密封装订线

西南交通大学 2020—2021 学年第一学期考试试卷

课程代码 MATH000212 课程名称 线性代数A（A卷） 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

一. 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，则 $|(-2)A|=$（ B ）

(A) 24;　(B) -24;　(C) 6;　(D) -6.

2. 已知三阶方阵 P 的秩为 3，A 是 4×3 的矩阵，它的秩为 2，则 $R(AP)=$（B）

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

3. 方阵 A 可逆，以下说法错误的是（A）

(A) A 的特征值可能为零；

(B) A 可以由单位矩阵经过有限次数的初等行变换得到；

(C) A 的秩与 A 的阶数一样；

(D) A 可以写成有限个初等矩阵的乘积.

密封装订线

4. 已知 4 阶实对称矩阵 A 有一个重数为 2 的特征值 1，则 A 的属于特征值 1 的所有线性无关的特征向量有（C）个

(A) 4;　(B) 3;　(C) 2;　(D) 1.

密封装订线

5.已知 $\beta_1\ \beta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 导出组 $Ax=o$ 的基础解系，$k_1,k_2\in R$，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为（B）

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$;

(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

6. 已知 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP = B$, 则 $A^{2020} =$ $2^{2020}E$.

7. 设 R^3 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ 下的矩阵为 A，则 $\mathscr{A}$ 在标准基

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)A(\eta_1, \eta_2, \eta_3)^{-1}$

8.设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有唯一解，则 $a \neq$ 1.

9.设四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} =$ 0.

10.已知向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性无关，向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 线性相关，且存在三阶方阵 P 使得

$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)P$，则 $|P| =$ 0.

三. 解答题（每小题 12 分，共 48 分）

11. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

（1）求向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的秩； $R\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$

（2）求向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组线性表示向量组中的其余向量.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它们一个极大无关组，$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$

12. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(k_1, k_2 \in R)$

13. 设 $A=(a_{ij})$为三阶方阵，其特征值分别为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},$$

（1）求$\overset{=0}{|A|}$；（2）求 A 的迹 trA（注：$\mathrm{trA}=\overset{=0}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}$）；（3）求 $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}$

14. 设二次型 $f=X^TAX$，$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，求正交变换 $X=PY$，将该二次型化为标准型，并写出标准型。

$\lambda_1=\lambda_2=-1$

$\lambda_3=5$

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$ 则 f 化为 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

四. 证明题（每小题6分，共计12分）

15. 已知矩阵 A 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，证明矩阵 A^2-2E 的行列式值为-14.

16. 已知 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$，证明 A 的伴随矩阵的秩为 1.

15. 证明：存在可逆矩阵 P . s.t $P^{-1}AP=B$. 即 $A=PBP^{-1}$

于是 $A^2-2E=PB^2P^{-1}-2PP^{-1}=P(B^2-2E)P^{-1}$.

即 A^2-2E 相似于 $B^2-2E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&7\end{pmatrix}$

从而 $|A^2-2E|=|B^2-2E|=-14$

16. 证明：· $R(A)=n-1<n$. 于是 $AA^*=|A|E=0$

于是 $R(A)+R(A^*)\leq n$. 从而 $R(A^*)\leq 1$

· $R(A)=n-1$. 则存在非零的 $n-1$ 阶子式，不妨设为 $M_{kl}\neq 0$

从而 $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}\neq 0$. 即 $A^*\neq 0$

因此 $R(A^*)\geq 1$.

综上所述，$R(A^*)=1$