一、计算(本题 21 分)--每一问 3 分

(1) 计算并写出计算过程：$\int_{-5}^{5}(3t-2)\left[\delta(t)+\delta(t-2)\right]dt=$

$$\int_{-5}^{5}(3t-2)\delta(t)dt+\int_{-5}^{5}(3t-2)\delta(t-2)dt$$
$$=\int_{-5}^{5}(-2)\delta(t)dt+\int_{-5}^{5}(6-2)\delta(t-2)dt$$
$$=-2+4=2$$

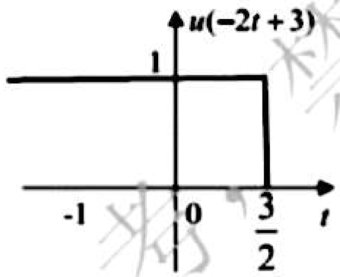
(2) 请判断下列信号是否是能量信号或功率信号，并说明理由。

$5+e^{2t}\cos(150t+\frac{\pi}{5})$

因为$5+e^{2t}\cos(150t+\frac{\pi}{5})$ 信号为发散的信号，因为第二项包含指数信号，能量为无穷，功率无穷。

因此该信号既不是能量信号，也不是功率信号。

(3) 画出下列函数波形：$U(-2t+3)=$



(4) 判断系统是否是线性系统，并给出理由。

$(a)\,y(t)=3y(0)+f^2(t)$

解：（1）满足分解特性，$y_x(t)=3y(0)$，$y_f(t)=f^2(t)$

（2）令 $y_{f1}(t)=f_1^2(t)$，$y_{f2}(t)=f_2^2(t)$

当输入 $f(t)=k_1f_1(t)+k_2f_2(t)$

输出为

$$\left(k_1f_1(t)+k_2f_2(t)\right)^2\neq k_1f_1^2(t)+k_2f_2^2(t)$$
$$=k_1y_{f1}(t)+k_2y_{f2}(t)$$

因此零状态响应非线性

因此，该系统为非线性系统。

$(b)\dfrac{dy(t)}{dt}+y^2(t)=f(t)$

解： 令 $\dfrac{dy_1(t)}{dt}+y_1^{\,2}(t)=f_1(t)$ ①

$\dfrac{dy_2(t)}{dt}+y_2^{\,2}(t)=f_2(t)$ ②

①$\times \mathrm{k}_1+$②$\times \mathrm{k}_2$ **得到：**

$$\frac{d\left(\mathrm{k}_1y_1(t)+\mathrm{k}_2y_2(t)\right)}{dt}+\left(\mathrm{k}_1y_1(t)+\mathrm{k}_2y_2(t)\right)^2=\mathrm{k}_1f_1(t)+\mathrm{k}_2f_2(t)$$

所以，输入为当输入 $f(t)=k_1f_1(t)+k_2f_2(t)$

输出不等于 $k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$

因此，系统为非线性系统

(5) 判断系统是否是是不变的，因果的，并给出理由。

$y(t)=tf(t-2)$

解：

- **判断时不变性：**

令输入延迟 t_0，$f(t-t_0)$，输出 $T\{f(t-t_0)\}=tf(t-t_0-2)$

系统延迟后为 $y(t-t_0)=(t-t_0)\ f\left((t-t_0)-2\right)$

因为 $T\{f(t-t_0)\}\neq y(t-t_0)$，所以该系统是时变系统。

- **判断因果性**

系统当前的输出，取决于过去的输入，因此，是因果系统。

二、(本题 10 分)

线性时不变非零状态系统，已知当激励 $f(t)=u(t)$ **时，其全响应为** $y_1(t)=\left(3\mathrm{e}^{-3t}+4\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$，**当激励** $f(t)=2u(t)$ **时，其全响应为** $y_2(t)=6\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，**若输入为** $f(t)=3u(t-3)$，**求其全响应**

解:

假设零输入响应为 $y_x(t)$

则：$\begin{cases} y_1(t) = y_{x1}(t) + y_{f1}(t) \\ y_2(t) = y_{x2}(t) + y_{f2}(t) \end{cases}$， (2 分)

由题目知， $y_{x1}(t)=y_{x2}(t)=y_x(t)$， $y_{f2}(t) = 2y_{x1}(t)$

因此，方程组为：

$$\begin{cases} y_1(t) = y_x(t) + y_{f1}(t) \\ y_2(t) = y_x(t) + 2y_{f1}(t) \end{cases}$$ (2 分)

解得：$\begin{cases} y_x(t)=8e^{-2t}u(t) \\ y_{f1}(t) = \left(3e^{-3t} - 4e^{-2t}\right)u(t) \end{cases}$ (2 分)

所以， $y_{f3}(t) = 3\left(3e^{-3(t-3)} - 4e^{-2(t-3)}\right)u(t-3)$ (2 分)

$$y_3(t) = y_x(t) + y_{f3}(t)$$
$$= 8e^{-2t}u(t) + 3\left(3e^{-3(t-3)} - 4e^{-2(t-3)}\right)u(t-3)$$ (2 分)

三、(本题 12 分)

求已知系统的微分方程 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$，

初始条件为 $y(0\_) = 1, y'(0\_) = 2$， $f(t) = e^{-t}u(t)$，求：

（1）单位冲击响应 $h(t)$

（2）零输入响应 $y_x(t)$

（3）在时域法求零输入响应 $y_f(t)$

解：$H(p) = \dfrac{1}{p^2 + 3p + 2}$ （2 分）

（1）$H(p) = \dfrac{1}{p^2 + 3p + 2} = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+2}$

$h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

（3 分）

（2）极点：$\lambda_1=-1$，$\lambda_1=-2$

$y_x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}, t \ge 0$

代入初始条件：

$$\begin{cases} y_x(0)=c_1+c_2=1 \\ y'_x(0)=-c_1-2c_2=2 \end{cases},\quad \begin{cases} c_1=4 \\ c_2=-3 \end{cases},\quad y_x(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}, t\geq 0 \qquad (3分)$$

(3) $y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau$

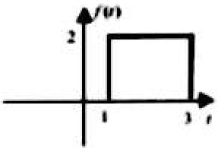
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}u(\tau)\left(e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\right)u((t-\tau))d\tau$$

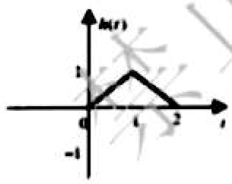
$$=\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}\left(e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau\cdot u(t)$$

$$=\left(te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}\right)u(t) \qquad (4分)$$

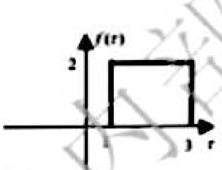
四、求卷积(10 分)

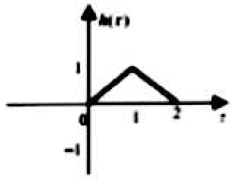
已知信号 $f(t)$ 和 $h(t)$ 的波形如图 2 所示，用图解法计算卷积 $y_f(t)=f(t)*h(t)$。

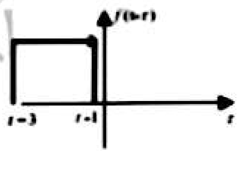




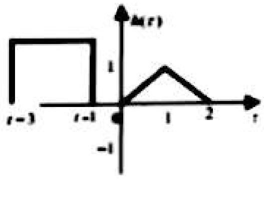
解：$y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau$ （2 分）







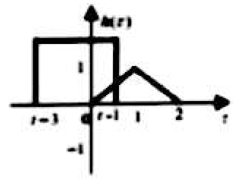
1）$t\text{-}1<0$ $\quad y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau=0$



（2）$0\leq t\text{-}1<1$，重合区域（0，t-1）

$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau$

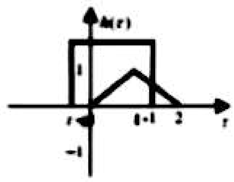
$=\int_0^{t-1}\tau\cdot 2d\tau==(t\text{-}1)^2$



（3）$1\le t\text{-}1<2$，重合区域（0，t-1）

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

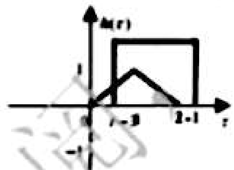
$$=\int_0^1\tau\cdot 2d\tau+\int_1^{t-1}(2\text{-}\tau)\cdot 2d\tau=-t^2+6t-7$$



（4）$0\le t\text{-}3<1$，重合区域（t-3，2）

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

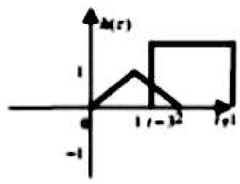
$$=\int_{t-3}^1\tau\cdot 2d\tau+\int_1^2(2\text{-}\tau)\cdot 2d\tau=-t^2+6t-7$$



（5）$1\le t\text{-}3<2$，重合区域（t-3，2）

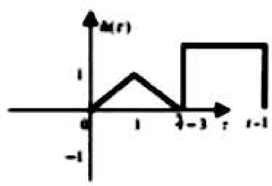
$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{t-3}^2(2\text{-}\tau)\cdot 2d\tau=t^2\text{-}10t+25$$



（6）$2\le t\text{-}3$，无重合区域

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)d\tau=0$$

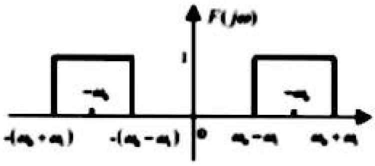


$$y_f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t\text{-}1)^2 & 1\le t<2\\ -t^2+6t-7 & 2\le t<4\\ t^2\text{-}10t+25 & 4\le t<5\\ 0 & t\ge 5\end{cases}$$

（以上共 8 分，其中 2 分步骤分，错一条扣 1 分）

五、（17 分）

(1) 已知 $F(j\omega)$ 如图所示，求 $f(t)$，并画出时域波形。



解：$F(j\omega)=g_{2\omega_1}(\omega+\omega_0)+g_{2\omega_1}(\omega-\omega_0)$

$g_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$，

$\frac{\tau}{2\pi}Sa(\frac{t\tau}{2})\leftrightarrow g_\tau(\omega)$

$\frac{\omega_1}{\pi}Sa(t\omega_1)\leftrightarrow g_{2\omega1}(\omega)$

$\frac{\omega_1}{\pi}Sa(t\omega_1)e^{-j\omega_0 t}\leftrightarrow g_{2\omega1}(\omega+\omega_0)$

$\frac{\omega_1}{\pi}Sa(t\omega_1)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow g_{2\omega1}(\omega-\omega_0)$

$f(t)=\frac{\omega_1}{\pi}Sa(t\omega_1)\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right)$ （4 分）

$=\frac{2\omega_1}{\pi}Sa(t\omega_1)\cos\omega_0 t$

（2）求下列频谱傅里叶逆变换

（a）$2\cos 3\omega$ (b) $F(j\omega)=4Sa(\omega)\cos 2\omega$

（a）因为: $\cos\omega_0 t\leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$

由对称性得：$\frac{1}{2}\left[\delta(t-\omega_0)+\delta(t+\omega_0)\right]\leftrightarrow \cos\omega_0\omega$

$\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\leftrightarrow 2\cos 3\omega$

（2 分）

(b) $F(j\omega)=4Sa(\omega)\cos 2\omega=4Sa(\omega)\cdot\frac{1}{2}[e^{j2t}+e^{-j2t}]$

$=2Sa(\omega)e^{j2t}+2Sa(\omega)e^{-j2t}$

由于：$g_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

$\frac{1}{\tau}g_\tau(t)\leftrightarrow Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

$\frac{1}{2}g_2(t)\leftrightarrow Sa(\omega)$

$\frac{1}{2}g_2(t+2) \leftrightarrow Sa(\omega)e^{j2\omega}$

$\frac{1}{2}g_2(t-2) \leftrightarrow Sa(\omega)e^{-j2\omega}$

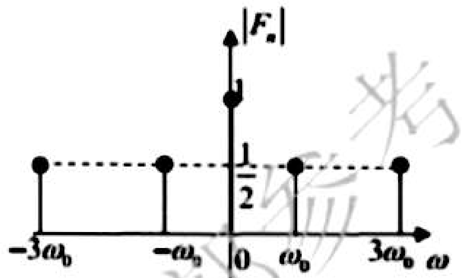
$f(t) = g_2(t+2) + g_2(t-2)$ （2 分）

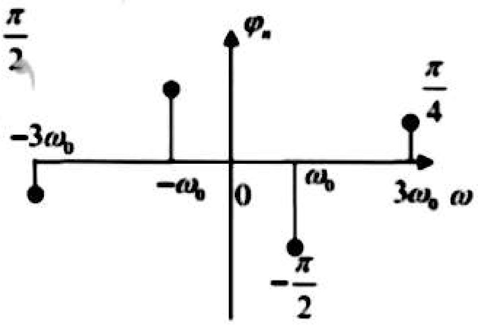
（3）已知 $f(t)$ 的傅里叶展开式：$f(t) = 1 + \sin(\omega_1 t) + \cos\left(3\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)$，

画出 $f(t)$ 的指数形式幅度谱和相位谱

解：$f(t)=1+\frac{e^{j(\omega_1 t)}-e^{-j(\omega_1 t)}}{2j}+\frac{e^{j\left(3\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(3\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$ （共 5 分，结果 3 分，图各 1 分）

$=1+\frac{e^{j(\omega_1 t)}}{2j}-\frac{e^{-j(\omega_1 t)}}{2j}+\frac{e^{j\left(3\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}+\frac{e^{-j\left(3\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$





（4）若 $f(t)$ 的奈奎斯特角频率 ω_0，则

(a) $f(t)\cos\omega_0 t$ 的奈奎斯特角频率为多少。

(b) $f(t) * f(2t)$ 的奈奎斯特角频率为多少。

(a) $f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{F(j(\omega+\omega_0))+F(j(\omega-\omega_0))}{2}$

所以，$\omega_m = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} = \frac{3\omega_0}{2}$

$\omega_s = 3\omega_0$ （2 分）

(b) $f(t) * f(2t) \leftrightarrow F(j\omega)\cdot\frac{1}{2}F(j\frac{\omega}{2})$

所以，$\omega_m = \frac{\omega_0}{2}$，$\omega_s = \omega_0$ （2 分）

六、（10 分）已知一稳定的线性时不变系统的传递函数为$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$，求下列输入$f(t)$作用下的零状态响应。$f(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

解：

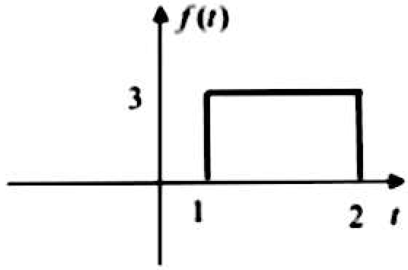
$$\mathrm{F}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2+j\omega} \qquad \text{（2 分）}$$

$$\mathrm{Y}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\frac{1}{2+j\omega}=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega} \qquad \text{（5 分）}$$

$$\mathrm{y}_f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t) \qquad \text{（3 分）}$$

七、（8 分）

已知线性时不变系统的输入 f(t)如图所示，系统的冲激响应$h(t)=e^{-2t}u(t)$，求系统的零状态响应。



$$y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \text{（2 分）}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}3\big(u(\tau-1)-u(\tau-2)\big)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=3\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2(t-\tau)}u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau-3\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2(t-\tau)}u(\tau-2)u(t-\tau)d\tau$$

$$=3e^{-2t}\int_{1}^{t}e^{2\tau}d\tau\cdot u(t-1)-3e^{-2t}\int_{2}^{t}e^{2\tau}d\tau\cdot u(t-2)$$

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{2-2t}\right)u(t-1)-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{4-2t}\right)u(t-2) \qquad \text{（6 分）}$$

八、（12 分）简答思考题（请在下页答题）

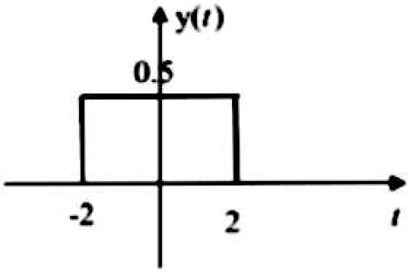
（1）一个连续时间系统 $y(t)=0.5\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

请说明这个系统的作用。若 $x(t)=g_4(t)$，请画出 y(t)

解：$y(t)=0.5\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=0.5x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=0.5x(t)$

这个系统是个幅度减半的系统。（2 分）

若 $x(t)=g_4(t)$，$y(t)=0.5g_4(t)$（2 分）



（2）请判断下列信号是否是周期的，若是，求其周期，并说明在傅里叶级数中存在何种谐波。请说明理由

$(a)2\sin t+3\sin 3t$

$(b)\sin 3t+\cos \pi t$

解：（a）$T_1=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi, T_2=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，周期为 $T=2\pi$，基波频率为 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$，傅里叶级数有一次谐波和 3 次谐波。（2 分）

（b）$T_1=\frac{2\pi}{3}, T_2=\frac{2\pi}{\pi}$，周期之比为无理数，不是周期信号（2 分）

（3）$f(t)=Sa(100\pi t)Sa(200\pi t)$，若通过采样得到 $f_s(t)$，若要从 $f_s(t)$ 无失真的恢复 $f(t)$，求最大抽样周期。

解：

最大抽样周期既是奈奎斯特抽样周期。

$Sa(100\pi t)Sa(200\pi t)$ 的最大抽样频率为 300π（2 分）

$\omega_s=600\pi$

$T_s=\frac{2\pi}{600\pi}=\frac{1}{300}$（2 分）