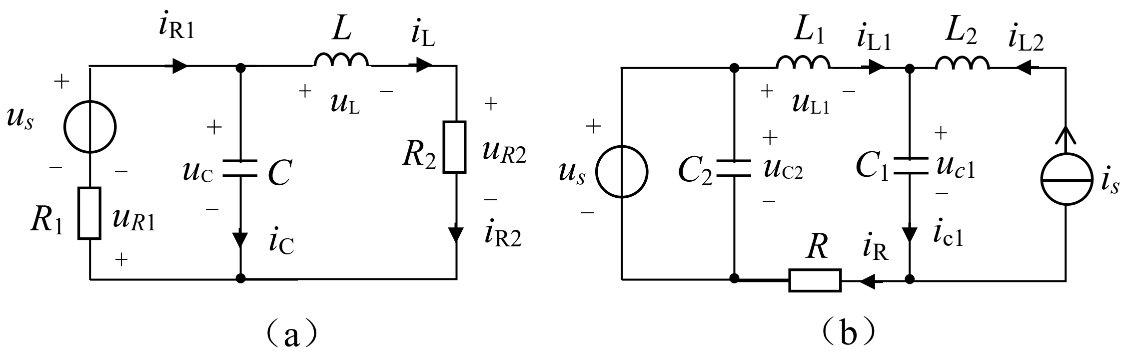
习 题 十 四

14－1 电路如题 14－1 图所示。请各选定一组状态变量，并将其它图中标出的电压、电流用状态变量及激励的线性组合表示。



题 14-1 图

解：(a) 以电容电压 u_C、电感电流 i_L 为状态变量，

有： $i_{R2}=i_L$　　　　$u_{R1}=u_s-u_C$

$i_{R1}=\dfrac{u_{R1}}{R_1}=\dfrac{1}{R_1}u_s-\dfrac{1}{R_1}u_C$　　　　$u_{R2}=R_2i_2=R_2i_L$

$i_C=i_{R1}-i_L=\dfrac{1}{R_1}u_s-\dfrac{1}{R_1}u_C-i_L$　　　　$u_L=u_C-R_2i_L$

(b) 因为 $u_{C2}=u_s$， $i_{L2}=i_s$， 非独立。

状态变量为 u_{C1} 及 i_{L1}

$i_R=i_{L1}$　，　$u_{L1}=u_s-u_{C1}-Ri_{L1}$　，　$i_{C1}=i_{L1}+i_s$

14－2 列出题 14－1 图(a)、(b)中两电路的状态方程。

解：(a) 由前题可知：$i_C=C\dfrac{du_C}{dt}=\dfrac{1}{R_1}u_s-\dfrac{1}{R_1}u_C-i_L$

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=u_C-R_2i_L$$

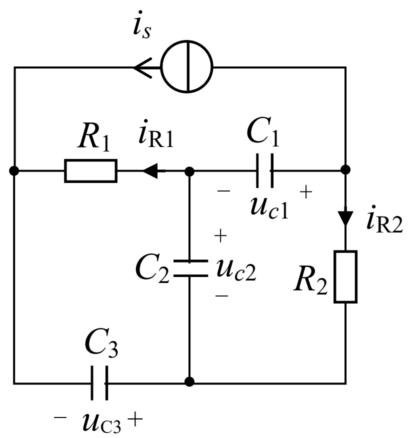
整理得状态方程：
$$\begin{cases}\dfrac{du_C}{dt}=-\dfrac{1}{R_1C}u_C-\dfrac{1}{C}i_L+\dfrac{1}{R_1C}u_s\\[2ex]\dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{1}{L}u_C-\dfrac{R_2}{L}i_L\end{cases}$$

矩阵形式：$\begin{bmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C}\\ 0\end{bmatrix}u_s$

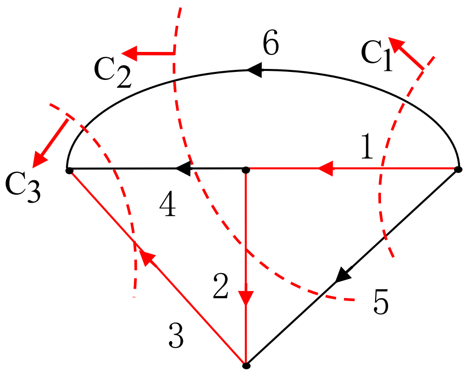
（b） $i_{C1}=C_1\dfrac{du_{C1}}{dt}=i_{L1}+i_s$ ， $u_{L1}=L_1\dfrac{di_{L1}}{dt}=-u_{C1}-Ri_{L1}+u_s$

整理得：$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C1}\\ \dot{i}_{L1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C_1}\\ -\dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R}{L_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ i_{L1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C_1}\\ \dfrac{1}{L_1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_s\\ i_s\end{bmatrix}$

14—3 电路如题 14—3 图所示，试借助拓扑图，列出状态方程并写出关于i_{R1}、i_{R2}的输出方程。



题 14-3 图



解：电路拓扑图为：

以独立电容电压u_{C1}， u_{C2}， u_{C3}为状态变量。

对割集C_1有：$i_{C1}=-i_s-i_{R2}$

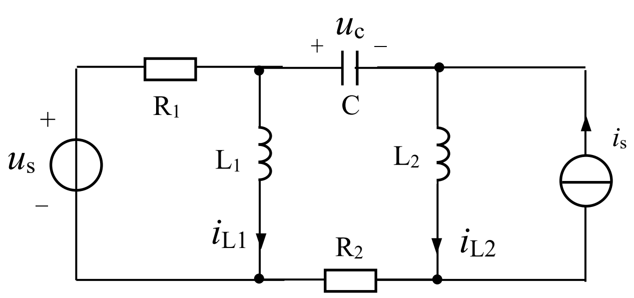
$i_{C2}=-i_s-i_{R2}-i_{R1}$ $\qquad i_{C3}=-i_s-i_{R1}$

而 $i_{R1}=\dfrac{1}{R_1}u_{C2}+\dfrac{1}{R_1}u_{C3}$ $\qquad i_{R2}=\dfrac{1}{R_2}u_{C1}+\dfrac{1}{R_2}u_{C2}$

整理，得状态方程：$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \\ \dot{u}_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2}-\frac{1}{R_1C_2} & -\frac{1}{R_1C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_1C_3} & -\frac{1}{R_1C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ u_{C3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{C_3} \end{bmatrix} i_s$

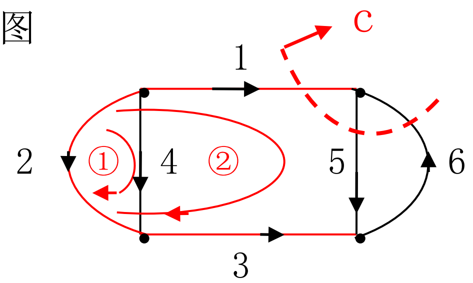
输出方程为：$\begin{bmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ u_{C3} \end{bmatrix}$

14—4 电路如题 14—4 图所示。
(1)画出电路的拓扑图，写出状态方程；
(2)再用叠加法写出电路的状态方程。



题 14-4 图

解：(1) 电路拓扑图为：



以 u_C， i_{L1}， i_{L2} 为状态变量

割集 C： $i_C = i_{L2} - i_s$

回路①： $u_{L1} = u_s + R_1 i_{R1}$ 而 $i_{R1} = -i_{L1} - i_C = -i_{L1} - i_{L2} + i_s$

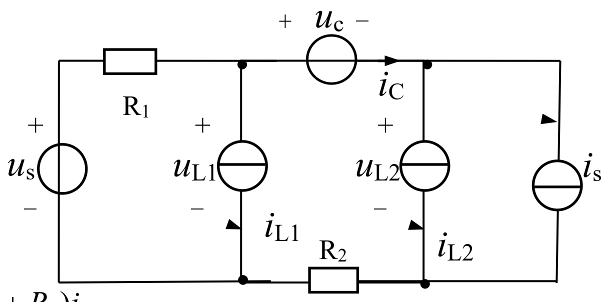
回路②： $u_{L2} = u_s + R_1(-i_{L1} - i_{L2} + i_s) + R_2(i_s - i_{L2}) - u_C$

整理，得：$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & \frac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$

(2) 替代电路如图：
用叠加法：

$$i_c = 0 \times u_c + 0 \times i_{L1} + i_{L2} + 0 \times u_s - i_s$$

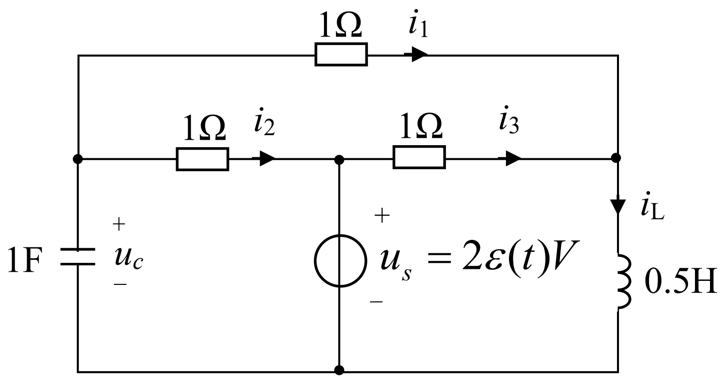
$$u_{L1} = 0 \times u_c - R_1 i_{L1} - R_1 i_{L2} + u_s + R_1 i_s$$



$$u_{L2} = -u_c - R_1 i_{L1} - (R_1 + R_2) i_{L2} + u_s + (R_1 + R_2) i_s$$

整理，得：$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

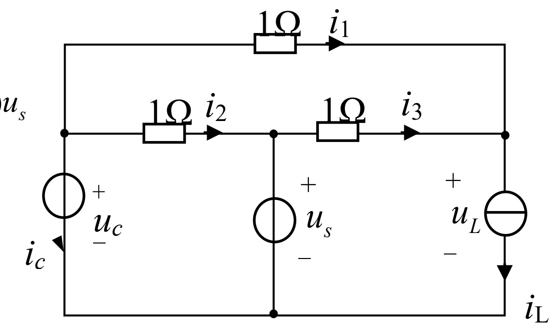
14－5 电路如题 14－5 图所示，写出其状态方程及关于 i_1、i_2、i_3 的输出方程。



题 14-5 图

解： 作出替代电路：

用叠加法：



$$\frac{du_c}{dt} = i_c = -(1 + \frac{1}{2})u_c - \frac{1}{2} i_L + (1 + \frac{1}{2})u_s$$

$$= -\frac{3}{2} u_c - \frac{1}{2} i_L + \frac{3}{2} \times 2\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{di_L}{dt} = u_L = \frac{1}{2} u_c - \frac{1}{2} i_L + \frac{1}{2} u_s$$

$$= \frac{1}{2} u_c - \frac{1}{2} i_s + \frac{1}{2} \times 2\varepsilon(t)$$

$$i_1 = \frac{1}{2} u_c + \frac{1}{2} i_L - \frac{1}{2} u_s \qquad i_2 = u_c - u_s \qquad i_3 = -\frac{1}{2} u_c + \frac{1}{2} i_L + \frac{1}{2} u_s$$

整理，得状态方程：$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2\varepsilon(t)$

输出方程：$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} 2\varepsilon(t)$

注：本题若用其它方法，中间代换步骤较繁。

14－6 已知电路的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

初始条件为

$$\begin{bmatrix} u_1(0_-) \\ u_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{V}$$

求电路的零输入响应。

解：　$X(0) = \begin{bmatrix} u_1(0_-) \\ u_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (V)

预解矩阵　$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

零输入响应：$\Phi(s)X(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \end{bmatrix} = L^{-1}[\Phi(s)X(0)] = L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t}+e^{-2t} \end{bmatrix} \text{ (V)}(t \geq 0)$$

14－7 在题 14－1 图(a)中，若 $C=1F$、$L=1H$、$R_1=1\Omega$、$R_2=3\Omega$、$u_s=4\varepsilon(t)\text{V}$、$u_C(0_-)=1\text{V}$、$i_L(0_-)=1\text{A}$。求 $t\geq 0$ 时的 $u_C(t)$、$i_L(t)$ 及 u_{R1}、u_{R2}。

解： 接前题，代入元件参数

有：$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 4\varepsilon(t)$

初始条件：$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

预解矩阵 $\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+2)^2} & \dfrac{-1}{(s+2)^2} \\ \dfrac{1}{(s+2)^2} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$

$$X(s) = \Phi(s)X(0) + \Phi(s)BF(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+2)^2} & \dfrac{-1}{(s+2)^2} \\ \dfrac{1}{(s+2)^2} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+2)^2} & \dfrac{-1}{(s+2)^2} \\ \dfrac{1}{(s+2)^2} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{4}{s}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{3}{s}+\dfrac{-2}{s+2}+\dfrac{-2}{(s+2)^2} \\ \dfrac{1}{s}+\dfrac{-2}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = L^{-1}[X(s)] = \begin{bmatrix} 3-2e^{-2t}-2te^{-2t} \quad \text{(V)} \\ 1-2te^{-2t} \quad \text{(A)} \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)$$

输出方程为：$\begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_s$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 4\varepsilon(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 2e^{-2t} + 2te^{-2t} \\ 3 - 6te^{-2t} \end{bmatrix} \text{ (V)} \quad (t \geq 0)$$