《大学物理 AII》作业　　No.8　量子力学基础

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 _______

*****************************本章教学要求*****************************

1、掌握物质波公式、理解实物粒子的波粒二象性特征。
2、理解概率波及波函数概念。
3、理解不确定关系，会用它进行估算；理解量子力学中的互补原理。
4、会用波函数的标准条件和归一化条件求解一维定态薛定谔方程。
5、理解薛定谔方程在一维无限深势阱、一维势垒中的应用结果、理解量子隧穿效应。

一、选择题：

1、如果两种不同质量的粒子，其德布罗意波长相同，则这两种粒子的 [A]

(A）动量相同　　(B) 能量相同
(C) 速度相同　　(D) 动能相同

解： 由德布罗意公式 $p=\dfrac{h}{\lambda}$，当德布罗意波长相同时，粒子动量相同，而由于质量不等，其能量 $E=mc^2$， 速度$v=\dfrac{p}{m}$， 动能$E_k=mc^2-m_0c^2$ 均不同。　　故选 **A**

2、静止质量不为零的微观粒子作**高速**运动，这时粒子物质波的波长λ与速度 v 有如下关系：

[C]　(A) $\lambda\propto v$　　(B) $\lambda\propto\dfrac{1}{v}$

(C) $\lambda\propto\sqrt{\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{1}{c^2}}$　　(D) $\lambda\propto\sqrt{c^2-v^2}$

解： 由德布罗意公式和相对论质 — 速公式有 $p=\dfrac{h}{\lambda}=mv=\dfrac{m_0v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

得粒子物质波的波长 $\lambda=\dfrac{h}{m_0}\sqrt{\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{1}{c^2}}$，即 $\lambda\propto\sqrt{\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{1}{c^2}}$　　故选 **C**

3、若α 粒子在磁感应强度大小为 B 的均匀磁场中沿半径为 R 的圆形轨道运动，则粒子的德布罗意波长是

[B]　(A) $\dfrac{h}{eRB}$　　(B) $\dfrac{h}{2eRB}$　　(C) $\dfrac{1}{2eRB}$　　(D) $\dfrac{1}{eRBh}$

解：由 $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ 和 $F_n=m\dfrac{v^2}{R}$，有半径 $R=\dfrac{mv}{qB}=\dfrac{mv}{2eB}$，所以德布罗意波长

$\lambda=\dfrac{h}{mv}=\dfrac{h}{2eBR}$。　　故选 **B**

4、关于不确定性关系 有以下几种理解，正确的是 [C]

(A) 微观粒子的动量不可能确定

(B) 微观粒子的坐标不可能确定

(C) 微观粒子的动量和坐标不可能同时确定

(D) 不确定关系仅适用于电子和光子等微观粒子，不适用于其他宏观粒子

解：不确定关系式 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\hbar$ 微观粒子的位置和动量不能同时准确确定。

5、将波函数在空间各点的振幅同时变为原来的 D 倍，则粒子在空间的分布概率将[D]

(A) 增大 D^2 倍　　(B) 增大 $2D$ 倍

(C) 增大 $1/D$ 倍　　(D) 不变

解：教材 172.波函数必须满足归一化条件。

6、已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}\quad(-a\leq x\leq a)$$

那么粒子在 $\boldsymbol{x}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}$ 处出现的概率密度为

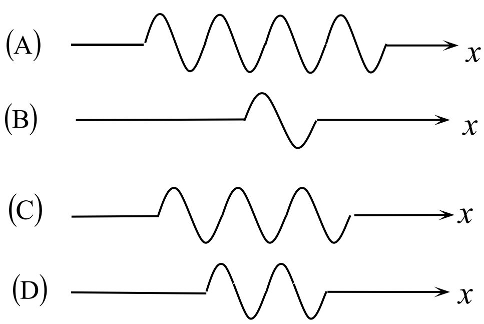
[B]　(A) $\dfrac{1}{2a}$　　(B) $\dfrac{1}{a}$　　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$　　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

解：概率密度 $|\psi(x)|^2=\dfrac{1}{a}\cos^2(\dfrac{3\pi x}{2a})$

将 $\boldsymbol{x}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}$ 代入上式，得 $|\boldsymbol{\psi(x)}|^2=\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}\cos^2(\dfrac{3\pi}{2\boldsymbol{a}}\cdot\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}$

7、设粒子运动的波函数图线分别如图(A)、(B)、(C)、(D)所示，那么其中确定粒子动量精确度最低的波函数是哪个图？

[B]



解：由不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\hbar$ 可知，Δx 大，Δp_x 小，图(B) Δx 最小，所以 Δp_x 最大，确定粒子动量的精确度最低。

二、填空题：

1、法国科学家德布罗意在爱因斯坦光子理论的启发下提出，具有一定能量 E 和动量 P 的实物粒子也具波动性，这种波称为（物质）波；其联系的波长 λ 和频率 ν 与粒子能量 E 和动量 P 的关系为（ $E=h\nu$ ）、（ $p=\dfrac{h}{\lambda}$ ）。德布罗意的假设，最先由（戴维孙-革末）实验得到了证实。因此实物粒子与光子一样，都具有（波粒二象性）的特征。

2、玻恩提出一种对物质波物理意义的解释，他认为物质波是一种（概率波），物质波的强度能够用来描述（微观粒子在空间的概率密度分布）。

3、按照玻恩解释，波函数的强度 $\left|\psi^2\right|$，代表粒子（在空间的概率密度分布）。由于粒子在整个空间必定出现，因此 $\left|\psi^2\right|$ 对整个空间的积分 $\int\left|\psi^2\right|\mathrm{d}V=1$，这称为波函数的（归一化）条件。此外波函数还应满足（单值）、（有限）和（连续）的标准条件，只有满足以上条件的波函数才是有物理意义的波函数。

4、一维无限深势阱中，粒子的能量是($E=n^2\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ （n=1,2,3......）)，粒子在势阱中不同位置出现的概率（不相等）。（填相等或不相等）

5、低速运动的质子 P 和 α 粒子，若它们的德布罗意波长相同，则它们的动能之比 $E_{\mathrm{p}}:E_{\alpha}$ = 4:1 。

解：由经典关系，动能 $E=\dfrac{p^2}{2m}$，所以 $E_{\mathrm{p}}:E_{\alpha}=m_{\alpha}:m_{\mathrm{p}}=4:1$

6、光子的波长 $\lambda=4000\,\mathrm{\mathring{A}}$，如果确定此波长的精确度 $\Delta\lambda/\lambda=10^{-6}$，试求此光子位置的不确定量____________

解： 由公式 $p=\dfrac{h}{\lambda}$ 知，$\Delta p_x=-\dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda=-\dfrac{h}{4000}\times10^{-6}$

利用不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geq h$，可得光子的 x 坐标满足

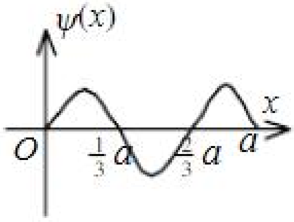
$\Delta x\geq\dfrac{h}{\Delta p_x}=0.4\mathrm{m}$ （或者 $\Delta x\geq\dfrac{\hbar}{\Delta p_x}=0.06\mathrm{m}$ ）

7、微观粒子的下述性质可由哪个不确定关系式子给出？

1） 微观粒子永远不可能静止 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geq h$ 或者 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\hbar$。

2） 原子光谱存在自然宽度$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$或者 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$。

8、粒子在一维无限深方势阱中运动。图示为粒子处于某一能态上的波函数$\psi(x)$的曲线，则粒子出现概率最大的位置为________、________、________

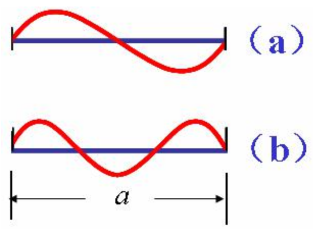


解： a/6、a/2、5a/6

9、量子力学中的隧道效应是指________________。这种效应是微观粒子________ 的表现。

解： 微观粒子能量 E 小于势垒 U_0 时，粒子有一定的概率穿透势垒的现象；波动性

10、在宽为 a 的一维无限深势阱中运动的粒子，它的一个定态波函数如图(a)所示，对应的总能量为 4eV, 若它处于另一个波函数如图(b)的态上，它的总能量是________ eV；粒子的零点能是________ eV



解： 一维无限深势阱的能级表达式为：

$$E_n = n^2 E_1$$

由（a）图知：n=2，即 $E_2 = 2^2 E_1 = 4E_1 = 4\text{eV} \Rightarrow E_1 = 1\text{eV}$

由（b）图知：n=3，即 $E_3 = 3^2 E_1 = 9E_1 = 9\text{eV}$

三、计算题：

1、 一个质子放在一维无限深势阱中，阱宽 $a = 10^{-14} m$，质子质量为$1.67 \times 10^{-27}\,\mathbf{kg}$。

（1） 质子的基态能量为多少？

（2） 由 $\boldsymbol{n} = 2$ 跃迁到 $\boldsymbol{n} = 1$ 态时，质子放出多大能量的光子？

解：（1）由一维无限深势阱中粒子的能量公式 $\boldsymbol{E_n} = \boldsymbol{n}^2 \boldsymbol{E}_1 = \dfrac{\boldsymbol{n}^2 \boldsymbol{h}^2}{8\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}^2}$，

$\boldsymbol{n} = 1$时为基态能量：$\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (10^{-14})^2} = 3.29 \times 10^{-13}\,\mathbf{J}$

（2）由 $\boldsymbol{n} = 2$ 跃迁到 $\boldsymbol{n} = 1$ 态时，质子放出光子的能量为：

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 = (2^2 - 1)\boldsymbol{E}_1 = 9.87 \times 10^{-13}\,\mathbf{J}$$

2、若在一维无限深势阱中运动的粒子的量子数为 n，试求：

（1） 距势阱的左壁 1/4 宽度内发现粒子的概率是多少？

（2） n=3 时何处发现粒子的概率最大？

解：（1）波函数为： $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$

距势阱的左壁 1/4 宽度内发现粒子的概率为：

$$W(0-\frac{a}{4})=\int_0^{\frac{a}{4}}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{4}}\sin^2\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{4}}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{a}x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}(\frac{a}{4}-\frac{a}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2})$$

（2）

(a) 解法一

要求粒子出现概率最大的各个位置，就有：

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}<0$，根据 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0,\Rightarrow\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}|\psi_3(x)|^2}{\mathrm{d}x}=0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}|\psi_3(x)|^2}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{a}.2.\sin\frac{3\pi x}{a}.\frac{3\pi}{a}\cos\frac{3\pi x}{a}=\frac{6\pi}{a^2}\sin\frac{6\pi x}{a}=0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow\sin\frac{6\pi x}{a}=0\Rightarrow\frac{6\pi x}{a}=n\pi,n\text{取整数。}$$

$x=0,\frac{a}{6},\frac{a}{3},\frac{a}{2},\frac{2a}{3},\frac{5a}{6},a$ 处，概率密度有极值。

要取极大值，得有

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}<0\Rightarrow\frac{6\pi}{a^2}.\frac{6\pi}{a}\cos\frac{6\pi x}{a}<0\Rightarrow\cos\frac{6\pi x}{a}<0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow 2n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{6\pi x}{a}<2n\pi+\frac{3\pi}{2}$$

当 $n=0$ 时，有 $\frac{1}{12}a<x<\frac{3}{12}a$；当 $n=1$ 时，有 $\frac{5}{12}a<x<\frac{7}{12}a$

当$n=2$时，有$\frac{3}{4}a<x<\frac{11}{12}a$

由上面的分析，得出，在$x=\frac{a}{6},\frac{a}{2},\frac{5a}{6}$处，粒子出现的概率最大。

（b）解法二

$$\left|\psi_3(x)\right|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}=\frac{2}{a}\left(\frac{1-\cos\frac{6\pi x}{a}}{2}\right)=\frac{1-\cos\frac{6\pi x}{a}}{a}$$，上式要取极大值，只有

$$\cos\frac{6\pi x}{a}=-1\Rightarrow\frac{6\pi x}{a}=(2n+1)\pi\Rightarrow x=\frac{2n+1}{6}a$$

$$\Rightarrow x=\frac{a}{6},\frac{a}{2},\frac{5a}{6}$$

3、 设一粒子沿 x 方向运动，其波函数为$\psi(x)=\dfrac{A}{1+ix}$。

（1） 将此波函数归一化；

（2） 在何处找到粒子的概率最大？

解：由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{A}{1+ix}\right|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{1+x^2}dx=A^2\pi=1$$

$$A=\sqrt{1/\pi}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+ix)}$$

（2）概率密度

$$|\psi(x)|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+ix)}\right|^2=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\psi(x)|^2=0,$ 得 $x=0$，即在 x=0 处粒子的概率密度最大。

四、 简答题

1、实物粒子的德布罗意波与经典波函数的本质区别是什么？

解：实物粒子的德布罗意波是概率波，它与经典波电磁波、机械波不同。**德布罗意波是概率波，其波函数不表示某种实在的物理量在空间的波动，其振幅无实在意义。**它的波函数振幅的平方或波的强度表示粒子在空间某处出现的概率密度。在经典波中，波函数代表实在物理量的变化，例如机械波的波函数表示质点振动位移的变化规律，电磁波的波函数表示电场强度 E 或磁场强度 B 的变化规律。

2、不确定关系对宏观物体是否适用？为什么经典力学在考虑粒子运动规律时都不考虑其波动性？

解：不确定性关系原理是适用于任何物体，只不过由于宏观物体的空间尺寸太大，不确定关系可以忽略。经典力学是宏观、低速下的力学，宏观粒子的波动性十分微弱、研究运动时不予考虑。