复变函数与积分变换 B(6022900)期末考试 A 卷

2017-2018 学年第 1 学期

一、填空题 (4 分每题，共 16 分)

1. $-\sqrt{12}+2\mathrm{i}$ 的三角表示式为______________.

2. $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{2018}=$______________.

3. 积分 $\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z}{z^{2}+2z+2}$ 的值为______________.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(\mathrm{i}n)\,(z+1)^{n}$ 的收敛半径 R 为______________.

二、计算题 (4 分每题，共 16 分)

1. $\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}$　　2. $\sin[(1-\mathrm{i})\pi]$　　3. $(1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$　　4. $\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin(\pi z)}{z(z+1)^{2}}\mathrm{d}z$

三、解答题 (共 38 分)

1. 设 $f(z)=xy^{2}+\mathrm{i}\,x^{2}y$，试讨论 $f(z)$ 在何处可导，何处解析. (7 分)

2. 设 C 为从原点到 $1-\mathrm{i}$ 的直线段，计算积分 $I=\int_{C}(x+y+\mathrm{i}\,xy^{2})\mathrm{d}z$. (7 分)

3. 已知 $u(x,y)=x^{2}+xy-y^{2}$，验证 $u(x,y)$ 是调和函数；并求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，使 $f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$. (7 分)

4. 设 $f(z)=\dfrac{z\sin\dfrac{1}{z-1}}{(z^{2}+1)^{2}(\mathrm{e}^{z}-1)}$，试判断 $f(z)$ 在<u>有限</u>复平面上所有孤立奇点的类型，若是极点需判断极点的

阶数. (7 分)

5. 将 $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ 展开成洛朗级数：

(1) 当 $0<|z|<1$. (5 分)　　(2) 当 $0<|z-1|<1$. (5 分)

四. 解答题 (共 30 分)

1. 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$. (6 分)

2. 利用留数定理求解定积分

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (5 分)　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{\cos x+6}\mathrm{d}x$ (5 分)

3. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析且 $|f(z)|\le 1$，试证 $|f'(0)\le 1|$. (7 分)

4. 求函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\dfrac{a}{2})+\delta(t-\dfrac{a}{2})]$ 的傅里叶变换. (7 分)

参 考 解 析

一、填空题 (4 分每题，共 16 分)

1. $-\sqrt{12}+2\mathrm{i}$ 的三角表示式为 $\underline{4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)}$.

◎解 $\operatorname{Re}(z)=-\sqrt{12}<0$ ， $\operatorname{Im}(z)=2>0$ ， $\arg z=\arctan\frac{2}{-\sqrt{12}}+\pi=\frac{5}{6}\pi$ ， $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

$=\sqrt{12+2^2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)$.

2. $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{2018}=\underline{2^{2018}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

◎解 $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{2018}=\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\pi/6\right)}\right]^{2018}=2^{2018}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\pi/3\right)}=2^{2018}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 积分 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z^2+2z+2}$ 的值为$\underline{\quad 0 \quad}$.

◎解 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z^2+2z+2}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{(z+1)^2+1}$ 极点 $z=-1+\mathrm{i}$ 在 $|z|=1$ 外，所以 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z^2+2z+2}=0$.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(\mathrm{i}n)(z+1)^n$ 的收敛半径 R 为$\underline{\quad \mathrm{e}^{-1} \quad}$.

◎解 $\sin(\mathrm{i}n)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{n}\right)$， $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\left[\mathrm{i}(n+1)\right]}{\sin(\mathrm{i}n)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{-n-1}-\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{n}}\right|=\mathrm{e}$， $R=\frac{1}{\rho}=\mathrm{e}^{-1}$

二、计算题 (4 分每题，共 16 分)

1. $\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}$　　2. $\sin\left[(1-\mathrm{i})\pi\right]$　　3. $(1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$　　4. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)^2}\mathrm{d}z$

◎解

1. $\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}=\left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{4}}=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)\right]$， $k=0,1,2,3$；

2. $\sin\left[(1-\mathrm{i})\pi\right]=\sin(\pi-\mathrm{i}\pi)=\sin\pi\cos(\mathrm{i}\pi)-\cos\pi\sin(\mathrm{i}\pi)=\sin(\mathrm{i}\pi)=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,\pi$；

3. $\left(1-\mathrm{i}\right)^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\cdot\left[\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；

4. $z=0$ 为可去奇点，$z=-1$ 为一级极点，$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[f(z),-1\right]=2\pi\mathrm{i}\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)^2}=2\pi^2\mathrm{i}$.

三、解答题 (共 38 分)

1. 设 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}\,x^2y$，试讨论 $f(z)$ 在何处可导，何处解析. (7 分)

◎解 $u_x=y^2,v_y=x^2,u_y=2xy,v_x=2xy$，由 C-R 方程 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 得：$\begin{cases}x^2=y^2\\2xy=-2xy\end{cases}$，所以在 $(0,0)$ 可导，处处不解析.

2. 设 C 为从原点到 $1-\mathrm{i}$ 的直线段，计算积分 $I=\int_C\left(x+y+\mathrm{i}\,xy^2\right)\mathrm{d}z$. (7 分)

◎解 沿 $y=-x$，$z=t-\mathrm{i}t$，$\mathrm{d}z=(1-\mathrm{i})\mathrm{d}t$，$\int_C\left(x+y+\mathrm{i}\,xy^2\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{i}t^3(1-\mathrm{i})\mathrm{d}t=(1+\mathrm{i})\int_0^1t^3\mathrm{d}t=\frac{1+\mathrm{i}}{4}$.

3. 已知 $u(x,y)=x^2+xy-y^2$，验证 $u(x,y)$ 是调和函数；并求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，使 $f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$. (7 分)

◎解 $u_x=2x+y,u_{xx}=2,u_y=x-2y,u_{yy}=-2$，所以 $u_{xx}+u_{yy}=0$，即 $u(x,y)$ 是调和函数. 由 C-R 方程：$v_y=u_x=2x+y,v_x=-u_y=2y-x$，得 $u_y=-v_x=-\left(\int u_x\mathrm{d}y+g(x)\right)_x$，所以 $-\left[\int(2x+y)\mathrm{d}y\right]_x-g'(x)=x-2y$，解得 $g'(x)=-x$，$v=\int u_x\mathrm{d}y+g(x)=2xy+\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)+C$，代入 $f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，得 $C=\frac{1}{2}$，即 $f(z)=x^2+xy-y^2+\mathrm{i}\left[2xy+\frac{1}{2}\left(y^2-x^2+1\right)\right]$.

4. 设 $f(z)=\dfrac{z\sin\frac{1}{z-1}}{(z^2+1)^2(\mathrm{e}^z-1)}$，试判断 $f(z)$ 在<u>**有限**</u>复平面上所有孤立奇点的类型，若是极点需判断极点的阶数. (7 分)

◎解 $z=0$ 是分母的一级零点，也是分子的一级零点，故为 $f(z)$ 的可去奇点；$z=2k\pi\mathrm{i},\ k\in\mathbf{Z},k\neq0$ 为分母的一级零点，故为 $f(z)$ 的一级极点；$z=\pm\mathrm{i}$ 是分母的二级零点，故为 $f(z)$ 的二级极点；$z=1$ 不是孤立奇点.

5. 将 $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ 展开成洛朗级数：

(1) 当 $0<|z|<1$. (5 分)　　(2) 当 $0<|z-1|<1$. (5 分)

◎解 (1) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}=\dfrac{1}{z}\cdot\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^2=\dfrac{1}{z}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)^2=\dfrac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n$；

(2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}=\dfrac{1}{(z-1)^2}\dfrac{1}{1+(z-1)}=\dfrac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

四. 解答题 (共 30 分)

1. 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}dz$. (6 分)

◎解 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right\}=2\pi i(1+0)=2\pi i$.

2. 利用留数定理求解定积分

(1) $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{x\sin x}{1+x^2}dx$ (5 分) (2) $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{\cos x+6}dx$ (5 分)

◎解 (1) $I=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\right]=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\,\mathrm{Res}[f(x),i]\right\}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\dfrac{1}{2e}\right)=\dfrac{\pi}{2e}$.

(2) $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{\cos x+6}dx=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{\frac{z+z^{-1}}{2}+6}\cdot\dfrac{dz}{iz}=\dfrac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{z^2+12z+1}dz=4\pi\,\mathrm{Res}\left[f(z),\sqrt{35}-6\right]=\dfrac{2\pi}{\sqrt{35}}$.

3. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析且 $|f(z)|\le 1$，试证 $|f'(0)|\le 1$. (7 分)

◎解 $f'(0)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\dfrac{f(z)}{(z-0)^2}dz=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}f(z)dz\le\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}1dz=-i$，所以 $|f'(0)|\le 1$.

4.求函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\dfrac{a}{2})+\delta(t-\dfrac{a}{2})]$ 的傅里叶变换. (7 分)

◎解 $\mathcal{F}[f(t)]=\dfrac{1}{2}\left[e^{ia\omega}+e^{-ia\omega}+e^{i\frac{a}{2}\omega}+e^{-i\frac{a}{2}\omega}\right]=\cos a\omega+\cos\dfrac{a}{2}\omega$.