《大学物理 AI》作业　　No.01 运动的描述

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩

******************************本章教学要求******************************

1、理解运动的绝对性与运动描述的相对性，理解参考系、坐标系、时间、空间等概念在描述物体运动中的作用；

2、理解质点、质点系、刚体模型的意义，相互关系和适用条件；

3、理解惯性系和非惯性系的物理意义；

4、掌握描述质点运动的物理量：位置矢量、位移、速度、加速度、切向加速度、法向加速度的定义；掌握描述质点圆周运动和刚体定轴转动运动的物理量：角速度、角加速度的定义及角量与线量的关系；

5、掌握运动学中两类基本问题的求解方法（微分法、积分法），避免只会用中学所掌握的方法去解决问题；

6、掌握伽利略坐标变换公式、伽利略速度变换公式并能用于解决相对运动的力学问题。

一、填空题

1.在相对地面静止的坐标系内，A、B 二船都以 $2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 的速率匀速行使，A 船沿 x 轴正向，B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x、y 方向单位矢量用 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 表示)，那么在 A 船上的坐标系中，B 船的速度(以 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 为单位)为 $\underline{-2\vec{i}+2\vec{j}}$ 。

解：由题意，A 船相对于地的速度 $\vec{v}_{A-地}=2\vec{i}$，B 船相对于地的速度 $\vec{v}_{B-地}=2\vec{j}$，

根据相对运动速度公式，B 船相对于 A 船的速度为

$$\vec{v}_{B-A}=\vec{v}_{B-地}+\vec{v}_{地-A}=\vec{v}_{B-地}-\vec{v}_{A-地}=-2\vec{i}+2\vec{j}。$$

2.已知质点的运动方程 $\vec{r}=4t^2\vec{i}+(2t+3)\vec{j}$ (SI)，则该质点的轨道方程为 $\underline{x=(y-3)^2}$ ，3 秒时质点在轨道上运动的速度和加速度的大小分别为 $\underline{24.08\mathrm{m/s}}$ 和 $\underline{8\mathrm{m/s^2}}$。

解：由题意，$x=4t^2$，$y=2t+3$，消去两式中的 t，得轨道方程：$x=(y-3)^2$。对运动方程微分得速度：$\vec{v}=8t\vec{i}+2\vec{j}$；对速度微分得加速度：$\vec{a}=8\vec{i}$

由上两式可得：$v=\sqrt{64t^2+4}$，$a=8$。将t=3代入得3秒时的速度的大小：$v=24.08(\mathrm{m/s})$，加速度的大小为 $a=8(\mathrm{m/s^2})$。

3.一质点沿x轴运动，其加速度a与位置坐标x的关系为a=2+6x^2(SI)。如果质点在原点处的速度为零，则质点在x=2m处的速度v=__6.3m/s__。

解：由速度、位置和加速度的关系得：$v^2=2\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x+v_0^2$。

由题知 x_0=0 时 v_0=0，代入上式：$v^2=2\int_0^x a\mathrm{d}x=2\int_0^x(2+6x^2)\mathrm{d}x=4x+4x^3$

所以：$v=2\sqrt{x+x^3}$。将 x=2m 代入上式得：$v=6.3(\mathrm{m/s})$

4.根据<u>牛顿第一定律</u>在其中是否成立，可将参考系分为惯性参考系和非惯性参考系；严格说来，绝对精确的惯性系是不存在的，只是一种<u>理想模型</u>，在对日常运动的研究和实验中，<u>地面</u>可以作为近似程度相当好的惯性系。

5.在半径为R的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为$v=ct^2$（式中c为常量），则从t=0到t时刻质点走过的路程$S(t)=\underline{\frac{c}{3}t^3}$；$t$时刻质点的切向加速度$a_t=\underline{2ct}$；$t$时刻质点的法向加速度$a_n=\underline{\frac{c^2t^4}{R}}$。

解：由路程与速度之间的关系得：$s(t)=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t ct^2\mathrm{d}t=\frac{c}{3}t^3$

切向加速度$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2ct$，法向加速度$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{c^2t^4}{R}$

6. 一般情况下刚体的运动可看成<u>平动</u>和<u>转动</u>的叠加；当刚体<u>平动</u>时，其任一质点的速度与加速度是相同的；在刚体的转动中，有一种特殊的转动为<u>定轴转动</u>，当刚体作这种转动时，其上任意两个质点的<u>角速度</u>和<u>角加速度</u>是相同的。（选填项：平动、转动、定轴转动、速度、角速度、加速度、角加速度）

二、选择题

1.一运动质点在t时刻位于矢径$\vec{r}(x,y)$的端点处，其速度大小为

[**D**] (A) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$；　(B) $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$；　(C) $\frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$；　(D) $\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$。

解：质点满足的运动方程为$\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}$，将其对时间微分得速度$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$，则速度的大小为：$v=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$，所以应该选[**D**]。

2.一质点在平面上作一般曲线运动，其瞬时速度为$\vec{v}$，瞬时速率为v，某一段时间内的平均速度为$\bar{\vec{v}}$，平均速率为$\bar{v}$，它们之间的关系必定有

[**D**]　(A) $|\vec{v}|=v,\quad |\bar{\vec{v}}|=\bar{v}$　(B) $|\vec{v}|\neq v,\quad |\bar{\vec{v}}|=\bar{v}$

(C) $|\vec{v}|\neq v,\quad |\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$　(D) $|\vec{v}|=v,\quad |\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$

解：根据定义，瞬时速度为$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，瞬时速率为$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，由于$|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$，所以$|\vec{v}|=v$。

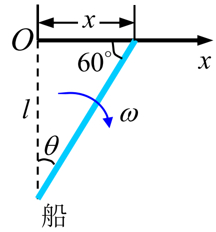
平均速度$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$，平均速率$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，由于一般情况下$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$，所以$\bar{\vec{v}}\neq\bar{v}$，所以应该选[**D**]。

3. 与河岸（看成直线）的垂直距离为$l=500\,\mathrm{m}$处有一艘静止的船，船上的探照灯以转速$n=0.6\,\mathrm{r/min}$

转动。当光束与岸边的夹角为$\theta = 60^{\circ}$时，光束沿岸边移动的速率为

[**C**]　(A) 63 m/s；　(B) 56 m/s；　(C) 42 m/s；　(D) 28 m/s；　(E) 14 m/s。

解：以河岸为 x 轴，船离原点距离 $l = 500$ m，探照灯光束照在岸上的坐标为$x = l \cdot \mathrm{tg}\theta$，其中$\theta$角为光束和船与原点连线之间的夹角。光束沿岸边移动的速度大小为



$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = l \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = l\frac{\omega}{\cos^2\theta},$$

当$\theta = 30^{\circ}$时，$v = 500 \times \dfrac{1}{\cos^2 30^{\circ}} \times \dfrac{2\pi \times 0.6}{60} = 42(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$，所以应该选[**C**]。

4. 两辆车 A 和 B，在笔直的公路上同向行驶，它们从同一起始线上同时出发，并且由出发点开始计时，行驶的距离与行驶时间的函数关系式：$x_A = t + t^2$，$x_B = t^2 + t^3$ (SI)，则在 $t = 1.20$ s 时刻，B 相对于 A 的速度为

[**A**]　(A) 3.3m/s；　(B) 11 m/s；　(C) 26 m/s；　(D) 47 m/s；　(E) 74 m/s。

解：由题知：$v_{A对地} = \dfrac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = 1+2t$，$v_{B对地} = \dfrac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = 2t + 3t^2$，由不同参考系中速度之间的关系得：

$\vec{v}_{B对A} = \vec{v}_{B对地} - \vec{v}_{A对地}$，由于 A、B 沿相同的方向运动，因此：

$v_{B对A} = v_{B对地} - v_{A对地} = 2t + 3t^2 - 1 - 2t = 3t^2 - 1 = 3.3(\mathrm{m/s})$，所以应该选[**A**]。

5.一刚体以每分种 60 转绕 z 轴作匀速转动。设某时刻刚体上一点 P 的位置矢量为$\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$，其单位为“$10^{-2}\mathrm{m}$”，若以“$10^{-2}\mathrm{m \cdot s^{-1}}$”为速度单位，则该时刻 P 点的速度为：

[**B**]　(A) $\vec{v} = 94.2\vec{i} + 125.6\vec{j} + 157.0\vec{k}$　　(B) $\vec{v} = -25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$

(C) $\vec{v} = 25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$　　(D) $\vec{v} = 31.4\vec{k}$

解：刚体绕 z 轴转动的角速度大小为$\omega = \dfrac{60 \times 2\pi}{60} = 6.28(\mathrm{s^{-1}})$，写成矢量式$\vec{\omega} = 6.28\vec{k}$

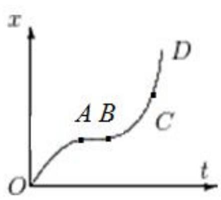
根据质点的线速度与角速度的关系，P 点的速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 6.28\vec{k} \times \left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right) = -25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}。$$

所以应该选[**B**]。

三、简答题

1. 一质点作直线运动，其 $x - t$ 曲线如图所示，质点的运动可分为 OA、AB、BC 和 CD 四个区间。其中 AB 为平行于 t 轴的直线，CD 为直线。试问每一区间的速度、加速度分别是正值、负值，还是零？质点分别做什么运动？



答：在质点沿x 方向做直线运动中，质点的速度$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k$(斜率)，质点的加

速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$

（1）OA区间：因为$k>0$, 所以$v>0$，又因k在减小，所以$a<0$，由于v和a异号，质点减速运动，所以在OA区间质点沿着x轴的正方向作减速运动。

（2）AB区间：因为$k=0$, 所以$v=0$，又因AB平行于t轴导致k恒等于0，所以$a=0$，于是在AB区间质点静止。

（3）BC区间：因为$k>0$, 所以$v>0$，又因k在增加，所以$a>0$，由于v和a同号，质点加速运动，所以在BC区间质点沿着x轴的正方向作加速运动。

（4）CD区间：因为$k>0$, 所以$v>0$，又因CD是直线使得k为恒定值，所以$a=0$，质点匀速运动，所以在CD区间质点沿着x轴的正方向作匀速运动。

2. 绕固定轴作匀变速转动的刚体，其上各点都绕转轴作圆周运动。试问刚体上任意一点是否有切向加速度？是否有法向加速度？切向加速度和法向加速度的大小是否变化？理由如何？

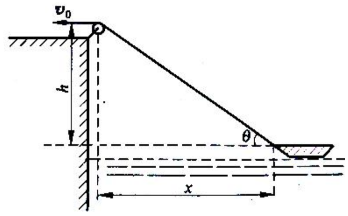
答：设刚体上任一点到转轴的距离为r，刚体转动的角速度为ω，角加速度为β，则由运动学关系有：

切向加速度 $a_t=r\beta$ ，法向加速度 $a_n=r\omega^2$ ，对匀变速转动的刚体来说 $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=$ **常量** $\neq 0$, 因此 $\mathrm{d}\omega=\beta\mathrm{d}t\neq 0$, ω随时间变化，所以刚体上的任意一点，只要它不在转轴上（$r\neq 0$），就一定具有切向加速度和法向加速度，前者大小不变，后者大小随时间变化。

3.在离船的高度为 h 岸边，绞车以恒定速率 v_0 收拖缆绳，使船靠岸，如下图所示。讨论以下两个问题：

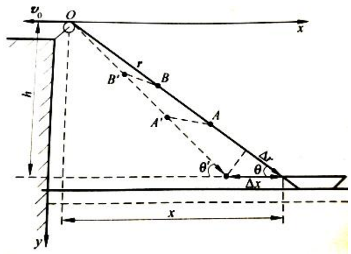
（1）缆绳上各点的速度相同吗？

（2）有人认为船的速率为 $v=v_0\cos\theta$，对不对？为什么？



简答题 3 图

答：（1）不相同。以地面为参考系，绳上任找两点 A 和 B，经 Δt 时间后，A 运动到 A′，B 运动到 B′，如图所示。可以看出两点的位移大小和方都不相等，由于移动时间 Δt 是一样的，所以 A 和 B 移动的速度是不相同的。



A 和 B 移动的速度大小也不是 v_0，v_0 代表的是绳上各点**沿绳方向移动的速率**它不代表绳上各点的运动速率。

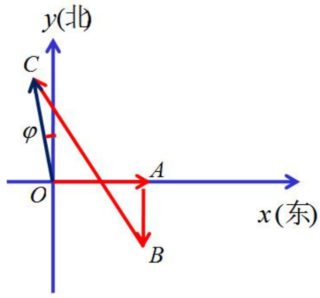
（2） 不对.这种解法是把船速看成绳子速度的一个分量。而正确的解法中，绳子速度应是船速的一个分量，正确解是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0/\cos\boldsymbol{\theta}$ 。

四、计算题

1．一个人自原点出发，10 s 内向东走 15 m，又 10 s 内向南走 10 m，再 25 s 内向正西北走 30 m。求在这 45 s 内，

（1）平均速度的大小和方向，

（2）平均速率的大小。



解：建立如图坐标系。

（1）45 s 内人的位移为：$\Delta\vec{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$$=15\vec{i}-10\vec{j}+30\cos45^\circ\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)=-6.21\vec{i}+11.21\vec{j}$$

则平均速度的大小为：

$$|\bar{v}|=\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\frac{\sqrt{(-6.21)^2+11.21^2}}{45}=\frac{12.82}{45}=0.28\quad(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

方向为与 x 轴的夹角：

$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{|\Delta x|}{\Delta y}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{6.21}{11.21}=29^{\circ}\quad(\text{北偏西 }29^{\circ})$$

（2）45 s 内人走的路程为ΔS=15+10+30=55(m)，所以平均速率为

$$\bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{55}{45}=1.22\quad(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

2．一物体悬挂在弹簧上作竖直振动，其加速度为$a=-k\,y$，式中k为常数，y是以平衡位置为原点所测得的坐标，假定振动的物体在坐标y_0处的速度为v_0，试求：速度 v 与坐标 y 的函数关系式。

解：加速度 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=-ky$，分离变量积分得

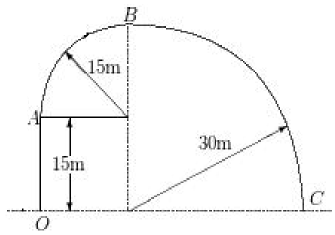
$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{y_0}^{y}-ky\mathrm{d}y$$

$$\frac{1}{2}\left(v^2-v_0^{\,2}\right)=\frac{1}{2}ky_0^{\,2}-\frac{1}{2}ky^2$$

所以速度 v 与坐标 y 的函数关系式为

$$v^2=v_0^{\,2}+k\left(y_0^{\,2}-y^2\right)$$

3. 质点 M 在水平面内的运动轨迹如图所示，OA 段为直线，AB、 BC 段分别为不同半径的两个 1/4 圆周。设 t=0 时，M 在 O 点，已知运动学方程为S=30t+5t^2(SI)。求 t=2s 时刻，质点 M 的切向加速度和法向加速度。



解：首先求出 t=2 时质点在轨迹上的位置：S=80m (M 在大圆上)

各瞬时质点的速率：$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=30+10t$

故 t=2s 时，v=50m/s

因此，各瞬时质点的切向加速度和法向加速度：

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=10\mathrm{m/s^2},\qquad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

故 t=2s 时，$a_t=10\mathrm{m/s^2}$，$a_n=83.3\mathrm{m/s^2}$。