西南交通大学 2012－2013 学年第(2)学期考试评分标准

课程代码 6011320 课程名称 高等数学 II 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三				四	五	六	七	总成绩
			1	2	3	4					
得分											

阅卷教师签字：________________

密封装订线　　姓　名________　　学　号________　　班　级________

一、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1．设空间区域Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$z\ge 0$，Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$，则 C ．

（A）．$\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} x\,dxdydz$；　（B）．$\iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} y\,dxdydz$；

（C）．$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} z\,dxdydz$；　（D）．$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,dxdydz$

2. 设 f 为可微函数，$x-az=f(y-bz)$，则 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{A}$。

(A)．1；　(B)．a；　(C)．b；　(D)．$a+b$。

3．二次积分 $\int_0^2 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 交换积分次序后为 A 。

（A）$\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$；　（B）$\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^4 dy\int_y^2 f(x,y)dx$；　（D）$\int_0^4 dy\int_2^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$。

4. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在（0，0）点 B .

(A)．连续，偏导函数都存在；　(B)．不连续，偏导函数都存在；

(C)．不连续，偏导函数都不存在；　(D)．连续，偏导函数都不存在。

二、填空题（每小题 4 分，共计 16 分）

1．设 $u(x,y,z)=x^y z$，则 $du|_{(1,2,2)}=$ $\underline{4dx+dz}$。

2．曲线 $\begin{cases} y=1-2x\\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}x^2\end{cases}$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-5}$，法平面方程为

$\underline{(x-1)-2(y+1)-5(z+2)=0}$。

3．函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向导数是 $\underline{\dfrac{98}{13}}$。

4．若函数 $f(x,\ y)$ 在矩形区域 D：$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ 上连续，且

$$xy\left(\iint_D f(x,\ y)dxdy\right)^2=f(x,\ y)-1\ ,$$

则 $f(x,\ y)=$ ____$\underline{4xy+1}$______.

三、解答下列各题（每小题 9 分，共 32 分）

1．计算 $I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$。

解：$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}r^2dr$

$=\dfrac{14}{3}\pi^4$

2．设 $w=f(t)$，$t=\varphi(xy,\ x^2+y^2)$，其中 f 与 φ 分别具有二阶连续的导数与偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

解:

令：$u=xy$，$v=x^2+y^2$，则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f'(t)\left(y\frac{\partial t}{\partial u}+2x\frac{\partial t}{\partial v}\right)\ .$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f''(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')^2+f'(t)(y^2\varphi_{11}''+4xy\varphi_{12}''+4x^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')$$

3．已知直线 l_1：$\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\\ x=0\end{cases}$，$l_2$：$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1\\ y=0\end{cases}$，求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

解:

直线 l_1 与 l 的方向向量分别为

$$\vec{\mathbf{s}}_1=\left\{0,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right\}\times\{1,\ 0,\ 0\}=\left\{0,\ \frac{1}{c},\ -\frac{1}{b}\right\},$$

$$\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\frac{1}{a},\ 0,\ -\frac{1}{c}\right\}\times\{0,\ 1,\ 0\}=\left\{\frac{1}{c},\ 0,\ \frac{1}{a}\right\},$$

作 $\vec{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{s}}_1\times\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\dfrac{1}{ca},\ -\dfrac{1}{bc},\ -\dfrac{1}{c^2}\right\}$,

取直线 l_1 上的一点 $P_1(0,\ 0,\ c)$，则过点 P_1 且以 $\vec{\mathbf{n}}=\left\{\dfrac{1}{ca},\ -\dfrac{1}{bc},\ -\dfrac{1}{c^2}\right\}$ 为法向量的平面

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0\ ,$$

就是过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

4．计算三重积分 $I=\iiint_\Omega zdxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成的立体.

解：

由 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$ 得 $z^2+3z-4=0$，解得 $z=1$，$z=-4$（舍去）.

因此，得空间区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D：$x^2+y^2\le 3$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\iint\limits_{D} dxdy\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} zdz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} rdr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)dr$$

$$=\frac{13}{4}\pi$$

四、（9 分） $\iint\limits_{D}\sqrt{|y-x^2|}\,d\sigma$，$D$ 为矩形区域：$-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$；

习题册试题

姓　名＿＿＿＿＿＿

密封装订线

五、（9 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上连续，证明：

$$2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2$$

解：

习题册试题

学　号＿＿＿＿＿＿

密封装订线

六、（7 分） 设曲线 L 的方程为 $\varphi(x,\ y)=0$，函数 φ 有连续的一阶偏导数，P 为曲线 L 外一点，线段 PQ 是

点 P 到曲线 L 的最短距离，Q 点在曲线 L 上，证明：曲线 L 上 Q 点处的法线必过 P 点.

解：

设 $P(x_0, \quad y_0)$，$Q(x, \quad y)$，由题设知，$|PQ|$ 必使函数

$$f(x, \quad y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

在条件 $\varphi(x, \quad y) = 0$ 下取最小值.

令：$F(x, \quad y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda\varphi(x, \quad y)$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_0) + \lambda\varphi'_x = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(y - y_0) + \lambda\varphi'_y = 0 \\ \varphi(x, \quad y) = 0 \end{cases},$$

解上面方程组中的前两个方程，得

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\varphi'_y}{\varphi'_x}$$

这就是直线 PQ 的方程，其斜率为 $k_1 = \dfrac{\varphi'_y}{\varphi'_x}$.

又曲线 L 在 Q 点处的切线 QT 的斜率为 $k_2 = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$

所以，$k_1 \cdot k_2 = \dfrac{\varphi'_y}{\varphi'_x} \cdot \left(-\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = -1$

因此，$PQ \perp QT$，所以 PQ 为曲线 L 在点 Q 处的法线.

七、（7 分）设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，用方向导数的定义证明：函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都存在。

证明：$\lim\limits_{\rho\to0} \dfrac{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - f(0,0)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to0} \dfrac{\rho^2\cos\theta\cdot|\sin\theta|}{\rho^2} = \cos\theta\cdot|\sin\theta|$，

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \cos\theta\cdot|\sin\theta|$。由于式中 θ 为任意的方向角，这说明函数沿任意方向的方向导数都存在。