西南交通大学 2019－2020 学年第一学期期末考试

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B(A 卷) 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

姓 名

学 号

班 级

密封装订线

密封装订线

密封装订线

说明：（1）本试卷共四页，17 道题；

（2）试卷中 $\boldsymbol{A}^T$ 表示矩阵 A 的转置，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示可逆方阵 A 的逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 表示方阵 A 的伴随矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 表示 A 的行列式.

一、选择题（5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 下列计算正确的有（ ）个.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 6\boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{b} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^7 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{b}^7 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c}^7 \end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^8 & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}^8 & 1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a}^8 \end{pmatrix}$.

A. 1；　B. 2；　C. 3；　D. 4.

2. 已知四个 5 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{V}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为（ ）

A. 5；　B. 4；　C. 3；　D. 不能确定.

3. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 $m\times 4$ 矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性无关，且 $\alpha_4=3\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3$，向量 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4$，则方程组 $Ax=\beta$ 的通解为（ ）

A. $x=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix},k\in R$；　B. $x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-1\end{pmatrix},k\in R$；

C. $x=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$；D. $x=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

4. 设A是 3 阶矩阵，A的每一行元素之和均为 4，$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$Ax=0$的两个解，则下列结论不正确的是（　）

A. 4 是A特征值，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是对应特征值 4 的特征向量；

B. 矩阵A的三个特征值为 0,0,4；

C. 矩阵A不能相似对角化；

D. 矩阵A可以相似对角化.

5. 若A是n阶正定矩阵，则下列论断不正确的是（　）

A. $A+E$的n个特征值全大于 1；　B. A^T 也是正定矩阵；

C. 存在n阶可逆矩阵U，使得$A=U^TU$；　D. 以上结论都不正确.

二、填空题（5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

6. 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}=$________.

7. 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是单位正交向量组，则向量$\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$的长度

$\|\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3\|=$________.

8. 已知方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a=$________.

9. 设三阶矩阵A的特征值为$-1,1,2.$ 则行列式$\left|A^3+2A^2-A+E\right|=$________.

10. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+2x_1x_2+ax_2x_3$是正定二次型，

则a的取值范围为________.

三、解答题（5 小题，每小题 10 分，共 50 分）

11． 设A是三阶矩阵，$|A|=4$，X是满足等式$XA^*=A^{-1}+2X$的三阶矩阵.

判定矩阵X是否可逆？并在可逆时，求其逆矩阵.

12. 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}a\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

（1）求参数a的值，使得向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关；

（2）在（1）条件下求向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表出.

13. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}$，求解矩阵方程$AX=B$.

14. 求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6\end{cases}$的通解.

15. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax=2x_1{}^2-x_2{}^2+ax_3{}^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$是 3 元实二次型，已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的秩为 2.

(1) 求a的值；

(2) 求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型.

四、证明题（2 个小题，每小题 5 分，共 10 分）

16. 设η^*是非齐次方程组$Ax=\beta$的一个解$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是其导出组$Ax=0$的一组基础解系，证明：$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\eta^*+\xi_2,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

17. 设n阶矩阵A满足$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，且$E-A$可逆，$B=(E-A)^{-1}(E+A)$，证明：$B$是正交矩阵.