

## 《大学物理 AII》作业 No.06 光的衍射

班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_

\*\*\*\*\*本章教学要求\*\*\*\*\*

- 1、理解惠更斯-菲涅耳原理以及如何用该原理解释光的衍射现象。
- 2、理解夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射的区别，掌握用半波带法分析夫琅禾费单缝衍射条纹的产生，能计算明暗纹位置、能大致画出单缝衍射条纹的光强分布曲线；能分析衍射条纹角宽度的影响因素。
- 3、理解用振幅矢量叠加法求单缝衍射光强分布的原理。
- 4、掌握圆孔夫琅禾费衍射光强分布特征，理解瑞利判据以及光的衍射对光学仪器分辨率的影响。
- 5、理解光栅衍射形成明纹的条件，掌握用光栅方程计算主极大位置；理解光栅衍射条纹缺级条件，了解光栅光谱的形成以及光栅分辨本领的影响因素。
- 6、理解 X 射线衍射的原理以及布拉格公式的意义，会用它计算晶体的晶格常数或 X 射线的波长。

### 一、选择题：

1. 根据惠更斯-菲涅耳原理，若已知光在某时刻的波阵面为  $S$ ，则  $S$  的前方某点  $P$  的光强度决定于波阵面  $S$  上所有面积元发出的子波各自传到  $P$  点的
- [ **D** ] (A) 振动振幅之和 (B) 光强之和  
(C) 振动振幅之和的平方 (D) 振动的相干叠加

**解：**根据惠更斯-菲涅耳原理， $P$  点光强决定于所有子波传到  $P$  点的振动的相干叠加。

2. 下列属于光的衍射现象的是 [ **D** ]
- (A) 雨后天空中出现的绚丽的彩虹  
(B) 阳光下肥皂膜上的彩色条纹  
(C) 太阳光通过三棱镜产生的彩色条纹  
(D) 眼睛眯成一条线看到的发光的电灯周围有彩色花纹

**解：**A、C 属于光的折射现象，B 属于薄膜干涉现象，D 属于光的衍射现象。

3. 在单缝夫琅和费衍射实验中，波长为  $\lambda$  的单色光垂直入射在宽度为  $a=4\lambda$  的单缝上，则对应于衍射角为  $30^\circ$  的方向，单缝处波阵面可分成的半波带数目为 [ **B** ]
- (A) 2 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 8 个

**解：**单缝两边缘处衍射角为  $30^\circ$  的衍射光线之间光程差

$$AC = a \sin \theta = 4\lambda \times \sin 30^\circ = 2\lambda$$

半波带中相邻波带的光程差为  $\frac{\lambda}{2}$ ，则此波阵面可分成的半波带数为： $\frac{2\lambda}{\frac{\lambda}{2}} = 4$  个 故选 **B**

4. 在如图所示的单缝夫琅和费衍射装置中，设中央明纹的衍射角范围很小，若使单缝宽度  $a$  变为原来的  $3/2$ ，同时使入射的单色光的波长  $\lambda$  变为原来的  $3/4$ ，则屏幕  $C$  上单缝衍射条纹中央明纹的宽度  $\Delta x$  将变为原来的

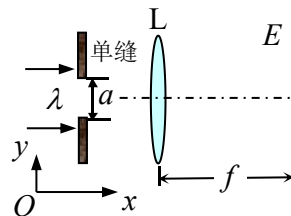
[ **D** ]

(A)  $3/4$  倍

(B)  $2/3$  倍

(C)  $9/8$  倍

(D)  $1/2$  倍



**解：** 单缝衍射中央明纹两侧第一暗纹中心间距离为中央明纹线宽度： $\Delta x = 2f \tan \theta$

由第一暗纹中心条件：

$$a \sin \theta = \lambda$$

即

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

当  $\theta$  小时，有

$$\tan \theta \approx \sin \theta$$

$\therefore$

$$\Delta x \approx 2f \frac{\lambda}{a}$$

已知题意： $a_2 = \frac{3}{2}a_1$ ， $\lambda_2 = 3\lambda_1/4$ ，可得

$$(\Delta x)_2 = 2f \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{1}{2} \left( 2f \frac{\lambda_1}{a_1} \right) = \frac{1}{2} (\Delta x)_1$$

$\therefore a$ 、 $\lambda$  改变后的中央明纹宽度  $(\Delta x)_2$  变为原来宽度  $(\Delta x)_1$  的  $1/2$

故选 **D**

5. 一台光谱仪设备有三块光栅，每毫米刻痕分别为 1400 条、600 条和 100 条。若用它们测定光谱范围为  $0.4 - 0.7 \mu\text{m}$  的可见光，最适合的光栅条数是 [ **B** ]。

(A) 1400 条

(B) 600 条

(C) 100 条

(D) 无法确定

**解：** 由光栅常数  $d = \frac{1}{N}$  得三块光栅的光栅常数分别为  $d_1 = 0.71 \mu\text{m}$ ， $d_2 = 1.7 \mu\text{m}$ ，

$d_3 = 10 \mu\text{m}$ 。根据光栅公式  $d \sin \theta = k\lambda$ ，主要考虑谱线的光较强，且没有重级现象的第 1 级衍射，令  $k=1$ 。

当用第一块光栅测定  $0.7 \mu\text{m}$  的红光时， $\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \approx 1$ ， $\theta \approx 90^\circ$ ，不能完整地观察到第 1 级衍射谱，所以不能选用它，A 错。

用第二块光栅，第 1 级衍射谱的衍射角  $\theta$  在  $14^\circ - 24^\circ$  范围内，因此可以选用。B 对。

用第三块光栅，第 1 级衍射角不大于  $4^\circ$ ，衍射角范围太小，不同波长的光不易区分，所以也不宜选用。C 错。

可见，光栅常数并非越小越好，应根据所测光谱的波长范围选用适当的光栅。

6. 一衍射光栅对某一定波长的垂直入射光，在屏幕上只能出现零级和一级主极大，欲使屏幕上出现更高级次的主极大，下列措施正确的是

- [ **B** ] (A) 换一个光栅常数较小的光栅 (B) 换一个光栅常数较大的光栅  
(C) 将光栅向靠近屏幕的方向移动 (D) 将光栅向远离屏幕的方向移动

**解：**据垂直入射光栅公式  $d \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，

有  $\varphi < \frac{\pi}{2}, k < \frac{d}{\lambda}$ ， $\lambda$  一定，只有光栅常数  $d$  增大时，屏幕上才能出现更高级次的主极大。

故选 **B**

## 二、填空题

1. 在单缝衍射实验中，缝宽  $a = 5\lambda$ ，缝后的透镜焦距  $f = 0.5\text{m}$ ，则中央明纹的宽度为 0.2m，第 1 级明纹的宽度为 0.1m。

**解：**中央明纹的宽度等于两个第 1 级暗纹之间的距离，可直接利用暗条纹中心公式  $a \sin \theta = k\lambda$ ， $k = \pm 1, 2, 3, \dots$  求出

$$\Delta x_0 = 2x_1 = 2f \tan \theta = 2f \frac{\lambda}{a} = 2 \times 0.5 \times \frac{\lambda}{5\lambda} = 0.2\text{m}$$

第 1 级明纹的宽度等于第 1 级暗纹与第 2 级暗纹之间的距离，对第 1 级和第 2 级暗纹中心有

$$a \sin \theta_1 = \lambda, \quad a \sin \theta_2 = 2\lambda, \quad \text{它们之间的距离为}$$

$$\Delta x_1 = f(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = f\left(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a}\right) = \frac{0.5\lambda}{5\lambda} = 0.1\text{m}$$

说明中央明纹宽度的确为其他明纹宽度的两倍。

2. 用平行的白光垂直入射在平面透射光栅上时，波长为  $\lambda_1 = 440\text{nm}$  的第 3 级光谱线，将与波长为  $\lambda_2 =$  660 nm 的第 2 级光谱线重叠。

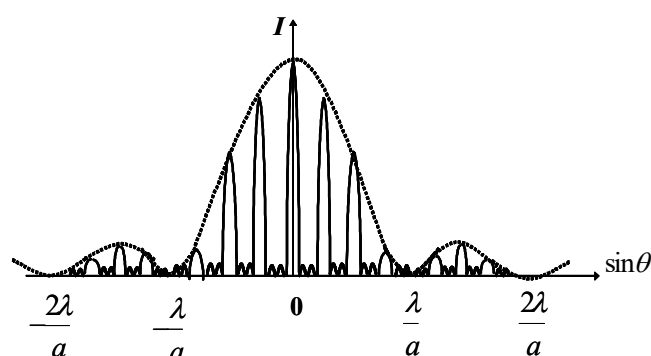
**解：**由光栅公式  $d \sin \varphi = k\lambda$  可知， $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$ ，所以  $\lambda_2 = \frac{k_1}{k_2} \lambda_1 = \frac{3}{2} \times 440 = 660(\text{nm})$

3. 用波长为  $\lambda$  的单色平行光垂直入射在一块多缝光栅上，其光栅常数  $d = 3\mu\text{m}$ ，缝宽  $a = 1\mu\text{m}$ ，则在单缝衍射的中央明纹中共有 5 条谱线(主极大)。

解：由缺级条件： $d \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
 $a \sin \varphi = k'\lambda$  ( $k' = \pm 1, \pm 2, \dots$ )

由题知  $\frac{d}{a} = 3$ ，第一次缺级出现在  $k = \pm 3$  主极大处，所以在单缝衍射中央明纹区有  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ ，共 5 条谱线。

4. 如图所示为光栅衍射光强分布曲线图，光栅透光缝  $a = 2 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 。问：该光栅的总缝数  $N =$  4，缺级主明纹的级次为  $k =$   $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$ ，光栅常数为  $d =$   $8 \times 10^{-3}$  cm。



解：由题图知：光栅衍射两主极大之间有 2 个次极大，光栅中一个单缝衍射的第一级暗纹出现在光栅衍射的第四级主极大处，则由总缝数  $N =$  光栅衍射两主极大之间次极大数 + 2  
 有总缝数  $N = 2 + 2 = 4$

由缺级条件  $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}$ ，有  $k = 4k'$ ，即缺级主明纹的级次为  $k =$   $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$ ，  
 光栅常数为  $d = \frac{k}{k'} a = \frac{4}{1} \times 2 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 。

5. 在光栅光谱中，假如所有偶数级次的主极大都恰好在单缝衍射的暗纹方向上，因而实际上不出现，那么此光栅每个透光缝宽度  $a$  和相邻两缝间不透光部分宽度  $b$  的关系为  $a = b$ 。

解：由垂直入射光栅衍射极大条件（光栅公式） $(a+b) \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
 和单缝衍射的暗纹条件  $a \sin \varphi = k'\lambda$  ( $k' = \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
 及题意光栅光谱中所有偶数级次的主极大都恰好在单缝衍射的暗纹方向上有  
 $k = 2k'$  ( $k' = \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
 联解上述三个方程有  $a = b$

6. 以波长为  $0.11 \text{ nm}$  的 X 射线照射岩盐晶面，测得在 X 射线与晶面的夹角（掠射角）为  $11^\circ 30'$  时获得第 1 级极大的反射光，则岩盐晶体原子平面之间的间距

$$d = 2.759 \times 10^{-8} \text{ cm}。$$

**解：**由布拉格公式可知  $2d \sin \varphi = k\lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots$

当  $\varphi = 11^\circ 30'$ ,  $k = 1$  时, 岩盐晶体原子平面之间的间距为

$$d = \frac{k\lambda}{2 \sin \varphi} = \frac{1.1 \times 10^{-8}}{2 \sin 11^\circ 30'} \text{ cm} = 2.759 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

### 三、简答题

1. 假如人眼感知的电磁波段不是 500nm 附近, 而是移到毫米波段, 人眼的瞳孔仍保持 4mm 左右的孔径, 那么人们看到的外部世界将是一幅什么景象?

**答：**人眼感知的电磁波段即可见光波长约 500nm 左右, 人眼瞳孔孔径 4mm, 远大于可见光波长, 属于几何光学范畴, 因此人眼看到的是物体的真实图像。若可见光的波长是毫米波段, 则人眼瞳孔孔径与波长是同一数量级, 那么通过瞳孔在视网膜上显现的是物体的衍射图样, 而看不到物体的真实图像。

### 四、计算题：

1. 某卫星上的照相机能清楚识别地面上汽车的牌照号码。

(1) 如果需要识别的牌照上的字划间的距离为 0.5 cm, 则在 160 km 高空的卫星上的照相机的角分辨率应为多大?

(2) 此照相机的孔径需要多大? 光的波长按 500 nm 计算。

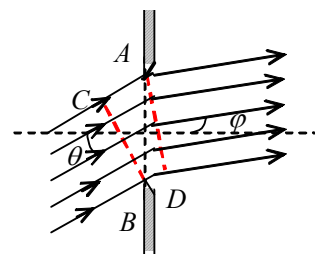
**解：**(1) 角分辨率应为

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{L} = \frac{5 \times 10^{-3}}{160 \times 10^3} \text{ rad} = 3.125 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

(2) 由夫琅禾费圆孔衍射中心衍射角半径公式  $\theta \approx \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , 照相机孔径应为

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\theta} = 1.22 \times \frac{500 \times 10^{-9}}{3.125 \times 10^{-8}} \text{ m} = 19.52 \text{ m}$$

2. 如图所示, 设波长为  $\lambda$  的平面波沿与单缝平面法线成  $\theta$  角的方向入射, 单缝 AB 的宽度为  $a$ , 观察夫琅禾费衍射. 试求出各极小值(即各暗条纹)的衍射角  $\varphi$ 。



**解：**在如图情况下, CA、BD 两光线的光程差为

$$\delta = \overline{CA} - \overline{BD} = a \sin \theta - a \sin \varphi$$

由单缝衍射极小值条件

$$a \sin \theta - a \sin \varphi = \pm k\lambda \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{排除 } k = 0)$$

得各极小值(即各暗条纹)的衍射角

$$\varphi = \sin^{-1}(\sin \theta \mp k \frac{\lambda}{a}) \quad k = 1, 2, \dots \dots \quad (k \neq 0)$$

3. 一衍射光栅，每厘米有 200 条透光缝，每条透光缝宽为  $a = 2 \times 10^{-3} \text{ cm}$ ，在光栅后方一焦距  $f = 1 \text{ m}$  的凸透镜。现以  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色平行光垂直照射光栅，求：

(1) 透光缝  $a$  的单缝衍射中央明条纹宽度为多少？

(2) 在该中央明条纹宽度内，有几个光栅衍射主极大？

**解：** (1) 单缝衍射中央明条纹半角宽度满足  $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$ ，又  $\text{tg} \varphi = \frac{x}{f}$ ，因  $\varphi$  角很小，则有

$$\text{tg} \varphi \approx \sin \varphi, \quad \frac{x}{f} = \frac{\lambda}{a}$$

$$\text{故单缝衍射中央明条纹半宽度 } x = f \frac{\lambda}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{单缝衍射中央明纹宽度为 } \Delta x = 2x &= 2f \frac{\lambda}{a} = 2 \times 1 \times \frac{600 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}} \\ &= 6 \times 10^{-2} (\text{m}) \end{aligned}$$

(2) 中央明纹宽度内光栅衍射主极大满足

$$\left. \begin{aligned} a \sin \varphi &= \lambda \\ (a+b) \sin \varphi &= k \lambda \end{aligned} \right\} \rightarrow k \leq \frac{a+b}{a} = \frac{1/200}{2 \times 10^{-3}} = 2.5$$

取整数有单缝衍射中央明条纹宽度内光栅衍射主极大的最高级次为  $k_{\max} = 2$   
所以在该中央明纹区内共有  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ ，共 5 个光栅衍射主极大。

**另解：**  $\frac{d}{a} = 2.5$  进成整数取为 3

$$\text{所以在中央明纹区内共有 } 2 \left( \frac{d}{a} \right)_{\text{进整}} - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5 \text{ 条主极大}$$

即  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ ，共 5 个光栅衍射主极大。

4. 用波长为  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$  的光照射一个每毫米刻有 500 条缝的光栅，光栅的透光缝宽  $a = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。试计算：

(1) 平行光垂直入射光栅，最多能观察到第几级条纹？实际观察到的明条纹总数是多少？

(2) 平行光以与光栅法线方向成夹角  $\theta = 30^\circ$  入射，衍射条纹中两侧的最高级次各属哪一级？

**解：** 光栅常数  $d = a + b = \frac{1}{500} \text{ mm} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$

$$(1) \text{ 由光栅公式, } d \sin \varphi = k \lambda, \quad k = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}, \text{ 则 } k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2.0 \times 10^{-6}}{589.3 \times 10^{-9}} = 3.4$$

所以，最多可观察到两侧各 3 级条纹。

由于， $\frac{d}{a} = \frac{k}{k'} = 2$ ，衍射条纹中第 2，4，---- 等级次将缺级，实际最多可观察到  $k = 0, \pm 1, \pm 3$ ，共 5 条明纹。

(2) 由斜入射光栅公式  $\Delta = d(\sin \theta \pm \sin \varphi) = k\lambda$

当衍射角  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时， $\sin \varphi = 1$  时为衍射最高级次，此时  $\theta = 30^\circ$

一侧： $k = \frac{d(\sin \theta + \sin \varphi)}{\lambda} = \frac{2.0 \times 10^{-6} \times (0.5 + 1)}{589.3 \times 10^{-9}} = 5.1$ ，所以这一侧最多可观察到 5 级。

另一侧： $k' = \frac{d(\sin \theta - \sin \varphi)}{\lambda} = \frac{2.0 \times 10^{-6} \times (0.5 - 1)}{589.3 \times 10^{-9}} = -1.7$

所以，这一侧最多可观察到 1 级。