概率论与数理统计 A(1271032)期末考试试卷

2016-2017 学年第 2 学期

一、(15 分) 设随机变量 X 与 Y 的分布律分别为：

X	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

已知：$P\{XY=0\}=1$，试求：

(1) $M=\min\{X,Y\}$ 的分布律；　(2) $Z=X+Y$ 的分布律；　(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

二、(15 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$P\{X=0\}=0.6$，$P\{X=1\}=0.4$，而 Y 的密度函数为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

记 $Z=X+Y$，试求：

(1) $P\{Z\le 0.5 \mid X=0\}$；　(2) Z 的概率密度函数；　(3) $D(Z)$.

三、(15 分) 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\ldots X_n$ 是总体的一个样本($n>4$)，$\overline{X}$ 为其样本均值，求：

(1) $P\{X_1>X_2\}$；　(2) $P\{0<X_3+2X_4<\sigma\}$(用标准正态分布函数表示)；　(3) $P\left\{\dfrac{\overline{X}-E(X)}{n\sigma}>0\right\}$.

四、(15 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0<x<1, 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求：

(1) X 的边缘概率密度；　(2) 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；　(3) $P\{X+Y>1\}$.

五、(10 分) 某 4S 店每天售出的汽车数服从参数为 2 的泊松分布，若该店一年 365 天都在经营，且每天售出的汽车数相互独立，求该店一年售出 730 辆以上汽车的概率.(用中心极限定理).

六、(10 分) 设总体 X 具有分布律：

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ $(0<\theta<1)$ 是未知参数，已经取得了样本值 $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1,\ x_4=3$，试求：

(1) θ 的矩估计值；　(2) θ 极大似然估计值.

七、(10 分) 某超市为了调整某特殊商品的销售额，对营业方式、管理人员进行了一系列调整.调整后随机抽查了 9 天的销售额(单位：万元)，结果如下：

56.4　54.2　50.6　53.7　55.9　48.3　54.7　58.7　55.3

根据统计，调整前的日平均销售额为 51.2 万元，假定日销售额 X 服从正态分布，试问调整后的日平均销售额是否改变($\alpha=0.05$)？(已知 $t_{0.05}(8)=1.8595$，$t_{0.025}(8)=2.3060$)

八、(10 分) 测得某种物质在不同温度 x 下吸附另一种物质的重量 Y 如下表所列：

x_i / °C	1.5	1.8	2.4	3.0	3.5	3.9	4.4	4.8	5.0
y_i / mg	4.8	5.7	7.0	8.3	10.9	12.4	13.1	13.6	15.3

假设 Y 对 x 呈现线性关系，试求回归方程.

参 考 解 析

一、解:　由 $P\{XY=0\}=1$ 得：

X \ Y	0	1
-1	1/4	0
0	0	1/2
1	1/4	0

(1)

M	-1	0
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(2)

Z	-1	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(3) $E(X)=-1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=0$，$E(Y)=\frac{1}{2}$，$E(XY)=0$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

二、解:

(1)

$$P\{Z\le 0.5\,|\,X=0\}=\frac{P\{Z\le 0.5,\ X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\{X+Y\le 0.5,\ X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\{Y\le 0.5\}P\{X=0\}}{P\{X=0\}}=0.5$$

(2)

$$F_Z(z)=P(X=0)\cdot P(X+Y\le z\,|\,X=0)+P(X=1)\cdot P(X+Y\le z\,|\,X=1)=0.6F_Y(z)+0.4F_Y(z-1)$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 0.6z, & 0<z\le 1\\ 0.4z+0.2, & 1<z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0.6, & 0<z\le 1\\ 0.4, & 1<z\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3)

$$E(Z)=\int_0^1 z\cdot 0.6\mathrm{d}z+\int_1^2 z\cdot 0.4\mathrm{d}z=\frac{9}{10},$$

$$E(Z^2)=\int_0^1 z^2\cdot 0.6\mathrm{d}z+\int_1^2 z^2\cdot 0.4\mathrm{d}z=\frac{17}{15}$$

$$D(Z)=E(Z^2)-E^2(X)=\frac{97}{300}$$

三、解：(1) $P\{X_1>X_2\}=0.5$

(2) 由题意 $X_3\sim N(0,\sigma^2),\ 2X_4\sim N(0,4\sigma^2)$ 则 $X_3+2X_4\sim N(0,5\sigma^2)$，可得

$$P\{0<X_3+2X_4<\sigma\}=\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{5}\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-0.5$$

(3) 据题，$\bar{X}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，则

$$P\left\{\frac{\bar{X}-E(X)}{n\sigma}>0\right\}=P\{\bar{X}>0\}=1-\Phi(0)=0.5$$

四、解：(1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=2x^2+\frac{2}{3}x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 当 $0<x<1$ 时，条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+\frac{xy}{3}}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\dfrac{3x+y}{6x+2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(3) $P\{X+Y>1\}=\iint\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{65}{72}=0.9028$

五、解：设该店一年售出的汽车数为Y,第i天售出的汽车数为X_i，则$X_i\sim\pi(2)$

因此，$E(X_i)=2,D(X_i)=2,\ (i=1,2,...,365)$，可得：

$$Y\overset{\text{近似}}{\sim}N(365\times2,365\times2)$$

所以：

$$P\{Y>730\}=1-\Phi\left(\frac{730-365\times2}{\sqrt{365\times2}}\right)=1-0.5=0.5$$

六、解：(1)由$E(X)=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则：

$$E(X)=\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$$

而

$$\overline{x}=\frac{1}{4}(1+2+1+3)=\frac{7}{4}$$

$$3-2\theta=\frac{7}{4},\quad \hat{\theta}=\frac{5}{8}$$

2) θ的似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{4}p(x_i;\theta)=\theta^2\times\left[2\theta(1-\theta)\right]\times\theta^2\times(1-\theta)^2=2\theta^5(1-\theta)^3$$

取对数为：

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=\ln2+5\ln\theta+3\ln(1-\theta)$$

求导：

$$\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0,\quad \hat{\theta}=\frac{5}{8}$$

七、解：设调整后的日平均销售额为μ

建立假设：$H_0:\mu=51.2,\ H_1:\mu\neq 51.2$

检验统计量为：$T=\dfrac{\overline{X}-51.2}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

数据为：$\overline{x}=\dfrac{1}{9}\left(56.4+54.2+...+55.3\right)=54.2$，$n=9$，$\alpha=0.05$，$\mathrm{t}_{0.025}(8)=2.3060$，

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\overline{x}^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{9}x_i^{\ 2}-9\times 54.2^2\right)}=3.112$$

则得，$t=\dfrac{54.2-51.2}{3.112/3}=2.892$

即，$|t|>\mathrm{t}_{\alpha/2}(n-1)$，所以，应该拒绝$H_0$，而接受$H_1$，即认为调整后的日平均销售额改变.

🍊八、**解**：由题可知：

$$\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=\frac{30.3}{9}=3.3667,\ \overline{y}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}y_i=\frac{91.1}{9}=10.1222$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i^{\ 2}=\frac{115.11}{9}=12.79,\ \overline{xy}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_iy_i=\frac{345.09}{9}=38.3433$$

$$l_{xx}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{9}x_i^{\ 2}-9\overline{x}^2=115.11-9\times 3.3667^2=13.098$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{9}x_iy_i-9\overline{x}\cdot\overline{y}=345.09-9\times 3.3667\times 10.1222=38.3843$$

再由最小二乘法得：

$$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{38.3843}{13.098}=2.9305$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=10.1222-2.9305\times 3.3667=0.2561$$

故所求一元线性回归方程为，$\hat{y}=0.2561+2.9305x$.