《大学物理 AI》作业　　No.03 角动量 角动量守恒定律

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ______

****************************本章教学要求****************************

1、理解质点、质点系、定轴转动刚体的角动量的定义及其物理意义；
2、理解转动惯量、力矩的概念，会进行相关计算；
3、熟练掌握刚体定轴转动定律，会计算涉及转动的力学问题；
4、理解角冲量（冲量矩）概念，掌握质点、质点系、定轴转动刚体的角动量定理，熟练进行有关计算；
5、掌握角动量守恒的条件，熟练应用角动量守恒定律求解有关问题。

一、选择题

1．关于力矩有以下几种说法：

(1) 对某个定轴而言，内力矩不会改变刚体的角动量

(2) 作用力和反作用力对同一轴的力矩之和必为零

(3) 质量相等，形状和大小不同的两个刚体，在相同力矩的作用下，它们的角加速度一定相等

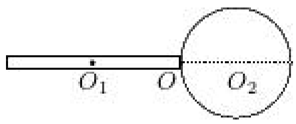
在上述说法中，

[　　]　(A) 只有(2)是正确的　　(B) (1)、(2)是正确的

(C) (2)、(3)是正确的　　(D) (1)、(2)、(3)都是正确的

解：内力成对出现，对同一轴，一对内力的力矩大小相等，方向相反，内力矩之和为零，不会改变刚体的角动量。质量相等，形状和大小不同的两个物体，转动惯量不同，在相同力矩作用下，角加速度大小不等。　**选 B**

2．一刚体由匀质细杆和匀质球体两部分构成，杆在球体直径的延长线上，如图所示。球体的半径为R，杆长为$2R$，杆和球体的质量均为m。若杆对通过其中点O_1，与杆垂直的轴的转动惯量为J_1，球体对通过球心O_2的转动惯量为J_2，则整个刚体对通过杆与球体的固结点O且与杆垂直的轴的转动惯量为



[　　]　(A) $J = J_1 + J_2$；

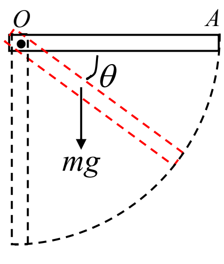
(B) $J = mR^2 + mR^2$；

(C) $J = (J_1 + mR^2) + (J_2 + mR^2)$；

(D) $J = [J_1 + m(2R)^2) + (J_2 + m(2R)^2]$。

解：用平行轴定理，选 **C**

3．均匀细棒OA可绕通过其一端O而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？



[　　]（A）角速度从小到大，角加速度从小到大。

（B）角速度从小到大，角加速度从大到小。
（C）角速度从大到小，角加速度从大到小。
（D）角速度从大到小，角加速度从小到大。

解：设棒长为 l，质量为 m，在向下摆到角度 θ 时，由转动定律

$$mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta=J\beta \quad （J\text{为转动惯量}）$$

故在棒下摆过程中，θ 增大，β 将减小。棒由静止开始下摆过程中，ω 与 β 转向一致，所以角速度由小变大。**故选 B**

4．两个均质圆盘 A 和 B 密度分别为 ρ_A 和 ρ_B。若 $\rho_A>\rho_B$，但两圆盘质量与厚度相同，如两盘对通过盘心、垂直于盘面轴的转动惯量各为 J_A 和 J_B，则

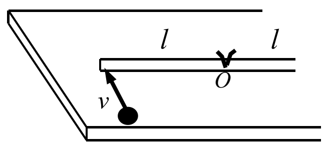
[ ] （A）$J_A>J_B$ （B）$J_B>J_A$
（C）$J_A=J_B$ （D）J_A、J_B 哪个大，不能确定

解：设 A、B 两盘厚度为 d，半径分别为 R_A 和 R_B，由题意，二者质量相等，即

$$\pi R_A{}^2 d\ \rho_A=\pi R_B{}^2 d\ \rho_B$$

因为 $\rho_A>\rho_B$，所以 $R_A{}^2<R_B{}^2$，由转动惯量 $J=\frac{1}{2}mR^2$，则 $J_A<J_B$。 故选 **B**

5．光滑的水平面上有长为 $2l$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点 O 且垂直于桌面的竖直固定轴自由转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$。起初杆静止。有一质量为 m 的小球沿桌面正对着杆的一端，在垂直于杆长的方向上，以速率 v 运动，如图所示。当小球与杆端发生碰撞后，就与杆粘在一起随杆转动，则这一系统碰撞后的转动角速度是



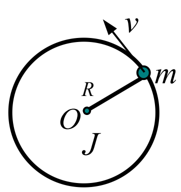
[ ] (A) $\frac{lv}{12}$ (B) $\frac{2v}{3l}$ (C) $\frac{3v}{4l}$ (D) $\frac{3v}{l}$

解：小球与细杆碰撞过程中对 o 点的合外力矩为零，根据角动量守恒定律有：

$$mvl=\left(\frac{1}{3}ml^2+ml^2\right)\omega$$

碰撞后的转动角速度为 $\omega=\frac{3v}{4l}$ **选 C**

6．质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上，平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为 J。平台和小孩开始时静止。当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为



[ ]　(A) $\omega=\frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$，顺时针　(B) $\omega=\frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$，逆时针

(C) $\omega=\frac{mR^2}{J+mR^2}\left(\frac{v}{R}\right)$，顺时针　(D) $\omega=\frac{mR^2}{J+mR^2}\left(\frac{v}{R}\right)$，逆时针

解：以地为参考系，平台和人组成的系统对轴的角动量守恒（设逆地针转动为正）：

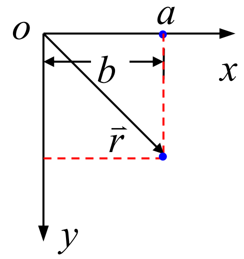
$$mvR+J\omega=0$$

$$\omega=-\frac{mvR}{J}=-\frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$$，负号表示顺时针。

选 A

二、填空题

1．如图所示，x 轴沿水平方向，y 轴竖直向下，在零时刻将质量为 m 的质点由 a 处静止释放，让它自由下落，则在任意时刻，质点所受的对原点 O 的力矩 $\vec{M}=$ <u>$mgb\ \vec{k}$</u>；该质点对原点 O 的角动量 $\vec{L}=$ <u>$mgbt\ \vec{k}$</u>。



解：由图知 $\vec{r}=b\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$，得质点的速度和加速度分别为

$$\vec{v}=gt\,\vec{j}$$

$$\vec{a}=g\,\vec{j}$$

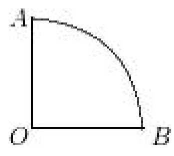
质点所受对原点的力矩为

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times m\vec{a}\\&=\left(b\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}\right)\times\left(mg\vec{j}\right)\\&=mgb\vec{k}\end{aligned}$$

质点对原点的角动量为

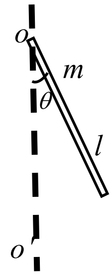
$$\begin{aligned}\vec{L}&=\vec{r}\times m\vec{v}=\left(b\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}\right)\times\left(mgt\vec{j}\right)\\&=mgbt\ \vec{k}\end{aligned}$$

2.如图所示的 OAB 均匀薄板，恰好是四分之一圆。薄板对于通过 O 点且垂直于板面的轴的转动惯量为 J，则它对于与边 OA(或 OB)重合的轴的转动惯量为________。



答：用垂直轴定理可得 $\frac{J}{2}$.

3.一根均匀细杆，质量为m，长度为l。此杆对通过其端点且与杆成θ角的轴oo'（如图所示）的转动惯量为________。

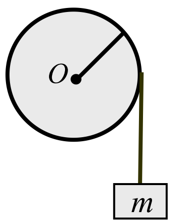


答：$J=\frac{1}{3}m\left(l\sin\theta\right)^2$

4．由于地球的平均气温升高，造成两极冰山融化，海平面上升。此效应会引起地球自转的转动惯量___________ 。地球自转动能____________ 。（仅填写：变大，变小或不变）

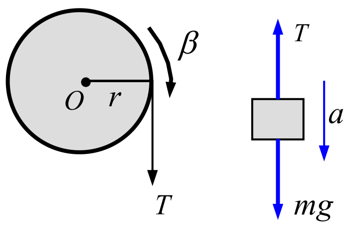
答：两极冰山融化，冰水相对于转轴的距离变大，故转动惯量变大。因为 $J_1\omega_1=J_0\omega_0$ ，$\frac{1}{2}J_1\omega_1^2/\frac{1}{2}J_0\omega_0^2=J_0/J_1<1$，所以变小 。

5．如图所示，一轻绳绕于半径为 r 的飞轮边缘，并以质量为 m 的物体挂在绳端，飞轮对过轮心且与轮垂直的水平固定轴的转动惯量为 J，若不计摩擦，飞轮的角加速度 $\beta=$__________________________。



解：飞轮和物体受力如右图所示。由牛顿定律和刚体定轴转动定律有：

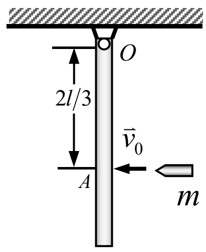
$$\begin{cases} mg-T=ma \\ T\cdot r=J\beta \end{cases}$$



绳和飞轮间无相对滑动有 $a=\beta r$

故飞轮的角加速度为： $\beta=\frac{mgr}{J+mr^2}=\frac{mg}{\frac{J}{r}+mr}$

6．长为 l、质量为 M 的匀质杆可绕通过杆一端 O 的水平光滑固定轴转动，转动惯量为$\frac{1}{3}Ml^2$，开始时杆竖直下垂，如图所示。有一质量为 m 的子弹以水平速度 $\vec{v}_0$ 射入杆上 A 点，并嵌在杆中，$OA=\frac{2}{3}l$，则子弹射入后瞬间杆的角速度 $\omega=$____________________________。



解：子弹射入杆中的过程系统所受合外力矩为零，对过 O 固定轴角动量守恒：

$$\frac{2l}{3}mv_0=\left[\frac{1}{3}Ml^2+m\left(\frac{2l}{3}\right)^2\right]\omega$$

子弹射入后瞬间杆的角速度 $$\omega=\frac{\frac{2l}{3}mv_0}{\frac{1}{3}Ml^2+m\left(\frac{2l}{3}\right)^2}=\frac{6v_0}{\left(\frac{3M}{m}+4\right)l}$$

三、简答题

1. 计算一个刚体对某转轴的转动惯量时，一般能不能认为它的质量集中于其质心，成为一质点，然后计算这个质点对该轴的转动惯量？为什么？举例说明你的结论。

答：不能。因为刚体的转动惯量 $\sum r_i^2 m_i$ 与各质量元和它们对转轴的距离有关。如一匀质圆盘对过其中心且 垂直盘面轴的转动惯量为 $\frac{mR^2}{2}$ ，若按质量全部集中于质心计算，则对同一轴的转动惯量为零。

2.一单摆，在摆动过程中，若不计空气阻力，摆球的动能、动量、机械能以及对悬点的角动量是否守恒？为什么？

答：(1) 因为重力对小球做功，故它的动能不守恒。(2) 因为小球受有张力与重力并且合力不为零，故它的动量不守恒。(3) 因绳张力不做功，也不计非保守力的功，故机械能守恒。(4) 因小球受的重力矩（对悬点）不为零，故小球对悬点的角动量不守恒。

四、计算题

1．有一半径为 R 的圆形平板放在水平桌面上，平板与水平桌面的摩擦系数为μ，若平板绕通过其中心且垂直板面的固定轴以角速度 ω_0 开始旋转，它将在旋转几圈后停止？

解：设圆板面密度为$\sigma\left(\sigma=\dfrac{m}{\pi R^2}\right)$，则转动时受到的摩擦阻力矩大小为

$$M=\int \mathrm{d}M=\int_0^R \mu\sigma g\cdot 2\pi r^2 \mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi\mu\sigma g R^3$$

由转动定律$M=J\beta$可得角加速度大小

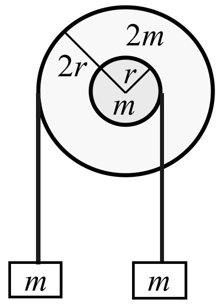
$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{\frac{2}{3}\pi\mu\sigma g R^3}{\frac{1}{2}mR^2}=\frac{4\mu g}{3R}$$

设圆板转过n转后停止，则转过的角度为$\theta=2\pi n$。由运动学关系

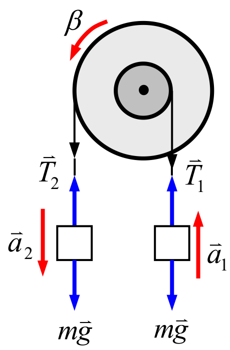
$$\omega^2-\omega_0{}^2=2\beta\theta \qquad (\omega=0,\ \beta<0)$$

可得旋转圈数 $$n=\frac{\omega_0^2}{2\times\frac{4\mu g}{3R}\times 2\pi}=\frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

2．质量分别为m和$2m$、半径分别为r和$2r$的两个均匀圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动， 对转轴的转动惯量为$9mr^2/2$，大小圆盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为m的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。



解：各物体受力如下图所示。由质点运动牛顿定律和刚体定轴转动定律列方程如下（设逆时针转动方向正）：



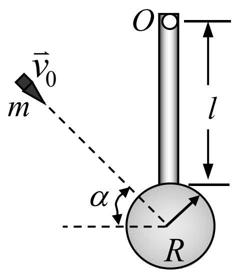
$$mg-T_2=ma_2$$
$$T_1-mg=ma_1$$
$$T_2\times 2r-T_1\times r=\frac{9}{2}mr^2\beta$$

绳和圆盘间无相对滑动有 $a_2=2r\beta$

$$a_1=r\beta$$

联立以上方程，可以解出盘的角加速度的大小： $\beta=\dfrac{2g}{19r}$

3．如图所示，一半径为R的匀质小木球固结在一长度为l的匀质细棒的下端，且可绕水平光滑固定轴O转动，今有一质量为m，速度为$\vec{v}_0$的子弹，沿着与水平面成α角的方向射向球心，且嵌于球心。已知小木球、细棒对通过O水平轴的转动



惯量的总和为 J。求子弹嵌入球心后系统的共同角速度。

解：子弹射入木球过程中，子弹、细棒和木球组成的系统所受合外力矩为零，系统对转轴角动量守恒：

$$(R+l)mv_0\cos\alpha=\left[J+m(R+l)^2\right]\omega$$

子弹嵌入球心后系统的共同角速度　$\omega=\dfrac{mv_0(R+l)\cos\alpha}{J+m(R+l)^2}$