# 西南交通大学 2015-2016 学年
# 第(一)学期考试试卷

课程代码 1271031 课程名称 概率论与数理统计B（A卷）考试时间 120分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |
| 阅卷教师签字 | | | | | | | | | |

一、（14分）设二维随机变量$(X,Y)$的概率分布为

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0.4 | 0.3 |
| 2 | 0.2 | 0.1 |

试求（1）$(X,Y)$的分布函数$F(x,y)$；（2）$X$，$Y$的边缘分布律；（3）$Z=X-Y$的概率分布；（4）概率$P(X>1.2,Y>1.6)$。

解 （1） $(X,Y)$的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<1,\text{或}y<1\\0.4 & 1<x<2,1<y<2\\0.7 & 1<x<2,y\geq 2\\0.6 & x\geq 2,1<y<2\\1 & x\geq 2,y\geq 2\end{cases}$$

（2）$X$，$Y$的边缘分布律分别为

| X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P | 0.7 | 0.3 |

| Y | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P | 0.6 | 0.4 |

（3）$Z=X-Y$的概率分布为

| $Z=X-Y$ | −1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | 0.3 | 0.5 | 0.2 |

（4）概率 $P(X>1.2,Y>1.6)=0.1$

二、（12 分）设二维连续型随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax(x+2y), & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

试求（1）常数 $A$；（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；

（3）$P\{Y-X\le 0\}$。

**解**　（1）$1=\int_0^1\int_0^1 Ax(x+2y)dxdy=A\left[\int_0^1\int_0^1 x^2dxdy+\int_0^1\int_0^1 2xydxdy\right]=A\times\frac{5}{6}$

得 $A=\frac{6}{5}$

（2）$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1\frac{6}{5}x(x+2y)dy=\frac{6}{5}(x^2+x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1\frac{6}{5}x(x+2y)dx=\frac{2}{5}(1+3y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

条件概率密度

当 $0<y<1$ 时，$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3x(x+2y)}{1+3y} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{x+2y}{1+x} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（3）$$P\{Y-X\le 0\}=P\{Y\le X\}=\int_0^1\int_0^x\frac{6}{5}x(x+2y)dxdy=\frac{6}{5}\int_0^1 2x^3dx=\frac{3}{5}$$

三、（12 分）设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且具有下述概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

试求：（1）$Z=X+Y$ 的概率密度.（2）$M=\max\{X,Y\}$ 的概率密度；

（3）$N=\min\{X,Y\}$ 的概率密度。

**解：**　（1）$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

考虑当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$，当 $z>0$ 时，有

$$f_Z(z)=\int_0^z e^{-x}2e^{-2(z-x)}dx=2(e^{-z}-e^{-2z})$$

即 $$f_Z(z)=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（2）$M=\max\{X,Y\}$的分布函数为

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

而 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$

故 $$F_M(z)=\begin{cases}(1-e^{-z})(1-e^{-2z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases},$$

$$f_M(z)=\begin{cases}e^{-z}+e^{-2z}-3e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（3）$N=\min\{X,Y\}$的分布函数为

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_X(z)]=\begin{cases}1-e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

故 $N$的概率密度为

$$f_N(z)=\begin{cases}3e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

四、（14 分）设二维随机变量$(X,Y)$的概率分布为

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.4 | $a$ |
| 1 | $b$ | 0.1 |

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，试求

（1）常数$a$与$b$；（2）协方差 $Cov(X,X-Y)$；（3）$D[1-2(X-Y)^2]$.

**解**：（1）由题设可得：

| X \ Y | 0 | 1 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.4 | $a$ | $0.4+a$ |
| 1 | $b$ | 0.1 | $0.1+b$ |
| $p_{\cdot j}$ | $0.4+b$ | $a+0.1$ | 1 |

故 $1=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}P\{X=i,Y=j\}=0.4+a+b+0.1$，得$a+b=0.5$

又因为 $P\{X=0,X+Y=1\}=a$，$P\{X=0\}=0.4+a$，

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$，且 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$

相互独立，故有 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$，于是得

$a=(0.4+a)(a+b)=0.5(0.4+a)$，所以求得 $a=0.4$，$b=0.5-a=0.1$

（2）$X$，$Y$ 的边缘分布律分别为

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0.8 | 0.2 |

| Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0.5 | 0.5 |

$E(X)=0.2$，$D(X)=0.16$，$E(Y)=0.5$，$E(XY)=0.1$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.1-0.2\times0.5=0$$

$$Cov(X,X-Y)=Cov(X,X)-Cov(X,Y)=0.16-0=0.16$$

（3）因为 $Z=(X-Y)^2$ 的概率分布为

| Z | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0.5 | 0.5 |

所以 $D[1-2(X-Y)^2]=4D[(X-Y)^2]=4\times0.5\times0.5=1$

五、（12 分）将重量为 $a$ 的物品，在天平上重复称量 $n$ 次，若各次称量的结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(a,0.2^2)$ $i=1,2,\cdots,n$，则 $n$ 的最小值不小于多少时有

$$P\{\,|\bar{X}-a|\ <0.1\}\geq0.95 \qquad (\Phi(1.96)=0.975)\ ?$$

**解**：由题设知，每次称量的结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $E(X_i)=a$，$D(X_i)=0.04$，由独立同分布中心极限定理知 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 有渐近正态分布 $N\left(a,\ \frac{0.04}{n}\right)$，于是

$$P(|\bar{X}-a|<0.1\}=P\left\{\frac{|\bar{X}-a|}{0.2/\sqrt{n}}<\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{0.2}\right)-\Phi\left(-\frac{0.1\sqrt{n}}{0.2}\right)$$

$$=2\Phi(0.5\sqrt{n})-1\geq0.95$$

得 $\Phi(0.5\sqrt{n})\geq0.975$，查表得 $0.5\sqrt{n}\geq1.96$，$n\geq15.366\,4$

因此至少重复称量 16 次，才能保证 $P\{\,|\bar{X}-a|\ <0.1\}\geq0.95$

六、（12 分）设总体 $X$ 服从伽玛分布，其概率密度函数为：

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & x\leq0\end{cases} \qquad (\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx)$$

其中$\alpha$是已知正实数，参数$\beta\,(\beta>0)$未知，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该总体的一个容量为$n$的样本，试求参数$\beta$的极大似然估计量，且问其是否无偏估计？

**解**：若总体$X$的一个样本值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则本题总体的似然函数为：

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\frac{x_i}{\beta}}=\left(\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数得

$$\ln L(\beta)=-n\alpha\ln\beta-n\ln\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

再对$\beta$求导数，并令其为0：

$$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=-\frac{n\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解之得参数$\beta$的极大似然估计值为： $\hat{\beta}=\dfrac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{\overline{x}}{\alpha}$

于是参数$p$的极大似然估计量为： $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\alpha}$

而$X\sim\Gamma(\alpha,1/\beta)$，故期望$E(X)=\alpha\beta$， $E(\overline{X})=\alpha\beta$，所以

$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\dfrac{\overline{X}}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\alpha}E\left(\overline{X}\right)=\dfrac{1}{\alpha}\alpha\beta=\beta$，即$\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\alpha}$是参数$\beta$的无偏估计。

七、（12 分）从自动车床加工的一批零件中随机抽取 10 个，测得其尺寸与规定尺寸的偏差（单位：微米）分别为：

2　1　−2　3　2　4　−2　5　3　4

记零件的尺寸偏差为$X$，假定$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求未知参数$\mu$和$\sigma^2$的置信度为0.95的区间估计。（$t_{0.05/2}(9)=2.2622$， $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$， $\chi^2_{0.975}(9)=2.7$）

**解**：（1）方差未知时，均值$\mu$的置信水平为$1-\alpha=0.95$的置信区间为：

$$\left(\overline{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

由本题中数据得：$\alpha=0.05$，$n=10$，$t_{0.05/2}(9)=2.2622$，$\overline{x}=2$，$s=2.4037$

故所求置信区间为：

$$\left(2-\frac{2.4037}{\sqrt{10}}\times 2.2622, 6+\frac{2.4037}{\sqrt{10}}\times 2.2622\right)=(0.2805, 3.7195)$$

（2）方差$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha=0.95$的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

由本题中数据得：$\alpha=0.05$，$n=10$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$s^2=5.7778$

故所求置信区间为：

$$\left(\frac{9\times 5.7778}{19.023}, \frac{9\times 5.7778}{2.7}\right)=(2.7335, 19.2593)$$

八、（12 分）设某厂生产一种钢索，其断裂强度$X(\mathrm{kg/cm^2})$服从正态分布$N(\mu, 40^2)$。从中随机选取一个容量为 9 的样本，由观测值计算得平均值$\bar{x}=780(\mathrm{kg/cm^2})$。能否据此认为这批钢索的平均断裂强度为$800(\mathrm{kg/cm^2})$ $(\alpha=0.05)$？ （$z_{0.05/2}=1.96$）

**解**：这是正态总体$N(\mu,\sigma^2)$方差$\sigma^2=40^2$已知时，关于均值$\mu$的双边检验问题。检验过程如下：

1）根据实际问题提出假设： $H_0:\mu=800;\ H_1:\mu\neq 800$

2）选定显著性水平$\alpha=0.05$，确定样本容量$n=9$；

3） 选择恰当的统计量：$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，在$H_0$为真时，检验统计量

$$U=\frac{\bar{X}-800}{40/\sqrt{9}}\sim N(0,1)$$

4）查标准正态分布表可得$z_{0.05/2}=1.96$的值，确定$H_0$的拒绝域为：

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-800}{40/\sqrt{9}}\right|\geq 1.96$$

5）根据样本值计算$\bar{x}=780$，及检验统计量的观测值

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-800}{40/\sqrt{9}}\right|=\left|\frac{780-800}{40/\sqrt{9}}\right|=1.5<1.96$$

落在接受域内，所以应接受$H_0$，即在显著性水平$\alpha=0.05$下可以认为这批钢索的平均断裂强度为800(kg/cm$^2$)。