 的单极点，

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}} f(z)=\left.\frac{2z-\pi}{z^2(\cos z)'}\right|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=-\left.\frac{2z-\pi}{z^2\sin z}\right|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{(-1)^{k+1}8k}{(2k+1)^2\pi}.$$

$z=\infty$ 是非孤立奇点.

八、**解**：

令 $f(z)=a_0 z^n$， $\varphi(z)=a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$， 则 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在整个复平面上解析.

取常数 $R>\max\left\{1,\ \frac{|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|+|a_n|}{|a_0|}\right\}$.

作圆周 $C$： $|z|=R$， 则当 $z\in C$ 时，

$|f(z)|=|a_0|R^n$， $|\varphi(z)|\le|a_1|R^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}|R+|a_n|<(|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|+|a_n|)R^{n-1}$，

因此 $|f(z)|>|\varphi(z)|$.

由 Rouché 定理， $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)=a_0 z^n$ 在 $C$ 内部有相同个数的零点，即方程

$a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 在 $C$ 内部有 $n$ 个根.

当 $|z|\ge R$ 时， $|a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n| \ge |a_0 z^n|-|a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n|$

$\ge|a_0|R^n-(|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|+|a_n|)R^{n-1}>0$，

因此方程 $a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 在 $C$ 及其外部没有根.

于是方程 $a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 在复平面上有且仅有 $n$ 个根.