西南交通大学 2015－2016 学年第一学期测试试卷（1）

参考答案

课程名称 **线性代数** 考试时间 **60 分钟** （2015-10-18）

题号	一	二	三	总成绩
得分				

阅卷教师签字：______________________________

一. 填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\begin{vmatrix} a & d & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \\ s & 0 & e & f \\ j & 0 & g & h \end{vmatrix} = (ab-cd)(eh-gf)$。

2. 五阶行列式中，项 $a_{15}a_{41}a_{54}a_{23}a_{32}$ 的符号为__负____。

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

4. 在四阶行列式 D 中，第三行元素 $a_{31}=2, a_{32}=-1, a_{33}=-2, a_{34}=($，其余子式分别为 $M_{31}=-1, M_{32}=3, M_{33}=-4, M_{34}=2$，则 $D=$__9__。

5. 若排列 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 的逆序数为 k，则排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-k$。

二. 计算和解答题（每题 15 分，共计 60 分）

1. 设有四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，计算 $A_{41}+4A_{42}-7A_{43}+6A_{44}$。(15 分)

解:

姓名______ 学号______ 班级______

密封装订线 密封装订线 密封装订线

$$A_{41}+4A_{42}-7A_{43}+6A_{44}=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}$$ （5 分）

$$=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}$$ （7 分）

=27 （3 分）

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&1&1\end{pmatrix}$，计算 $2B^T-AB$. (15 分)

$$2B^T-AB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&1\\3&4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&1&1\end{pmatrix}$$ （4 分）

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&1\\3&4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&8\\0&-1&6\\2&5&0\end{pmatrix}$$ （8 分）

$$=\begin{pmatrix}1&-2&-8\\2&-1&-5\\1&-1&1\end{pmatrix}$$ （3 分）

3. 求所有与 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵。(15 分)

解：记 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，设所求矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ (2 分)

由 $AB=BA$ 可得

$$\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}+E\right)B=B\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}+E\right)$$

即 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}B=B\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ (5 分)

从而 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2a&2b&2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c&0&0\\2f&0&0\\2i&0&0\end{pmatrix}$ (5 分)

$b=c=f=0,\ a=i$ (2 分)

故所求矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a&0&0\\d&e&0\\g&h&a\end{pmatrix}$ (1 分)

4. 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}&\frac{1}{a_1+b_2}&\frac{1}{a_1+b_3}&\frac{1}{a_1+b_4}\\\frac{1}{a_2+b_1}&\frac{1}{a_2+b_2}&\frac{1}{a_2+b_3}&\frac{1}{a_2+b_4}\\\frac{1}{a_3+b_1}&\frac{1}{a_3+b_2}&\frac{1}{a_3+b_3}&\frac{1}{a_3+b_4}\\\frac{1}{a_4+b_1}&\frac{1}{a_4+b_2}&\frac{1}{a_4+b_3}&\frac{1}{a_4+b_4}\end{vmatrix}$ (15 分)

$$D=\begin{vmatrix}\frac{b_4-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_4)}&\frac{b_4-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_4)}&\frac{b_4-b_3}{(a_1+b_3)(a_1+b_4)}&\frac{1}{a_1+b_4}\\\frac{b_4-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_4)}&\frac{b_4-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_4)}&\frac{b_4-b_3}{(a_2+b_3)(a_2+b_4)}&\frac{1}{a_2+b_4}\\\frac{b_4-b_1}{(a_3+b_1)(a_3+b_4)}&\frac{b_4-b_2}{(a_3+b_2)(a_3+b_4)}&\frac{b_4-b_3}{(a_3+b_3)(a_3+b_4)}&\frac{1}{a_3+b_4}\\\frac{b_4-b_1}{(a_4+b_1)(a_4+b_4)}&\frac{b_4-b_2}{(a_4+b_2)(a_4+b_4)}&\frac{b_4-b_3}{(a_4+b_3)(a_4+b_4)}&\frac{1}{a_4+b_4}\end{vmatrix}$$ （各列减第 4 列 6 分）

$$=\frac{(b_4-b_1)(b_4-b_2)(b_4-b_3)}{(a_1+b_4)(a_2+b_4)(a_3+b_4)(a_4+b_4)}\begin{vmatrix} \frac{1}{(a_1+b_1)} & \frac{1}{(a_1+b_2)} & \frac{1}{(a_1+b_3)} & 1 \\ \frac{1}{(a_2+b_1)} & \frac{1}{(a_2+b_2)} & \frac{1}{(a_2+b_3)} & 1 \\ \frac{1}{(a_3+b_1)} & \frac{1}{(a_3+b_2)} & \frac{1}{(a_3+b_3)} & 1 \\ \frac{1}{(a_4+b_1)} & \frac{1}{(a_4+b_2)} & \frac{1}{(a_4+b_3)} & 1 \end{vmatrix}$$ （3 分）

$$=\frac{(b_4-b_1)(b_4-b_2)(b_4-b_3)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}{(a_1+b_4)(a_2+b_4)(a_3+b_4)(a_4+b_4)(a_4+b_1)(a_4+b_2)(a_4+b_3)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b} \end{vmatrix}$$ （各行减第 4 行 4 分）

$$=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\le i,j\le 4}(a_i+b_j)}$$ （递推可得 2 分）

三．证明题（10 分）

设 $A=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 设为列矩阵，且 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$，$E_4$ 为四阶单位阵，$H=E_4-2AA^T$.

证明：H 为对称矩阵，且 $HH^T=E_4$.

证明：$H^T=(E_4-2AA^T)^T=E_4{}^T-(2AA^T)^T=E_4-2AA^T=H$ （5 分）

$HH^T=(E_4-2AA^T)(E_4-2AA^T)^T$

$=(E_4-2AA^T)(E_4-2AA^T)=E_4-2AA^T-2AA^T+4AA^TAA^T$ （2 分）

$=E_4-2AA^T-2AA^T+4A(A^TA)A^T=E_4-4AA^T+4AA^T=E_4$.（3 分）