习　题　十　三

13—1　求下列函数的象函数：

(1) $\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$　　(2) $t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$；

(3) $(t^2+1)\,e^{-u}$　　(4) $U_m\sin\omega(t-t_o)\varepsilon(t-t_o)$

(5) $e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$　　(6) $e^{-(a+t)}\cos(\omega t+\varphi)$

(7) $3\delta(t)+t+5$；　　(8) $t\cos\omega t$

解

（1）£［$\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$］

$=$£［$\varepsilon(t)$］$-$£［$\varepsilon(t-2)$］

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}$$

（2）£［$t\varepsilon(t)-(t-1)\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-1)$］

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}(\frac{1}{s}-1)e^{-s}$$

（3）£［$t^2e^{-2t}+e^{-2t}$］

$$=\frac{2!}{(s+2)^3}+\frac{1}{s+2}$$

（4）∵ £［$U_m\sin\omega t$］$=U_m\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

∴ £［$U_m\sin\omega(t-t_o)\varepsilon(t-t_o)$］

$$=U_m\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-t_os}$$

（5）∵　$e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$

$=e^{-at}(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi)$

∴　£［$e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$］

$=\cos\varphi$ £［$e^{-at}\sin\omega t$］$+\sin\varphi$ £［$e^{-at}\cos\omega t$］

$$=\frac{\omega\cos\varphi}{(s+a)^2+\omega^2}+\frac{\sin\varphi(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega\cos\varphi+\sin\varphi(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

（6）F（s）$=e^{-a}$ {£ [$e^{-t}\cos\omega t\cos\varphi$] － £ [$e^{-t}\sin\omega t\sin\varphi$]}

$$=e^{-a}\left\{\frac{\cos\varphi(s+1)}{(s+1)^2+\omega^2}-\frac{\omega\sin\varphi}{(s+1)^2+\omega^2}\right\}$$

$$=\frac{e^{-a}\left[(s+1)\cos\varphi-\omega\sin\varphi\right]}{(s+1)^2+\omega^2}$$

（7）£ [$3\delta(t)+t+5$]

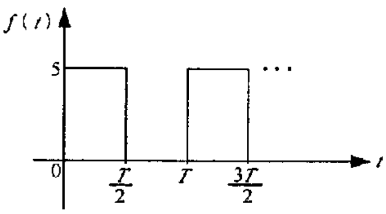
$$=3+\frac{1}{s^2}+\frac{5}{s}$$

（8）£ [$t\cos\omega t$]

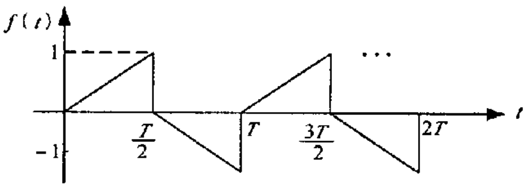
$$=\frac{d}{ds}\text{ £ [}\cos\omega t\text{]}$$

$$=\frac{\omega^2-s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

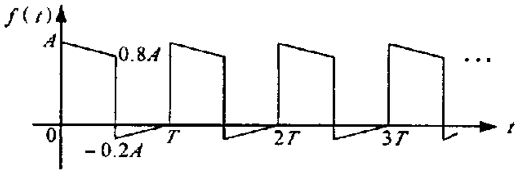
13—2　对题 13—2 图示各波形函数进行拉氏变换，



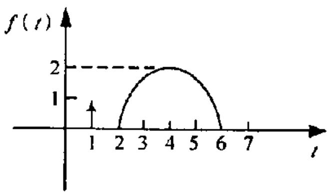
（a）



（b）



（c）



（d）一个单位冲激与
一个正弦函数的半波

题 13—2 图

解　（a）因为 $f_1(t)=5\varepsilon(t)-5\varepsilon(t-\frac{T}{2})$　　第一周期波形函数

所以周期函数 $f(t)$ 的象函数

$$F(s)=\text{£}\left[f(t)\right]=\frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{5(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-\frac{T}{2}t})}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{5}{s}\ \frac{1-e^{-\frac{T}{2}t}}{1-e^{-Ts}}$$

（b）解：原函数 $f(t)$ 在［0　$\frac{T}{2}$］前半周期的波型函数。

$$f_{11}(t)=\frac{2}{T}t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\frac{T}{2})\right]$$

$$=\frac{2}{T}\left[t\varepsilon(t)-(t-\frac{T}{2})\varepsilon(t-\frac{T}{2})-\frac{T}{2}\varepsilon(t-\frac{T}{2})\right]$$

$$\therefore F_{11}(s)=\text{£}\left[f_{11}(t)\right]=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-\frac{T}{2}s}-\frac{T}{2}\frac{1}{s}e^{-\frac{T}{2}s}\right]$$

$$=\frac{1}{s}(\frac{2}{Ts}-\frac{2}{Ts}e^{-\frac{T}{2}s}-e^{-\frac{T}{2}s})$$

∵$f(t)$ 在［$\frac{T}{2}$，T］后半周期波型函数。

$$f_{12}(t)=-f_{11}(t-\frac{T}{2})$$

∴$f(t)$ 在［0，T］一个周期的波型函数。

$$f_1(t)=f_{11}(t)+f_{12}(t)$$

$$=f_{11}(t)-f_{11}(t-\frac{T}{2})$$

∵ $f_1(t)$ 的象函数

$$F_1(s)=F_{11}(s)-F_{11}(s)e^{-\frac{T}{2}}=F_{11}(s)(1-e^{-\frac{T}{2}s})$$

故周期函数f（t）的象函数为

$$F(s)=F_1(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{1}{s}(\frac{2}{Ts}-\frac{2}{Ts}e^{-\frac{T}{2}s}-e^{-\frac{T}{2}s})\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}-\frac{T}{2}se^{-\frac{T}{2}s}}{\frac{T}{2}s^2(1+e^{-\frac{T}{2}s})}$$

（c）解　　由直线方程斜截式可知f（t）在（$0,\frac{T}{2}$）前半周期波型函数为

$$f_{11}(t)=(-\frac{0.4A}{T}t+A)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\frac{T}{2})\right]$$

$$=-\frac{0.4A}{T}\left[t\varepsilon(t)-(t-\frac{T}{2})\varepsilon(t-\frac{T}{2})-\frac{T}{2}\varepsilon(t-\frac{T}{2})\right]+A\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\frac{T}{2})\right]$$

$$F_{11}(s)=\pounds\left[f_{11}(t)\right]$$

$$=-\frac{0.4A}{T}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-\frac{T}{2}s}-\frac{T}{2}\frac{1}{s}e^{-\frac{T}{2}s}\right]+A\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{T}{2}s})$$

由直线方程两点式可知f（t）在［$\frac{T}{2}$，T］后半周期波型函数为

$$f_{12}(t)=(\frac{0.4A}{T}t-0.4A)\left[\varepsilon(t-\frac{T}{2})-\varepsilon(t-T)\right]$$

$$=\left[\frac{0.4A}{T}(t-\frac{T}{2})-0.2A\right]\left[\varepsilon(t-\frac{T}{2})-\varepsilon(t-T)\right]$$

$$=\frac{0.4A}{T}\left[(t-\frac{T}{2})\varepsilon(t-\frac{T}{2})-(t-T)\varepsilon(t-T)-\frac{T}{2}\varepsilon(t-T)\right]-0.2A\left[\varepsilon(t-\frac{T}{2})-\varepsilon(t-T)\right]$$

$$\because F_{12}(s)=\pounds\left[f_{12}(t)\right]$$

$$=\frac{0.4A}{T}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-\frac{T}{2}s}-\frac{T}{2}\frac{1}{s}e^{-\frac{T}{2}s}\right]e^{-\frac{T}{2}s}-0.2A\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{T}{2}s})e^{-\frac{T}{2}s}$$

∴ f（t）在（0,T）周期的波型函数

$$f_1(t)=f_{11}(t)+f_{12}(t)$$

$F_1(s) = \pounds\left[f_1(t)\right]$

$$= F_{11}(s) + F_{12}(s)$$

$$= -\frac{0.4A}{T}(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-\frac{T}{2}s} - \frac{T}{2}\frac{1}{s}e^{-\frac{T}{2}s})(1 - e^{-\frac{T}{2}s})$$

$$+ A(1 - 0.2e^{-\frac{T}{2}s})(1 - e^{-\frac{T}{2}s})\frac{1}{s}$$

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{s^2}(-0.4 + Ts + 0.4e^{-\frac{T}{2}s})(1 - e^{-\frac{T}{2}s})$$

∴周期函数 f（t）的象函数为

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} = \frac{\frac{A}{T}\frac{1}{s^2}(-0.4 + Ts + 0.4e^{-\frac{T}{2}t}}{1 + e^{-\frac{T}{2}t}}$$

（d）解　　由图知 T＝8s，$f = \frac{1}{8}H_z$，$\omega = 2\pi f = \frac{\pi}{4} rad/s$

$$f(t) = \delta(t-1) + 2\sin(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2})\varepsilon(t-2) + 2\sin\left[\frac{\pi}{4}(t-4) - \frac{\pi}{2}\right]\varepsilon(t-6)$$

$F(s) = \pounds\left[f(t)\right]$

$$= e^{-s} + 2\frac{\frac{\pi}{4}}{s^2 + (\frac{\pi}{4})^2}e^{-2s} + 2\frac{\frac{\pi}{4}}{s^2 + (\frac{\pi}{4})^2}e^{-6s}$$

$$= e^{-s} + \frac{\pi}{2}\frac{e^{-2s} + e^{-6s}}{s^2 + (\frac{\pi}{4})^2}$$

13—3　求下列象函数的原函数 $f(t) = \pounds^{-1}\left[\mathrm{F(s)}\right]$：

(1) $\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} + 5$；　　(2) $\frac{3s+1}{s^3 + 5s^2 + 6s}$；

(3) $\frac{s^2+1}{2s^2-2}$　　(4) $\frac{s^2}{(s+1)(s^2+5s+6)}$；

(5) $\frac{2s+3}{s^2+1}$　　(6) $\frac{s^2+6s+10}{(s+2)(s^2+2s+2)}$；

(7) $\dfrac{1}{(s+3)^2(s^2+4s+5)}$ (8) $\dfrac{s^2+3s+2}{s^2}$；

(9) $\dfrac{s^2}{(s+1)^2(s^2+2s+2)^2}$ (10) $\dfrac{(s+3)e^{-s/2}}{s^2+4s+9}$；

(11) $\dfrac{2s^2+7s+9}{(s+1)^3}$。

（1）解 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s+2}\right]+\mathcal{L}^{-1}[5]$

$=e^{-2t}+2e^{-3t}+5\delta(t)$

（2）解 由 $Q(s)=s^3+5s^2+6s=0$ 求根为

$s_1=0,\ \ s_2=-2,\ \ s_3=-3$

$$\therefore\ f(t)=\frac{3s+1}{s^3+5s^2+6s}$$
$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1=(s-0)\frac{3s+1}{s(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{6}$$

$$k_2=\frac{3s+1}{s(s+3)}\bigg|_{s=-2}=\frac{5}{2}$$

$$k_3=\frac{3s+1}{s(s+2)}\bigg|_{s=-3}=-\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{6}+\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t}$$

（3）解

$$\frac{s^2+1}{2s^2-2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2(s^2-1)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2}(\delta(t)+e^{t}-e^{-t})$$

（4）解

$\because$ $Q(s)=s^2+5s+6=0$ 的根为

$s_1 = -2$，$s_2 = -3$

$$\therefore\ F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2+5s+6)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1 = (s+1)\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = \frac{s^2}{(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=-2} = -4$$

$$k_3 = \frac{s^2}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-3} = \frac{9}{2}$$

∴ f（t）= £［$F(s)$］

$$= \frac{1}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-3t}$$

（5）解

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+1} = 2\frac{s}{s^2+1} + 3\frac{1}{s^2+1}$$

∴ f（t）= $£^{-1}$［$F(s)$］$= 2\cos t + 3\sin t$

（6）解

$$F(s) = \frac{s^2+6s+10}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$= \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2(s+1)+k_3}{(s+1)^2+1^2} \qquad \text{（甲）}$$

$$k_1 = \frac{s^2+6s+10}{s^2+2s+2}\bigg|_{s=-2} = 1$$

将 k_1 代至（甲）式

$$F(s) = \frac{s^2+2s+2+k_2(s+2)(s+1)+k_3(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

分子整理：$(k_2+1)s^2 + (3k_2+2+k_3)s + 2k_2 + 2k_3 + 2 = s^2 + 6s + 10$

比较系数：$k_2+1=1 \quad \rightarrow \quad k_2=0$

$3k_2+k_3+2=6 \quad \rightarrow \quad k_3=4$

$$\therefore\ F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{(s+1)^2+1^2}$$

$f(t) = £^{-1}[F(s)] = e^{-2t} + 4e^{-t}\sin t$

解 2　因为　$s^2+2s+2=0$ 的根 $s_1=-1+j$　　$s_2=-1-j$

$$F(s)=\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s-(-1+j)}+\frac{A_3}{s-(-1-j)}$$

由分解定理：

$$A_1=1,\quad A_2=\left.\frac{s^2+6s+10}{(s+2)\left[s-(-1-j)\right]}\right|_{s=-1+j}=2\angle-90^\circ$$

$\therefore$ $f(t)=£^{-1}[F(s)]$

$$=e^{-2t}+2|A_2|e^{-t}\cos(t-90^\circ)$$

$$=e^{-2t}+4e^{-t}\cos(t-90^\circ)$$

（7）解：分母 $Q(s)=0$ 的根为

$s_{1,2}=-3$，　$s_3=-2+j$，$s_4=-2-j$　　部分分式为：

$$F(s)=\frac{1}{(s+3)^2(s^2+4s+5)}$$

$$=\frac{k_{11}}{(s+3)^2}+\frac{k_{12}}{(s+3)}+\frac{k_2}{s-(-2+j)}+\frac{k_3}{s-(-2-j)}$$

$$k_{11}=(s+3)^2\left.\frac{1}{(s+3)^2(s^2+4s+5)}\right|_{s=-3}=2$$

$$k_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s+3)^2f(t)\right]\Big|_{s=-3}=\left.\frac{-(2s+4)}{(s^2+4s+5)^2}\right|_{s=-3}=\frac{1}{2}$$

$$k_2=\left[s-(-2+j)\right]\left.\frac{1}{(s+3)^2\left[s-(-2+j)\right]\left[s-(-2-j)\right]}\right|_{s=-2+j}$$

$$=\frac{1}{(-2+j+3)\left[-2+j-(-2-j)\right]}$$

$$=2\sqrt{2}\angle135^\circ$$

$\therefore$ $f(t)=£^{-1}[F(s)]=2te^{-3t}+\dfrac{1}{2}e^{-3t}+2|k_2|e^{-2t}\cos(t+135^\circ)$

$$=(2t+\frac{1}{2})e^{-3t}+4\sqrt{2}e^{-2t}\cos(t+135°)$$

（8）解： $F(s)=1+\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}$

$$\therefore \quad f(t)=£^{-1}\left[F(s)\right]=\delta(t)+3+2t$$

（9）解　分母 $Q(s)=(s+1)^2(s^2+2s+2)^2=0$ 的根为

$$s_{1,2}=-1 \quad s_{3,4}=-1+j \qquad s_{5,6}=-1-j$$

$$\therefore F(s)=\frac{s^2}{(s+1)^2(s^2+2s+2)^2}$$

$$=\frac{A_1}{(s+1)^2}+\frac{A_2}{(s+1)}+\frac{B_1}{[s-(-1+j)]^2}+\frac{B_2}{[s-(-1+j)]}+\frac{C_1}{[s-(-1-j)]^2}+\frac{C_2}{[s-(-1-j)]}$$

$$A_1=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s^2}{(s^2+2s+2)^2}\Big|_{s=-1}=1$$

$$A_2=\frac{d}{ds}[(s+1)^2F(s)]\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}[\frac{s^2}{(s^2+2s+2)^2}]\Big|_{s=-1}=-2$$

$$B_1=[s-(-1+j)]^2F(s)\Big|_{s=-1+j}=\frac{s^2}{(s+1)^2[s-(-1-j)]^2}\Big|_{s=-1+j}$$

$$=\frac{2\angle 270^\circ}{(-1)\times(-4)}=\frac{1}{2}\angle 270^\circ=-j\frac{1}{2}$$

$$B_2=\frac{d}{ds}\{\ [s-(-1+j)]^2F(s)\ \}\Big|_{s=-1+j}=\frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2}{(s+1)^2[s-(-1-j)]^2}\right\}\Big|_{s=-1+j}$$

$$=\frac{2+j}{2}=\frac{\sqrt{5}\angle 26.6°}{2}$$

由计算可知， $B_1=\overset{*}{C_1}\quad ,B_2=\overset{*}{C_2}$

$$\because L^{-1}\left[\frac{B_2}{s+1-j}+\frac{C_2}{s+1+j}\right]=e^{-t}\sqrt{5}\cos(t+26.6°)$$

又 $\because L^{-1}\left[\dfrac{j\frac{1}{2}}{(s+j)^2}+\dfrac{-j\frac{1}{2}}{(s-j)^2}\right]=-jt\dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}=t\sin t$

$\therefore$ $£^{-1}\left[\dfrac{B_1}{s+1+j}+\dfrac{C_1}{s+1+j}\right]$

$=e^{-t}t\sin t$

故 $f(t)=£^{-1}\left[F(s)\right]$

$=te^{-t}-2e^{-t}+\sqrt{5}e^{-t}\cos\left(t+26.6^{\circ}\right)+e^{-t}t\sin t$

$=e^{-t}\left(t-2+2\cos t-\sin t+t\sin t\right)$

（10）解

$\because$ 分母 $\theta(S)=S^2+4s+9=0$ 的根为

$S_1=-2+j\sqrt{5}\qquad S_2=-2-j\sqrt{5}$

又 $\because\dfrac{S+3}{S^2+4S+9}=\dfrac{K_1}{S-\left(-2+j\sqrt{5}\right)}+\dfrac{K_2}{S-\left(-2-j\sqrt{5}\right)}$

其中 $K_1=\left[S-\left(-2+j\sqrt{5}\right)\right]\dfrac{S+3}{S^2+4S+9}\Bigg|_{S=-2+j\sqrt{5}}$

$$=\frac{S+3}{S-\left(-2-j\sqrt{5}\right)}\Bigg|_{S=-2+j\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1+j\sqrt{5}}{j2\sqrt{5}}=\frac{j\sqrt{5}-5}{-10}=\frac{j\frac{1}{\sqrt{5}}-1}{-2}$$

$$=0.55\angle-24.1^{\circ}$$

$\therefore L^{-1}\left[\dfrac{S+3}{S^2+4S+9}\right]=2\times0.55e^{-2t}\cos\left(\sqrt{5}t-24.1^{\circ}\right)\varepsilon(t)$

由于象函数乘 e^{-ToS} 则原函数延时 T。

$\therefore$ $L^{-1}\left[\dfrac{S+2}{S^2+4S+9}e^{-\frac{S}{2}}\right]=1.1e^{-2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\cos\left[\sqrt{5}\left(t-\frac{1}{2}\right)-24.1^{\circ}\right]\varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$$=e^{-2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\left[\cos\sqrt{5}\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

（11）解　$\because\ \mathrm{F(s)}=\dfrac{2\mathrm{s}^2+7\mathrm{s}+9}{(s+1)^3}$

$Q(s)=(s+1)^3=0$ 的根为零的重根 $s_{1,2,3}=-1$

$k_1=(s+1)^3F(s)\big|_{s=-1}$

$=2s^2+7s+9\big|_{s=-1}=4$

$k_2=\dfrac{d}{ds}\left[(s+1)^3F(s)\right]\Big|_{s=-1}$

$=4s+7\big|_{s=-1}=3$

$k_3=\dfrac{1}{21}\dfrac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3F(s)\right]_{s=-1}$

$=4\times\dfrac{1}{2}=2$

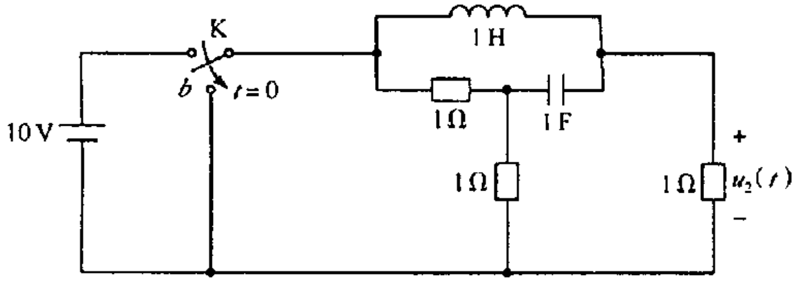
$\therefore\ \mathrm{F(s)}=\dfrac{\mathrm{k}_1}{(s+1)^3}+\dfrac{k_2}{(s+1)^2}+\dfrac{k_3}{s+1}$

$=\dfrac{4}{(s+1)^3}+\dfrac{3}{(s+1)^2}+\dfrac{2}{s+1}$

$=e^{-t}(4\times\dfrac{t^2}{21}+3\times t+2)$

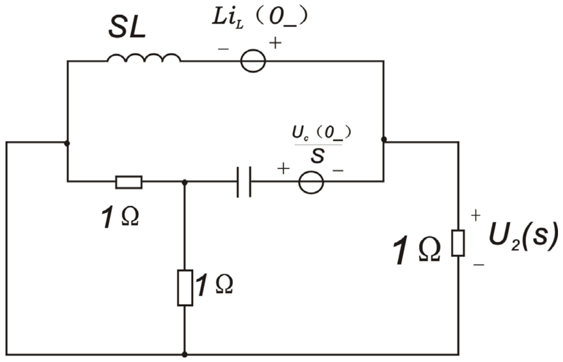
$=e^{-t}(2t^2+3t+2)$

13—4　画出题 13—4 图示电路的运算电路。



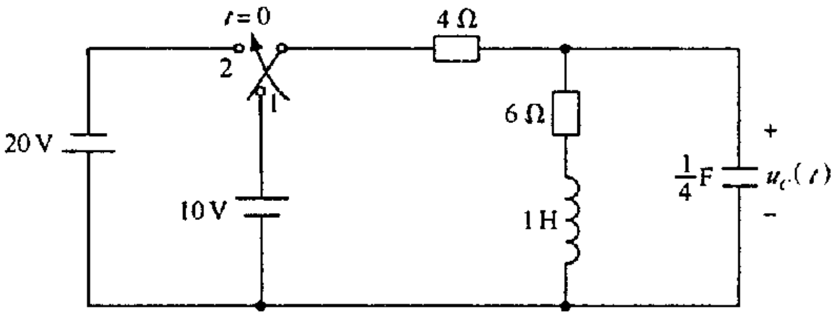
题 13—4 图

解　s 域电路为



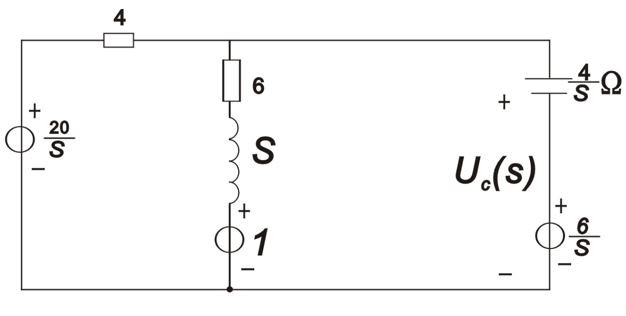
其中　$i_L(o\_) = 10A$　　　　$u_c(o\_) = 5V$

13—5　试用拉氏变换法求题 13—5 图示电路电压 $u_c(t)$。



题 13—5 图

解　s 域电路如下，　$i_L(o\_) = 1A$　，　$u_c(o\_) = 6V$



节点法

$$U_c(s)=\frac{-\frac{5}{3}-\frac{1}{s+6}+\frac{6s}{4s}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{s+6}+\frac{s}{4}}$$

$$=\frac{6(s^2+2s-20)}{s(s^2+7s+10)}$$

由 $s(s^2+8s+10)=0$ 的根， $s_1=0$， $s_2=-2$， $s_3=-5$

$k_1=8F(s)\big|_{s=0}=-12$

$k_2=[s-(-2)]F(s)\big|_{s=-2}$

$=\frac{6(s^2+2s-20)}{s(s+5)}\big|_{s=-2}$

=20

$k_3=(s+5)F(s)\big|_{s=-5}$

$=\frac{6(s^2+2s-20)}{s(s+2)}\big|_{s=-5}$

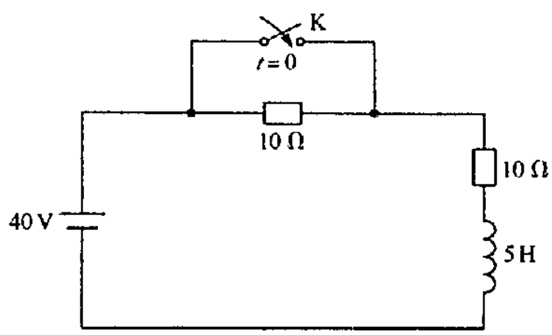
=－2

由分解定理

$U_c(s)=\frac{-12}{s}+\frac{20}{s+2}+\frac{-2}{s+5}$

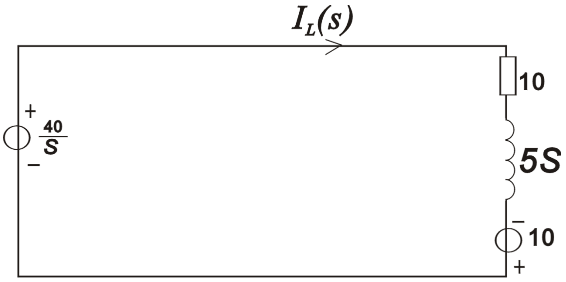
$\therefore\ u_c(t)=-12+20e^{-2t}-2e^{-5t}$ V （t≥0）

13—6 电路如题 13—6 图所示，已知初始条件 $i_L(o\_)=2$ A，试用拉普拉斯变换方法,求开关闭合后的 $i_L(t)$。



题 13－6 图

解　s 域电路图如下



$$I_L(s)=\frac{\frac{40}{s}+10}{10+5s}=\frac{40+10s}{s(5s+10)}=\frac{8+2s}{s(s+2)}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}$$

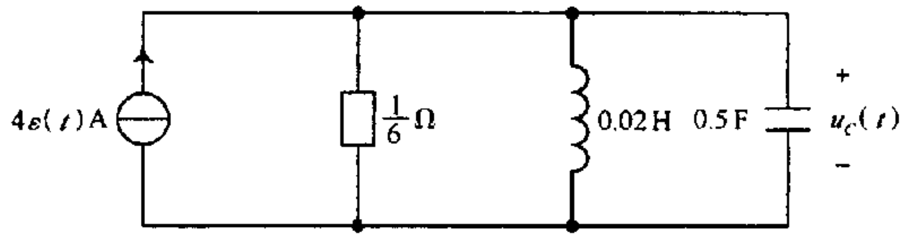
$$k_1=\frac{p(s)}{Q'(s)}\bigg|_{s=0}=-\frac{2s+8}{2s+2}\Big|_{s=0}=4$$

$$k_2=\frac{2s+8}{2s+2}\Big|_{s=-2}=-2$$

$\therefore\quad I_L(s)=\frac{4}{s}+\frac{-2}{s+2}$

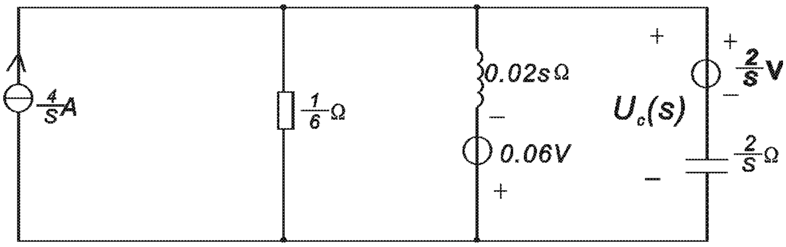
$\therefore\quad i_L(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[I_L(s)\right]=4-2e^{-2t}\quad A$　　　（t≥0）

13—7　题 13—7 图示电路中，已知 $u_c(o\_)=2V$，$i_L(o_)=3$A，试用拉氏变换法求电压 $u_c(t)$。



题 13—7 图

解：　运算电路如下



由节点法

$$U_c(s)=\frac{\frac{4}{s}-\frac{0.06}{0.02s}+1}{6+\frac{1}{0.02s}+\frac{s}{2}}=\frac{2(s+1)}{s^2+12s+100}$$

由$s^2+12s+100=0$的根$s_{1,2}=-6\pm j8$

$s_1=-6+j8=10\angle 126.9°$

$k_1=[s-(-6+j8)]F(s)\ \Big|_{s=-6+j8}$

$=\dfrac{2(-6+j8+1)}{s-(-6-j8)}$

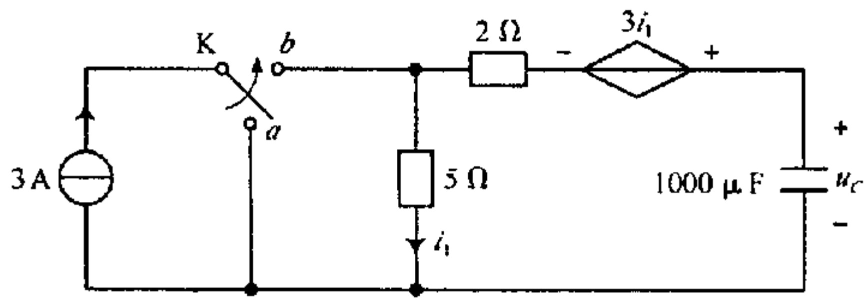
$=1.18\angle 32°=|K_1|\angle\theta$

$\therefore U_c(t)=£^{-1}[U_c(s)]=2|K_1|e^{-6t}\cos(8t+\theta)$

$=2.36e^{-6t}\cos(8t+32°)$

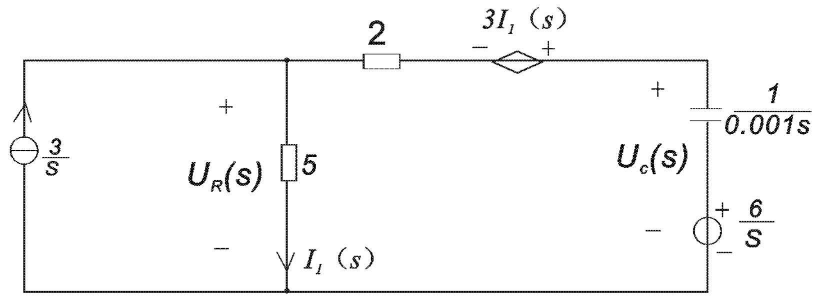
（或$2e^{-6t}\cos 8t-1.25e^{-6t}\sin 8t$)

13—8　题 13—8 图示电路中，已知$u_c(o_)=6V$，在 t=0 时开关由位置 a 投向位置 b。求 t≥0 时的$u_c(t)$。



题 13—8 图

解 1：运算电路如下



节点法

$$U_R(s)=\frac{\frac{3}{s}+\frac{\frac{6}{s}-3I_1(s)}{2+\frac{1}{0.001s}}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2+\frac{1}{0.001s}}}$$

$$=\frac{\frac{3}{s}+\frac{6-3sI_1(s)}{2s+1000}}{\frac{1}{5}+\frac{s}{2s+1000}} \qquad ①$$

$$=\frac{60s+15000-15s^2I_1(s)}{s(7s+1000)}$$

$$U_R(s)=5I_1(s) \qquad ②$$

②代至①式整理：

$$U_R(s)=\frac{6s+1500}{s^2+100s}$$

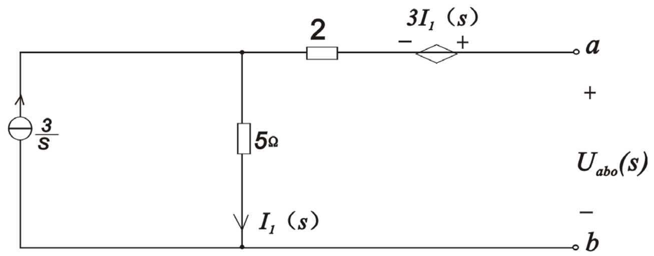
$$\therefore \qquad I_1(s)=\frac{U_R(s)}{5}=\frac{6s+1500}{5(s^2+100s)}$$

$$U_c(s) = -(I_1(s) - \frac{3}{s})\frac{1}{0.001s} + \frac{6}{s}$$
$$= \frac{2400+6s}{s(s+100)}$$
$$= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+100}$$

$$k_1 = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{6s+2400}{s+100}\Big|_{s=0} = 24$$
$$k_2 = (s+100)F(s)\Big|_{s=-100} = \frac{6s+2400}{s}\Big|_{s=-100} = -18$$

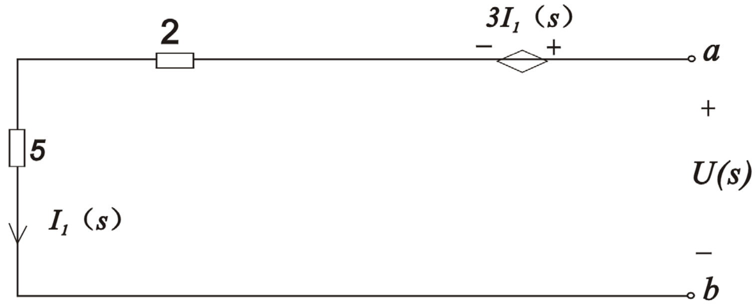
$$\therefore U_c(t) = L^{-1}[U_c(s)] = 24 - 18e^{-100t} \quad V \qquad (t \geqslant 0)$$

解 2：（1）求如下二端网络的戴维南等效支路



$$U_{abo}(s) = 3I_1(s) + 5 \times \frac{3}{s} = 3 \times \frac{3}{s} + \frac{15}{s} = \frac{24}{s} \quad V$$

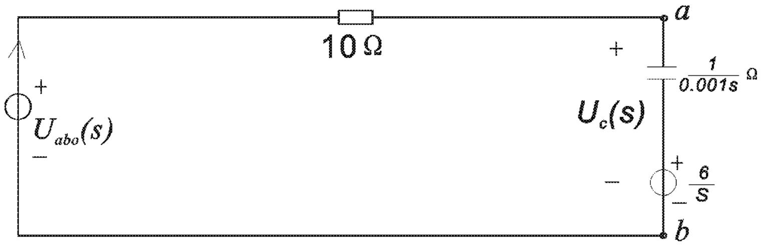
相应无源二端网络，外加电压 U（s）



$$U(s) = 3I_1(s) + 7I_1(s)$$

$$\therefore Z_{ab}(s) = \frac{U(s)}{I_1(s)} = 10\Omega$$

（2）等效电路为

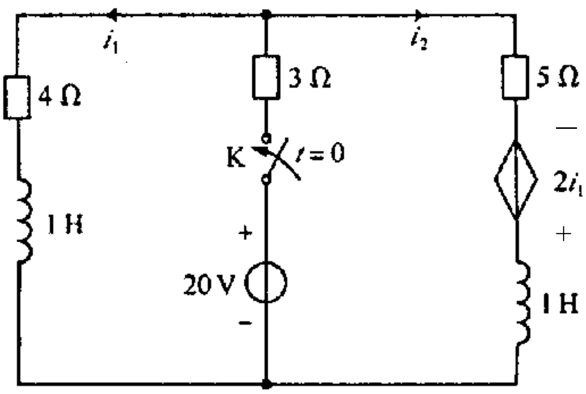


节点法：$U_c(s)=\dfrac{\dfrac{U_{abo}(s)}{10}+\dfrac{6}{s}\times0.001s}{\dfrac{1}{10}+0.001s}$

$=\dfrac{6s+2400}{s(s+100)}$

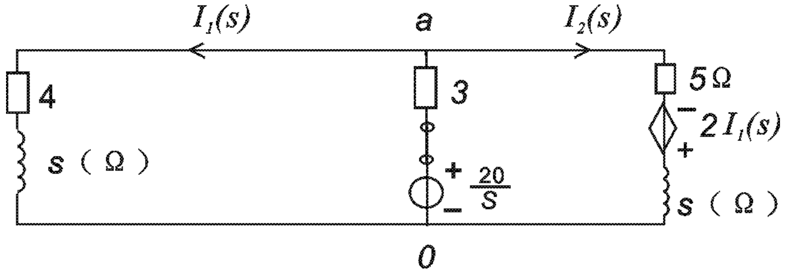
$\therefore U_c(t)=£^{-1}[U_c(s)]=24-18e^{-100t}$ v(t ≥0）

13—9 题 13—9 图示电路，初始条件$i_1(o_)=0A$，$i_2(o\_)=0A$，在和 t=0 时闭合开关，试求 t≥o 时的电流$i_1(t)$。



题 13—9 图

解： 已知$i_1(o_)=o$ ，$i_2(o\_)=o$



节点法

$$V_a(s)=\frac{\frac{20}{s}\times\frac{1}{3}-\frac{2I_1(s)}{s+5}}{\frac{1}{s+4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{s+5}}$$

$$=\frac{20(s+5)(s+4)-3s(s+4)\times 2I_1(s)}{3s(s+5)+s(s+5)(s+4)+s3(s+4)} \qquad ①$$

$$I_1(s)=\frac{U_a(s)}{4+s} \qquad ②$$

由②代至①整理：$s(s^2+15s+47)\,U_a(s)+6sU_a(s)=20(s+5)(s+4)$

$$U_a(s)=\frac{20(s+5)(s+4)}{s(s^2+15s+53)}$$

解方程

$s^2+15s+53=0$ 得 $s_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{15^2-4\times 53}}{2}$

$$\approx\frac{-5\pm 3.6}{2}=\begin{cases}-0.7\\-4.3\end{cases}$$

$$I_1(s)=\frac{U_a(s)}{4+s}=\frac{20(5+s)}{s(s+0.7)(s+4.3)}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+0.7}+\frac{k_3}{s+4.3}$$

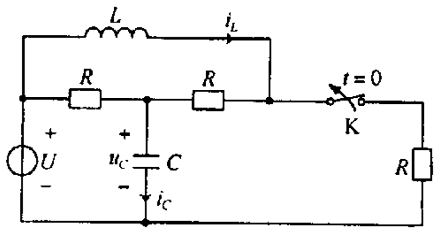
$$k_1=\left.\frac{100}{0.7\times 4.3}\right|_{s=0}=33.2$$

$$k_2=\left.\frac{20(5-0.7)}{-0.7(-0.7+4.3)}\right|_{s=-0.7}=\frac{86}{-2.52}=-34.1$$

$$k_3=\left.\frac{20(5-4.3)}{-4.3(-4.3+0.7)}\right|_{s=-4.3}=\frac{14}{+15.48}=0.9$$

∴ $i_1(t)=33.2-34.1e^{-0.7t}+0.9e^{-4.3t}$ A （t≥0）

13—10 题 13—10 图示电路中，$R=1\Omega$，L=1H，C＝1F，U＝1V。在开关 K 打开前电路已达稳定状态，试用拉普拉斯变换法求 t≥o 时的 $u_c(t)$。

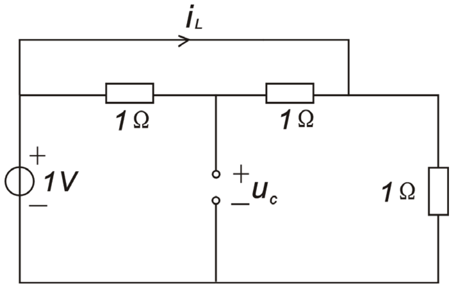


题 13－10 图

解：(1)t＜0, 电路图（a）如下，可得

$u_c(0\_)=1V$

$i_L(0\_)=1A$

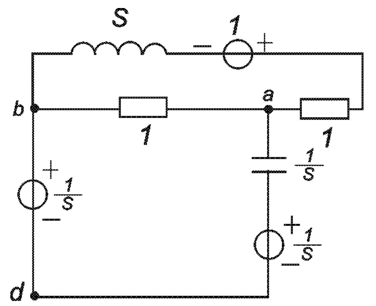


图（a）

(2)t≥0 后，运算电路为图（b）

节点法：　取$U_b(s)=0$

$$U_a(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+1}+1+s}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$



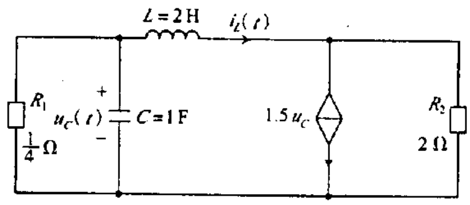
图（b）

$$\therefore\ U_c(s)=U_{ad}(s)=U_a(s)+U_{bd}(s)$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{s}$$

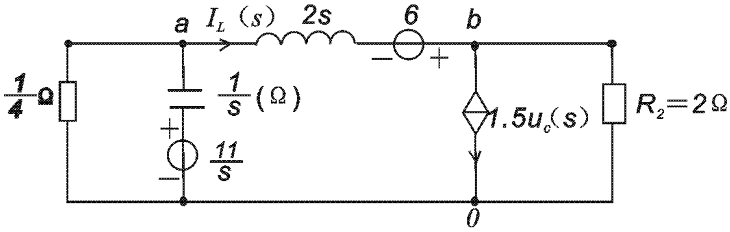
$$\therefore\ u_c(t)=\text{£}^{-1}\left[U_c(s)\right]=(1+e^{-t}\sin\omega t)\varepsilon(t)\quad V$$

13—11　题 13—11 图示电路为 t＝0 换后的电路，已知$u_c(o_)=11\ V$，$i_L(o_)=3$A。求 t≥0 时的$u_c(t)$。

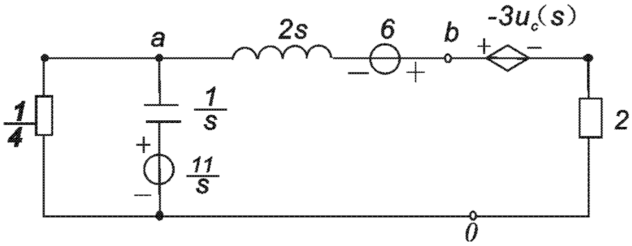


题 13－11 图

解：　已知$u_c(o_)=11V$　　　$i_L(o\_)=3A$



上图等效变换后为



节点法

$$U_a(s)=U_c(s)=\frac{\frac{\frac{11}{s}}{\frac{1}{s}}+\frac{(-3U_c(s)-6)}{(2s+2)}}{4+s+\frac{1}{2s+2}}$$

$$=\frac{11(2s+2)-3U_c(s)-6}{(4+s)(2s+2)+1}$$

$$=\frac{22s+22-6-3U_c(s)}{8s+8+2s^2+2s+1}$$

$$(2s^2+10s+9)U_c(s)+3U_c(s)=22s+16$$

$$U_c(s)=\frac{2(11s+8)}{2s^2+10s+12}=\frac{11s+8}{s^2+5s+6}$$

令$s^2+5s+6=0\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times6}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}$

$$=\begin{cases}-2\\-3\end{cases}$$

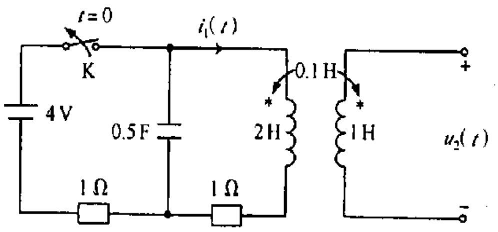
$$k_1=\left.\frac{11s+8}{2s+5}\right|_{s=-2}=\frac{-22+8}{1}=-14$$

$$k_2=\left.\frac{-33+8}{-6+5}\right|_{s=-3}=\frac{-25}{-1}=25$$

$$U_c(s)=\frac{25}{s+3}+\frac{-14}{s+2}$$

$\therefore\quad u_c(t)=£^{-1}\left[U_c\left(s\right)\right]=25e^{-3t}-14e^{-2t}v\left(t\geq 0\right)$

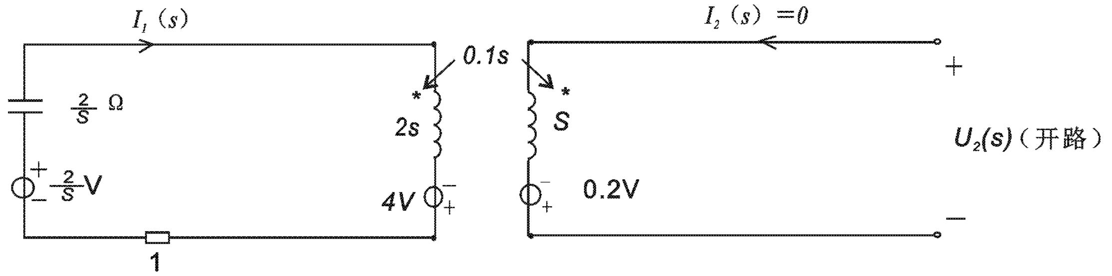
13—12　用拉氏变换法求题 13—12 图示电路中的$u_2(t)$。



题 13-12 图

解：由稳态（t<0）时的时域电路可得$u_c\left(0-\right)=2V$,$i_{L1}\left(0\_\right)=i_{L2}\left(0-\right)=2A$。

再画出 s 域运算电路如下：



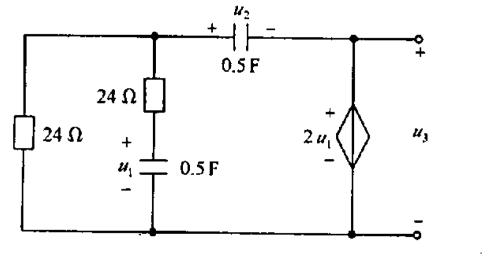
$$I_1(s)=\frac{4+\dfrac{2}{s}}{2s+1+\dfrac{2}{s}}=\frac{4s+2}{2s^2+s+2}\qquad (甲)$$

$$U_2(s)=I_{L1}(s)\times 0.1s-0.2=\frac{0.4s^2+0.2s}{2s^2+s+2}-0.2$$

化真分式$\Rightarrow=\dfrac{-0.4}{2s^2+s+2}+0.2-0.2=\dfrac{-0.4}{2s^2+s+2}$

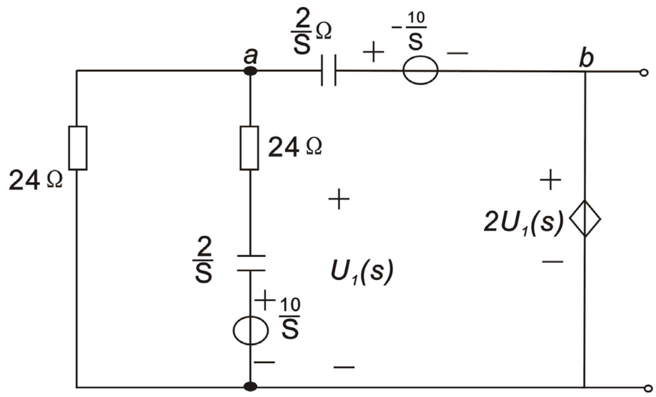
$$u_2(t)=-0.21e^{-\frac{t}{4}}\ \sin 0.97t\qquad \mathrm{V}\qquad (t\geq 0)$$

13—13　题 13—13 图示电路为 t＝0 换路后的电路，已知$u_1(o_)=10V$，$u_2(o\_)=-10V$。求 t≥0 时的$u_3(t)$。



题 13—13 图

解: $u_1(0_+)=u_1(0_-)=10 \qquad u_2(0_+)=u_2(0_-)=-10V$



$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{24+\dfrac{2}{s}}+\dfrac{s}{2}\right)U_a(s)-\dfrac{s}{2}\quad U_b(s)=\dfrac{\dfrac{10}{s}}{24+\dfrac{2}{s}}+\dfrac{-\dfrac{10}{s}}{\dfrac{2}{s}} & ① \\ U_b(s)=2U_1(s)=2\left[\left(\dfrac{U_a(s)-\dfrac{10}{s}}{24+\dfrac{2}{s}}\right)\times\dfrac{2}{s}+\dfrac{10}{s}\right] & ② \end{cases}$$

整理①、② $\begin{bmatrix} y^2+3y+1 & -y^2-y \\ -2 & y+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -120y \\ 240 \end{bmatrix}$ 其中 $y=12s$,

解出 $\Delta=(y+1)(y^2+y+1) \qquad \Delta_2=240(y^2+2y+1)$

$$\therefore \quad U_b(s)=U_3(s)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{240(y+1)}{y^2+y+1}=\frac{240(12s+1)}{144s^2+12s+1}=\frac{240(12s+1)}{144(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$=\frac{5(12s+1)}{3(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{\overset{*}{k}_1}{s-s_2}$$

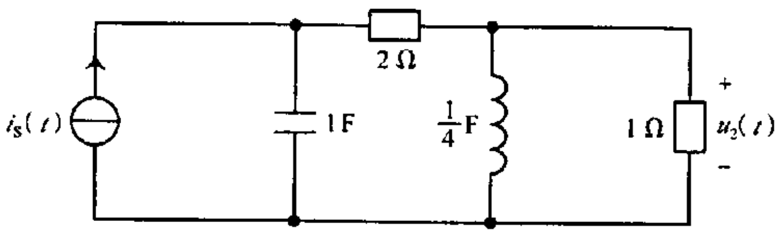
其中 $s_1=-\frac{1}{24}+j0.072,\quad s_2=-\frac{1}{24}-j0.072$ 为

$y^2+y+1=(12s)^2+12s+1=0$ 的根

$$k_1=\left.\frac{s(12s+1)}{3(s-s_2)}\right|_{s=s_1}=10\left(1-j\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{20}{\sqrt{3}}\ \angle-30^\circ$$

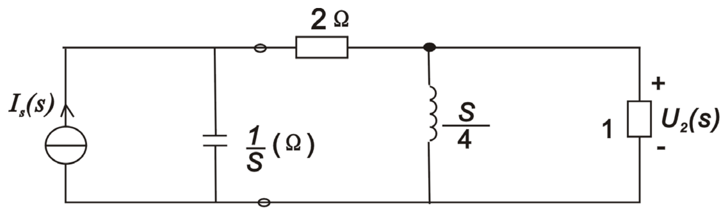
$$\therefore\quad u_3(t)=2|k_1|e^{-\frac{1}{24}t}\cos\left(0.072t-30^\circ\right)=23.1e^{-\frac{1}{24}t}\sin\left(0.072t+60^\circ\right)V$$

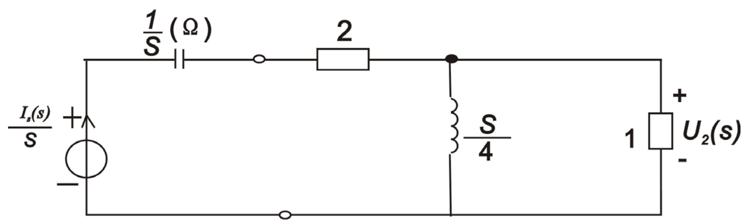
13—14　设题 13—14 图示电路为零状态电路，电路的激励$i_s(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)A$，试求电压$u_2(t)$。



题 13—14 图

解 $I_s=\ \pounds\left[i_s(t)\right]=\ \pounds\ 2e^{-1}\varepsilon(t)=\frac{2}{s+1}$





节点法 $U_2(s)\left(\frac{1}{\frac{1}{s}+2}+\frac{4}{s}+1\right)=\frac{(\frac{I_s(s)}{s})}{(\frac{1}{s}+2)}$

$$(\frac{s}{2s+1}+\frac{4}{s}+1)U_2(s)=\frac{2}{s(s+1)}\ \frac{s}{2s+1}$$

两边乘 $s(2s+1)$

$$\left[s^2(s+1)+4(2s+1)(s+1)+s(2s+1)(s+1)\right]U_2(s)=\frac{2s}{s+1}$$

$$U_2(s)=\frac{2s}{(s+1)(2s^2+9s+4)}$$

令 $3s^2+9s+4=0\Rightarrow s_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-4\times3\times4}}{2\times3}$

$$=\frac{-9\pm\sqrt{33}}{6}=\frac{-9\pm5.7}{6}$$

$$=\begin{cases}-0.55\\-2.45\end{cases}$$

$$U_2(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+0.55}+\frac{k_3}{s+2.45}$$

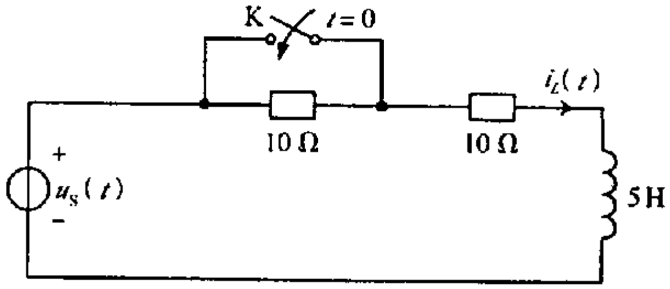
$$k_1=\left.\frac{2s}{(s+0.55)(s+2.45)}\right|_{s=-1}=\frac{-2}{-0.45\times1.45}=3.1$$

$$k_2=\left.\frac{2\times(-0.55)}{(-0.55+1)(-0.55+2.45)}\right|_{s=-0.55}=\frac{-1.1}{0.45\times1.9}=-1.29$$

$$k_3=\left.\frac{2\times(-2.45)}{-1.45(-1.9)}\right|_{s=-2.45}=\frac{-4.9}{+2.755}=-1.78$$

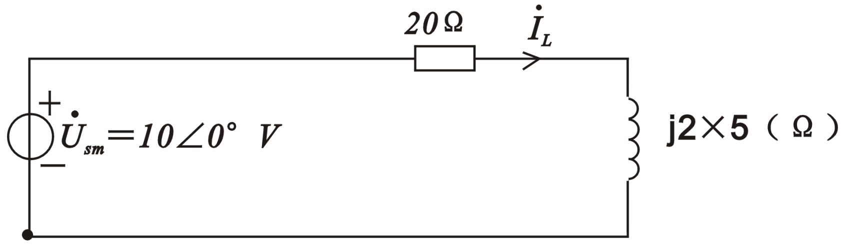
$$\therefore\quad u_2(t)=\text{£}^{-1}\ \left[U_2(s)\right]=3.1e^{-t}-1.29e^{-0.55t}-1.78e^{-2.45t}V\qquad（t\geqslant0）$$

13—15　题 13—15 图示电路的电压源 $u_s(t)=10\cos2t\ \ V$。在 t<O 时电路已处于稳态。求 t≥0 时的 $i_L(t)$。



题 13—15 图

解　　（1）求 t<0 时稳态解



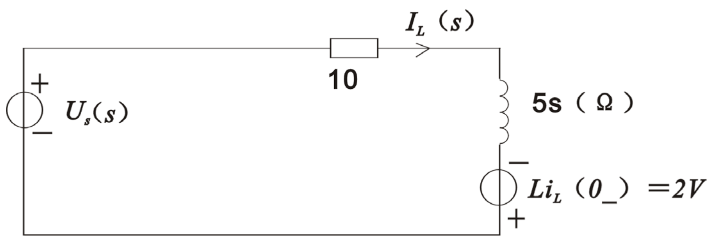
$$\dot{I}_{Lm}=\frac{10\angle 0°}{20+j10}=\frac{1}{2+j}=\frac{1}{\sqrt{5}\angle 26.6°}=\frac{1}{\sqrt{5}}\angle -26.6° A$$

$$i_{L(t)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2t-26.6°)A \qquad （t<0）$$

$$\therefore\ i_L(0\_)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(-26.6°) \qquad V$$

$=0.45\times0.89=0.4A$

（2）t≥0，　s 域运算电路，$U_s(s)=L\left[10\cos 2t\right]=\dfrac{10s}{s^2+4}$



$$I_L(s)=\frac{U_s(s)+2}{10+5s}$$

$$=\frac{\frac{10s}{s^2+4}+2}{5s+10}$$

$$=\frac{10s+2\left(s^2+4\right)}{\left(5s+10\right)\left(s^2+4\right)}$$

$$=\frac{2s^2+10s+8}{\left(5s+10\right)\left(s^2+4\right)}$$

$$=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s-j2}+\frac{k_3}{s+j2}$$

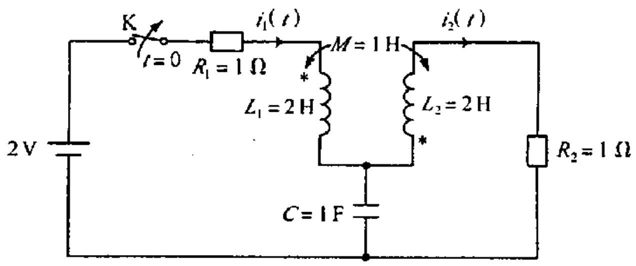
$$k_1=\left.\frac{2s^2+10s+8}{5\left(s^2+4\right)}\right|_{s=-2}=\frac{8-20+8}{5\times 8}=\frac{-4}{40}=-0.1$$

$$k_2=\left.\frac{2\left(j2\right)^2+j20+8}{5\left(s+2\right)\left(s+j2\right)}\right|_{s=j2}=\frac{-j8+j20+8}{5\times\left(2+j2\right)\left(j4\right)}=\frac{8+j12}{-40+40j}$$

$$=\frac{14.4\angle 56.3^\circ}{40\sqrt{2}\angle 135^\circ}=\frac{1}{4}\angle-78.7^\circ$$

$$\therefore\quad i_L\left(t\right)=L^{-1}\left[I_L\left(s\right)\right]=-0.1e^{-2t}+0.5\cos\left(2t-78.7^\circ\right)A\quad\left(t\geq 0\right)$$

13—16　题 13—16 图示电路，在 t<O 时，电路已处于稳态。在 t＝0 时，开关 K 打开，试求 t≥o 时的电流 $i_2(t)$。



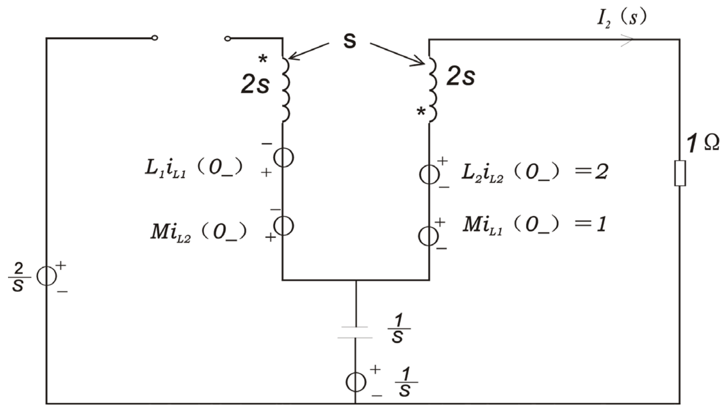
题 13—16 图

解：（1）$t<0$ 时，$i_1\left(t\right)=\frac{2}{1+1}=1A$

$$i_1\left(0_-\right)=i_{L1}\left(0_-\right)=i_{L2}\left(0_-\right)=1A$$

$$U_c\left(0_-\right)=1V$$

（2）$t \geq 0$，运算电路



$$I_2(s) = \frac{\frac{1}{s}+3}{\frac{1}{s}+2s+1}$$

$$= \frac{3s+1}{2s^2+s+1}$$

$$= \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2}$$

令 $2s^2+s+1=0$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 2}}{2\times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm j0.66$$

$$s_1 = -\frac{1}{4} + j0.66 = -\alpha + j\omega$$

$$k_1 = \left. \frac{-0.75 + j1.98 + 1}{2\left[s - \left(-\frac{1}{4} - j0.66\right)\right]} \right|_{s=-0.25+j0.66}$$

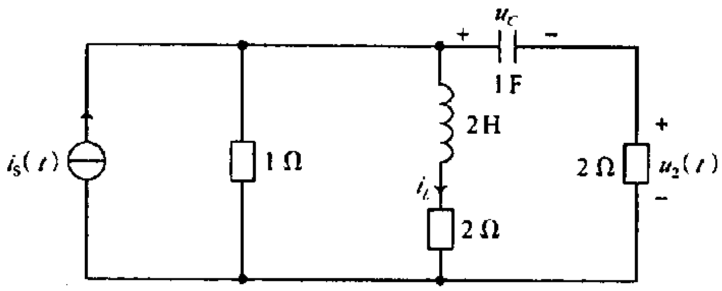
$$= \frac{0.25 + j1.98}{4\times j0.66} = \frac{2\angle 82.8^\circ}{j2.64}$$

$$= 0.76\angle -7.2^\circ = |k_1|\angle\theta$$

$$i_2(t) = L^{-1}\left[I_2(s)\right] = 2\left|k_1\right|e^{-\alpha t}\cos\left(\omega t+\theta\right)$$

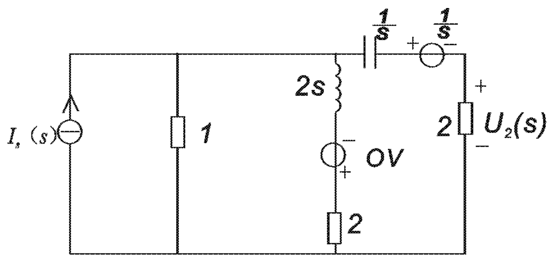
$$= 1.5e^{-\frac{t}{4}}\cos\left(0.66t - 7.2^{\circ}\right)A \quad \left(t \geq 0\right)$$

13—17 电路如题 13—17 图所示，$i_s(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t)A$，$u_c(0-) = 1\ V$，$i_L(0\_) = 0\ A$，用拉氏变换法求$u_2(t)$。

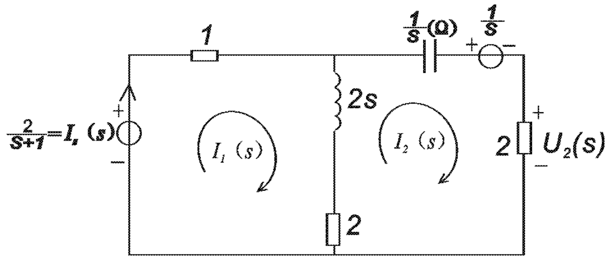


题 13—17 图

解 $I_s(s) = £\left[2e^{-t}\varepsilon(t)\right] = \dfrac{2}{s+1}$



上图电源变换后如下



$$\begin{bmatrix} 3+2s & -(2s+2) \\ -(2s+2) & 4+2s+\dfrac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ -\dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Delta=(2s+3)\left(4+2s+\frac{1}{s}\right)-(2s+2)^2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3+2s & \dfrac{2}{s+1} \\ -(2s+2) & -\dfrac{1}{s} \end{vmatrix}=-\frac{1}{s}(2s+3)+4$$

$$I_2(s)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2s+(-3)+\dfrac{2s(2s+2)}{s+1}}{(2s+3)(4s+2s^2+1)-(4s^2+8s+4)s}$$

$$=\frac{2s-3}{6(s+0.4)(s+1.3)}$$

$$=\frac{k_1}{s+0.4}+\frac{k_2}{s+1.3}$$

$$k_1=\frac{2s-3}{6(s+1.3)}\Big|_{s=-0.4}$$

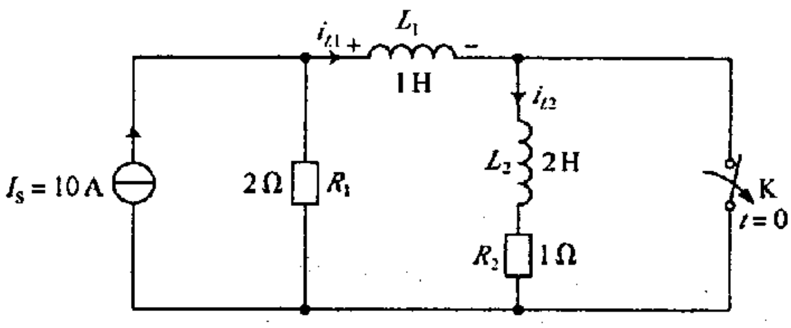
$$=\frac{-0.8-3}{6\times0.9}=\frac{-3.8}{5.4}=-0.7$$

$$k_2=\frac{-2.6-3}{6(-1.3+0.4)}\Big|_{s=-1.3}=\frac{-5.6}{-5.4}=1.04$$

$$U_2(s)=2I_2(s)=\frac{-1.4}{s+0.4}+\frac{2.08}{s+1.3}$$

$\therefore\quad u_2(t)=\pounds^{-1}\left[U_2(s)\right]=2.08e^{-1.3t}-1.4e^{-0.4t}$ V（t≥0）

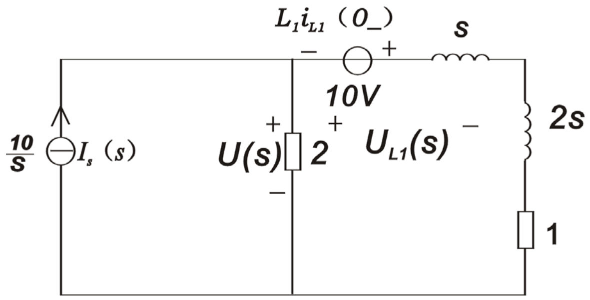
13—18　已知题 13—18 图示电路在 t=0_以前处于稳态，在 t＝0 时开关 K 断开，求 t≥o 时电感 L_1 的电压 $u_{L1}(t)$。



题 13—18 图

解　（1）$t<0$ 时，$i_L(o\_)=10A$　$i_{L_2}(o\_)=0\quad A$

（2）$t\geqslant 0$ 时，s 域电路



节点法：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3s+1}\right)U(s)=\frac{10}{s}-\frac{10}{3s+1}$

$2s(3s+1)$ 乘两边：

$$\left(3s^2+s+2s\right)U(s)=20(3s+1)-20s$$

$$U(s)=\frac{60s+20-20s}{3s^2+3s}$$

$$=\frac{40s+20}{3s(s+1)}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}$$

$$k_1=\left.\frac{40s+20}{3(s+1)}\right|_{s=0}=\frac{20}{3}$$

$$k_2=\left.\frac{40s+20}{3\times(-1)}\right|_{s=-1}=\frac{-20}{-3}=\frac{20}{3}$$

$$U(s)=\frac{20/3}{s}+\frac{20/3}{s+1}$$

$$U_{L1}(s)=\left(I_s(s)-\frac{U(s)}{2}\right)s-10$$

$$=\left(10-\frac{sU(s)}{2}\right)-10$$

$$=-\frac{s}{2}U(s)=-\frac{s}{2}\frac{(40s+20)}{3s(s+1)}$$

$$=-\frac{20s+10}{3(s+1)}=\frac{(20s+20)-10}{3(s+1)}$$

$$=-\left(\frac{20}{3}-\frac{10}{3(s+1)}\right)$$

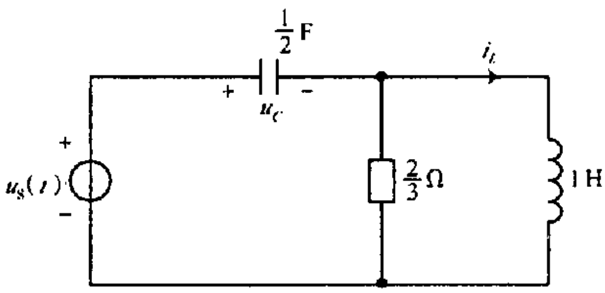
$$=-\frac{20}{3}+\frac{10}{3}\frac{1}{s+1}$$

$$u_{L1}(t)=\pounds^{-1}\left[U_{L1}(s)\right]=-\frac{20}{3}\delta(t)+\frac{10}{3}e^{-t}\quad v(t\geq 0)$$

13—19　已知题 13—19 图示电路$u_c(o_)=0\ \ V$，$i_L(o\_)=0$　A，求：

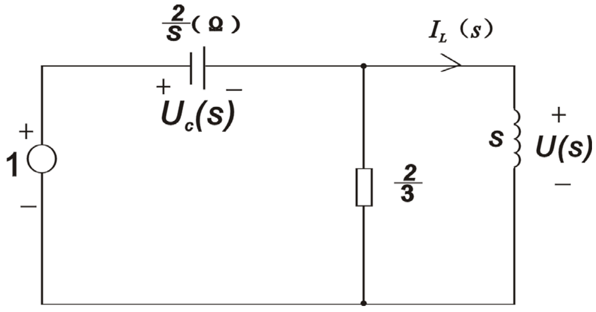
(1) $i_L(t)$的复频域网络函数 H（s）；

(2) 求$u_s(t)=\varepsilon(t)V$及$u_s(t)=5\sin 2t\varepsilon(t)V$时的响应$i_L(t)$。



题 13－19 图

解（1）令$U_s(s)=1$，且$u_c(0_-)=0,i_L(0_-)=0$，有 S 域电路



节点法 $\left(\frac{s}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{s}\right)U(s)=\frac{s}{2}$

$$\frac{s^2+3s+2}{2s}U(s)=\frac{s}{2}$$

$$U(s)=\frac{s}{2}\quad\frac{2s}{s^2+3s+2}=\frac{s^2}{s^2+3s+2}$$

$$H(s)=I_L(s)=\frac{U(s)}{s}=\frac{s}{s^2+3s+2}=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

令 $s^2+3s+2=0\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times2}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$

（2）（a）$u_s(t)=\varepsilon(t)$， $U_s(s)=\pounds\left[\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{s}$

$\therefore\ I_L(s)=H(s)\quad U_s(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$

$\therefore\ i_L(t)=L^{-1}\left[I_L(s)\right]=e^{-t}-e^{-2t}\quad A(t\geq 0)$

(b) $U_s(t)=5\sin 2t\varepsilon(t)$， $U_s(s)=L\left[u_s(t)\right]=\frac{10}{s^2+4}$

$\therefore\ I_L(s)=H(s)U_s(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}\frac{10}{s^2+4}$

$$=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+s_3}+\frac{\overset{*}{k}_3}{s+s_4}$$

$$k_1=\left.\frac{10s}{(s+2)(s^2+4)}\right|_{s=-1}=\frac{-10}{5}=-2$$

$$k_2=\left.\frac{10s}{(s+1)(s^2+4)}\right|_{s=-2}=\frac{-20}{(-1)\times8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

$$k_3=\left.\frac{10s}{(s+1)(s+2)(s+j2)}\right|_{s=j2}=\frac{5}{(1+j2)(2+j2)}$$

$$=\frac{5}{2.2\angle63.4°\times2\sqrt{20}\angle45°}=0.8\angle-108.4°\quad \text{A}\quad (t\geqslant0)$$

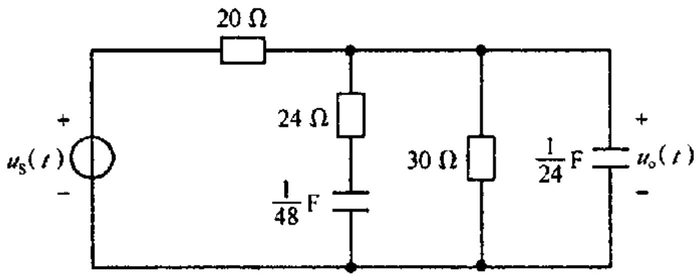
$\therefore\ i_L(t)=\pounds^{-1}\left[I_L(s)\right]=-2e^{-t}+\frac{5}{2}e^{-2t}+1.6\cos\left(2t-108.4^{\circ}\right)\quad A(t\geq0)$

13—20　题 13—20 图示电路为零状态电路。求激励为以下三种情况下的电压 $u_o(t)$。

(1) $u_s(t)=\delta(t)$；

(2) $u_s(t)=\varepsilon(t)$；

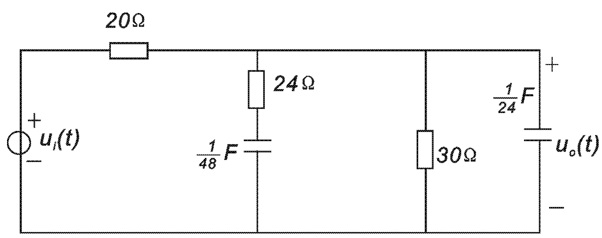
(3) $u_s(t)=50\cos 2t\cdot\varepsilon(t)$。

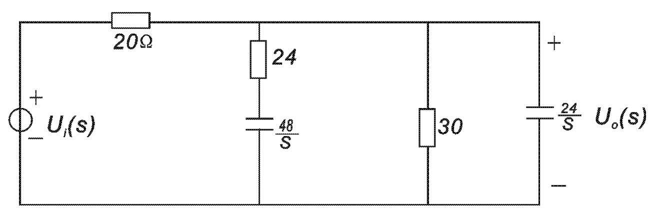


题 13—20 图

解（1）$u_i(t)=\delta(t)$

$u_i(s)=1$　　①





节点方程：$U_o(s)\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{24+\frac{48}{s}}+\frac{1}{30}+\frac{s}{24}\right]=\frac{U_i(s)}{20}$

$$H(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{20}\frac{1}{\frac{s^2+5s+4}{24(s+2)}}$$

$$=\frac{1}{20}\frac{24(s+2)}{s^2+5s+4}$$

$$=\frac{6}{5}\frac{s+2}{(s+1)(s+4)} \qquad ②$$

将①代入②：$U_o(s)=\frac{6}{5}(\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+4})$

$$k_1=(s+1)\frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\Big|_{s=-1}=\frac{1}{3}$$

$$k_2=(s+4)\frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\Big|_{s=-4}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad U_o(s)=\frac{6}{5}\ (\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{2}{3}}{s+4})$$

$$\therefore\quad U_o(t)=\frac{6}{5}(\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t})\ \varepsilon(t)$$

$$=(\frac{2}{5}e^{-t}+\frac{4}{5}e^{-4t})\ \varepsilon(t)$$

（2）$u_i(t)=\varepsilon(t)\quad ,U_i(s)=\frac{1}{s}$

由②：$U_o(s)=\frac{6}{5}\frac{s+2}{(s+1)(s+4)s}=\frac{6}{5}(\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+4}+\frac{k_3}{3})$

$$k_1=\frac{s+2}{(s+4)s}\Big|_{s=-1}=-\frac{1}{3}$$

$$k_2=\frac{s+2}{(s+1)s}\Big|_{s=-4}=\frac{-2}{-3\times(-4)}=\frac{-2}{12}=-\frac{1}{6}$$

$$k_3=\frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\Big|_{s=0}=\frac{2}{1\times 4}=\frac{1}{2}$$

$$U_o(s)=\frac{6}{5}(\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{6}}{s+4}+\frac{\frac{1}{2}}{s})$$

$$\therefore\quad u_o(t)=\frac{6}{5}\ (-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t}+\frac{1}{2})\quad \varepsilon(t)$$

$$=(-\frac{2}{5}e^{-t}-\frac{1}{5}e^{-4t}+\frac{3}{5})\ \varepsilon(t)\qquad (V)$$

（3）$u_i(t)=50cos2t\varepsilon(t),\ \ U_i(s)=50\times\frac{s}{s^2+2^2}$

由②式：$U_o(s)=\frac{6}{5}\frac{(s+2)\times s\times 50}{(s+1)(s+4)(s^2+4)}$

$$=60\left[\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+4}+\frac{k_3s+k_4}{s^2+2^2}\right] \qquad ③$$

$$k_1=\frac{(s+2)s}{(s+4)(s^2+4)}\Big|_{s=-1}=\frac{-1}{3\times 5}=-\frac{1}{15}$$

$$k_2=\frac{(s+2)s}{(s+1)(s^2+4)}\Big|_{s=-4}=\frac{-2\times(-4)}{-3\times 20}=-\frac{2}{15}$$

将③方程两边同乘（s^2+4），且令$s^2=-4$，

$$\frac{(s+2)s}{(s+1)(s+4)}\Bigg|_{\substack{s^2+4=0\\ s^2=-4}}=k_3s+k_4$$

$$(s^2+2s)\Big|_{s^2=-4}=(k_3s+k_4)(s^2+5s+4)\Big|_{s^2=-4}$$

$$-4+2s=5k_3s^2+5k_4s$$

$$-4+2s=-20k_3+5k_4s$$

$$-20k_3=-4,\quad k_3=\frac{1}{5}$$

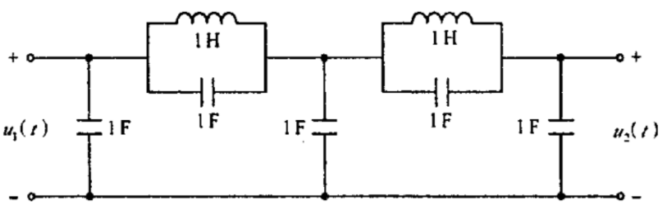
$$5k_4=2\quad ,k_4=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\quad U_o(s)=60\left[\frac{-\frac{1}{15}}{s+1}+\frac{-\frac{4}{15}}{s+4}+\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4}+\frac{2}{5}\frac{1}{s^2+4}\right]$$

$$\therefore\quad u_o(t)=60(-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{2}{15}e^{-4t}+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t)$$

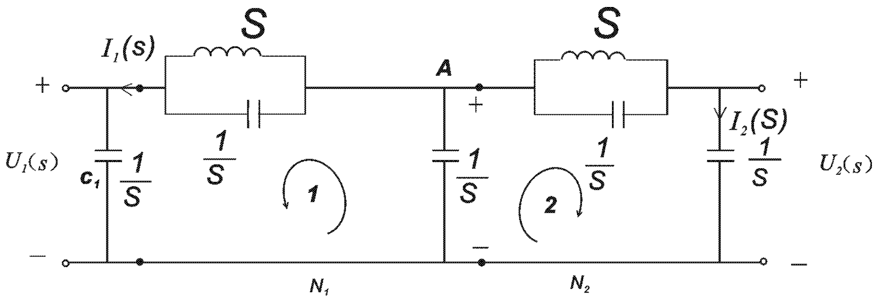
$$=-4e^{-t}-8e^{-4t}+12\cos 2t+12\sin 2t \qquad （t\geqslant 0）\qquad （V）$$

13—21　试求题 13—21 图示零状态电路的输出电压$u_2(t)$的网络函数 *H*（*s*）＝*U*₂（*s*）/*U*₁（*s*）。



题 13—21 图

解：



由回路方程得：（令$U_1(s)$外加，则 C_1 与 U_1 并联，拆去 C_1，对外等效）

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{2}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s)=U_2(s)/\frac{1}{s} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -U_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

求：$I_2(s)$

$$\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}}\right)I_1(s)+\frac{1}{s}\left(U_2(s)/\frac{1}{s}\right)=-U_1(s) \qquad ①$$

$$\frac{1}{s}I_1(s)+\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}}\right)U_2(s)/\frac{1}{s}=0 \qquad ②$$

由② $\qquad I_1(s)=-\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}}\right)U_2(s)s^2 \qquad ③$

③代入到①

$$\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}}\right)\left[s^2\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{s+\frac{1}{s}}\right)U_2(s)\right]-U_2(s)=U_1(s)$$

$$(1+\frac{s^2}{s^2+1})(2+\frac{s^2}{s^2+1})-1=\frac{U_1(s)}{U_2(s)}$$

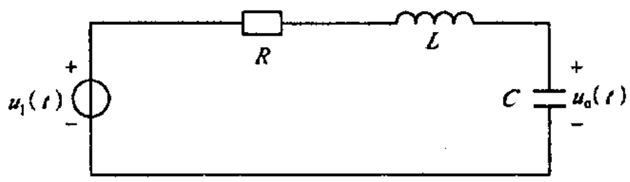
$$\frac{s^2+1+s^2}{s^2+1}\frac{2s^2+2+s^2}{s^2+1}+\frac{-s^2-1}{s^2+1}=\frac{U_1(s)}{U_2(s)}$$

$$\frac{(2s^2+1)(3s^2+2)}{(s^2+1)^2}+\frac{-(s^2+1)^2}{(s^2+1)^2}=\frac{U_1(s)}{U_2(s)}$$

$$\frac{6s^4+4s^2+3s^2+2-s^4-2s^2-1}{(s^2+1)^2}=\frac{U_1(s)}{U_2(s)}$$

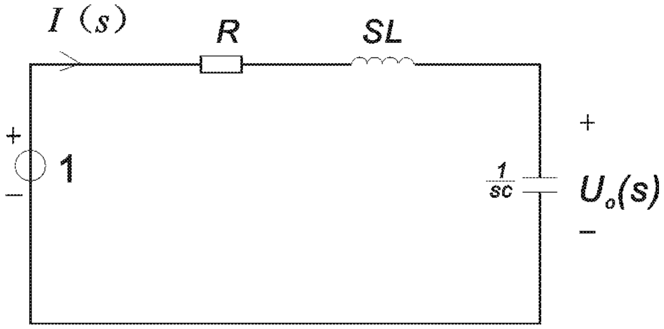
$$\therefore\quad H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{(s^2+1)^2}{5s^4+5s^2+1}$$

13—22　求题 13—22 图示零状态电路的网络函数 H（s）＝U_o（s）/U_I（s）;算出 H（s）)的极点。如果要使极点落在 s 平面的负实轴上，电路参数应满足什么条件?



题 13—22 图

解令 $U_1(s)=1$，则零状态运算电路



$$H(s)=U_0(s)=\frac{\frac{1}{sc}}{R+SL+\frac{1}{SC}}=\frac{1}{RCS+LCS^2+1}$$

令　$LCS^2+RCS+1=0 \Rightarrow$ 极点 $p_{1,2}=\dfrac{-RC\pm\sqrt{R^2C^2-4LC}}{2LC}$

若极点落在 S 平面负实轴极点 $P_i=-\alpha$（α 为正实数）$\Rightarrow$ 极点 P_i 的实部为负数，且虚部为零，即

$R^2C^2\geq 4LC$ 即 $R^2C\geq 4L$ 或 $R\geq 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

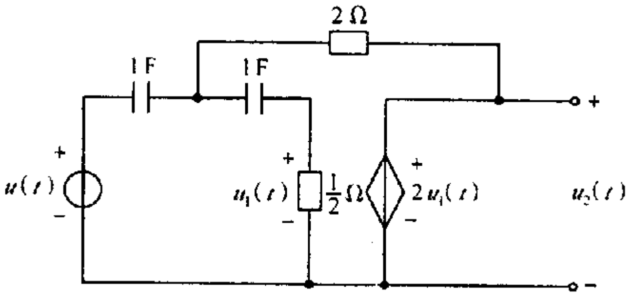
（显然 $RC>\sqrt{R^2C^2 4LC}$）

13—23　对题 13—23 图示零状态电路，试求：

(1)网络函数 H（s）＝U_2（s）/U（s）;

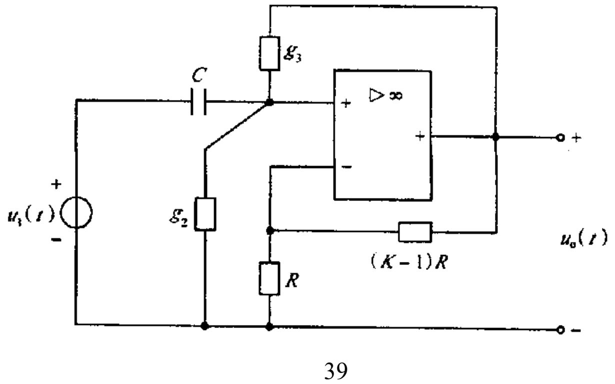
(2)当 $u(t)=\varepsilon(t)$ 时，电路的输出电压 $u_2(t)$；

(3)当 $u(t)=\cos t\cdot\varepsilon(t)$ 时，电路的输出电压 $u_2(t)$。



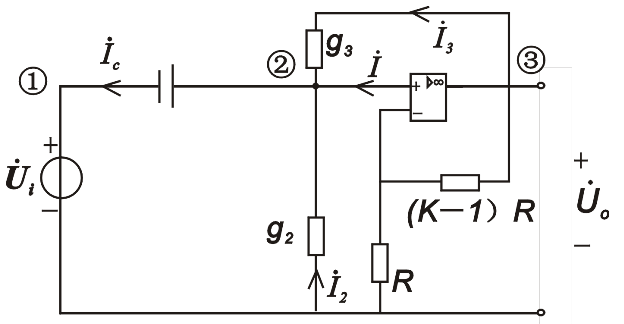
题 13—23 图

13—24　求题 13—24 图示电路的网络函数 H（s）＝U_o（s）/U_1（s）及正弦交流稳态电路的网络函数 $H(j\omega)=U_o(j\omega)/u_1(j\omega)$。图中运算放大器为理想运算放大器。$g_2$、$g_3$ 为电导；R、（K－1）R 为电阻。



题 13—24 图

求转移函数$\dot{U}'_0(j\omega)\big/U_i(j\omega)$。图示电路中运算放大器为理想放算放大器



解：虚短原理：$\dot{U}_2=\dot{U}_0\dfrac{R}{(k-1)R+R}=\dfrac{\dot{U}_o}{k}$ （1）

$\dot{I}=0$ （2）

$\dot{U}_2=\dot{U}_i+\dfrac{1}{j\omega c}i_c=\dot{U}_i+\dfrac{1}{j\omega c}\left(\dot{I}_2+\dot{I}_3\right)$ （由（2）

$\dot{U}_2=\dot{U}_i+\dfrac{1}{j\omega c}\left[\left(\dot{U}_o-\dot{U}_2\right)g_3-\dot{U}_2g_2\right]$ （3）

代入（1）至（3）：$\dfrac{1}{k}\dot{U}_o=\dot{U}_i+\dfrac{1}{j\omega c}\left[\left(\dot{U}_o-\dfrac{1}{k}\dot{U}_o\right)g_3-\dfrac{g_2}{k}\dot{U}_o\right]$

整理：$\dot{U}_o\left[\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{j\omega c}\left(g_3-\dfrac{1}{k}g_3-\dfrac{1}{k}g_2\right)\right]=\dot{U}_i$

$$\therefore\ \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{1}{\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{j\omega c}\left[g_m-\dfrac{1}{k}\left(g_3-g_2\right)\right]}$$

$$=\frac{j\omega ck}{j\omega c-kg_3+g_3-g_2}$$

$$=\frac{k\omega c}{\omega c+j\left(g_2-g_3+kg_3\right)}$$

13—25　某电路的单位冲激响应为$h(t)=3e^{-t}+\sqrt{2}e^{-2t}\sin(4t+45°)$

(1)试求其相应的网络函数习 H（s）;

(2)求 $H(s)$的零点和极点，并将其标定在 s 平面上(极点用“×”表示，零点用“O”表示);

(3)判断网络是否稳定。

解：$H(s)=£\left[h(t)\right]$

$$\sin(4t+45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 4t+\cos 4t)$$

$$\therefore\quad H(s)=\frac{3}{s+1}+\frac{4}{(s+2)^2+16}+\frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$

$$=\frac{4s^2+19s+66}{(s+1)(s^2+4s+20)}$$

（2）∵　$4s^2+19s+66=0$ 的根为

$$s_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{695}}{8}$$

∴ $H(s)$零点为：$s_1\approx-2.38+j3.3$　　$s_2\approx-2.38-j3.3$

∵　$s^2+4s+20=0$ 的根为

$$s_{3,4}=-2\pm j4$$

又∵　$s+1=0$的根为

$s_5=-1$

∴　$H(s)$的极点为　$s_{3,4}=-2\pm j4$，　$s_5=-1$

（3）∴　$H(s)$的极点全在复平面的第二、三象限

∴　网络（电路）是稳定的。