《大学物理 AII》作业 No.01 机械振动（参考答案）

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩_______

************本章教学要求************

1、理解简谐振动的概念，掌握简谐振动的判据。

2、理解简谐振动三个特征量的意义和决定因素，掌握用旋转矢量法研究简谐振动。

3、理解简谐振动的能量特征。

4、掌握同方向同频率简谐振动的合成规律。

5、理解同方向不同频率简谐振动的合成规律，了解拍现象。理解相互垂直简谐振动的合成规律，了解李萨如图。

6、了解阻尼振动、受迫振动和共振的运动特点。

一、填空题

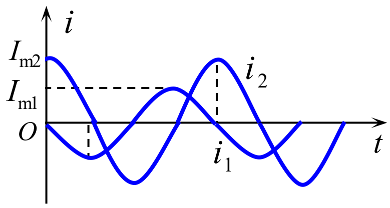
1、描述简谐振动的三个特征量分别是：<u>振幅 A</u>、<u>角频率ω</u>、<u>初相位φ_0</u>；

其中<u>角频率ω</u>由系统本身性质决定；<u>振幅 A 和初相位φ_0</u>由出初始条件决定。

2. 用 60N 的力拉一轻弹簧，可使其伸长 20cm。此弹簧下应挂<u>3.0</u>kg 的物体，才能使弹簧振子作简谐振动的周期$T = 0.2\pi$ (s)。

解: 弹簧的劲度系数$k = \dfrac{F}{\Delta x} = \dfrac{60}{0.2} = 300\left(\mathrm{N \cdot m^{-1}}\right)$，弹簧振子周期$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，

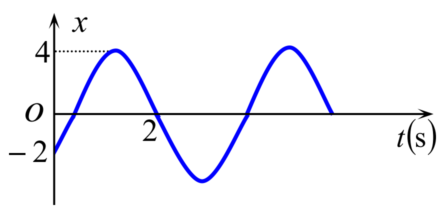
质量$m = \dfrac{T^2}{4\pi^2}\cdot k = \left(\dfrac{0.2\pi}{2\pi}\right)^2 \times 300 = 3.0\,(\mathrm{kg})$



3. 两个同频率余弦交流电$i_1(t)$和$i_2(t)$的曲线如图所示，则位相差$\varphi_2 - \varphi_1 =$ <u>$-\pi/2$</u>。

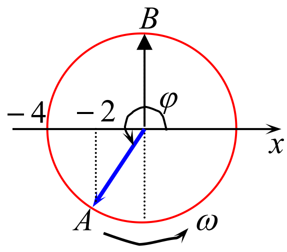
解：由图可知，$i_1(t)$的初相$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$，

$i_2(t)$的初相$\varphi_2 = 0$，所以$\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$。



4. 一质点作简谐振动，其振动曲线如图所示。根据此图，它的周期$T = \underline{\dfrac{24}{7}s = 3.43s}$，用余弦函数描述时初

相位 $\varphi=\frac{4}{3}\pi$或$-\frac{2}{3}\pi$。



解：由曲线和旋转矢量图

可知 $\frac{T}{12}+\frac{T}{2}=2$

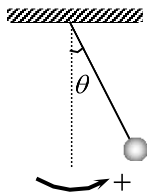
周期 $T=\frac{24}{7}=3.43(\mathrm{s})$

初相 $\varphi=\frac{4}{3}\pi$或$-\frac{2}{3}\pi$ 。

5、一个系统做无阻尼自由振动时，其振动频率由系统自身固有频率决定；当其做受迫振动时，其振动频率由　　外界驱动力频率决定；当阻尼不太大，且满足外界驱动率频率与系统固有频率相等时 ，系统将产生共振现象。

二、选择题

1. 把单摆从平衡位置拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ，如图所示，然后由静止放手任其振动，从放手时开始计时。若用余弦函数表示其运动方程，则该单摆振动的初相位为



[C] (A) θ;　　(B) $\frac{3}{2}\pi$;　　(C) 0;　　(D) $\frac{1}{2}\pi$ 。

解：$t=0$ 时，摆角处于正最大处，角位移最大，速度为零，用余弦函数表示角位移，$\varphi=0$ 。

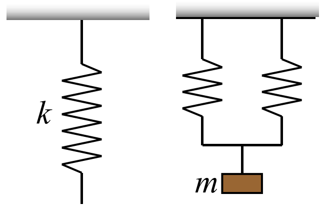
2. 轻弹簧上端固定，下端系一质量为 m_1 的物体，稳定后在 m_1 下边又系一质量为 m_2 的物体，于是弹簧又伸长了 Δx 。若将 m_2 移去，并令其振动，则振动周期为

[B] (A) $T=2\pi\sqrt{\frac{m_2\Delta x}{m_1 g}}$　　(B) $T=2\pi\sqrt{\frac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$

(C) $T=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$　　(D) $T=2\pi\sqrt{\frac{m_2\Delta x}{(m_1+m_2)g}}$

解：设弹簧劲度系数为 k，由题意，$m_2 g=k\cdot\Delta x$，所以 $k=\frac{m_2 g}{\Delta x}$。弹簧振子由弹簧和 m_1 组成，振动周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$ 。

3. 一劲度系数为 k 的轻弹簧截成两等份，将它们并联在一起，下面挂一质量为 m 的物体，如图所示。则振动系统的频率为



[B] (A) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　(B) $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(C) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$　　(D) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

解：每一等份弹簧的劲度系数 $k'=2k$，两等份再并联，等效劲度系数 $k''=2k'=4k$，所以振动频率

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k''}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

4. 一弹簧振子作简谐振动，总能量为 E_1，如果简谐振动振幅增加为原来的三倍，重物的质量增加为原来的两倍，则它的总能量 E 变为

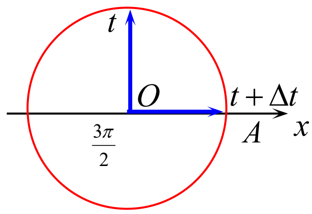
[D] (A) $E_1/9$　　(B) $3E_1/2$　　(C) $3E_1$　　(D) $9E_1$

解：原来的弹簧振子的总能量 $E_1=\dfrac{1}{2}kA_1^{\ 2}$，振幅增加为 $A_2=3A_1$，k 不变，所以总能量变为 $E_2=\dfrac{1}{2}kA_2^{\ 2}=9\dfrac{1}{2}kA_1^{\ 2}=9E_1$。

5. 一质点作简谐振动，周期为 T。质点由平衡位置向 x 轴负方向运动时，由平衡位置到正的最大位移处这段路程所需要的最短时间为

[B] (A) $\dfrac{T}{4}$　　(B) $\dfrac{3T}{4}$　　(C) $\dfrac{T}{2}$　　(D) $\dfrac{T}{3}$

解：由矢量图可知，$\Delta\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$，$\therefore \Delta t=\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}=\dfrac{3T}{4}$



三、计算题

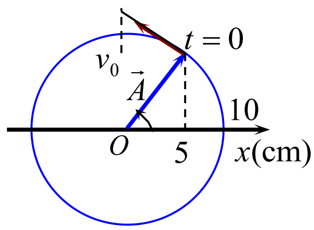
1．一质量 m =0.2kg 的物体，在弹性恢复力作用下沿 x 轴运动，弹簧的劲度系数 k =20N·m^{-1}。

(1) 求振动的周期 T 和角频率 ω；

(2) 如果振幅 A = 10cm，t = 0 时位移 x_0 = 5cm 处，物体沿 x 轴反向运动，求初速度 v_0 及初相 φ_0；

(3) 写出该振动的表达式。

解： (1) 周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{20}} = \frac{\pi}{5}s = 0.628\ \text{s}$



角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$

(2) 由旋转矢量图可知初相 $\varphi = \frac{\pi}{3}$，初速度 $v_0 < 0$。

由振幅公式 $A = \sqrt{x_0^2 + (-\frac{v_0}{\omega})^2}$，可得

$$v_0 = -\omega\sqrt{A^2 - x_0^2} = -10\sqrt{0.1^2 - 0.05^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}) = -0.866(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

或由 $\upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi_0 = -10\times 0.1\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(m\cdot s^{-1}) = -0.866(m\cdot s^{-1})$

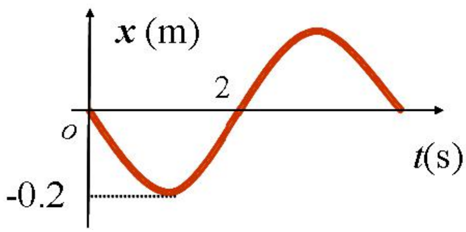
(3) 振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.1\cos(10t + \frac{\pi}{3})$（m）

2．一质点作简谐振动，其振动曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，求：

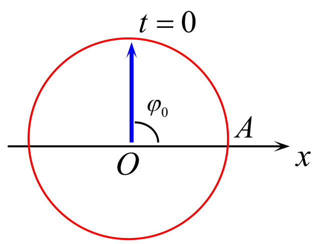
（1）振动方程；

（2）$t = 1.5s$ 时速度大小；

（3）$t = 1\,\text{s}$ 时加速度大小。



解：1）由图所知：$A = 0.2\text{m}, T = 4\text{s}$,则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$



由旋转矢量图知：$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

故振动方程为：$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.2\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$ (m)

2）速度为：$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{\pi}{10}\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$，将 $t = 1.5\,\text{s}$ 代入：

$$v = -\frac{\pi}{10}\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{20} \approx 0.22(\text{m/s})$$

3）加速度为：$a=-\omega^2 A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)=-\dfrac{0.1}{2}\pi^2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$，将 $t=1\,\mathrm{s}$ 代入得：

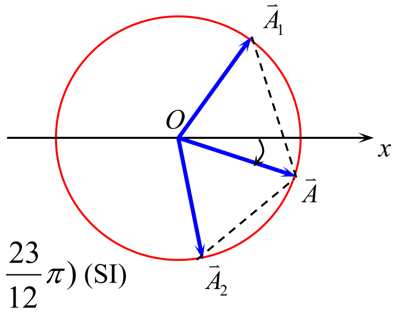
$$a=\frac{0.1}{2}\pi^2=\frac{1}{20}\pi^2\approx 0.49(\mathrm{m/s^2})$$

3. 一质点同时参与了两个同方向的简谐振动，它们的振动方程分别为

$x_1=0.02\cos(\omega t+\pi/4)$ (SI)

$x_2=0.02\cos(\omega t+19\pi/12)$ (SI)

用旋转矢量法求其合振动的运动方程。



解：如矢量图可知：$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\dfrac{\pi}{4}-(-\dfrac{5}{12}\pi)=\dfrac{2}{3}\pi$，

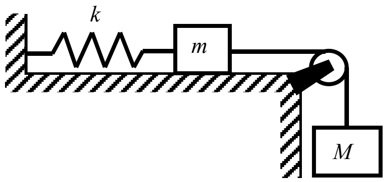
合成振幅 $A=A_1=A_2=0.02(\mathrm{m})$。

合振动的初相 $\varphi=-(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\pi}{12}$（或 $\dfrac{23}{12}\pi$）

所以，合振动方程为

$$x=0.02\cos(\omega t-\frac{\pi}{12})\ (\mathrm{SI})\text{或}\ x=0.02\cos(\omega t+\frac{23}{12}\pi)\ (\mathrm{SI})$$

4. 如图所示，桌面上一质量为 m 的滑块与劲度系数为 k 的弹簧相连，另一质量为 $M=3m$ 的滑块用一根轻绳绕过一个质量可忽略不计的定滑轮与滑块 m 连接。$t=0$ 时弹簧处于原长状态且由此时松手系统开始振动，求滑块 M 的运动方程。（以 M 的平衡位置为坐标原点，以向下方向为正方向，不计 m 与桌面的摩擦力）。



解：当 M 处于平衡位置时，设弹簧伸长 x_0，则有

$kx_0=Mg$（1），

当 M 相对于平衡位置的位移为 x 时，有：

$$\begin{cases} Mg-T=Ma \\ T-k(x+x_0)=ma \end{cases}\Rightarrow Mg-k(x+x_0)=(M+m)a\ （2），$$

将（1）及 $M=3m$ 代入（2），可得：

$$-kx=4ma=4m\frac{d^2x}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{4m}x=0，\ 故\ \omega=\sqrt{\frac{k}{4m}}。$$

又由题意知，t=0 时，$x_0=-\dfrac{Mg}{k}=-\dfrac{3mg}{k}, v_0=0$，则：

$\varphi_0 = \pi$ ， $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = |x_0| = \frac{3mg}{k}$

故， M 的运动方程为：

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{3mg}{k}\cos(\sqrt{\frac{k}{4m}}t + \pi)$ 。