《大学物理 AI》作业　　No. 09　磁感应强度

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ______

****************************本章教学要求****************************

1、了解运动电荷间的相互作用力，理解**磁场是电场的相对论效应**；

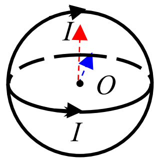
2、掌握磁感应强度的定义，熟练运用**毕奥-萨伐尔定律和叠加原理**求解**各种电流的磁场分布**；

3、掌握无线长直导线、圆线圈、长直螺旋管、无限大载流平面等**典型载流导线的磁场分布公式**，并能用**典型电流的磁场叠加求未知磁场分布**；

4、理解磁场的高斯定理、磁场安培环路定理的物理意义，能熟练应用**安培环路定律求解**具有一定对称性分布的磁场磁感应强度。

一、选择题：

1. 两个载有相等电流 I 的半径为 R 的圆线圈，一个处于水平位置，一个处于竖直位置，两个线圈的圆心重合，则在圆心 O 处的磁感应强度大小为：



选择题 1 图

[　　　] (A) 0　　　(B) $\mu_0 I/2R$

(C) $\sqrt{2}\mu_0 I/2R$　　　(D) $\mu_0 I/R$

解：由典型电流：圆形电流圆心处磁感应强度大小公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$ 知：

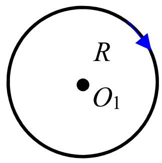
两个线圈单独存在时在圆心 O 处的磁感应强度大小相等为：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$，但方向分别垂直过圆心，因此磁感应强度方向互相垂直，如图。

故两个线圈同时存在时圆心 O 处的磁感应强度大小为：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}/\cos45° = \sqrt{2}\,\dfrac{\mu_0 I}{2R}$　　所以选 **C**

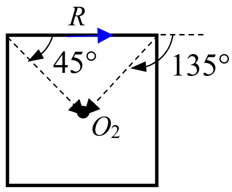
2. 有一个圆形回路 1 及一个正方形回路 2，参数如图所示，二者中通有大小相等的电流，则它们在各自中心产生的磁感应强度的大小之比 B_1 / B_2 为

[　　　] (A) 0.90　　　(B) 1.00

(C) 0.56　　　(D) 1.20



解：由典型电流：圆形电流圆心处磁感应强度公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$



及**有限长直线电流**外一点磁场公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi\, r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ 有：

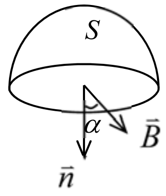
圆形回路 1 在圆心 O_1 处磁感应强度大小为：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

正方形回路 2 的 4 段直线电流在中心 O_2 产生的磁感应强度的大小为：

$$B = 4\times\frac{\mu_0 I}{4\pi\,(R/2)}(\cos45° - \cos135°) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi R}$$

磁场磁感应强度的大小之比 B_1 / B_2 为　　所以选 **C**

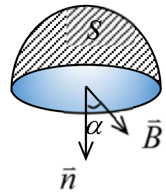
3. 在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\vec{n}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 α ，则通过半球面 S 的磁通量(**取弯面向外为正**)为



选择题 3 图

[　　　]　(A)　$\pi r^2 B$　　　　(B)　$-\pi r^2 B\sin\alpha$
　　　　　(C)　$-\pi r^2 B\cos\alpha$　　　　(D)　无法确定的量

解：半球面 S 与 S 边线所围**平面构成封闭高斯面**，如图所示。



则由磁场的高斯定理有:

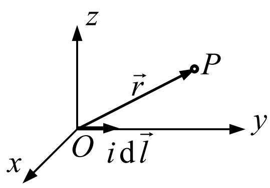
$$\oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} + \int_{平} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = 0$$

所以通过半球面 S 的磁通量为:

$$\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{平} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 - B\pi r^2\cos\alpha = -B\pi r^2\cos\alpha$$

所以选 **C**

4. 一个**电流元** $i\,\mathrm{d}\vec{l}$ 位于直角坐标系原点，电流沿 y 轴方向，则空间点 $P(x，y，z)$的磁感应强度沿 z 轴的分量是：



选择题 4 图

[　　　]　(A)　0　　　　(B)　$-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{iy\mathrm{d}l}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

　　　　　(C)　$-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{iy\mathrm{d}l}{x^2+y^2+z^2}$　　　　(D)　$-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{ix\mathrm{d}l}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

解：由**毕奥—萨伐尔定律**，**电流元**在场点 P 处产生的磁感应强度为 $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{i\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

而由矢量**矢乘（叉乘）规则**，有 $i\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & i\mathrm{d}l & 0\\ x & y & z\end{vmatrix} = -xi\mathrm{d}l\vec{k} + zi\mathrm{d}l\vec{i}$

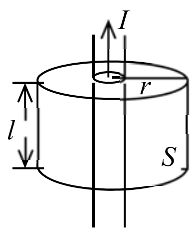
或 $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{i\mathrm{d}l\vec{j}\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{-xi\mathrm{d}l\vec{k}+zi\mathrm{d}l\vec{i}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

所以，磁感应强度沿 z 轴的分量为：$\mathrm{d}B_z = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{xi\mathrm{d}l}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

所以选 **D**

二、填空题：

1. 半径为 0.5 cm 的无限长直圆柱形导体上，沿轴线方向均匀地流着 $I = 3$ A 的电流。作一个半径 $r = 5$ cm、长 $l = 5$ cm 且与电流同轴的圆柱形闭合曲面 S，则该曲面上的磁感应强度 $\vec{B}$ 沿该圆柱形闭合曲面的积分 $\oiint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S} =$ ________________。



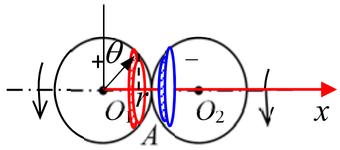
填空题 1 图

解一：由于无限长直圆柱形导体中电流沿轴线方向均匀分布，故电流分布具有**轴对称性**，则由**安培环路定**

理可求出磁场大小，磁场线分布是以轴为中心的同心圆环。所以同轴圆柱形**闭合曲面** S 的上底面、下底面、侧面磁通量为零，因此 $\vec{B}$ 沿圆柱形闭合曲面的积分 $\oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$ 。

解二：直接根据稳恒磁场的高斯定理有：$\oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$

2. 如图所示，有两个半径相同的均匀带电绝缘体球面，O_1 为左侧球面的球心，它带的是正电；O_2 为右侧球面的球心，它带的是负电，两者的面电荷密度相等。当它们绕 $\overline{O_1O_2}$ 轴旋转时，两球面相切处 A 点的磁感强度大小 B_A =______。



填空题 2 图

解：绕 $\overline{O_1O_2}$ 轴旋转时，两球面上电荷将形成**圆形电流集合，建立坐标并取圆形电流微元**如图所示。**则各圆形电流微元的**电流强度微元分别为：

$$\mathrm{d}I_+ = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\sigma 2\pi r\cdot r\mathrm{d}\theta}{2\pi/\omega} = \sigma\omega r^2\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}I_- = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{-\sigma 2\pi r\cdot r\mathrm{d}\theta}{2\pi/\omega} = -\sigma\omega r^2\mathrm{d}\theta$$

式中，ω 为绕 $\overline{O_1O_2}$ 轴旋转角速度，σ 为面电荷密度

因两球面相切处 A 点处于左右带正负电荷两球面球心连线的**对称中心**，则由**圆形电流**圆环轴线上任一点磁感应强度公式 $B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$ 和磁场叠加原理可得：

两球面相切处 A 点的磁感强度大小 B_A =0

或解析法：

由**典型电流：圆形电流**圆环轴线上任一点磁感应强度公式 $B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$ 和磁场叠加原理有：

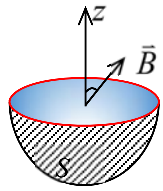
两球面相切处 A 点的磁感强度大小为：

$$\begin{aligned}
B_A &= \int\frac{\mu_0\sigma\omega r^2\mathrm{d}\theta r^2}{2[r^2+(R-x)^2]^{3/2}} - \int\frac{\mu_0\sigma\omega r^2\mathrm{d}\theta r^2}{2[r^2+(x-R)^2]^{3/2}}\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mu_0\sigma\omega(R\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta}{2[(R\cos\theta)^2+(R-R\sin\theta)^2]^{3/2}} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mu_0\sigma\omega(R\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta}{2[(R\cos\theta)^2+(R+R\sin\theta)^2]^{3/2}}\\
&= \mu_0\sigma\omega R[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^4\theta\mathrm{d}\theta}{2(2-2\sin\theta)} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^4\theta\mathrm{d}\theta}{2(2+2\sin\theta)}]\\
&= \mu_0\sigma\omega R[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos^4\theta\mathrm{d}\theta}{4(1-\sin^2\theta)}]\\
&= \mu_0\sigma\omega R[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{-\cos^2\theta\mathrm{d}\cos\theta}{4}]\\
&= 0
\end{aligned}$$

3. 一磁场的磁感应强度为 $\vec{B}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ (T)，则通过一半径为 R、开口向 z 正方向的半球壳表面的磁

通量大小为 ____________________ Wb。

解：半球壳表面 S 与 S 边线所围**平面构成封闭高斯面**，如图所示。



则由磁场的高斯定理有：

$$\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} + \int_{平} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = 0$$

所以通过半壳球表面 S 的磁通量为：

$$\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{平} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 - \int_{平} (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})\cdot(\mathrm{d}S\vec{k}) = -\pi R^2 c$$

故半球壳表面的磁通量大小为：$\pi R^2 c$

4. 一质点带有电荷 q =8.0×10 $^{-10}$ C，以速度 v =3.0×10 ^{5} m·s^{-1} 在半径为 R =6.00×10 $^{-3}$ m 的圆周上，作匀速率圆周运动。则该带电质点在圆周轨道中心所产生的磁感应强度大小 B =________________，该带电质点圆周轨道运动的磁矩大小 P_{m} =____________________。(已知：真空磁导率 μ_0 =4π×10^{-7} H·m^{-1})

解：点电荷作匀速率圆周运动，形成**圆形电流，**其电流强度为 $I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{q}{2\pi R/v} = \dfrac{qv}{2\pi R}$

由**典型电流：圆形电流圆心处磁感应强度**大小公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$，有：

该带电质点在圆周轨道中心所产生的磁感应强度大小为：

$$B = \frac{\mu_0}{2R}\cdot\frac{qv}{2\pi R} = \frac{\mu_0 qv}{4\pi R^2} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 8.0\times 10^{-10}\times 3.0\times 10^{5}}{4\pi\times(6.00\times 10^{-3})^2} \approx 6.67\times 10^{-7}\ (\mathrm{T})$$

再由**磁矩定义**式 $\vec{P}_m = IS\vec{e}_n$，有该带电质点圆周轨道运动的磁矩大小为：

$$P_m = \frac{qv}{2\pi R}\cdot \pi R^2 = \frac{qvR}{2} = \frac{8.0\times 10^{-10}\times 3.0\times 10^{5}\times 6.00\times 10^{-3}}{2} = 7.20\times 10^{-7}\ (\mathrm{A\cdot m^2})$$

5. 一平面试验线圈的磁矩大小 P_{m} 为 1×10^{-8} A·m^2，把它放入待测磁场中的 A 处(试验线圈是如此之小，以致可以认为它占据的空间内磁场是均匀的)。当此线圈的磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ 与 z 轴平行时，所受的磁力矩 $\vec{M}$ 的大小是 M = 5×10^{-9} N·m，方向沿 x 轴方向；当此线圈的磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ 与 y 轴平行时，所受的磁力矩为零。则空间 A 点处的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小为 ____________________ ，方向为 ____________________ 。

解：设磁感应强度 $\vec{B}$ 在直角坐标系中表示为：$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$，则由**磁力矩定义式** $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$，

有：当此线圈的磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ 与 z 轴平行时，**磁力矩为：** $\vec{M} = P_m\vec{k}\times(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = -P_m B_y\vec{i} = M\vec{i}$

由此知：磁感应强度 $\vec{B}$ 的 **y 轴正方向分量**为：$B_y = -\dfrac{M}{P_m} = \dfrac{5\times 10^{-9}}{1\times 10^{-8}} = -5\times 10^{-1}\ (\mathrm{T})$

当此线圈的磁矩 $\vec{P}_m$ 与 y 轴平行时，**磁力矩为：** $\vec{M} = P_m\vec{j} \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = 0$

由此知：$B_x = 0$ ，$B_z = 0$，即磁感应强度 $\vec{B}$ 只有 y 轴分量，因此有：

空间 A 点处的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小为：5×10^{-1}（T）

方向为：y 轴负方向

6. 已知空间各处的磁感应强度 $\vec{B}$ 都沿 x 轴正方向，而且磁场是均匀的，$B = 1$ T。则穿过一面积为 2 m^2，若与 yz 平面平行的平面的磁通量为 ________________ ，若与 xz 平面平行的平面的磁通量为________________，若与 y 轴平行，又与 x 轴成 45°角平面的磁通量为________________。

解：(1) 平面与 yz 平面平行时，则其法线与 x 轴平行，有磁通量

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \pm 2 \ \ \text{Wb}$$ （没指明平面方向，故磁通量有正负）

(2) 平面与 xz 坐标面平行，则其法线与 $\vec{B}$ **垂直**，有磁通量

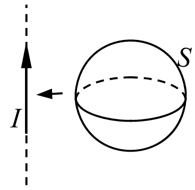
$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = 0$$

(3) 平面与 y 轴平行，又与 x 轴成 45° 角，其法线与 $\vec{B}$ 的夹角为 45° **或** 135° ，故有磁通量

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos 45° = 1.41 \ \ \text{Wb}$$

或 $$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos 135° = -1.41 \ \ \text{Wb}$$ （没指明平面方向，故磁通量有正负）

7.如图所示，在无限长载流直导线附近，闭合球面 S 向导线靠近，则穿过球面 S 的磁通量 Φ_m 将__________，球面 S 上各点的磁感应强度 **B** 的大小将_________。（选填："增大"、"不变"、"减小"）



填空题 7 图

解：由磁场的高斯定理 $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 知：当闭合球面 S 向导线靠近过程中，穿过球面 S 的磁通量 Φ_m 将不变

再由**无限长直线型电流**磁场公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$ 知：当闭合球面 S 向导线靠近过程中，球面 S 上各点的磁感应强度 **B** 的大小将 **增大** 。

三、简答题：

1. 高斯定理揭示出磁场是无源场，这里的源指的是什么？是无本之源的意思吗？

答：高斯定理揭示出磁场是无源场，这里的**源**是指"磁单极子"或者"磁荷"这样的物理客体源，并非是无本之源的意思。根据第 10 章第一节知：产生磁场的源就是运动的电荷，即 $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E}$ 。

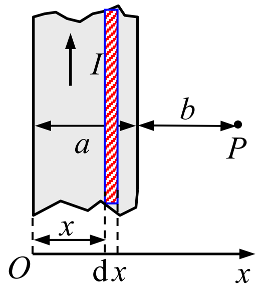
2. 能否用安培环路定理求解一有限长载流导线的的磁感应强度，为什么？

答：不能用安培环路定理求解一**有限长载流导线**的的磁感应强度。

因为有限长的载流导线的磁感应强度分布**不具有对称性，不能找到**一个积分路径，在这个路径上 $\vec{B}$ 的大小是一个常数，使得环量 $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 积分时，能将 B 提到积分号外。

四、计算题:

1. 有一无限长通有电流 I、宽度为 a、厚度不计的扁平铜片，电流 I 在铜片上均匀分布，求在铜片外与铜片共面、离铜片右边缘 b 处的 P 点 (如图所示) 的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小和方向。



（要求：图上画出坐标和所取微元）

解：建立如图 Ox 坐标轴，在坐标 x 处取宽度为 $\mathrm{d}x$ 的**窄条电流微元**，其上电流强度为

$$\mathrm{d}I = \frac{I}{a}\mathrm{d}x$$

则由**典型电流：无限长直线型电流**磁场公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

有**窄条电流微元**在 P 点产生的磁感应强度大小为：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{(a+b-x)}$$

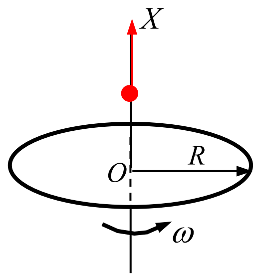
方向为：$\otimes$

因各**窄条电流微元**在 P 点产生的磁感应强度方向相同，故 P 点磁感应强度大小为：

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

方向为：$\otimes$，即垂直于页面向里

2. 如图所示，半径为 R，电荷线密度为 λ ($\lambda > 0$)的均匀带电的圆线圈，绕过圆心与圆平面垂直的轴以角速度 ω 转动，求圆线圈轴线上任一点的 $\vec{B}$ 的大小及其方向。



计算题 2 图

（要求：图上画出坐标和所取微元）

解：建立坐标如图所示。

则绕过圆心且与圆平面垂直的轴以角速度 ω 转动均匀带电的圆线圈形成**圆形电流**，

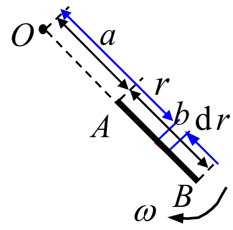
其电流强度为 $\quad I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{2\pi R\lambda}{2\pi/\omega} = R\lambda\omega$

由**典型电流：圆形电流**圆环轴线上任一点磁感应强度公式 $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$

有圆线轴线上任一点 x 处的 $\vec{B}$ 的大小为 $\quad B = B_x = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 R^3 \lambda\omega}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$

$\vec{B}$ 的方向与 x 轴正向一致.

3. 带电刚性细杆 AB，电荷线密度为 λ，绕垂直于直线的轴 O 以 ω 角速度匀速转动（O 点在细杆 AB 延长线上），求 O 点的磁感应强度 $\vec{B}_o$ 及运动带电杆 AB 产生的磁矩 $\vec{P}_m$；



计算题 3 图

（要求：图上画出坐标和所取微元）

解：带电细杆绕轴 O 匀速转动，等效为一系列环形电流。

建立坐标并在 AB 上距 O 点 r 处取**运动电荷微元** $\mathrm{d}r$ ，如图所示。

运动电荷微元带电量 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}r$

$\mathrm{d}q$ 旋转对应的圆形电流强度为 $\mathrm{d}I = \dfrac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q = \dfrac{\lambda\omega}{2\pi}\mathrm{d}r$

由**典型电流**：圆形电流圆心处磁感应强度公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

有它在 O 点产生的磁感应强度大小为 $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \dfrac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}r}{r}$

再由**磁场叠加原理**有运动带电杆 AB 产生的 O 点的磁感应强度 $\vec{B}_o$ 大小为：

$$B_O = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

$\lambda > 0$ 时磁场的方向为：⊗，即垂直于页面向里

由**典型电流**：圆形电流磁矩公式 $\vec{P}_{\mathrm{m}} = \pi r^2 I \vec{e}_n$

有**运动电荷微元**产生的磁矩大小为 $\mathrm{d}P_{\mathrm{m}} = \pi r^2 \mathrm{d}I = \dfrac{\lambda\omega}{2}\cdot r^2\mathrm{d}r$

再由**叠加原理**有运动带电杆 AB 产生的磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ 大小为：

$$P_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}P_{\mathrm{m}} = \frac{\lambda\omega}{2}\int_a^{a+b} r^2\mathrm{d}r = \frac{\lambda\omega}{6}\left[(a+b)^3 - a^3\right]$$

$\lambda > 0$ 时磁矩的方向为：⊗，即垂直于页面向里