西南交通大学 2015－2016 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 6010500　课程名称 线性代数 A　考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

班　级＿＿＿＿＿　学　号＿＿＿＿＿　姓　名＿＿＿＿＿

密封装订线　密封装订线　密封装订线

一. 选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1.设 A,B 是两个 n 阶矩阵，下列说法正确的是（　　　）.

(A)若 A 与 B 相似，则 A 与 B 合同；　(B)若 A 与 B 合同，则 A 与 B 相似；

(C)若 A,B 是对称矩阵，则 A 与 B 相似当且仅当 A 与 B 合同；　(D)以上说法都不对

2. 已知向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 中线性相关，$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5\}$ 线性无关。则下列说法正确的是（　B　）

(A) $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 的秩为 5；　(B) $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 的秩为 4；

(C) α_5 可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的线性表示；　(D) α_3 可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5\}$ 的线性表示。

3.设 A 为 n 阶可逆矩阵，$n\geq 3$. 则下列等式正确的是（　A　）

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；　(B) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$；

(C) $(A^*)^*=|A|^{n}A$；　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$。

4.设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=m$，以下结论成立的是（　B　）

(A) A 的行向量组线性相关；　(B) A 的行向量组线性无关；

(C) A 的列向量组线性相关；　(D) A 的列向量组线性无关。

二. 填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1.设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 $1,2,3$，则 $|4A^{-1}-E|=$ ___1___。

2.设 $\alpha^T=(1,1,1),\beta=(1,0,k)$ 且 $\alpha\cdot\beta$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$ ___2___。

3.设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 有解，则 $a=$ ___1 或 2___。

4.设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&2&3\\-1&2&1&0\\1&2&2&1\\-1&2&3&4\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ ___-4___。

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是 $-\sqrt{6}<t<\sqrt{6}$ _。

三. 计算和解答题（每题 12 分，共计 48 分）

1. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+a\end{pmatrix}$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。求 a 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组。

解 因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，故

$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)|=a^3(a+10)=0$ （4 分）

从而 $a=0$ 或 $a=-10$. （2 分）

当 $a=0$ 时，α_1 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组。 （2 分）

当 $a=-10$ 时，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （2 分）

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组。（2 分）

法 2：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} a+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+4 \end{pmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+4 \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & -a(a+10) \end{pmatrix}$.　（6 分）

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故$a=0$ 或 $a=-10$.　（2 分）

当$a=0$时，α_1是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组。　（2 分）

当$a=-10$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组。（2 分）

2. 求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=2 \end{cases}$的通解。

解 线性方程组的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$　（4 分）

同解方程组$\begin{cases} x_1-4x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+2x_4=-1 \end{cases}$　（2 分）

对应齐次方程组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　（2 分）

方程组的一个特解为$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　（2 分）

故方程组的通解为$x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$， $k_1,k_2\in R$.　（2 分）

3. 设A为三阶实对称矩阵，其特征值分别为$1,2,-2$，$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是矩阵$A$属于特征值 1 的特征向量，$B=A^5-4A^3+E$。验证$\alpha$是$B$的特征向量，并求$B$的全部特征值和特征向量。

解：由于α是矩阵A属于特征值 1 的特征向量，故$A\alpha=\alpha$.　（2 分）

从而 $B\alpha=(A^5-4A^3+E)\alpha=\alpha-4\alpha+\alpha=(-2)\alpha$，即$\alpha$是$B$的属于特征值$-2$的特征向量。（2 分）

B的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$.　（2 分）

B的属于特征值-2特征向量为$k\alpha$，$k\neq 0$.　（2 分）

由于B为实对称矩阵，B的属于特征值1的特征向量与属于特征值-2的特征向量正交。故B的属于特征值1的特征向量$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$满足$x_1-x_2+x_3=0$。　（2 分）

故B的属于特征值1的特征向量为$\xi=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，　$k_1^2+k_2^2\neq 0$.　（2 分）

4. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$，利用正交变换将其化为标准型，并写出所作的正交变换。

解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.　（2 分）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

故 A 的特征值为$\lambda=-1,\lambda=5$.　（2 分）

当$\lambda_1=-1$时，解方程组$(-E-A)x=0$

$$-E-A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为：$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　（2 分）

令 $\beta_1=\xi_1$，　$\beta_2=\xi_2-\frac{<\xi_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

单位化：$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$。　（2 分）

当 $\lambda_2=5$ 时，解方程组 $(5E-A)x=0$

$$5E-A=\begin{pmatrix}4&2&-2\\2&4&2\\-2&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化：$p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$　（2 分）

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，作正交变换 $x=Py$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.　（2 分）

四．　证明题（共计 7 分）

14. A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵，1）若 $A^2=E$. 证明 $3E-A$ 是可逆矩阵；

法 1: $(3E-A)(3E+A)=9E-A^2=8E$, $(3E-A)(\frac{3E+A}{8})=E$,所以 $3E-A$ 是可逆矩阵

法 2: 因为 $A^2=E$,所以 A 的特征值为 1 或-1,故 $3E-A$ 的特征值为 2 或 4，$|3E-A|\neq 0$,

所以 $3E-A$ 是可逆矩阵

2）若存在非零矩阵 B 使 $AB=0$，则 $|A|=0$.

法 1:假设 $|A|\neq 0$,则 A 可逆,有 $A^{-1}AB=0$, $B=0$,矛盾.命题得证.

法 2:因为 $B\neq 0$,所以 $AX=0$ 有非零解.由克莱姆法则有 $|A|=0$