Teil 1

Was sind natürliche Zahlen?

Im vorhergehenden Teil habe ich mich mit Aussagen und Mengen beschäftigt. Nun möchte ich mich endlich der Definition von Zahlen befassen. Was ist eine Zahl? Und wieso gibt es verschiedene Arten von Zahlen? In diesem Teil möchte ich mich dem Zahlenbegriff auseinandersetzen. Vermutlich wirst Du denken, dass es nichts langweiligeres als eine Zahl gibt. Wahrscheinlich ist es ähnlich wie mit der Ökonomie: Wer kein eigenes Geschäft oder kein eigenes ansehnliches Vermögen hat, der oder dem kann die Buchhaltung ziemlich egal sein. So geht es zumindest mir. Und wieso soll ich wissen, dass $4 \cdot 5 = 20$ ist? Das macht doch der Taschenrechner für mich. Doch der Zahlenbegriff ist für mich viel interessanter, als es vielleicht auf den ersten Blick aussieht. Er ist einerseits eng mit der gesamten Menschheitsgeschichte verbunden, aber es ist immer noch mirakulös, wie genau die Zahlen entstanden sind. Und die Definition in der Mathematik ist meines Erachtens nur ein sogenanntes „Reverse-Engineering“. Das bedeutet, dass die Eigenschaften bekannt sind und geschaut wird, wie die Definitionen beschaffen sein müssen, damit die bekannten Eigenschaften als Sätze beweisbar sind. Jedoch finde ich das nicht schön. Denn was auf der Strecke bleibt, ist die Anschauung und das Verständnis. Darum schlage ich eine andere Definition der natürlichen Zahlen vor und leite daraus die übliche Definition der natürlichen Zahlen als Sätze ab. M.E. lassen sich Zahlen als Metasymbole für Verkettungen von gleichen Symbolen begreifen. Ist also A ein Symbol, dann sei definiert:

$$1 \cdot A \equiv A$$

und ist n ein Symbol einer natürlichen Zahl, so sei definiert:

$$(n+1) \cdot A \equiv n \cdot A\,A$$

Das wäre dann schon alles, was über Zahlen bekannt sein müsste. Alle weiteren Eigenschaften der natürlichen Zahlen lassen sich dann von Verkettungen von gleichen Symbolen ableiten. Damit ist der Inhalt dieses Abschnitts eigentlich schon beschrieben. Und jetzt wird das Ganze noch praktisch beliebig ausführlich noch einmal beschrieben[1].

[1] Als ich diesen Satz nach langer Zeit durchgelesen habe, musste ich spontan lachen.

KAPITEL 1

Vorbereitungen zu den natürlichen Zahlen

Manchmal ist es nicht schlecht, die Dinge etwas langsamer anzugehen. In meinem Fall waren es dreieinhalb Jahre. Seit dreieinhalb Jahren habe ich mir immer wieder überlegt, wie ich die natürlichen Zahlen (also die Zahlen 1, 2, 3 und so weiter) begründen könnte. Und nun glaube ich, endlich die lange ersehnte Lösung gefunden zu haben. Beachte bitte, dass ich diesen Teil eigentlich ursprünglich nach der Definition **??** über die Gleichheit von Symbolen aufgeschrieben habe und dass er immer noch dort stehen könnte. Das bedeutend, dass ich eigentlich immer noch auf einem sehr einfachen Niveau argumentiere. Jedoch habe ich in der Zwischenzeit in langwieriger Arbeit die Grundlagen der naiven Logik aufgeschrieben. Somit starten wir hier trotzdem nicht vom Anfang an. Wenn Du Dich im Folgenden über die Umständlichkeit des Geschriebenen wunderst, dann stammt diese davon, weil ich eben noch nicht von der Möglichkeit der natürlichen Zahlen Gebrauch machen kann und will. Mein Ziel ist es eben, die Zahlen als Anzahl der Symbole von Symbolketten mit lauter gleichartigen Symbolen zu motivieren. Auf der anderen Seite ist es so, dass dieses Kapitel sich eigentlich eher zum Nachschlagen als zum Durchlesen eignet.

Das Bemerkenswerte dieses Kapitels ist, dass die neue Voraussetzung, um es zu verstehen, eigentlich in der Objektpermanenz[1] liegt. Dieses Konzept eignen sich Kinder im Laufe einer unauffälligen Entwicklung ab ca. ihrem achten Lebensmonat an. Es wäre m.E. möglich, recht viele Aussagen über Symbolketten machen. Aber ich denke, das ist extrem ermüdend. Daher ist es vor allem meine Absicht, möglichst schnell die natürlichen Zahlen zu begründen und dann deren Eigenschaften auszuloten.

Nun möchte ich mit den Vorbereitungen der natürlichen Zahlen beginnen.

Ich habe unter der Definition **??** aufgeschrieben, wann ich zwei Symbole als gleich betrachte. Ich möchte an dieser Stelle versuchen zu zeigen, dass die obige Definition (im Rahmen der Widerspruchsfreiheit von Symbolen) widerspruchsfrei ist :

[1] siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Objektpermanenz, falls Du mehr darüber erfahren möchtest

LEMMA 1. *Es seien A, B Metasymbole von Symbolen, welche in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen des Beweises widerspruchsfrei seien. Dann kann immer festgestellt werden, ob die durch A und B repräsentierten Symbole gleich oder ungleich sind.*

BEWEIS. Bestehen die durch A und B repräsentierten Symbole aus einem einzelnen Symbol, dann kann ich annehmen, dass ich unterscheiden kann, ob die zwei Symbole gleich sind oder nicht[2]. Also kann ich in diesem Fall entscheiden, ob die Symbole gleich oder ungleich sind. Besteht das Symbol A aus einem und das Symbol B aus mehreren Symbolen oder A aus mehreren Symbolen und B aus einem Symbol, dann sind diese gemäß der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen verschieden. Bestehen die Symbole A wie auch B aus mehreren Symbolen, dann kann wiederum geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A &= A_1 A_2 \\ B &= B_1 B_2 \end{aligned}$$

Dabei setze ich voraus, dass A_1 und B_1 je aus einem einzelnen Symbol bestehen. Dann seien die Symbole A und B gleich, falls die Symbole A_1 und B_1 gleich sind und die Symbole A_2 und B_2 gleich sind. Falls $A_1 \neq B_1$ ist, dann weiß ich an dieser Stelle, dass die beiden Symbole ungleich sind. Gilt jedoch $A_1 = B_1$, dann kann ich wiederum untersuchen, ob $A_2 = B_2$ ist. Nun kommt die eigentliche Überlegung dieses kleinen Lemmas: Da sowohl A wie auch B aus endlich vielen Symbolen bestehen müssen, kann ich nach endlich vielen Schritten entscheiden, ob beide Symbole gleich oder ungleich sind. Das bedeutet jedoch, dass ich immer entscheiden kann, ob die beiden Symbole gleich oder ungleich sind. Damit habe ich meines Erachtens den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

Ich habe das folgende Lemma ursprünglich bloß in einem Beweis eines Lemmas aufgeschrieben. Da ich jedoch eine Freunde daran habe, dass mir der Beweis der Transitivität der Identität der Gleichheit von Symbolen gelungen ist, möchte ich den Beweis separat aufschreiben:

LEMMA 2. *Die Gleichheit von Symbolen ist eine Äquivalenzrelation im Sinn der Definition* **??** *bezüglich der Definition einer Äquivalenz.*

BEWEIS. Bevor ich den Beweis beginne, möchte ich auf den Absatz **??** verweisen, in welchem ich darüber nachdenke, wie die Handhabung von Symbolen und Metasymbolen innerhalb dieses Skripts geregelt werden soll.

Was muss ich überhaupt zeigen? Um das zu wissen (falls ich es noch nicht tue), lese ich die Definition **??**. In dieser Definition kann ich nachlesen, dass die Gleichheit von Symbolen dann eine Äquivalenzrelation

[2]Vergleiche mit der Bemerkung **??** über die Gleichheit von Symbolen

ist, falls diese identitiv, symmetrisch und transitiv ist. Nun, ich weiß nicht, ob ich dadurch schlauer geworden bin. Falls nicht, muss ich halt im Stichwortverzeichnis die Begriffe nachschlagen und die entsprechenden Definitionen lesen.

Ich möchte nun den Begriff der Definition der Identität der Äquivalenzrelation in Bezug auf die Gleichheit von Symbolen noch einmal aufschreiben und beweisen: Wenn ich zeigen möchte, dass die Gleichheit von Symbolen identitiv ist, muss ich zeigen, dass für alle Symbole A, welche in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei seien, gilt:

$$A = A$$

Gemäß der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen gilt dies per Festlegung, also per Definition. Damit ist gezeigt, dass die Gleichheit von Symbolen identitiv ist. Nun möchte ich zeigen, dass die Gleichheit von Symbolen symmetrisch ist. Falls mit A und B Metasymbole bezeichnet werden, welche in sich selbst gegenüber den anderen Symbolen widerspruchsfrei seien, und für welche gilt:

$$A = B$$

dann ist zu zeigen, dass also auch gilt:

$$B = A$$

Doch auch dies ist per Festlegung der Fall. Dann gilt noch zu zeigen, dass die Gleichheit von Symbolen transitiv ist. Ich fordere also, dass für alle Metasymbole, welche mit A, B sowie C bezeichnet werden und in sich selbst sowie den anderen Symbolen des Satzes widerspruchsfrei sein sollen, gilt:

$$A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$$

Besteht das Symbol A aus einem einzelnen Symbol D, dann muss mit $A = B$ auch das Symbol B aus dem Symbol D bestehen. Und da ebenfalls $B = C$ gilt, muss auch das Symbol C aus dem Symbol D bestehen. Also muss dann gemäß der Definition **??** $A = C$ gelten. Besteht das Symbol A aus mehreren Symbolen, dann muss auch das Symbol B aus mehreren Symbolen bestehen. Würde das Symbol C aus bloß einem Symbol bestehen, dann wäre gemäß der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen

$$B \neq C$$

im Widerspruch der Definition. Also müsste auch das Symbol C aus mehreren Symbolen bestehen. Also müsste mit geeigneten Metasymbole A_1, A_2, C_1 sowie C_2 gelten

$$A = A_1\, A_2$$
$$C = C_1\, C_2$$

wobei die Symbole A_1 und C_1 aus einem und die Symbole A_2 und C_2 aus mehreren Symbolen bestehen müssten. Wiederum kann aufgrund der

Definition **??** der Gleichheit von Symbolen mit sich selbst nicht $A_1 \neq C_1$ sein. Das gleiche Argument kann endlich viele Male auf durchgeführt werden, und zwar beginnend mit den Symbolen A_2 und C_2 und so lange, bis das letzte Symbol von A_2 mit dem letzten Symbol von C_2 verglichen ist. Es ist nicht möglich, dass es ein Metasymbol D derart gibt, dass gilt

$$A = D\,E$$

und

$$C = D$$

oder umgekehrt

$$A = D$$

und

$$C = D\,E$$

Denn da gilt

$$A = B$$

und

$$B = C$$

und somit (da die Gleichheit von Symbolen per Definition per Festlegung symmetrisch ist)

$$C = B$$

Also müsste in diesen Fällen gelten

$$B \neq B$$

Denn das Symbol B müsste, je nachdem welche Gleichheit zuerst betrachtet würde, unterschiedlich viele Symbole besitzen. Wäre

$$A = D\,E$$

sowie

$$C = D$$

Dann müsste mit

$$A = B$$

auch gelten

$$B = D\,E$$

Mit der Voraussetzung

$$B = C$$

wäre auch

$$B = D$$

Somit könnte ich die Gleichung

$$B = B$$

(welche gemäß der Identität der Symbolgleichheit gilt) auch schreiben als

$$D\,E = D$$

was jedoch gemäß der Definition **??** der Symbolgleichheit nicht wahr sein kann.

Wäre hingegen

$$A = D$$

und

$$C = D\,E$$

Dann wäre mit der Voraussetzung

$$A = B$$

auch

$$B = D$$

Wegen der Voraussetzung

$$B = C$$

wäre auch

$$B = D\,E$$

Somit könnte ich die Gleichung

$$B = B$$

(welche gemäß der Identität der Symbolgleichheit gilt) auch schreiben als

$$D = D\,E$$

was jedoch gemäß der Definition **??** der Symbolgleichheit nicht wahr sein kann. Somit erachte ich den Beweis als erbracht und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Ich muss zugeben, dass mich der Beweis nicht so überzeugt. Aber vielleicht finde ich einmal einen besseren Beweis.

Im nächsten Lemma möchte ich mich mit der Frage beschäftigen, ob Symbole immer noch gleich sind, welche sie gleich sind und ein weiteres Symbol ihnen voran- oder nachgestellt wird. Hier liegt der Fokus vor allem darauf, dass ich mich vergewissere, dass der Prinzip der Gleichheit widerspruchsfrei bleibt.

Lemma 3. *Es seien A_1, A_2 sowie B Symbole, welche in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei seien. Ist nun $A_1 = A_2$, dann ist sowohl*

$$A_1\,B = A_2\,B$$

wie auch

$$B\,A_1 = B\,A_2$$

BEWEIS. Der Beweis ist zwar einfach, jedoch aufwändig. Denn sowohl die Symbole A_1, A_2 wie auch B können Metasymbole von einfachen Symbolen oder jedoch auch Symbole von Symbolketten darstellen. Da jedoch $A_1 = A_2$ ist, muss genau dann A_1 ein Metasymbol einer Symbolkette sein, falls A_2 ein Metasymbol einer Symbolkette ist. Ist A_1 ein Metasymbol eines einfaches Symbols, dann muss auch A_2 ein Metasymbol eines einfachen Symbols sein. Gemäß der Definition ist die Zeichenkette $A_1\,B$ genau dann gleich der Zeichenkette $A_2\,B$, falls $A_1 = A_2$ ist und $B = B$ ist. Die Gleichung $B = B$ ist per Definition wahr. Die Gleichung $A_1 = A_2$ ist nach Voraussetzung wahr. Also ist die ganze Behauptung wahr. Das Gleiche gilt auch für die Gleichung

$$B\,A_1 = B\,A_2$$

Unabhängig davon, ob B das Metasymbol eines einzelnen oder von mehreren Symbolen ist, ist diese Gleichung genau dann wahr, falls

$$B = B$$

und

$$A_1 = A_2$$

ist. Das erste ist nach Definition der Gleichheit von Symbolen richtig. Das zweite nach Voraussetzung über A_1 und A_2 . Somit ist auch die Gleichung

$$B\,A_1 = B\,A_2$$

Nun seien jedoch A_1 sowie A_2 Metasymbole von Symbolketten. Wesentlich an dieser Stelle ist, dass die Symbolketten über gleich viele Symbole verfügen und die Symbole an den entsprechenden Stellen (der ersten bis letzten Stelle) der jeweils paarweise identisch sind. Das bedeutet, dass auch wiederum das Symbol B mit sich selbst verglichen wird. Also kann ich wiederum folgern, dass aufgrund der Voraussetzung

$$A_1 = A_2$$

wiederum ebenfalls

$$A_1\,B = A_2\,B$$

gelten muss. Bezüglich der Vergleichbarkeit von

$$B\,A_1 = B\,A_2$$

hat sich jedoch in diesem Fall gegenüber demjenigen Fall, in welchem A_1 respektive A_2 aus jeweils einem Symbol bestehen, nichts geändert. Also kann ich schließen, dass diese Gleichung immer noch wahr sein muss. Somit meine ich, den Beweis für die Richtigkeit dieser Aussage erbracht zu haben und beende darum an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Das führt mich zur nächsten Fragestellung: Kann gezeigt werden, ob und wenn ja warum die Aneinanderreihung von Symbolen assoziativ ist? Bezüglich der Einführung von Assoziativität siehe etwa Definition **??**. Nun habe ich jedoch ein Problem. Denn wenn $A\ B\ C$ Metasymbole sind, dann kann ich nicht untersuchen, ob

$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$$

ist. Denn das wird im Allgemeinen nie der Fall sein. Der Grund dafür ist simpel: Die Klammern sind ja auch Symbole. Also wie mache ich es? Ich versuche es so:

Lemma 4. *Es seien A, B sowie C Metasymbol, welche in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Lemmas widerspruchsfrei seien. Weiter seien die Metasymbole D sowie E wie folgt definiert:*

$$D = A\,B$$
$$E = B\,C$$

Dann gilt

$$D\,C = A\,E$$

Beweis. Gemäß dem vorhergehenden Lemma 3 kann ich schreiben

$$D\,C = A\,B\,C$$

Weiter kann ich gemäß dem gleichen Lemma ebenfalls folgern, dass gilt

$$A\,E = A\,B\,C$$

Da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation ist, ist sie gemäß der Definition **??** der Äquivalenzrelation symmetrisch. Also kann ich folgern:

$$A\,B\,C = A\,E$$

Weiter muss die Gleichheit von Symbolen transitiv sein, weil sie ja eine gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation ist. Darum kann ich auch schließen

$$D\,C = A\,E$$

Das ist jedoch gerade die Behauptung. Also bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Nun bin ich der Meinung, dass ich durchaus gezeigt habe, dass die Verkettung von Symbolen assoziativ ist. Um einen Beweis der anderen Art, welcher weniger formal, mir aber dafür um so einsichtiger erscheint, möchte ich folgenden Beweis ins Land führen. Angenommen, ich würde ein Buch mit den Kapiteln beschreiben welche mit den Symbolen A, B und C bezeichnet würde. Wäre die Verkettung von Symbolen nicht assoziativ, dann würde es einen Unterschied machen, ob zuerst die Kapitel B und C schreibe und dann zuletzt das Kapitel A vor den anderen beiden Kapiteln hinsetze, oder ob ich die Kapitel A, B sowie C hinschreibe. Das würde meines Erachtens der menschlichen Erfahrung, dass in beiden Fällen am Schluss die gleichen Symbole hingeschrieben werde, grundsätzlich widersprechen. Also folgere ich daraus, dass dies keine Rolle spielen darf und somit die Verkettung von Symbolen tatsächlich assoziativ ist.

Ich möchte jetzt etwas schreiben, was Du vielleicht überflüssig findest.

LEMMA 5. *Es seien A und B Metasymbole, das heißt Symbole von Symbolen, welche in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen der Behauptung widerspruchsfrei seien. Dann gilt:*

$$A\,B \neq A$$

BEWEIS. Ich setze in der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen die Metasymbole

$$\begin{aligned} C &\equiv A\,B \\ D &\equiv A \end{aligned}$$

Dann muss

$$C \neq D$$

sein. Denn um gleich zu sein, müssten gleich viele Symbole vorhanden sein. Das ist jedoch nicht der Fall. Denn besteht das Symbol, welches durch das Metasymbol D und somit durch A symbolisiert wird, aus einem Symbol, dann muss das Symbol, welches durch C und somit durch D symbolisiert wird, aus mehreren Symbolen bestehen. Also kann in diesem Fall die Gleichheit von C und D nicht gelten. Besteht jedoch das durch D und somit A symbolisierte Symbol aus mehreren Symbolen, dann muss es zwei Metasymbole E und F derart geben, dass

$$A = E\,F$$

ist. Weiter kann ich fordern, das F genau ein Schriftzeichen symbolisiert. Also muss in diesem Fall gelten

$$\begin{aligned} C &= E\,F\,B \\ D &= E\,F \end{aligned}$$

Nun stimmen zwar alle Symbole von E überein, aber gemäß der Vergleichsvorschrift tritt der Fall auf, die beiden Symbole F und $F\,B$ miteinander zu vergleichen. Also gelange ich wieder an den Punkt, ein Symbol, welches aus mehreren Symbolen besteht ($F\,B$) mit einem zu vergleichen, welches nur aus einem Symbol besteht (F). Gemäß der Definition 25 müssen diese Symbole jedoch ungleich sein. Damit glaube ich auch in diesem Fall und somit in allen Fällen den Beweis für die Ungleichheit der Symbole erbracht zu haben. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Pferdefuß der Gleichheit von Symbolen

Die Definition der Gleichheit von Symbolen hat einen sogenannten Pferdefuß (also eine Unschönheit, welche in Kauf genommen werden muss): Ich habe geschrieben „falls die Symbole A_1 und B_1 gleich sind". Nun, wann zwei Symbole wie „Pferd" und „Kuh" gleich sind und wann nicht, das kann ich so nicht sagen. Natürlich sind die Symbole „Pferd" und „Kuh" nicht gleich. Denn wir haben in der Schule gelernt, dass das Symbol „P" und das Symbol „K" ungleich sind. Ob ich jedoch auf Anhieb beispielsweise zwei chinesische Schriftzeichen bezüglich Gleichheit richtig beurteilen könnte, das bezweifle ich. Auch bei tamilischen oder thailändischen Schriftzeichen oder einer anderen Schriftart wie beispielsweise dem kyrillischen wäre ich mir da nicht sicher. Wenn das maschinell erkannt werden kann, habe ich zwar nichts dagegen. Jedoch bleibt mir trotzdem festzuhalten, dass dies etwas ist, was im Rahmen dieser Einführung in die Mathe nicht endgültig zu Ende diskutiert werden kann. Doch wieso walze ich dieses Thema so breit aus? Weil darin auch ein Stück „Magie" steckt. Weil ich damit beweisen will, dass in der Mathematik eben nicht „alles beweisen werden kann". Die Mathematik ist meines Erachtens immer eine Beschreibung eines Teilbereichs der „Wirklichkeit". Was „wirklich" ist, das kann auch die Mathematik nicht sagen. Es ist sozusagen ein Fischernetz, welches auch „Löcher" besitzt. Das bedeutet jedoch nicht, sehr verehrte Leserin oder Leser, dass Du Dich nicht mit Mathematik beschäftigen sollst. Es bedeutet jedoch, dass eine gewisse Demut gegenüber dem, was so existiert, durchaus angezeigt ist.

Doch zurück zur Einführung in die Symbole: Ich möchte nun Beispiele für die Überprüfung der Gleichheit von Symbolen machen. Ist A das Symbol für „Kuh" und B das Symbol für „Kuh", dann sind beide Symbole gleich. Ist A das Symbol für „Ei" und B das Symbol für „Ei Ei", dann sind diese beiden Symbole nicht gleich. Beide Symbole beginnen zwar mit einem „E", gefolgt von einem „i". Aber wenn ich schreibe

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{'E'} \\ A_2 &= \text{'i'} \\ A_1A_2 &= \text{'Ei'} \\ B_1 &= \text{'E'} \\ B_2 &= \text{'i Ei'} \\ B_1B_2 &= \text{'Ei Ei'} \end{aligned}$$

dann sind zwar $A_1 = B_1$. Jedoch besteht das Symbol A_2 aus einem Symbol, wogegen das Symbol B_2 aus vier Symbolen (sofern ich den Leerschlag mitzähle, ansonsten sind es deren drei), also mehr als einem besteht. Darum ist $A_2 \neq B_2$ und darum auch $A \neq B$. Und noch eine Besonderheit sei aufgeschrieben, obwohl sie so nicht deutsch und deutlich in der Definition steht. Mein Name ist „Markus Demarmels“. Dann sei

$$A = \text{'Markus'}$$

und

$$B = \text{'Demarmels'}$$

Also ist

$$A \neq B$$

da

$$\begin{aligned} A &= A_1\, A_2 = \text{'M' 'arkus'} \\ B &= B_1\, B_2 = \text{'D' 'emarmels'} \end{aligned}$$

und

$$\text{'M'} \neq \text{'D'}$$

ist. Jedoch können beide Symbole „Markus“ und „Demarmels“ dazu verwendet werden, um meine Person zu beschreiben. Aber wenn ich von Symbolen schreibe, dann meine ich die Symbole an und für sich und nicht die Größen oder Dingen, welche sie damit beschreiben. Zum Schluss noch einfachere Beispiele: Ist A das Symbol für α und B das Symbol für α, dann ist

$$A = B$$

Ist jedoch A das Symbol für α und B das Symbol für μ, dann ist

$$A \neq B$$

Und nun möchte ich weiter in der Beschreibung der Eigenschaften von Symbolen fahren:

Lemma 6. *Es sei A ein Symbol und sei B sei ein Metasymbols, welches aus einer beliebigen, jedoch endlichen Anzahl von aneinander gereihten Symbolen A bestehe. Dann gilt*

$$A\, B = B\, A$$

Beweis. Ist $B = A$, dann kann ich schreiben:

$$A\, B = A\, A$$

Nun kann ich mir erlauben, das erste Symbol „ A“ auf der rechten Seite der Gleichung wieder mit dem Symbol B zu bezeichnen und ich erhalte

$$A\, A = B\, A$$

Damit hätte ich jedoch auch die Gleichheit

$$A\, B = B\, A$$

Nun nehme ich an, dass das Symbol B aus mehr als einem Symbole$A$ bestehe. Da B aus mindestens einem Symbol A besteht, kann ich ein Symbol wegnehmen. Und jetzt kommt das „Kindertrickli[3]“. Wenn ich bei Aneinanderreihung B irgend ein Symbol wegnehme, dann spielt es keine Rolle, welches ich wegnehme. Ob ich es am Anfang, in der Mitte oder am Schluss wegnehme, spielt überhaupt keine Rolle. Wenn ich die restlichen Symbole am Schluss wieder aneinanderreihe, dann habe ich immer wieder das gleiche zusammengesetzte Symbol. Ich möchte es demonstrieren, falls

$$B = A\,A\,A\,A\,A$$

sei. Ich verwende dafür die sogenannte „Zipfelmützen-“ oder „Tarnkappennotation[4] Dasjenige Symbol, welches ich herausnehme, bezeichne ich mit einem Dach auf dem Symbol. Nun schreibe ich die einzelnen Symbole auf, wenn ich nacheinander bei den Symbolen ein Symbol „ A“ entferne:

$$\hat{A}\,A\,A\,A\,A = A\,A\,A\,A$$
$$A\,\hat{A}\,A\,A\,A = A\,A\,A\,A$$
$$A\,A\,\hat{A}A\,A = A\,A\,A\,A$$
$$A\,A\,A\,\hat{A}\,A = A\,A\,A\,A$$
$$A\,A\,A\,A\,\hat{A} = A\,A\,A\,A$$

Das ganze funktioniert darum, weil ich die Zwischenräume zwischen dem Symbol mit der Bezeichnung „ A“ nicht als Symbol betrachte. Also steht es mir frei, das erste Symbol von B zu entfernen. Es muss also ein Symbol C derart geben, dass gilt

$$B = A\,C$$

Wenn ich nun die Zeichenketten $A\,B$ und $B\,A$ vergleiche, dann kann ich zuerst B umschreiben und erhalte

$$B\,A = A\,C\,A$$

Also kann ich die Zeichenketten $A\,B$ sowie $B\,A = A\,C\,A$ vergleichen. Dann sind bei beiden Zeichenketten das erste Symbol gleich, da die Verkettung von Symbolen gemäß dem Lemma 4 assoziativ ist. . Also muss ich die beiden Symbole $C\,A$ sowie B miteinander vergleichen. Nun habe ich ja eben die Betrachtung angestellt, dass es beim Entfernen eines Symbols A aus dem Symbol B nicht darauf ankommt, ob ich

[3]Eigentlich wäre der schweizerdeutsche Ausdruck dafür „Bubentrickli“, also ein „kleiner Trick eines Knaben“. Da jedoch das ungerecht gegenüber den schlauen Mädchen wäre, erlaube ich mir „Kindertrickli“, also „kleiner Trick eines Kindes“ zu schreiben.

[4]Beat Streckeisen von der Fachhochschule Nordwestschweiz verwendete meines Wissens diesen Ausdruck.

das Symbol A aus dem Anfang, der Mitte oder dem Ende von B entferne. Also macht es auch keinen Unterschied, ob ich ein Symbol A am Anfang, in der Mitte oder am Ende von C hinzufüge. Darum schließe ich, dass gelten muss:

$$C\,A = B$$

Somit kann ich gesamthaft schließen, dass

$$A\,B = A\,C\,A$$

gilt. Da jedoch gemäß Konstruktion von $A\,C$ gilt, dass

$$A\,C = B$$

ist, kann ich also folgern, dass dann auch gilt

$$A\,C\,A = B\,A$$

Mit

$$A\,B = A\,C\,A$$

und

$$A\,C\,A = B\,A$$

muss darum auch gelten, da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist:

$$A\,B = B\,A$$

Darum glaube zeigen zu können, dass auch

$$A\,B = B\,A$$

sein muss und beende somit den Beweis an dieser Stelle. Wobei - nein, ich kann es noch besser zeigen: Ich schreibe

$$A\,B$$

und

$$B\,A$$

auf. Wenn ich jetzt diese Symbole aufschreibe, wobei ich das Symbol B durch die Verkettung der Symbole A ersetze, dann werde ich in beiden Fällen die gleiche Anzahl der Symbole A sehen. Ich kann nicht unterscheiden, ob wo das zusätzliche A hingeschrieben habe. Ob am Anfang oder am Ende. Also müssen beide Symbole gleich sein. Damit hätte ich den Beweis für die Behauptung erbracht.

Ich möchte noch einen Beweis aufschreiben. Dabei ersetze ich das Symbol A durch einen senkrechten Strich ($|$). Ich schreibe die Zeichenketten

$$A\,B$$

respektive

$$B\,A$$

um und erhalte

$$|\,B$$

respektive

$$B\,|$$

Dabei möchte ich betonen, dass die Leerzeichen zwischen den Symbolen nicht zu den Symbolketten gezählt werden sollen. Die durch das Symbol B symbolisierte Zeichenkette sieht dann irgendwie in der Art

$$|||\,(\ldots)\,|||$$

aus. Somit sieht die Zeichenkette

$$B\,|$$

in der Art

$$|||\,(\ldots)\,|||\;\;|$$

und die Zeichenkette

$$|\,B$$

sieht dann irgendwie so aus:

$$|\;\;|||\,(\ldots)\,|||$$

Nun nehme ich die letzte Zeichenkette und zeichne sie ab, in dem ich sie von oben herab her lese. Ich stelle diese Zeichenkette sozusagen auf den Kopf. Also sieht diese dann wie folgt aus:

$$|||\,(\ldots)\,|||\;\;|$$

Die Erfahrung der Objektpermanenz lehrt mich jedoch, dass sich die Anzahl der senkrechten Striche sich nicht geändert haben darf. Aber die auf den Kopf gestellte Zeichenkette muss gleich der Zeichenkette $B\,|$ sein. Denn nehme ich den letzten senkrechten Strich weg, dann bleiben genau die vom Symbol B symbolisierten senkrechten Striche übrig. Also muss die ursprüngliche Zeichenkette wiederum gleich der Zeichenkette $B\,|$ sein. Da ich Leerschläge nicht zähle, kann ich also daraus folgern, dass die Zeichenketten

$$|\,B$$

sowie

$$B\,|$$

ebenfalls gleich sein müssen.

Darum erlaube ich mir, zu behaupten, dass ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe und beende darum an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Nachbetrachtung: Würde dieser Satz nicht zutreffen, dann wäre unsere ganze Gesellschaft eine ganz andere! Denn falls beispielsweise ein T-Shirt 17 € (Euro) kosten würde, und die Kundin würde 18 € in einer Reihe von 18 Münzen mit je 1 € auf den Kassentisch legen, dann würde, falls der Satz nicht zutreffen würde, es einen Unterschied machen, ob die Person an der Kasse die erste, vierte oder 14. Euromünze aus der Reihe nehmen und es der Kundin zurückgeben würde. Somit meine ich, dass uns die Alltagserfahrung lehrt, dass in diesem Fall wirklich es keine Rolle spielt, ob ich ein Symbol am Anfang oder am Ende einer Zeichenkette einfügt. Wenn ich ein Symbol am Schluss einer Kette von gleichen Symbolen nehme und ich dieses Symbol an den Anfang der Zeichenkette stelle, dann sind nachher noch gleich viele Symbole vorhanden und die beiden Ketten von Symbolen sind immer noch gleich: Dieses Prinzip erinnert mich auch an die Objektpermanenz, welche kleine Kinder ab dem Alter von ca. 8 Monaten zu beschäftigen beginnt. Es lautet, dass üblicherweise Dinge auch dann noch vorhanden sind, wenn ich diese im Moment nicht sehen kann. Ich vermute, dass auch dies eine Triebfeder für die Formalisierung von Symbolen im Rahmen der Mathematik war.

Es gibt noch eine zweite Nachbetrachtung: In der modernen Quantenphysik wurde die Entdeckung gemacht, dass ganz kleine (subatomare) Teilchen wirklich prinzipiell ununterscheidbar sind. Das hat die Auswirkung, dass nicht mehr davon gesprochen werden kann, dass ein solches Teilchen einen bestimmten Weg zurücklegt. Angenommen, in einem Experiment werde ein Teilchen so manipuliert, dass es bei einer bestimmten Quelle (beispielsweise einem glühenden Draht) ausgesendet wird. An einem anderen anderen Ort werde mittels einem Fühler bestimmt wird, ob es auch wirklich dort angekommen ist. Der zweite Ort werde „Senke“ genannt (so wie ein Bach in einer Talsenke in einem Höhlensystem verschwinden kann). Dann kann nicht mehr genau gesagt werden, welchen Weg das Teilchen von der Quelle zur Senke zurückgelegt hat. Diese Beobachtung war ganz zentral für die heutige Physik. Aber obwohl die Grundannahme - dass Teilchen prinzipiell nicht mehr voneinander unterschieden werden können - sehr seltsam anmutet: In der Menschheitsgeschichte wurde auf diese Grundannahme schon früher zurückgegriffen. Ich würde nicht auf die Idee kommen, vom „562.“ Auftreten des Buchstabens „t“ in diesem Skript zu schreiben. Alle Buchstaben werden als „eigenschaftslos“ und voneinander „ununterscheidbar“ betrachtet. Weil diese Betrachtung eben „praktisch“, also vorteilhaft für uns Menschen ist. Dieser Gedanke ist es, welchen ich im Versuch des Beweises des kleinen Satzes oben verwendet habe. Es ist jedoch fraglich, ob dieser Versuch des Beweises wirklich angemessen ist. Urteile selbst!

Das vorhergehende Lemma kann erweitert werden:

LEMMA 7. *Es sei A ein Symbol und es seien B sowie C Metasymbole, welches aus einer beliebigen, jedoch endlichen Anzahl von aneinander gereihten Symbolen A bestehe. Dann gilt*

$$B\,C = C\,B$$

BEWEIS. Habe ich die Symbolkette

$$B\,C$$

dann muss diese aus einer Symbolkette bestehen, welche aus endlich vielen Symbolen A bestehen. Nun kann ich diese Symbole sozusagen beschriften: Das erste werde mit A beschriftet. Das zweite werde mit $A\,A$ beschriftet. Das dritte werde mit $A\,A\,A$ beschriftet. Diese Beschriftung werde für alle Symbole A der Symbolkette so durchgeführt. Gemäß der Definition **??** über die Gleichheit von Symbolen und insbesondere des Lemmas 5 über die Ungleichheit von Symbolen und Symbolen, denen andere Symbole angehängt sind, sind dann alle Beschriftungen ungleich. Nun kann ich diese Beschriftungen beispielsweise auf Steinchen aufschreiben, diese Steinchen in einen Sack werfen, den Sack verschnüren und schütteln. Die Erfahrung der Objektpermanenz (welche fast alle Kinder ab ca. dem 8. Lebensmonat machen) lehrt mich jetzt, dass bei diesem Vorgang weder eine Beschriftung hinzugefügt wird noch weggenommen wird. Anschließend entnehme ich die Steinchen eins nach nach dem anderen dem Sack und schreibe die Beschriftungen wieder aufs Papier. Dann habe ich die Beschriftungen der Symbole, jedoch nicht die Symbole selbst aufgeschrieben. Also ersetze ich nachher jede Beschriftung der Symbole durch das Symbol, welches sie symbolisieren. Das ist jedoch immer noch in jedem Fall das Symbol A. Am Schluss habe ich wieder eine Symbolkette, bestehend aus endlich vielen Symbolen A. Dann kann ich folgern, dass wieder genau gleich viele Symbole auf dem Papier geschrieben wurden. Da alle Symbole gleich dem Symbol A sind, kann ich daraus folgern, dass die daraus resultierenden Zeichenketten gleich der ursprünglichen Zeichenfolge ist. Also kann ich daraus folgern, dass auch die Zeichenfolge

$$C\,B = B\,C$$

sein muss. Denn ich kann ja die beschrifteten Symbole entweder dem Symbol B oder dem Symbol C zuordnen. Durch den oben beschriebenen Vorgang werden die Positionen der Symbole jetzt beliebig vertauscht. Und da alle Vertauschungen offenbar die Gleichheit mit dem ursprünglichen Symbol nicht zerstören, kann ich auch folgern, dass auch

$$C\,B = B\,C$$

sein muss. Das wäre der erste Beweisversuch für die Richtigkeit der Behauptung.

Nun möchte ich jedoch noch einen zweiten Beweisversuch aufschreiben: Die resultierende Symbolkette besteht wiederum aus endlich vielen aneinandergereihten Symbolen A. Ich nehme an, es sei etwa

$$\begin{aligned} B &= A\,A \\ C &= A\,A\,A \end{aligned}$$

Dann ist die resultierende Zeichenkette

$$B\,C = A\,A\,A\,A\,A$$

Dann entnehme ich der resultierenden Zeichenkette so lange an beliebiger Stelle Symbole A, bis die Symbolkette C resultiert. Dann lehrt mich wiederum die Erfahrung der Objektpermanenz, dass es keine Rolle spielt, welche Symbole entfernt werden, sofern nicht zu viel oder zu wenig Symbole entfernt werden Es gilt also etwa

$$\begin{aligned} C =& \hat{A}\,\hat{A}\,A\,A\,A \\ =& \hat{A}\,A\,\hat{A}\,A\,A \\ =& A\,\hat{A}\,\hat{A}\,A\,A \\ =& A\,\hat{A}\,A\,\hat{A}\,A \end{aligned}$$

Dabei habe die zu entfernenden Symbole wiederum mit „Tarnkappen“ bezeichnet. Und so folgere ich eben auch, dass auch gilt

$$\begin{aligned} C &= A\,A\,A\,\hat{A}\,\hat{A} \\ &= \hat{A}\,\hat{A}A\,A\,A \end{aligned}$$

Dass bedeutet jedoch dass auch wiederum gilt

$$\begin{aligned} & C\,B \\ =& A\,A\,A\,\hat{A}\,\hat{A}\,A\,A \\ =& B\,C \end{aligned}$$

Denn jedes Symbol A, welches auf der rechten Seite der Zeichenkette

$$C = A\,A\,A\,\hat{A}\,\hat{A}$$

mittels der „Tarnkappennotation“ entfernt wird, wird anschließend wieder hinzugefügt. Am Schluss resultiert wieder die ursprüngliche Zeichenkette. Und die ist ja

$$B\,C$$

Somit schließe ich, dass, unabhängig von der Anzahl der Symbole A in den Zeichenkette B sowie C, die Zeichenketten

$$B\,C$$

sowie

$$C\,B$$

identisch sein müssen.

Damit hoffe ich, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende darum an dieser Stelle wiederum die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Nachbemerkung: Eventuell müsste das vorhergehende Lemma als Axiom verwendet werden, da der Beweis eventuell nicht präzis zu führen ist. Ich kann das so nicht sagen. Aber er ist für die weiteren Überlegungen unentbehrlich. Darum nehme ich im Folgenden an, dass das Lemma richtig ist. Ich hoffe inständig, ich liege da nicht falsch.

Definition 8. Es seien A, B sowie C Metasymbole. Dabei sollen per Definition die Metasymbole B wie auch C aus einer beliebigen, jedoch endlichen Folge der durch A repräsentierten Symbole bestehen. Dies Symbole seien in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen der Definition widerspruchsfrei. Um die Dinge nicht unnötig kompliziert zu machen, sei beispielsweise A das Metasymbol für „Brot“. B bestehe aus zwei Symbolen, welche durch A repräsentiert werden. In diesem Fall also

$$\text{Brot Brot}$$

C bestehe aus 4 Symbolen, welche durch das Symbol A repräsentiert werde:

$$\text{Brot Brot Brot Brot Brot}$$

Dann sei das Metasymbol B kleiner als das Metasymbol C (geschrieben als

$$B < C$$

), falls es ein Metasymbol D derart gibt, so dass gilt

$$B\,D = C$$

Ich nenne D die Differenz der Symbole C und B. Dann sei das Metasymbol B gleich dem Metasymbol C, falls gemäß der Definition **??** gilt:

$$B = C$$

Schlussendlich sei das Metasymbol B größer als das Metasymbol C (geschrieben als

$$B > C$$

, falls es ein Metasymbol E derart gibt, so dass gilt

$$B = C\,E$$

Wieder sei E die Differenz der Symbole C und B.

Und nun zwei Abkürzungen, welche sich als ungemein nützlich erweisen: Es sei definiert

$$B \leq C \Leftrightarrow B < C \vee B = C \tag{1.0.1}$$

respektive

$$B \geq C \Leftrightarrow B = C \vee B > C \tag{1.0.2}$$

In Worten: Das Symbol B sei kleiner oder gleich dem Symbol C, falls B kleiner C oder B gleich C ist. Das Symbol B sei größer oder gleich dem Symbol C, falls das Symbol B größer als das Symbol C ist oder das Symbol B gleich dem Symbol C ist.

Beim Vergleich der Länge von zwei Zeichenketten kommt die Gier ins Spiel. Das scheint einmal zuerst abwegig zu sein. Was kratzt Dich das, ob jetzt

Ziege Ziege

mit

Ziege Ziege Ziege

verglichen wird? Aber wenn Du bedenkst, dass die erste Zeile Deine Anzahl der Ziegen sein könnte, und die zweite Anzahl die entsprechende Anzahl der Nachbarin: Was würdest Du dann sagen? Wärst Du immer noch so kühl und "tiefenenspannt"? Darum bleibt mir an dieser Stelle festzuhalten, dass die Mathematik ihre "Unschuld" schon am Anfang verloren hat. Und doch lässt sich wahrscheinlich vermuten, dass das Prinzip des Vergleichens von Besitz oder die Anzahl von Dingen bereits vor den Hochkulturen ein Thema war.

Die Gier kommt auch darum ins Spiel, weil kaum jemand behaupten wollte, dass gilt

Goldstück

sei "kleiner als"

Kieselstein Kieselstein

.

Wobei ich zugeben muss, dass es schon schwierig genug ist, zwei Goldstücke als gleichwertig anzunehmen. Was, wenn das einige Goldstück nur eine dünne Schicht aus Gold als Überzug besitzt, im Innern jedoch auch Blei besteht? Wogegen ein zweitens Goldstück äußerst rein ist, so rein wie nur möglich? Aber Unterschiede in den durch die Symbole repräsentierten Größen werden an dieser Stelle absichtlich außer Acht gelassen. Das einzige, was verglichen wird, sind die Symbole.

Da jedoch kaum jemand behaupten wollte, zwei Kieselsteine seien mehr als ein Goldstück, macht es meines Erachtens nur Sinn, Symbolketten auf deren Länge zu vergleichen, falls beide Symbolketten aus den völlig identischen Symbolen bestehen. Noch frappierender wird es, wenn ich vergleiche

Mensch Mensch Mensch Mensch Mensch

sowie

Erde

Würde nun zugelassen, dass verschiedene Symbole miteinander verglichen würde, dann würde ich wahrscheinlich zum Schluss kommen, dass gelten müsste dass die „Erde kleiner als mehrere Menschen (5, um genau zu sein)“ sein müsste. Nein, das bringt uns in der Diskussion nicht weiter. In der Menschheitsgeschichte wurden meines Erachtens diese Widerwärtigkeiten umgangen, indem mehr oder weniger willkürlich über „Artengrenzen“ ein „Wechselkurs“ festgelegt wurde. Denkbar wäre etwa, dass 20 „Weizenkrüge[5]“ (durch das Metasymbol „K“ bezeichnet) vielleicht einer Ziege (durch das Metasymbol „W“ bezeichnet) entsprachen. Möchte ich dann zwei Ziegen und 63 Weizenkrüge miteinander vergleichen, dann würde nichts anderes übrigbleiben, als folgendes zu vergleichen. Zuerst würde ich die beiden folgenden Zeichenketten miteinander vergleichen:

W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W

Z Z

Weiter könnte ich dann anstelle von einem Symbol für eine Ziege zwanzig Symbole von Weizenkrügen aufschreiben. Also müsste ich die beiden folgenden Symbolketten vergleichen:

W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W

sowie

W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W
W W W W W W W W W W

Nun könnte ich erkennen, dass die erste Zeichenkette länger als die zweite Zeichenkette ist.

Jetzt, da ich mich ausgiebig über Beispiele des Vergleichs von zwei Zeichenketten von ausgelassen habe, möchte ich zeigen:

Satz 9. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen C bestehen sollen. Wie gewohnt (um mir ein wenig*

[5]offenbar gemäß dem entsprechenden Artikel der Deutschen Bibelgesellschaft („https://www.bibelwissenschaft.de/“) über Masse und Gewichte ein Krug mit einem Fassungsvermögen von ca. 1.5 - 2 Liter, welcher mit Weizen gefüllt war. Ich weiß nicht, ob auch der Krug mit verkauft wurde und ob der Käufer, der Verkäufer oder beide gemessen haben.

die Magie zu bewahren) setze ich voraus, dass alle Symbole in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei seien. Dann gilt genau eine der drei Möglichkeiten:

$$B < C$$
$$B = C$$

oder

$$B > C$$

Formal bedeutet dies in etwa:

$$B < C \vee B = C \vee B > C$$

Beweis. Ich habe im Lemma 1 über die Vergleichbarkeit von Symbolen zu zeigen versucht, dass ich immer feststellen kann, ob zwei Symbole gleich oder ungleich sind. Sind die Symbole gleich, dann bin ich schon am Ende mit diesem Beweis. Es sei nun $B \neq C$. Dann ist gemäß dem Lemma 7 über die Kommutativität der Addition von gleichen Symbolen

$$B\,C = C\,B$$

Überdies muss gemäß der Definition 8 des Vergleichs von Symbolketten von gleichen Symbolen gelten

$$B < B\,C$$
$$C < C\,B = B\,C$$

Im ersten Fall ist C die Differenz der Symbole $B\,C$ und B. Im zweiten Fall ist B die Differenz der Symbole $B\,C$ und C. Nun entferne ich so lange Symbole A von der Symbolkette $B\,C$, bis die resultierende Zeichenkette einer der beiden Symbolketten entspricht. Ich nehme an, zuerst sei die resultierende Zeichenkette diejenige des Symbols B. Nun ist C ist ja in allen dieser Symbolketten, welche aus der Abspaltung von einem oder mehreren Symbolen A von der Symbolkette $B\,C$ entsteht, enthalten. Somit kann ich folgern, dass es eine Symbolketten E geben muss, welche aus einem oder mehreren Symbolen besteht, und für welche gilt:

$$C\,E = B$$

oder entsprechend

$$B = C\,E$$

Also muss

$$B > C$$

sein. Entsprechend kann ich argumentieren, falls zuerst die Symbolkette C entsteht, falls der der Symbolkette $B\,C$ ein oder mehrere Symbole A entnommen werden. Dann muss die Symbolkette B in allen diesen Symbolketten, welche entstehen, falls der Symbolkette $B\,C$ ein oder mehrere Symbol A entnommen werden, enthalten sein. Somit kann ich folgern, dass es eine Symbolkette F, welche aus lauter Symbolen A besteht, geben muss, so dass gilt:

$$B\,F = C$$

Also kann ich daraus folgen

$$B < C$$

Somit hoffe ich, dass ich den Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung erbracht habe und beende aus diesem Grund die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Nun, es geht noch plumper:

KOROLLAR 10. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen Aa bestehen sollen. Weiter seien alle der Symbole A, B sowie C in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen widerspruchsfrei. Dann gilt:*

$$B \leq C \vee B \geq C$$

BEWEIS. Der Beweis basiert rein auf logischen Argumenten. Es gilt gemäß dem vorhergehenden Satz 9

$$B < C \vee B = C \vee B > C$$

Gemäß dem Satz **??** der Implikation der Disjunktion aus der Aussage kann ich schreiben

$$B = C \Rightarrow B = C \vee B = C$$

Also kann ich gemäß dem vierten Substitutionssatz **??** der Disjunktion folgern:

$$B < C \vee B = C \Rightarrow B < C \vee B = C \vee B = C$$

Nun kann ich noch den ersten Substitutionssatz **??** der Disjunktion verwenden und erhalte die Aussage

$$\begin{aligned} &B < C \vee B = C \qquad\qquad \vee B > C \\ \Rightarrow &B < C \vee B = C \vee B = C \vee B = C \end{aligned}$$

Weiter gilt per Definition 8

$$B \leq C \Leftrightarrow B < C \vee B = C$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** kommutiert, dann ich auch schreiben

$$B < C \vee B = C \Leftrightarrow B \leq C$$

Somit kann ich gemäß dem dritten Substitutionssatz **??** verwenden und erhalte die Aussage

$$\begin{aligned} &B < C \lor B = C \lor B = C \lor B = C \\ \Rightarrow &B \leq C \lor B = C \end{aligned}$$

Da die Implikation gemäß dem Satz **??** transitiv ist, kann ich auch schreiben:

$$\begin{aligned} &B < C \lor B = C \lor B > C \\ \Rightarrow &B \leq C \lor B = C \lor B > C \end{aligned}$$

Nun ja, Du weißt jetzt sicher, wie es weiter geht. Aber da ich die Dinge ganz klar aufschreiben möchte, schreibe ich weiter:

Gemäß der Definition 8 gilt:

$$B \geq C \Leftrightarrow B = C \lor B > C$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** kommutiert, dann ich auch schreiben:

$$B = C \lor B > C \Leftrightarrow B \geq C$$

Also kann ich gemäß dem vierten Substitutionssatz **??** der Disjunktion schreiben:

$$B \leq C \lor B = C \lor B > C \Rightarrow B \leq C \lor B \geq C$$

Da die Implikation gemäß dem Satz **??** immer noch transitiv ist, kann ich folgern:

$$\begin{aligned} &B < C \lor B = C \lor B = C \lor B > C \\ \Rightarrow &B \leq C \lor B \geq C \end{aligned}$$

Ich verwende noch einmal den Satz **??** der Transitivität der Implikation und folgere:

$$\begin{aligned} &B < C \lor B = C \lor B > C \\ \Rightarrow &B \leq C \lor B \geq C \end{aligned}$$

Da jetzt die Aussage

$$B < C \lor B = C \lor B > C$$

wahr ist, muss auch die Aussage

$$B \leq C \lor B \geq C$$

wahr sein.

Aus diesem Grund behaupte ich, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende also auch die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Nun kommen ein paar logische Spitzfindigkeiten. Jedoch sind diese ungemein nützlich:

Lemma 11. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B sowie C Metasymbole seien, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen A bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann gilt (banalerweise)*

$$B < C \Rightarrow B \leq C$$
$$B = C \Rightarrow B \leq C$$
$$B = C \Rightarrow B \geq C$$
$$B > C \Rightarrow B \geq C$$

Beweis. Zum Beweis möchte ich bemerken, dass dieser aus rein logischen Elementen besteht. Trotzdem möchte ich ihn der Vollständigkeit halber führen.

Es sei

$$B < C$$

Dann muss gemäß dem Satz **??**, welcher besagt, dass aus einer Aussage eine Disjunktion mit einer anderen Aussage gilt, gelten:

$$B < C \Rightarrow B < C \lor B = C$$

Weiter gilt per Definition

$$B \leq C \Leftrightarrow B < C \lor B = C$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** kommutativ ist, muss dann auch gelten

$$B < C \lor B = C \Leftrightarrow B \leq C$$

Gemäß dem Satz **??**, welcher besagt, dass aus der Äquivalenz die Implikation folgt, kann ich daraus folgern, dass auch gilt:

$$B < C \lor B = C \Rightarrow B \leq C$$

Und da die Implikation gemäß dem Satz **??** transitiv ist, kann ich folgern:

$$B < C \Rightarrow B \leq C$$

Damit meine ich, den Beweis für die Richtigkeit der ersten Aussage erbracht zu haben.

Nun möchte ich versuchen, den Beweis für die Richtigkeit der zweiten Aussage zu erbringen. Ist

$$B = C$$

dann kann ich wieder gemäß dem Satz **??**, welcher besagt, dass aus der Aussage die Disjunktion der Aussage mit einer beliebigen Aussage folgt, folgern, dass gilt:

$$B = C \Rightarrow B = C \lor B < C$$

Da die Disjunktion gemäß dem Satz **??** kommutativ ist, folgt daraus:

$$B = C \lor B < C \Leftrightarrow B < C \lor B = C$$

Da gemäß dem Satz **??** aus der Äquivalenz die Implikation folgt, kann ich folgern, dass gilt:

$$B = C \lor B < C \Rightarrow B < C \lor B = C$$

Da die Implikation gemäß dem Satz **??** immer noch transitiv ist, kann ich folgern:

$$B = C \Rightarrow B < C \lor B = C$$

Nun habe ich oben zu zeigen versucht, dass aus der Aussage

$$B < C \lor B = C$$

die Aussage

$$B \leq C$$

folgt. Wenn ich den Satz **??** der Transitivität der Implikation erneut bemühe, kann ich folgern

$$B = C \Rightarrow B \leq C$$

Damit meine ich den Beweis für die Richtigkeit der zweiten Aussage erbracht zu haben.

Zum Beweis der dritten Behauptung:Ich kann wieder gemäß dem Satz **??**, welcher besagt, dass aus der Aussage die Disjunktion der Aussage mit einer beliebigen Aussage folgt, folgern, dass gilt:

$$B = C \Rightarrow B = C \lor B > C$$

Weiter gilt per Definition

$$B \geq C \Leftrightarrow B = C \lor B > C$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** kommutativ ist, muss dann auch gelten

$$B = C \lor B > C \Leftrightarrow B \geq C$$

Gemäß dem Satz **??**, welcher besagt, dass aus der Äquivalenz die Implikation folgt, kann ich daraus folgern, dass auch gilt:

$$B = C \lor B > C \Rightarrow B \geq C$$

Und da die Implikation gemäß dem Satz **??** transitiv ist, kann ich folgern:

$$B = C \Rightarrow B \geq C$$

Damit meine ich, den Beweis für die Richtigkeit der dritten Aussage erbracht zu haben.

Nun möchte ich den Beweis für die Richtigkeit vierte Aussage versuchen zu erbringen: Es sei

$$B > C$$

Dann kann ich wieder gemäß dem Satz **??**, welcher besagt, dass aus der Aussage die Disjunktion der Aussage mit einer beliebigen Aussage folgt, folgern, dass gilt:

$$B > C \Rightarrow B > C \lor B = C$$

Da die Disjunktion gemäß dem Satz **??** kommutativ ist, muss gelten:

$$B > C \vee B = C \Leftrightarrow B = C \vee B > C$$

Da der Satz **??** der Transitivität der Implikation immer noch gilt, kann ich folgern

$$B > C \Rightarrow B = C \vee B > C$$

Beim Versuch des Beweises der vorhergehenden Aussage habe ich zu zeigen versucht, dass gilt:

$$B = C \vee B > C \Rightarrow B \geq C$$

Und da die Implikation gemäß dem Satz **??** immer noch transitiv ist, kann ich folgern:

$$B = C \Rightarrow B \geq C$$

Somit meine ich, den Beweis für die Richtigkeit der vierten Aussage des Satzes und somit aller Aussagen des Satzes erbracht zu haben. Aus diesem Grund verzichte ich auf eine weitere Beweisführung und beende somit den Beweis an dieser Stelle wieder. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Ich probiere weiter zu zeigen:

Korollar 12. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen C bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann ist genau dann*

$$B < C$$

falls

$$C > B$$

ist.

Beweis. Es sei also $B < C$. Dies bedeutet per Definition, dass ein Symbol D, welches aus einer Verkettung von einem oder mehreren Symbolen A derart besteht, dass gilt

$$B\,D = C$$

Gemäß dem Lemma 2 ist die Gleichheit von Zeichenketten eine Äquivalenzrelation. das bedeutet insbesondere, dass die Gleichheit symmetrisch ist. Also kann ich gemäß dem Satz **??** der Transitivität der Äquivalenz folgern, dass gilt

$$C = B\,D$$

Gemäß der Definition 8 der Vergleichbarkeit von Symbolketten mit gleichen Symbolen bedeutet dies, dass gilt

$$C > B$$

Das war jedoch gerade zu beweisen. Diese Überlegungen können nun genau gleich rückwärts angewandt werden:

Es sei also $C > B$. Dies bedeutet per Definition, dass ein Symbol D, welches aus einer Verkettung von einem oder mehreren Symbolen A derart besteht, dass gilt

$$C = B\,D$$

Gemäß dem Lemma 2 ist die Gleichheit von Zeichenketten eine Äquivalenzrelation. das bedeutet insbesondere, dass die Gleichheit symmetrisch ist. Also kann ich gemäß dem Satz **??** der Transitivität der Äquivalenz folgern, dass gilt

$$B\,D = C$$

Gemäß der Definition 8 der Vergleichbarkeit von Symbolketten mit gleichen Symbolen bedeutet dies, dass gilt

$$B < C$$

Damit hätte ich auch die andere Richtung der Behauptung insgesamt also den Beweis für die Richtigkeit der gesamten Aussage erbracht und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Nun möchte ich zeigen, dass die Relationen „kleiner oder gleich“ und „größer als“ auf engste miteinander verknüpft sind:

Lemma 13. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen A bestehen sollen. Alle Symbole seien in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann gilt*

$$\neg\,(B \leq C) \Leftrightarrow B > C$$

In Worten: Die Zeichenkette B ist genau dann nicht kleiner als oder gleich der Zeichenkette C, falls diese größer als C ist.

Beweis. Ich möchte zeigen, dass diese Behauptung gleichbedeutend ist zur Behauptung

$$(B \leq C) \vee (B > C)$$

Gemäß der Definition 8 der Vergleichbarkeit von Symbolketten gleicher Symbole gilt die Festlegung

$$(B \leq C) \Leftrightarrow (B < C) \vee (B = C)$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** kommutativ ist, kann ich aus der vorhergehenden Aussage folgern, dass gilt:

$$(B < C) \vee (B = C) \Leftrightarrow (B \leq C)$$

Also kann ich gemäß dem 3. Substitutionssatz **??** der Disjunktion folgern, dass gilt:

$$(B < C) \vee (B = C) \vee (B > C)$$

Somit kann ich gemäss dem Äquivalenzsatz **??** der Disjunktion schlussfolgern, dass gilt:

$$(B \leq C) \vee (B > C)$$

Nun gelte die Aussage

$$\neg (B \leq C)$$

Gemäß dem 2. Satz des Lemmas **??** der Minimum- und Maximumsätze (die Aussage $((B \leq C) \vee (B > C))$ ist ja wahr) kann ich folgern:

$$\neg (B \leq C) \Leftrightarrow \neg (B \leq C) \wedge ((B \leq C) \vee (B > C))$$

Da aus der Äquivalenz gemäß dem Satz **??** die Implikation folgt, kann ich folgern

$$\neg (B \leq C) \Rightarrow \neg (B \leq C) \wedge ((B \leq C) \vee (B > C))$$

Da die Konjunktion gemäss dem Satz **??** kommutiert, kann ich schliessen, dass gilt

$$\neg (B \leq C) \wedge ((B \leq C) \vee (B > C)) \Leftrightarrow$$
$$((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C)$$

Und da aus der Äquivalenz gemäss dem Satz **??** auch die Implikation folgt, kann ich schreiben, dass auch gilt

$$\neg (B \leq C) \wedge ((B \leq C) \vee (B > C)) \Rightarrow$$
$$((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C)$$

Nun ist die Implikation gemäss dem Satz **??** transitiv, und darum kann ich auch folgern, dass aus den Aussagen

$$\neg (B \leq C) \Rightarrow \neg (B \leq C) \wedge ((B \leq C) \vee (B > C))$$

sowie

$$\neg (B \leq C) \wedge ((B \leq C) \vee (B > C)) \Rightarrow$$
$$((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C)$$

folgt:

$$\neg (B \leq C) \Rightarrow ((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C)$$

Dann kann ich den Satz **??** des Ausschlusses verwenden und erhalte die Aussage

$$((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C) \Rightarrow B > C$$

Nun kann ich die Aussagen

$$\neg (B \leq C) \Rightarrow ((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C)$$

sowie

$$((B \leq C) \vee (B > C)) \wedge \neg (B \leq C) \Rightarrow B > C$$

gemäss dem Satz **??** der Transitivität der Implikation verketten und erhalte die Aussage

$$\neg (B \leq C) \Rightarrow B > C$$

Also habe ich die eine Richtung der Behauptung bewiesen.

Nun muss ich noch die umgekehrte Richtung der Aussage beweisen:

$$B > C \Rightarrow \neg (B \leq C)$$

Es sei also $B > C$. Dann müsste es gemäß der Definition 8 der Vergleichbarkeit von Symbolketten von gleichen Symbolen ein Symbol D derart geben, dass gilt:

$$B = C\, D$$

Somit kann jedoch aufgrund des Lemmas 5 über die Ungleichheit von angehängten Symbolen nicht $C \neq B$ und darum auch nicht $B = C$ sein. Denn wäre $B = C$, dann müsste, da gemäß dem Lemma 2 die Gleichheit eine Äquivalenzrelation ist, ebenfalls $C = B$ sein - im Widerspruch zur Voraussetzung. Es müsste also gelten

$$B = B\, D$$

was jedoch gemäss dem Lemma 5 nicht wahr sein kann.

Darum bin ich der Meinung, dass

$$B \neq C$$

gelten muss. Wäre

$$B < C$$

dann müsste es ein Symbol E derart geben, dass

$$C = B\, E$$

wäre. Da ja gemäß Voraussetzung

$$B > C$$

wäre, müsste es ein Metasymbol F derart geben, dass

$$B = C\, F$$

wäre. Würde jetzt das Symbol C durch das Symbol $B\, E$ ersetzt (was gemäß dem Lemma 3 möglich ist) dann erhalte ich die Gleichung

$$B = B\, E\, F$$

Beachte bitte, die Verkettung von gleichen Symbolen gemäss dem Lemma 4 assoziativ ist. Die Letzte Gleicheung würde jedoch gemäß dem Lemma 5 über die Ungleichheit von angehängten Symbolen bedeuten, das

$$B \neq B$$

wäre. Gemäß der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen ist dies jedoch nicht möglich. Also kann ich an dieser Stelle den Satz **??** des Widerspruchs verwenden, um zu schlussfolgern, dass auch nicht

$$B < C$$

sein könnte. Darum kann ich schreiben

$$B > C \Rightarrow \neg(B < C) \wedge \neg(B = C)$$

Wenn ich den Satz **??** der Negation der Disjunktion verwende, dann kann ich schlussfolgern, dass gilt:

$$\neg(B < C \vee B = C) \Leftrightarrow \neg(B < C) \wedge \neg(B = C)$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** kommutiert, kann ich auch schreiben

$$\neg(B < C) \wedge \neg(B = C) \Leftrightarrow \neg(B < C \vee B = C)$$

Nun kann ich den Äquivalenzatz **??** der Negation verwenden und erhalte die Äquivalenz aus der Definition 1.0.1, welche die kleiner oder gleich Beziehung von zwei Symbolketten definiert:

$$\neg(B < C \vee B = C) \Leftrightarrow \neg(B \leq C)$$

Da gemäß dem Satz **??** der Implikation der Implikation aus der Äquivalenz anwenden und erhalte die Aussage

$$\neg(B < C) \wedge \neg(B = C) \Rightarrow \neg(B \leq C)$$

Mit den Aussagen

$$B > C \Rightarrow \neg(B < C) \wedge \neg(B = C)$$

sowie

$$\neg(B < C) \wedge \neg(B = C) \Rightarrow \neg(B \leq C)$$

sowie dem Satz **??** der Transitivität der Implikation erhalte ich das wenig überraschende Resultat:

$$B > C \Rightarrow \neg(B \leq C)$$

Da ich nun endlich beide Richtungen der Behauptung bewiesen habe, habe ich gemäß dem Satz **??** beweisen, dass gilt:

$$\neg(B \leq C) \Leftrightarrow B > C$$

Damit hoffe ich, endlich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und verzichte hiermit (einigermaßen erschöpft) auf die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Auch von diesem Lemma gibt es ein kleines Korollar:

Korollar 14. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen C bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann gilt*

$$\neg(B > C) \Leftrightarrow B \leq C$$

Beweis. Gemäß dem Lemma 13 gilt

$$\neg (B \leq C) \Leftrightarrow B > C$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** eine Äquivalenzrelation und somit auch gemäss deren Definition **??** symmetrisch ist, muss daher auch gelten:

$$B > C \Leftrightarrow \neg (B \leq C)$$

Gemäß dem Satz **??** der Negation der Äquivalenz kann ich dann auch schreiben

$$\neg (B > C) \Leftrightarrow \neg (\neg (B \leq C))$$

Da gemäß dem Satz **??** der doppelten Negation gilt gilt

$$B \leq C \Leftrightarrow \neg (\neg (B \leq C))$$

und gemäß dem Satz **??** die Äquivalenz kommutiert, kann ich auch schreiben

$$\neg (\neg (B \leq C)) \Leftrightarrow B \leq C$$

Da die Äquivalenz gemäß dem Satz **??** eine Äquivalenzrelation und darum auch transitiv ist, muss daher auch gelten

$$\neg (B > C) \Leftrightarrow B \leq C$$

Das wäre jedoch gerade die Behauptung. Aus diesem Grund bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe und beende daher an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Nun möchte ich zeigen:

Lemma 15. *Es seien A, B, C, D Symbole, wobei B,C sowie D Metasymbole seien, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen C bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann gilt*

$$B < C \wedge C < D \Rightarrow B < D$$

In Worten: Die „kleiner als Beziehung“ ist transitiv.

Beweis. Es gelte $B < C \wedge C < D$. Somit muss gemäß der Definition der „kleiner als Beziehung“ Metasymbole E sowie F derart geben, dass gilt:

$$B\,E = C$$

sowie

$$C\,F = D$$

Ersetze ich nun C in der letzten Gleichung durch BE in der vorletzten Gleichung, dann erhalte ich (auch gemäß dem Lemma 3 über die Gleichheit von Teilsymbole)

$$B\,E\,F = D$$

Nun kann ich von der Tatsache Gebrauch machen, dass die Verketten von Symbolen gemäss dem Lemma 4 assoziativ ist. Das bedeutet, dass mit

$$G = B\,E$$

sowie

$$H = E\,F$$

gilt

$$G\,F = B\,H$$

Somit muss es ein Metasymbol H (mit dem Wert $E\,F$) derart geben, dass gilt

$$B\,H = D$$

Das bedeutet jedoch, dass gilt

$$B < D$$

Damit meine ich, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Ich möchte den Satz der Transitivität des Vergleichs von Symbolen noch ausweiten. Dafür möchte ich jedoch vorgängig noch das folgende Lemma formulieren und beweisen:

Lemma 16. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen C bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann ist genau dann*

$$B \leq C$$

falls

$$C \geq B$$

ist. Formal kann ich das so schreiben

$$B \leq C \Leftrightarrow C \geq C$$

Beweis. Es sei

$$B \leq C$$

Dann ist

$$B < C$$

oder

$$B = C$$

Ausgeschrieben gilt

$$B \leq C \Leftrightarrow B < C \vee B = C$$

Gemäss dem Korollar 12 gilt

$$B < C \Leftrightarrow C > B$$

Nun kann ich den 1. Äquivalenzsatz **??** der Disjunktion kann ich nun folgern, dass gilt

$$B < C \vee B = C \Leftrightarrow C > B \vee B = C$$

Da die Äquivalenzrelation gemäss dem Satz **??** transitiv ist, kann ich schlussfolgern, dass auch gilt:

$$B \leq C \Leftrightarrow C > B \vee B = C$$

Da die Gleichheit von Objektsymbolen gemäss dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist und somit gemäss der Definition **??** auch symmetrisch ist, kann ich schlussfolgern, dass auch gilt

$$C = B$$

Somit kann ich gemäss dem Äquivalenzsatz **??** der Disjunktion folgern dass gilt

$$C > B \vee B = C \Leftrightarrow C > B \vee C = B$$

Erneut verwende ich den Satz **??** der Transitivität der Äquivalenz und erhalten die Asusage

$$B \leq C \Leftrightarrow C > B \vee C = B$$

Gemäss dem Lemma **??** der Kommutativität der Disjunktion gilt:

$$C > B \vee C = B \Leftrightarrow C = B \vee C > B$$

Und wiederum greife ich auf den Satz **??** der Transitivität der Äquivalenz zurück und erhalte dic Aussage

$$B \leq C \Leftrightarrow C = B \vee C > B$$

Gemäss der Definition 1.0.2 der grösser oder gleich Relation von Zeichenkette gilt:

$$C \geq B \Leftrightarrow C = B \vee C > B$$

Wende ich den Satz **??** der Kommutativität der Äquivalenz an, dann kann ich daraus schliessen, dass ebenso gilt:

$$C = B \vee C > B \Leftrightarrow C \geq B$$

Und noch einmal wende ich den Satz **??** der Äquivalenz an und erhalte die Aussage:

$$B \leq C \Leftrightarrow C \geq B$$

Somit hätte ich mit rein logischen Mitteln gezeigt, dass diese beiden Relationen („kleiner oder gleich“ respektive „grösser oder gleich“) symmetrisch sind. Da ich nun der Meinung bin, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben, beende ich an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Ich möchte nun zeigen, dass gilt:

LEMMA 17. *Es seien A, B, C, D Symbole, wobei B,C sowie D Metasymbole seien, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen A bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann gilt*

$$B \leq C \wedge C \leq D \Rightarrow B \leq D$$

In Worten: Die „kleiner oder gleich Beziehung“ ist transitiv.

BEWEIS. Es sei B kleiner oder gleich dem Symbol C. Dann muss B gleich C sein oder es muss ein Metasymbol E derart geben, dass gilt

$$B\,E = C$$

Es sei ebenfalls C kleiner oder gleich dem Symbol D. Dann muss C gleich dem Symbol D sein oder es muss ein Metasymbol F derart geben, dass gilt

$$C\,F = D$$

Nun existieren vier Fälle, welche (leider) überlegt sein wollen. Ist $B = C$ und $C = D$, dann muss gemäß dem Lemma 55, welches besagt, dass die Gleichheit von Symbolen eine Äquivalenzrelation ist, auch $B = D$ sein. Gemäß dem vorhergehenden Lemma 11 kann ich schließen, dass gilt

$$B \leq D$$

Damit wäre dieser Teil des Beweises erbracht. Ist $B = C$ und $C < D$ dann kann ich gemäß dem Lemma 3 der Gleichheit von Teilsymbolen schreiben:

$$B\,F = C\,F \wedge C\,F = D$$

Da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation und somit transitiv ist, kann ich also schließen, dass gilt:

$$B\,F = D$$

Also muss gemäß der Definition 8 der Vergleichbarkeit von Metasymbolen von gleichen Symbolen gelten:

$$B < D$$

Somit kann ich gemäß dem Lemma 11 folgern, dass auch gilt:

$$B \leq D$$

ist. Zusammengefasst kann ich also schreiben

$$B = C \wedge C < D \Rightarrow B \leq D$$

Ist andererseits

$$B < C$$

sowie

$$C = D$$

dann kann ich wiederum folgern, dass gilt

$$B\,E = C \wedge C = D$$

Gemäß dem Lemma 55, welches besagt, dass die Gleichheit von Symbolen eine Äquivalenzrelation und darum insbesondere transitiv ist, kann ich dann folgern, dass gilt:

$$B\,E = D$$

Damit gilt gemäß der Definition 8 der Vergleichbarkeit von Metasymbolen:

$$B < D$$

Und wiederum kann ich gemäß dem Lemma 11 folgern, dass gilt:

$$B \leq D$$

Nun kommt noch der letzte und „leichteste Fall“: Ist

$$B < C \wedge C < D$$

dann muss gemäß dem Lemma 15 bezüglich der Transitivität der Vergleichbarkeit von Symbolketten mit gleichen Symbolen gelten

$$B < D$$

Und erneut kann ich gemäß dem Lemma 11, welches besagt, dass aus einer Aussage eine Disjunktion folgt, folgern:

$$B \leq D$$

Somit konnte ich schlissen, dass eben auch in diesem Fall gilt

$$B \leq D$$

Schlussendlich seien

$$B = C \wedge C = D$$

Da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 55, welches besagt, dass die Gleichheit von Symbolen eine Äquivalenzrelation und darum insbesondere transitiv ist, kann ich dann folgern, dass gilt:

$$B = D$$

Gemäß der zweiten Aussage des Lemmas 11 kann ich wiederum folgern:

$$B \leq D$$

So, damit ist die Fleißarbeit erledigt. Ich habe gezeigt, dass in allen vier denkbaren Fällen gilt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$B \leq D$$

und dass somit die „kleiner oder gleich Beziehung“ von Symbolketten von gleichen Symbolen transitiv ist. Damit habe ich meines Erachtens den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht und beende aus diesem Grund an dieser Stelle erneut die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Ich kann nun schreiben:

LEMMA 18. *Es seien A, B sowie C Symbole, wobei B und C Symbolketten aus je endlich vielen Symbolen A seien. Dann gilt*

$$B \leq C \wedge C \leq B \Rightarrow B = C$$

BEWEIS. Ich nehme an dass $B < C$ sein. Also müsste gemäss der Definition 8 der Relation „<“ von Symbolketten (Relation mit der Bezeichnung „<“ es ein Metasymbol D aus einer Verkettung von Symbolen A derart geben, dass gilt

$$C = B\,D$$

Da nun $B < C$ ist, könnte nicht $B = C$ sein. Also kann ich daraus schliessen, dass auch nicht $C = B$ sein kann (denn die Gleichheit von Symbolketten ist gemäss dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation und somit gemäss der Definition **??** der Äquivalenzrelation auch symmetrisch). Also kann ich gemäss dem Satz **??** des Ausschlusses folgern, dass $C < B$ sein müsste. Also müsste es ein Metasymbol E mit der Eigenschaft geben, dass gilt:

$$C\,E = B$$

Jetzt kann ich das Symbol C durch das Symbol $B\,D$ ersetzen, da diese zwei Symbole ja gemäss Konstruktion sind und erhalte

$$B\,D\,E = B$$

Gemäss dem Lemma 4 ist das Verknüpfen von Zeichenketten assoziativ. Das bedeutet jedoch dass ich $D\,E$ als weiteres Symbol mit der Bezeichnung F auffassen kann und gemäss dem Lemma 3 der Gleichheit von Teilsymbolen schreiben kann, dass gilt

$$B\,F = B\,D\,E$$

Da die Gleichheit von Symbolketten gemäss dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation und somit gemäss der Definition **??** auch transitiv ist, kann ich daraus folgern, dass gelten würde:

$$B\,F = B$$

Das wäre jedoch ein Widerspruch zum Lemma 5 der angehängten Symbolketten, welches besagt, dass eine Symbolkette niemals gleich der Symbolkette und einem angehängten Symbol sein kann.

Darum bin ich der Meinung, dass die Voraussetzung $B < C$ nicht wahr sein kann. Gemäss des Satzes **??** des Ausschlusses kann ich nun folgern, dass gelten muss $B = C$. Dies wollte ich aber beweisen. Also bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Nun möchte ich das Minimum und das Maximum von zwei Symbolketten von gleichen Symbolen definieren:

Definition 19. (erste Erweiterung des Minimums und des Maximums von Symbolketten gleicher Symbolen) Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole sein, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen A bestehen sollen. Weiter setze ich voraus, dass alle Symbole in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei seien. Dann sei

$$D = \min\{B, C\} \Leftrightarrow D \in \{B, C\} \wedge (E \in \{B, C\} \Rightarrow D \leq E)$$
$$D = \max\{B, C\} \Leftrightarrow D \in \{B, C\} \wedge (E \in \{B, C\} \Rightarrow D \geq E)$$

In Worten: D ist das Minimum der Symbole B und C, falls D in der Menge $\{B, C\}$ enthalten ist und D kleiner oder gleich B sowie D kleiner oder gleich C ist. Andererseits ist D das das Maximum der Symbole B und C, falls D in der Menge $\{B, C\}$ enthalten ist und D größer oder gleich B sowie D grösser oder gleich C ist.

Beachte bitte, das die Definition auch dann „funktioniert“, falls die Symbole B und C gleich sind. Ich möchte dies im Korollar 20 weiter unten ausführen.

Ich gebe zu, dass die Definition des Minimum oder des Maximums sinnlos kompliziert ist. Trotzdem ist sie hoffentlich praktisch. Der „Sinn“ der Definition besteht, darin, dass sich die Definition so fast beliebig verallgemeinern lässt.

Korollar 20. *Es seien A, B, C Symbole, wobei B und C Metasymbole seien, welche aus jeweils aus einem oder mehreren (aber nur endlich vielen) Symbolen A bestehen sollen. Alle Symbole sind in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei. Dann existieren*

$$\min\{B, C\}$$

sowie

$$\max\{B, C\}$$

Beweis. Gemäß dem vorhergehenden Satz 9 muss genau einer der drei Fälle gelten:

$$B < C$$
$$B = C$$
$$B > C$$

Das bedeutet, dass in jedem Fall $\min\{B, C\}$ sowie $\max\{B, C\}$ bestimmt werden kann.

Ist $B < C$, dann muss gelten

$$\min\{B, C\} = B$$

Denn es ist

$$B \in \{B, C\}$$

weiter ist per Definition

$$B = B$$

Daraus folgt gemäß der zweiten Aussage des Lemmas 11:

$$B \leq B$$

Da gemäß Voraussetzung gilt

$$B < C$$

kann ich gemäß der ersten Aussage des Lemmas 11 schließen, dass auch gilt

$$B \leq C$$

Somit kann ich festhalten

$$B \in \{B, C\} \wedge B \leq B \wedge B \leq C$$

Das bedeutet jedoch, dass

$$B = \min\{B, C\}$$

ist.

Weiter muss in diesem Fall

$$C = \max\{B, C\}$$

sein. Denn es gilt $C \in \{B, C\}$ und

$$C = C$$

Daraus folgt gemäß der dritten Aussage des Lemmas 11:

$$C \geq C$$

Da gemäß Voraussetzung gilt

$$C > B$$

kann ich gemäß der vierten Aussage des Lemmas 11 schließen, dass auch gilt

$$B \geq C$$

Somit kann ich festhalten

$$C \in \{B, C\} \wedge C \geq C \wedge C \geq B$$

Dies bedeutet jedoch, dass gilt

$$C = \max\{B, C\}$$

Damit habe ich bewiesen, dass die Behauptung gilt, falls $B < C$ ist.

Nun kommt der mühsame Teil: Ist $B = C$, dann kann ich schließen,

$$B = C = \min\{B, C\} = \max\{B, C\}$$

Ich habe „mühsam“ geschrieben, da dieser ziemlich offensichtlich ist. Ist

$$B = C$$

dann muss auch gelten

$$\{B, C\} = \{B\}$$

Denn es gilt:

$$B \in \{B\}$$

Mit $C = B$ muss auch gelten:

$$C \in \{B\}$$

Darum gilt

$$\{B, C\} \subset \{B\}$$

Auf der anderen Seite ist

$$B \in \{B, C\}$$

Also ist auch

$$\{B\} \subset \{B, C\}$$

Darum ist gemäß der Definition **??** der Mengengleichheit

$$\{B\} = \{B, C\}$$

Also muss gelten

$$B = \min\{B\} = \max\{B\}$$

Denn es ist

$$B \in \{B\}$$

Weiter ist gemäß der zweiten und dritten Aussage des Lemmas 11 aus

$$B = B$$

die Aussagen

$$B \leq B$$

sowie

$$B \geq B$$

Darum muss gelten

$$B = \min\{B\} = \min\{B, C\}$$
$$B = \max\{B\} = \max\{B, C\}$$

Also habe ich auch in diesem Fall gezeigt, dass das Minimum respektive das Maximum existieren.

Nun kommt der letzte Fall: Ist $B > C$, dann muss gelten

$$\min\{B, C\} = C$$

Denn es ist

$$C \in \{B, C\}$$

weiter ist per Definition **??** über die Gleichheit von Symbolen

$$C = C$$

Daraus folgt gemäß der zweiten Aussage des Lemmas 11:

$$C \leq C$$

Da gemäß Voraussetzung gilt

$$B > C$$

muss gemäß dem Korollar 12 ebenfalls

$$C < B$$

gelten. Weiter kann ich gemäß der ersten Aussage des Lemmas 11 schließen, dass auch gilt

$$C \leq B$$

Somit kann ich festhalten

$$C \in \{B, C\} \land C \leq C \land C \leq B$$

Das bedeutet jedoch, dass

$$C = \min\{B, C\}$$

ist. Weiter muss in diesem Fall

$$B = \max\{B, C\}$$

sein. Denn es gilt $C \in \{B, C\}$ und

$$B = B$$

Daraus folgt gemäß der dritten Aussage des Lemmas 11:

$$B \geq B$$

Da gemäß Voraussetzung gilt

$$B > C$$

kann ich gemäß der vierten Aussage des Lemmas 11 schließen, dass auch gilt

$$B \geq C$$

Somit kann ich festhalten

$$B \in \{B, C\} \wedge B \geq B \wedge C \geq B$$

Dies bedeutet jedoch, dass gilt

$$C = \max\{B, C\}$$

Also habe ich auch in diesem Fall bewiesen, dass das Minimum und das Maximum in diesem Fall eindeutig bestimmbar sind.

Somit hätte ich allen denkbaren Fällen bewiesen, dass das Minimum und das Maximum vorhanden ist. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Bevor ich weitere Überlegungen mache, möchte ich die Definition von Minima und Maxima von Symbolketten aus einem oder mehren Symbolen erweitern:

Definition 21. Es seien A ein Symbol, welches in sich selbst und in Bezug auf andere Symbole widerspruchsfrei sei. Weiter sei M eine Menge von Metasymbolen B, wobei jedes dieser Metasymbole aus einer Symbolkette aus einem oder mehreren, jedoch endlich vielen Symbolen A bestehe. Ich kann annehmen, dass für Metasymbole, welche mit verschiedenen Symbolen bezeichnet werden, auch tatsächlich paarweise verschieden seien. Dann sei

$$\min\{B | B \in M\}$$

definiert als dasjenige Metasymbol C für welches gilt: $C \in M$ und für alle $B \in M$ gilt

$$C \leq B$$

Diese Definition ist jedoch nur dann gültig, falls ein solches Metasymbol auch vorhanden ist. Weiter sei

$$\max\{B | B \in M\}$$

definiert als dasjenige Metasymbol D für welches gilt: $D \in M$ und für alle $B \in M$ gilt

$$B \leq D$$

Auch diese Definition ist nur dann gültig, falls sichergestellt ist, dass es ein solches D auch geben muss.

$\min\{B|B \in M\}$ werde das Minimum $\max\{B|B \in M\}$ werde das Maximum der Menge M geheißen. Ich möchte diese Definitionen noch einmal formal aufschreiben:

$$C = \min\left\{B \;\middle|\; B \in M\right\}$$
$$\Leftrightarrow (C \in M \wedge (B \in M \Rightarrow C \leq B))$$

$$C = \max\left\{B \;\middle|\; B \in M\right\}$$
$$\Leftrightarrow (C \in M \wedge (B \in M \Rightarrow C \geq B))$$

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit dem Minimum und Maximum einer endlichen Menge von Symbolketten von gleichen Symbolen:

LEMMA 22. *Es seien S ein Symbol, welches in sich selbst und in Bezug auf andere Symbole widerspruchsfrei sei. Weiter sei M eine Menge von endlich vielen Metasymbolen B, wobei jedes dieser Metasymbol aus einer Symbolkette aus einem oder mehreren, jedoch endlich vielen Symbolen S bestehe. Der Begriff „endlich viel“ bedeute insbesondere, dass die Menge M mindestens ein Metasymbol enthält. Weiter kann ich annehmen, dass für alle Metasymbole der Menge M, welche mit verschiedenen Symbolen bezeichnet werden, gilt, dass diese auch wirklich paarweise verschieden sind. Dann existiert*

$$\min\{B|B \in M\}$$

sowie

$$\max\{B|B \in M\}$$

BEWEIS. Besitzt die Menge M eine einzelne Zeichenkette A, dann gilt

$$A = \min\left\{B \;\middle|\; B \in M\right\}$$
$$A = \max\left\{B \;\middle|\; B \in M\right\}$$

Denn A ist in M enthalten. Ist $B \in M$,dann muss, da M ein einzelnes Element besitzt, gelten

$$B = A$$

Somit kann ich gemäß dem Lemma 11 folgern

$$A \leq B$$
$$A \geq B$$

Das bedeutet jedoch gemäß der Definition 21, dass gilt

$$A = \min\left\{B \;\middle|\; B \in M\right\}$$
$$A = \max\left\{B \;\middle|\; B \in M\right\}$$

Damit wäre dieser Fall erneut bewiesen. Denn es ist per Definition:

$$B = B$$

Besteht jedoch M aus mehreren Symbolen, welche jedoch alle Verkettungen von endlich vielen Symbolen A bestehen sollen, dann müssen mindesten zwei verschiedene Metasymbole A und B vorhanden sein. Für die Bestimmung des Minimums können zwei beliebige Elemente B

und C von M verglichen werden. Da nach Voraussetzung die beiden Elemente ungleich sein müssen, muss entweder

$$B < C$$

oder

$$B > C$$

sein. Ist $B < C$, dann kann das Minimum der Menge

$$M \backslash \{C\}$$

bestimmt werden. Ist andererseits $B > C$, dann kann das Minimum der Menge

$$M \backslash \{B\}$$

bestimmt werden. Denn wie ich im Lemma 12 zu zeigen versucht habe, muss gelten

$$C < B$$

falls

$$B > C$$

ist. Auf diese Weise kann ich in endlich vielen Schritten ein Element m_1 der Menge M bestimmen, so dass für alle anderen Elemente $C \in M$ gilt, dass $m_1 \leq C$ ist. Dies gilt insbesondere auch darum, weil die Ordnungsrelation „kleiner-als" transitiv ist. Das entsprechende gilt für die Bestimmung des Maximums: Durch den Vergleich von je zwei Symbolketten B, C kann jeweils bestimmt werden, ob

$$B < C$$

oder

$$B > C$$

ist. Dann wird dasjenige weiterverwendet, welches größer als das andere Element ist. Auf diese Art sollte es möglich sein, nach endlich vielen Schritten festzustellen, welches Element das größte Element der Menge ist. Ich möchte noch einen zweiten Beweis formulieren und aufschreiben:

Den Fall, in welchem M bloß ein ein Element besitzt, habe ich oben bereits bewiesen. Besitzt die Menge M jedoch mehrere, jedoch endlich vielen Symbolketten, dann muss die Symbolkette S, welche aus der Aneinanderreihung aller Symbolketten B aus M besteht, ebenfalls aus einer Aneinanderreihung von endlich vielen Symbolen A bestehen. Denke beispielsweise wieder an Geldstücke. Wäre das nicht der Fall, dann müsste es eine Kombination von Noten und Münzen derart geben, dass diese unendlich viele Wert hätte. Das widerspricht derart fundamental der Alltagserfahrung, dass ich im weiteren ausschließen kann, dass so etwas existiert. Dann muss für alle Symbolketten $B \in M$ gelten, dass

$$B < S$$

ist. Denn ist mit einem geeigneten Symbol C

$$S = B\,C$$

dann ist gemäß der Definition 8

$$B < C$$

Ist jedoch mit geeigneten Symbolen C, D

$$S = C\,B\,D$$

Dann muss eben auch gemäß dem Lemma 7 gelten

$$C\,B = B\,C$$

und gemäß dem Lemma 3

$$C\,B\,D = B\,C\,D$$

Da die Symbolgleichheit gemäß der 2 gelten

$$S = B\,C\,D$$

und somit gemäß der Definition 8

$$B < C$$

Nun kann ich der Symbolkette so lange nacheinander Symbole A entnehmen, bis diese gleich einem Element $m_1 \in M$ entspricht. Dieses Element muss dann dem Maximum m_1 der Menge M entsprechen. Denn es sei $B \in M$ ein beliebiges Element. Gemäß dem Lemma 1 ist dann

$$B < m_1$$
$$B = m_1$$

oder

$$B > m_1$$

An dieser Stelle ist jedoch bloß zu zeigen, dass nicht

$$B > m_1$$

sein kann. Denn wäre $B > m_1$, dann wäre die Konstruktion von m_1 fehlerhaft gewesen, da in diesem bereits in einem der vorhergehenden Schritte hätte $S \in M$ sein müssen. Von dem kann jedoch nicht ausgegangen werden. Also kann nicht

$$B > m_1$$

gelten. Somit muss gemäß dem Korollar 14 gelten

$$B \leq m_1$$

Da dies für alle $B \in M$ gilt, habe ich den Beweis erbracht.

Andererseits kann eine zweite Symbolkette T derart bilden, indem anfänglich $T = A$ sei. Ist $T \in M$, dann habe ich bereits das Minimum der Menge M gefunden. Ansonsten füge ich der Symbolkette T

wiederum so lange Symbole A derart an, bis $T \in M$ ist. Dies muss nach endlicher Zeit erfolgen, da ich ja annehme, dass alle Elemente $B \in M$ aus Symbolketten von endlich vielen Symbolen A bestehen. Sobald $T \in M$ ist, habe ich dann das Minimum $m_2 \in M$ gefunden. Damit hätte ich einen zweiten Beweis für die Behauptung gefunden.

Auch hier möchte ich zeigen, dass m_2 dem Minimum von M entspricht. Es sei $B \in M$. Wäre

$$m_2 > B$$

dann wäre wiederum das Konstruktionsverfahren von m_2 falsch. Denn es hätte bereits früher $m_2 \in M$ sein müssen. Da dies jedoch nicht ausgegangen werden. Also muss gemäß dem 14

$$m_2 \leq B$$

gelten. Damit hätte ich jedoch auch den Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes erbracht. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Bevor ich zum nächsten Korollar übergehe, möchte ich das folgende Lemma formulieren und beweisen:

Lemma 23. *Es seien A ein Symbol, welches in sich selbst und in Bezug auf andere Symbole widerspruchsfrei sei. Weiter sei M eine Menge von beliebig vielen Metasymbolen B, wobei jedes dieser Metasymbol auf eine Symbolkette aus einem oder mehreren, jedoch endlich vielen Symbolen A bestehe. Der Begriff „endlich viel“ bedeute insbesondere, dass die Menge M mindestens ein Metasymbol enthält. Weiter kann ich annehmen, dass für alle Metasymbole der Menge M, welche mit verschiedenen Symbolen bezeichnet werden, gilt, dass diese auch wirklich paarweise verschieden sind. Schlussendlich seien P, Q nichtleere Teilmengen von M,welche jedoch nicht notwendigerweise disjunkt sein müssen, für welche jedoch gilt*

$$M = P \cup Q$$

Dann gilt, sofern die Symbole $\min M$, $\min P$ *und* $\min Q$ *existieren:*

$$\min M = \min \{\min P, \min Q\}$$

Beweis. Da $\min P$ und $\min Q$ nach Voraussetzung existieren müssen, gilt gemäß dem Lemma 10

$$\min P \leq \min Q \vee \min Q \leq \min P$$

Es sei

$$\min P \leq \min Q$$

Es gilt dann:

$$\min P \in \{\min P, \min Q\}$$

Ebenfalls gilt gemäß der Definition **??** über die Gleichheit von Symbolen:

$$\min P = \min P$$

und somit gemäß der zweiten Zeile des Lemmas 11

$$\min P \leq \min P$$

Weiter gilt nach Voraussetzung:

$$\min P \leq \min Q$$

Somit ist gemäß der Definition 21

$$\min P = \min \{\min P, \min Q\}$$

Weiter ist nach Voraussetzung

$$M = P \cup Q$$

Also ist

$$p \in P \Rightarrow p \in M$$

Somit ist ebenfalls

$$\min P \in P \Rightarrow \min P \in M$$

Ist $m \in M$, dann ist gemäß der Definition von $P \cup Q$

$$m \in P \vee m \in Q$$

Ist $m \in P$, dann ist gemäß der Voraussetzung über das Minimum

$$\min P \leq m$$

Ist $m \in Q$, dann ist gemäß der Voraussetzung über das Minimum

$$\min Q \leq m$$

Weiter ist nach Voraussetzung ebenfalls

$$\min P \leq \min Q$$

Da die $\leq$ (kleiner oder gleich) Relation gemäß dem Lemma 17 transitiv ist, muss dann auch gelten

$$\min P \leq m$$

Also kann ich daraus folgern, dass für alle $m \in M$ folgt, dass gilt

$$\min P \leq m$$

Da nun

$$\min P = \min M$$

ist und die Symbolgleichheit gemäss dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist, ist die Symbolgleichheit gemäss der Definition **??** auch symmetrisch. Also kann ich daraus schliessen, dass auch

$$\min M = \min P$$

sein muss

Da die Symbolgleichheit gemäß dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist, ist sie gemäss der Definition **??** auch transitiv. Also kann ich aus

$$\min M = \min P$$

und

$$\min P = \min \{\min P, \min Q\}$$

folgern, dass

$$\min M = \min \{\min P, \min Q\}$$

ist.

Damit hätte ich den Satz unter der Voraussetzung bewiesen, dass

$$\min P \leq \min Q$$

ist. Ist jedoch

$$\min P \geq \min Q$$

dann muss gemäß dem Element 16 auch gelten

$$\min Q \leq \min P$$

Somit kann ich die gesamten vorhergehenden Überlegungen mit vertauschten Bezeichnungen noch einmal durchspielen. Ich werde das so aufschreiben. Du kannst jedoch den nachfolgenden Abschnitt getrost überspringen und die Schlussüberlegung wie. Wiederum gilt dann:

$$\min Q \in \{\min P, \min Q\}$$

Ebenfalls gilt gemäß der Definition **??** über die Gleichheit von Symbolen:

$$\min Q = \min Q$$

und somit gemäß der zweiten Zeile des Lemmas 11

$$\min Q \leq \min Q$$

Weiter gilt nach Voraussetzung:

$$\min Q \leq \min P$$

Somit ist gemäß der Definition 21

$$\min Q = \min \{\min P, \min Q\}$$

Weiter ist nach Voraussetzung

$$M = P \cup Q$$

Also ist

$$q \in Q \Rightarrow q \in M$$

Somit ist ebenfalls

$$\min Q \in Q \Rightarrow \min Q \in M$$

Ist $m \in M$, dann ist gemäß der Definition von $P \cup Q$

$$m \in P \vee m \in Q$$

Ist $m \in Q$, dann ist gemäß der Voraussetzung über das Minimum

$$\min Q \leq m$$

Ist $m \in P$, dann ist gemäß der Voraussetzung über das Minimum

$$\min P \leq m$$

Weiter ist nach Voraussetzung ebenfalls

$$\min Q \leq \min P$$

Da die $\leq$ (kleiner oder gleich) Relation gemäß dem Lemma 17 transitiv ist, muss dann auch gelten

$$\min Q \leq m$$

Also kann ich daraus folgern, dass für alle $m \in M$ folgt, dass gilt

$$\min Q \leq m$$

Da nun

$$\min Q = \min M$$

ist und die Symbolgleichheit gemäss dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist, ist die Symbolgleichheit gemäss der Definition **??** auch symmetrisch. Also kann ich daraus schliessen, dass auch

$$\min M = \min Q$$

sein muss

Da die Symbolgleichheit gemäß dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist, ist sie gemäss der Definition **??** auch transitiv. Also kann ich aus

$$\min M = \min Q$$

$$\min Q = \min \{\min P, \min Q\}$$

folgern, dass

$$\min M = \min \{\min P, \min Q\}$$

ist.

Damit hätte ich den Satz unter der Voraussetzung bewiesen, dass

$$\min P \geq \min Q$$

ist.

Da ich jetzt gezeigt, dass ich für alle denkbaren Fälle gezeigt habe, dass gilt

$$\min M = \min \{\min P, \min Q\}$$

meine ich jetzt den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben. Darum erlaube ich mir, die weitere Beweisführung an dieser Stelle zu beenden. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Im folgendes möchte ich etwas besprechen, welches eigentlich ein Unding ist. Aber welches oft verwendet wird: Das Prinzip der Unendlichkeit. Es wird so getan, als ob unendlich viele Elemente behandelt werden könne. Nun, die Kunst besteht darin, dem Konzept der Unendlichkeit möglichst große Widerspruchsfreiheit abzutrotzen.

Nachbemerkung: Vielleicht hast Du Dich gewundert, wieso ich nicht als Vergleichsmengen für die Bestimmung des Minimums etwa

$$\min\{B|B \in M \wedge B < C\}, \min\{B|B \in M \wedge B \geq C\}$$

oder

$$\min\{B|B \in M \wedge B \leq C\}, \min\{B|B \in M \wedge B > C\}$$

verwendet habe. So wie ich es im Beweis verwendet habe, ist es möglich, dass ich für E das Minimum der Menge

$$\{C, C\} = \{C\}$$

bestimmen müsste. Das wäre ja schon ein wenig komisch, oder? Nun, Du hast es sicher herausgefunden, ohne lange darüber nachzudenken. Ansonsten sage ich es Dir natürlich gerne: Das ist, weil ansonsten die Möglichkeit bestehen würde, dass eine der beiden Mengen

$$\{B|B \in M \wedge B < C\}$$

respektive

$$\{B|B \in M \wedge B > C\}$$

leer wäre. Ersteres ($\{B|B \in M \wedge B < C\} = \emptyset$) wäre der Fall, falls ich ein „Mordsglück" gehabt hätte und per Zufall schon richtig geraten hätte, dass C das Minimum der Menge M wäre. Letzteres ($\{B|B \in M \wedge B > C\} = \emptyset$) wäre der Fall, falls C das Maximum der Menge $\{B|B \in M \wedge B > C\}$ wäre. Und ich habe bis jetzt nicht definiert, was das Minimum der leeren Menge sein könnte. Jedoch kann ich es dir gerne „verraten": Es wäre ∞A, in Worten „die Symbolkette, welche aus unendlich vielen Buchstaben A bestehen würde". Wenn ich dann weiter definieren würde, dass jedes jede Symbolkette aus endlich vielen Symbolen A kleiner als die Symbolkette ∞A wäre, dann könnte ich den Beweis „retten". Denn dann wäre gemäß den vorhergehenden Definitionen im Fall, dass $C = \min\{B|B \in M\}$ wäre:

$$\begin{aligned}&\min\{\min\{B|B \in M \wedge B < C\}, \min\{B|B \in M \wedge B \geq C\}\}\\ =&\min\{\infty A, \min\{B|B \in M \wedge B \geq C\}\}\end{aligned}$$

Und nun wäre per Festlegung

$$\begin{aligned}&\min\{\infty A, \min\{B|B \in M \wedge B \geq C\}\}\\ =&\min\{B|B \in M \wedge B \geq C\} = C\end{aligned}$$

Womit ich die Behauptung ebenfalls ebenfalls bewiesen hätte.

So jetzt wären wir also das erste Mal in diesem Skript in Tuchfühlung gekommen mit dem Begriff der „Unendlichkeit“. Ich finde den Gedanken reizvoll, dass es möglich sein kann, über einen Aspekt von Unendlichkeit nachzudenken, so dass am Ende immer noch etwas herauskommt, was praktische Auswirkungen hat. Dabei geht es um das Prinzip der vollständigen Induktion.Ich hoffe jedoch keinesfalls, dass ich Dich langweile. Also gehe ich jetzt der nächsten Frage nach:

Satz 24. *Es seien A ein Symbol, welches in sich selbst und in Bezug auf andere Symbole widerspruchsfrei sei. Weiter sei M eine Menge von beliebig vielen Metasymbolen B, wobei jedes dieser Metasymbol auf eine Symbolkette aus einem oder mehreren, jedoch endlich vielen Symbolen A bestehe. Der Begriff „endlich viel“ bedeute insbesondere, dass die Menge M mindestens ein Metasymbol enthält. Weiter kann ich annehmen, dass für alle Metasymbole B der Menge M, welche mit verschiedenen Symbolen bezeichnet werden, gilt, dass diese auch wirklich paarweise verschieden sind. Dann existiert*

$$\min M$$

Beweis. Es sei $B \in M$ ein beliebiges Metasymbol. Dieses muss gemäß Voraussetzung über die Menge M existieren, da M nicht die leere Menge ist. Dann muss mit

$$D \equiv \left\{ C \in M \,\middle|\, C \leq B \right\}$$
$$E \equiv \left\{ C \in M \,\middle|\, C \geq B \right\}$$

gelten

$$M = D \cup E$$

Denn die Vergleichsrelation $\leq$ ist total. Nun ist per Definition

$$B = \min E$$

Der springe Punkt des Beweises ist, dass höchsten D endlich viele Elemente haben muss, da für jedes Metasymbol $C \in D$ gilt

$$C \leq B$$

und B aus endlich vielen Metasymbolen A besteht. Gäbe es unendlich viele Elemente Elemente C in der Menge B dann müsste es für jedes Element $C \in D$ eine Element $F \in B$ derart geben, so dass

$$F > C$$

wäre. Insbesondere müsste dann auch für $B \in C$ ein solches Elemente vorhanden sein - was aber ein Widerspruch wäre. Also ist diese Annahme nicht sinnvoll.

Da ich oben unter dem Lemma 22 gezeigt habe, dass in diesem Fall auch die Menge D ein Minimum besitzen muss (welche ich mit G bezeichne), kann ich darum schreiben, dass gilt

$$\min M = \min \{G, C\}$$

Dieses Minimum existiert jedoch gemäß dem Korollar 20. Somit habe ich den Beweis erbracht und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

Warum mache ich überhaupt diesen Aufwand? Weil es in der Mathematik Mengen von Zahlen existieren, für welche kein Minimum existieren. Die einfachste dieser Mengen ist

$$-\mathbb{N} \equiv \left\{ -n \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Z}$$

In Worten: Die Menge aller negativen Zahlen (welche eine Teilmenge der ganzen Zahlen ist). Diese Menge hat kein Minimum (was auch blöd wäre, denn in diesem Fall gäbe es dann auch nur endlich viele natürliche Zahlen).

KAPITEL 2

Wieso können Schulden gut sein?

[1]Das nachfolgende Kapitel ist vage. Bei Wikipedia würde es wahrscheinlich nicht durchkommen. Die Gedanken sollen Dich motivieren, Zahlen mit anderen Augen zu betrachten. Die Zahlen, um welche es in diesem Dokument immer und immer wieder geht, sind nicht einfach vom Himmel gefallen, sondern das Resultat einer Entwicklung, welche über Jahrtausende hinweg stattgefunden hat. Eine der verblüffendsten Erkenntnisse, welche ich in der letzten Zeit hatte, war diejenige, dass die Entwicklung der Zahlen im heutigen Sinn untrennbar verknüpft sind mit Schulden. Wie das? Nun, mein Arbeitskollege Zdenek Sulz hatte mir erzählt, dass beispielsweise bei Ausgrabungen von Tempelanlagen auf Kreta an den Außenwänden von Tempeln Schriftzeichen entdeckt worden seien, welche lange nicht hätten entziffert werden können. Die Schriftart der Beschriftungen war wahrscheinlich Linearschrift B[2]. Als diese dann unter sehr großem Aufwand entziffert werden konnten, seien viele Forscher enttäuscht gewesen. Denn anstatt über Heldentaten oder Lebensgeheimnisse zu berichten, seien auf den Schriften bloß die Schulden aufgeführt worden, welche Personen anderen Personen geschuldet hätten. Das gleiche Bild hatte sich den Ausgräberinnen und Ausgräbern im Zweistromland im heutigen Irak gezeigt. Dort waren die Schulden auf Tontäfelchen aufgeschrieben worden. Also, da wird ausführlich geschrieben, wer wem wie viel schuldet. Wenn Du glaubst, das sei banal, dann vermute ich, dass Du Dich irrst. Denn das ist eine wahnsinnig komplizierte Leistung, welche da vollbracht wird. Ich denke, es ist kein Zufall, dass die Schulden häufig im Umfeld von Tempelanlagen aufgeschrieben wurden. Denn einerseits waren diese Stätten gewiss Orte, welche relativ häufig besucht wurden (im Gegensatz zu heute, wo Kirchen oft Oasen der Ruhe, jedoch auch der Einsamkeit sind). Jedoch strahlen diese Orte auch einen Geist der Ernsthaftigkeit aus. Wenn Du mir etwas überlässt, dann musst Du mir vertrauen können, dass ich gewillt bin, dir das Überlassene oder einen gleichwertigen Ersatz wieder zurückgeben zu wollen. Dafür braucht es vor allem Öffentlichkeit. Wenn

[1]Eine der Ideen für das Schreiben war eine Buchrezension des Buchs von David Graeber über die Kulturgeschichte der Schulden (Schulden, die ersten 5000 Jahre, herausgekommen im Klett-Verlag). Ich muss betonen, dass ich das Buch selbst nicht gelesen habe.

[2]Vergleiche mit dem Wikipedia-Artikel https://de.wikipedia.org/wiki/Linearschrift_B

Du mir 1000 Euro in einem schummrigen Hinterhof in einer dunklen Nacht übergibst, dann werde ich Dir das Geld nur dann zurückzahlen, wenn Du mich sehr unter Druck setzen kannst. Denn ansonsten werde ich allen Personen erzählen, Du hättest mir nie und nimmer einen solchen Betrag übergeben. Wenn Du jedoch mir das Geld vor Zeugen, beispielsweise vor einem Notar übergibst und von mir eine Unterschrift verlangst, dass ich das Geld auch wirklich erhalten habe, dann werde ich das Geld Dir mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit wieder zurückgeben (falls ich dazu in der Lage bin). Der Grund dafür ist jedoch vor allem, weil außer Dir und mir noch andere Personen davon betroffen sind. Und im Fall von Tempeln werden sogar noch höhere Mächte (die Götter) als Zeugen hinzugenommen. Wichtig ist jedoch, dass bei allen beteiligten Personen die Spielregeln klar sind: Schulden müssen früher oder später zurückgezahlt werden (was jedoch nicht immer sicher ist).

Du wirst Dich vielleicht fragen: „Nun gut, aber was haben Zahlen damit zu tun?“ Zu Beginn der schriftlichen Fixierung von Zahlen war das Symbole „5“ verschieden, wenn 5 Ochsen oder 5 Krüge Korn gemeint waren. Erst im Lauf der Jahrhunderte waren vermutlich die Schreiberlinge (vermutlich waren es vor allem Männer, welche sich den Job unter die Fingernägel gerissen haben) faul genug, um die Symbole gleich zu schreiben. Und diese vereinfachte Schreiben von Symbolen darf als die Geburtsstunde von Zahlen betrachtet werden. Jedoch ist das im Nachhinein nur zu vermuten, dass dies wahrscheinlich in dieser Art und Weise abgelaufen ist. Denn das Aufschreiben von Schulden war, und da bin ich mir ziemlich sicher, immer mit einer großen Geheimniskrämerei verbunden. Die Schriftstücke im alten Babylon waren in einer Sprache verfasst, welche bereits ausgestorben war, als die Schriftstücke geschrieben wurden. Das hatte den Effekt, dass der Vorgang des Lesens und Schreibens nur einer kleinen Elite vorbehalten war, so unter dem Motto „Wissen ist Macht“. Mein Ziel ist es ja, Wissen zu demokratisieren. Und darum ist es mir wichtig, an dieser Stelle festzuhalten, dass der Vorgang des bewussten Verschleierns von Wissen gerade bei der Mathematik untrennbar mit ihrer Entwicklung verknüpft ist. Mir scheint, dass es darum so verdammt schwierig ist, ein gutes Mathebuch zu schreiben, weil Mathe eigentlich gar nicht dazu erschaffen wurde, damit möglichst jede und jeder sie versteht.

Doch zurück zum eigentlichen Thema des Kapitels. Wie können Schulden gut sein? Die heutige Wirtschaft ist ohne Schuldenwirtschaft nicht denkbar. Die berühmteste Schuld heutzutage ist die Hypothekarschuld. Diese besteht in ihrem Kern in einer Wette: Eine oder mehrere Personen (oft sind es heute Paare, welche ein Haus bauen oder kaufen wollen) wollen ein Haus oder wenigstens eine Wohnung kaufen. Aber sie haben zu wenig Geld, um den Betrag mittels einer Geldüberweisung von Bank zu Bank zu begleichen. Meines Wissens ist es nicht mehr möglich, einen Hauskauf mit Bargeld zu kaufen. Das wäre vermutlich verboten, weil damit Geld aus kriminellen Machenschaften „gewaschen“ werden könnte. Jemand begeht eine Straftat und verdient dabei Geld. Damit der Person die kriminelle Straftat nicht nachgewiesen werden kann, kauft sie sich ein Haus. Die Person, welche das Geld erhalten hat, zahlt es etwa in eine Bank ein. Dann ist es schnell einmal nicht mehr möglich, aufgrund von Geldscheinen festzustellen, wer diese ursprünglich erhalten hat. Dies schreibe ich Dir, weil ich zeigen möchte, wie unglaublich schwierig das heutige Leben ist. Aber zurück zur Hypothekarschuld: Ein Paar will ein Haus kaufen, hat jedoch zu wenig Geld für den Hauskauf angespart. Dann können Sie zur Bank gehen, und wenn sie Glück haben, leiht ihnen die Bank das Geld. Jedoch ist dieses Ausleihen nicht gratis. Das Paar muss pro Jahr eine vereinbarte Summe zurückzahlen, welche in der Regel proportional zur geleihten Summe ist. Es wird also pro geleihtem Euro, Franken, Dollar pro Jahr ein bestimmter Betrag verlangt. Dieser zurückzuzahlende Betrag wird „Zins“ genannt. Er ist sozusagen der Preis pro Jahr für das Ausleihen einer Geldsumme. Wieso sollte die Bank das tun? Weil ihr Geld anvertraut wird und sie es wieder ausleihen müssen, damit sie ihr Geld verdienen können. Es gibt also nirgends einen Geldspeicher, wo das Geld vor sich hin gammelt. Weil das in aller Regel unwirtschaftlich wäre. Ein anderer Fall, wo Schulden gut sind, das Ausgleichen von Risiken. Wenn ich damit rechnen kann, dass ich mir etwas Ausleihen kann, wenn ich es benötige, dann werde ich auch wieder etwas ausleihen, falls ich von etwas zu viel habe. Damit ist es nicht notwendig, dass alle Menschen alles jederzeit verfügbar haben müssen. Unsere Gesellschaft wäre als ganzes nicht lebensfähig, wenn es nicht so wäre.

Ich persönlich hasse Schulden. Ich finde es widerlich, dass Menschen mittels Schulden geknechtet werden. Dass in unserer Gesellschaft kein Konsens darüber herrscht, dass Menschen, soweit sie die Grenzen der Freiheit nicht missachten, grundsätzlich selbstbestimmt und frei handeln sollen, sondern vorwiegend als Lohnsklaven mit unsichtbaren Ketten handeln müssen, finde ich abstoßend. Dass Geld zusammen mit Sport und Wissenschaft die heutige Religion ist, finde ich barbarisch. Nicht dass ich zurück in die Zeit des Mittelalters gehen möchte, in welchem mittels Religion Menschen andere Menschen unterworfen haben. Jedoch wünsche ich mir, dass alle interessierten Personen die Möglichkeiten haben, sich mit dem beschäftigen zu können, was ihnen wichtig scheint. Und dass die Arbeiten fair aufgeteilt werden. Dass jedoch die von mir gehassten Schulden indirekt, über sieben Ecken und Enden, den Effekt hatten, dass die Mathematik sich wegen ihnen entwickelt hat, das hat mich zutiefst beeindruckt. Übrigens habe ich keine Kenntnis darüber, welcher Anteil an Schulden je zurückgezahlt wurden. Da sind wir bei der Volkswirtschaft gelandet. Denn als Privatperson kann ich entweder exzellent mit Schulden leben (viele reiche Personen haben noch mehr Schulden, welche mit ihrem Vermögen, also ihren Besitztümern in Form von Naturalien oder Geld gedeckt sind) oder überhaupt nicht. Der zweite Fall tritt dann auf, falls ich zwar Schulden habe, jedoch keine Garantien leisten kann, dass ich die Schulden auch tatsächlich zurückzahlen kann.

Und es gibt noch eine weiter Verflechtung von Schulden. Meines Erachtens ist es nicht zufällig, dass Schuld und Sünde ähnlich tönt. Sünde meint Verschuldung gegeben eine Gottheit. Nicht umsonst wurde im Mittelalter der Ablasshandel erfunden. Da wurde die Vorstellung entwickelt, dass mittels Geld sich Personen von Sünden loskaufen könnten. Wieso ich das alles schreibe: Ich möchte in die Lust „nach mehr“ (Wissen, Erleben, Geschichten) wecken. Egal, wie ich es Dir erzähle: Es geschah auf eine andere Art. Ich möchte Dir also auch Deine Vorstellung von Zahlen aufbrechen und sie in einen anderen, hoffentlich spannenderen Zusammenhang stellen.

In der Entwicklungsbiologie oder der Entwicklungspsychologie gibt es das Schlagwort, welches da in etwa heißt: „Die Ontogenese ist eine verkürzte Phylogenese“. Das will bedeuten: So wie wir Menschen erschafft wurden, so entwickelt sich auch alle Menschen. Nun ist das Problem der Mathematik genau das, dass dies nicht zutrifft.

Um dieses Kapitel mit einem markigen Kernsatz zu beenden: „Religion und Schulden waren maßgebliche Triebfedern für die Entwicklung der Mathematik“.

KAPITEL 3

Wieso sind die natürlichen Zahlen nicht natürlich?

Gemach, gemach. Zuerst einmal möchte ich die natürlichen Zahlen definieren, bevor ich mich mit dem Titel des Kapitels herumschlage. Um genauer zu sein, sollen es eigentlich zwei Definitionen sein. Die eine Definition soll „Marke Eigenbräu[1]“ sein, ist also von mir selbst so gedacht. Die zweite Definition ist diejenige, welche in der Mathematik verwendet wird. Diese wurde vom italienischen Mathematiker Peano entwickelt. Dann möchte ich zeigen, dass meine Definition diejenige von Peano herleiten kann. Aber warum mache ich das so? Es ist nicht so, dass meine Definition „besser“ wäre. Aber ich hoffe, dass sie anschaulicher ist und den Begriff der natürlichen Zahl näher an die Entstehung der natürlichen Zahlen bringt.

Definition 25. Es sei

$$A$$

das Metasymbol eines belieben Schriftzeichens, welches wirklich ein Symbol sein muss und nicht leer (oder ein Leerschlag) sein darf. Bitte beachte, dass das Symbol nicht in sich und bezüglich den anderen Symbolen der Definition widersprüchlich sein darf. Insbesondere darf das Symbol A nicht das Metasymbol des Symbols 1 oder eines anderen Zahlzeichen entsprechen. Dann sei die natürlichen Zahl 1 wie folgt definiert:

$$(1) \cdot A \equiv A$$

Nun sei n das Symbol einer beliebigen natürlichen Zahl. Dann ist die Zahl $n+1$ definiert:

$$(n+1) \cdot A \equiv n \cdot A\, A$$

Anstelle

$$(1) \cdot A$$

kann auch

$$1A$$

geschrieben werden. Anstelle

$$(n+1) \cdot A$$

kann auch

$$(n+1)\, A$$

[1] also ein von mir selbst entworfener Begriff. Das Wort „Eigenbräu“ kommt meines Erachtens aus der Bierherstellung und bedeutet „selbst gebraut“.

geschrieben werden. Jedoch muss ich fordern, dass nur solche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zugelassen werden dürfen, für welche gilt, dass

$$n \cdot A$$

aus einer endlichen Anzahl von Symbolen A bestehen.

Weitere Elemente von $\mathbb{N}$ als die oben definierten seien nicht vorhanden. Zwei natürlichen Zahlen m, n seien genau dann gleich, falls für ein beliebiges (natürliches nicht in sich widersprüchliches) Symbol gilt:

$$m \cdot A = n \cdot A$$

Dadurch ist die Gleichheit von natürlichen Zahlen auf die Gleichheit von Symbolen (vergleiche mit der entsprechenden Definition **??**) zurückgeführt. Entsprechend sei

$$m \neq n$$

derart definiert, dass

$$m \cdot A \neq n \cdot A$$

sei.

Ist schließlich

$$m \cdot A = n \cdot A$$

oder gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ derart, dass gilt

$$m \cdot A\, p \cdot A = n \cdot A$$

dann gelte per Definition

$$m \leq n$$

Sind schlussendlich die drei natürlichen Zahlen m, n, p derart gegeben,dass gilt

$$m \cdot A\, p \cdot A = n \cdot A$$

dann sei

$$m < n$$

Sind nun wiederum $m, n \in \mathbb{N}$, dann sei

$$m \geq n$$

per Definition genau dann wahr, falls gelte:

$$n \leq m$$

Ebenso sei

$$n > m$$

per Definition genau dann wahr, falls gelte

$$m < n$$

Damit sei die Definition der natürlichen Zahlen abgeschlossen.

Was ich nicht unerwähnt bleiben lassen möchte: Natürliche Zahlen, wie sie momentan verwendet werden, können nicht ohne das Zahlensystem zur Basis 10 sowie die Zahl „0„ gedacht werden (ich habe diese Ziffern ja spaßeshalber unter der Figur **??** abgebildet. Die Zahl „0“ ist jedoch keine natürliche Zahl. Und ich werde mich davor hüten, „0“ jetzt auf die Schnelle als natürliche Zahl zu definieren. Denn dies entspricht einfach nicht der Geschichte. Die Griechen und Römer beispielsweise hatten keine Zahl „0“.

Es gibt jedoch noch eine kleine sprachliche Schwierigkeit. Wenn ich schreibe

$$(1+1) \cdot A\,B$$

(mit geeignet definierten Symbolen A und B[2]), ist dann gemeint:

$$(1+1) \cdot A\,B = A\,A\,B$$

oder

$$(1+1) \cdot A\,B = A\,B\,A\,B$$

Ich denke, dass damit die erste Variante

$$(1+1) \cdot A\,B$$

gemeint ist. Wenn ich die zweite Variante schreiben möchte, könnte ich Beispielsweise ein Symbol

$$C \equiv A\,B$$

definieren und dann schreiben

$$(1+1) \cdot C$$

Oder aber ich könnte schreiben

$$(1+1)\ (A\,B)$$

Damit ist die Definition der natürlichen Zahlen bereits erfolgt! Ich muss jedoch schreiben, wieso ich diese Definition für sinnvoll halte. Es sei A beispielsweise das Symbol für das Wort „Kuh“. Dann ist

$$1 \cdot \text{Kuh} \equiv \text{Kuh}$$

Ist nun $1 \cdot \text{Kuh}$ definiert, dann sei

$$\begin{aligned} & (1+1) \cdot \text{Kuh} \\ \equiv\ & 1 \cdot \text{Kuh}\,\text{Kuh} \\ =\ & \text{Kuh}\,\text{Kuh} \end{aligned}$$

Nun habe ich $(1+1) \cdot \text{Kuh}$ definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} & (1+1+1) \cdot \text{Kuh} \\ \equiv\ & (1+1) \cdot \text{Kuh}\,\text{Kuh} \\ =\ & \text{Kuh}\,\text{Kuh}\,\text{Kuh} \end{aligned}$$

[2]welche also in sich selbst sowie in Bezug auf die anderen Symbole des Satzes widerspruchsfrei seien sollten

Also habe ich $(1+1+1)$ definiert. Also ist, um ein weiteres Beispiel zu machen

$$\begin{aligned} & (1+1+1+1)\cdot \mathrm{Kuh} \\ \equiv\ & (1+1+1)\cdot \mathrm{Kuh\,Kuh} \\ =\ & \mathrm{Kuh\,Kuh\,Kuh\,Kuh} \end{aligned}$$

Und um ein letztes Beispiel zu machen, ist

$$\begin{aligned} & (1+1+1+1+1)\cdot \mathrm{Kuh} \\ \equiv\ & (1+1+1+1)\cdot \mathrm{Kuh\,Kuh} \\ =\ & \mathrm{Kuh\,Kuh\,Kuh\,Kuh\,Kuh} \end{aligned}$$

So weit so gut - oder langweilig. Doch für was soll das gut sein? Es ist eine Abstraktion. Das bedeutet also, es spielt keine Rolle, ob das Symbol „Kuh“ oder „gefüllter Weizenkrug“ oder „gefüllter Bierkrug“ ist. Weiter ist es jedoch auch so, dass durch diese Definition der Boden für eine Verringerung der Schreibarbeit ist. Ich schreibe beispielsweise:

$$20\,\mathrm{Kuh}$$

Das Malzeichen „·“ habe ich weggelassen. Anstatt „Kühe“ habe ich „Kuh“ geschrieben.Dann besitzt diese Darstellung zusammen mit dem Leerzeichen 7 Zeichen. Schreibe ich jedoch das ganze aus:

Kuh	Kuh	Kuh	Kuh	Kuh
Kuh	Kuh	Kuh	Kuh	Kuh
Kuh	Kuh	Kuh	Kuh	Kuh
Kuh	Kuh	Kuh	Kuh	Kuh
Kuh	Kuh	Kuh	Kuh	Kuh

dann benötige ich zusammen mit den Leerzeichen $20\cdot(3+1)-1=59$ Zeichen. Das sind ungefähr 8 Mal mehr Zeichen. Ich vermute, dass dies auch der Grund ist, wieso die Zahlen überhaupt erfunden wurden. Denn wenn die Zahlen noch größer werden, können noch viel mehr Zeichen eingespart werden. Jedoch möchte ich dazu ebenfalls schreiben, dass es nicht nur einen Nutzen gibt, wenn Symbole mittels Zahlen geschrieben werden. Es gibt auch Kosten. Denn 50 Mal das Symbol für Kuh aufzuschreiben, das geht auch dann, falls die Schrift und das Rechnen sonst nicht mit viel Mühe und Not gelernt werden. Auf der anderen Seite ist es halt schon ein großer Aufwand, wenn zuerst jahrelang das Lesen und Schreiben sowie das Rechnen gelernt werden muss, damit der Begriff „20 Kuh“ (oder entsprechende 20 Kühe) einen Sinn macht. Zudem war und ist mit dem Lesen und Schreiben sowie mit dem Rechnen meines Erachtens die Gesellschaft so richtig aufgespalten worden in arme und reiche, in ungebildete, „eingebildete[3]“ und gebildete Personen.

[3] Das sollte ein Witz sein.

Zur Abgrenzung der natürlichen Zahlen von der Logik: In der Logik geht es darum, sich zu überlegen, welche Aussagen aus wahren Aussagen (definiert als Zeichenketten, welche als wahr oder nicht wahr festgelegt oder erkannt werden) wiederum gefolgert werden können. In der naiven Zahlenlehre der natürlichen Zahlen geht es darum, sich die Eigenschaften von Zeichenketten zu überlegen, welche aus lauter gleichen Symbolen bestehen.

In der Definition habe ich noch kein Zahlensystem (wie das duale oder das dezimale, also das Zehnersystem) verwendet. In den Einführungen zur Mathematik wird dieses übrigens nirgends gemacht. Wahrscheinlich wird das in der Ausbildung zu den Mathematiklehrern gelehrt und vielleicht auch ein wenig gelernt. Ich weiß es nicht.

Die Definition der natürliche Zahlen könnte auch auf eine andere Art aufgeschrieben werden. Es könnte anstatt:

$$1 \cdot A \equiv A$$

aufgeschrieben werden:

$$|A \equiv A$$

Ist nun n ein Symbol für eine natürliche Zahl, dann sei

$$n|A \equiv nA\,A$$

So kann also beispielsweise $4A$ (wobei 4 gar noch nicht definiert ist, jedoch allen, welche diesen Text aus Versehen lesen, wahrscheinlich klar ist) geschrieben werden

$$4A = ||||A = A\,A\,A\,A$$

Die senkrechten Striche sind eine Anlehnung an die Zählstriche, welche früher oft gebraucht wurden, um Dinge zu zählen. Berühmt sind die Zählstriche bei den Kartenspielen. Dort werden jedoch 4 Striche mit einem 5. Querstrich sozusagen „abgebunden“:

Das wird gemacht, um leichter zählen zu können. Der entscheidende Unterschied von Zahlen zu den Zählstrichen ist derjenige, dass immer diejenige Größe, welche gezählt wird, nämlich die Anzahl der Symbole („ A“), immer angegeben wird. Das erinnert mich an eine Regel, welche ich in der Schule hören musste: „Nicht Äpfel und Birnen zusammen zählen!“ Das kann hier nicht passieren, da immer das Symbol, welches gezählt wird, angegeben wird. Also ist das m.E. der entscheidende Unterschied der natürlichen Zahlen von Zählstrichen: Währendem Zählstriche grundsätzlich keine Metasymbole sind, sind natürliche Zahlen grundsätzlich Metasymbole.

Ein anderes Beispiel ist, dass einmal eine Raumsonde auf den Mars abgestürzt ist, weil für die gleiche Größe zwei verschiedene Einheiten verwendet wurden (siehe den entsprechenden Wikipedia-Eintrag). Das hatte zur Folge, dass der Computer zu starke Korrekturen vorgenommen hatte und die Sonde zu tief flog. Die Sonde wurde dann durch die Atmosphäre des Mars zerstört. Zum Schluss möchte ich angeben, dass es in der Physik und der Technik gang und gäbe ist, immer eine „Einheit“ bei der Zahl hinzuschreiben. Das einfachste diesbezügliche Beispiel scheint mir die Währung zu sein. Es ist üblich, einen Preis, Kosten oder Erträge in Dollar, Euro, britischem Pfund oder Yen anzugeben. Sinnigerweise gibt es sogar eigene Symbole dafür, so zum Beispiel „$“ Dollar. So macht es also durchaus einen Unterschied, ob ein Fahrrad 1000$ oder 1000£ kostet (1000 britische Pfund im zweiten Fall). So weit ich gelesen habe, sind Zahlen erfunden worden, um die Zahlensymbole vor Symbole zu vereinheitlichen. Es wurden also ursprünglich offenbar andere Zahlen verwendet, um Weizenkrüge (also ein Krug mit einem bestimmten Volumen, welcher mit Weizen gefüllt ist) oder Ochsen zu zählen. Das wäre so wie wenn ich schreiben würde

$$\underline{2}\text{Ochsen} \equiv \text{Ochse}\,\text{Ochse}$$

und

$$\tilde{2}\text{Weizenkrüge} \equiv \text{Weizenkrug}\,\text{Weizenkrug}$$

Wenn Du jetzt denkst, dass diese Leute „dumm“ gewesen seien, dann möchte ich zur Vorsicht mahnen. Denn die Zahlen, wie wir sie heute kennen, sind derart komplex, dass ich mir nicht vorstellen kann, dass Du oder ich darauf gekommen wären, ohne dass uns das gelehrt worden wäre. Ich vermute, dass die Zahlen darum entstanden, weil der Lernaufwand für das Schreiben der Zahlen verkleinert wurde. Sozusagen aus Faulheit. Das würde dann bedeuten: Die Zahlen sind aus Schulden und Faulheit entstanden! Lange Zeit wurden einzelne Zahlen durch Zahlwörter abgekürzt. Bei den Römern waren das unter anderem: I für 1, V für 5, X für 10, L für 50, C für 100, D für 500 und M für 1000 [4]. Diese Zahlwörter sind gut und recht - aber zum rechnen leider nicht besonders elegant. Es ist jedoch unüblich, zwei Zahlwörter hintereinander zu verwenden. Natürlich wäre es möglich

$$V\,(C\text{Weizenkrüge})$$

aufzuschreiben. Das wären dann

$$500\text{Weizenkrüge}$$

was recht gewöhnlich aussieht. Wie wäre es jedoch damit

$$IV\,(III\,(VIII\,\text{Weizenkrüge}))$$

Das sieht so aus, also ob damit

$$438\,\text{Weizenkrüge}$$

[4]Ich habe die Zahlwörter dem entsprechenden Wikipedia-Artikel über die römische Zahlwörter entnommen: https://de.wikipedia.org/wiki/R%C3%B6mische_Zahlschrift

damit bezeichnet würden. Tut es jedoch nicht. Es sind

$$
\begin{aligned}
&4 \cdot 3 \cdot 8 \,\text{Weizenkrüge}\\
=&12 \cdot 8 \,\text{Weizenkrüge}\\
=&96 \,\text{Weizenkrüge}
\end{aligned}
$$

Doch zurück zur Eingangsfrage: Wieso sind die natürlichen Zahlen nicht natürlich? Der Grund ist ganz einfach: Weil die natürlichen Zahlen zwar definiert, jedoch in ihrer Gesamtheit nie aufgeschrieben werden können. Es gibt unendlich viele davon. Und kein Mensch der Welt kann alle aufschreiben. Denn würde alle bekannte Datenträger verwendet, um eine natürliche Zahl aufzuschreiben, dann wäre diese Zahl zuzüglich 1 immer noch eine natürliche Zahl. Diese wäre jedoch noch nie aufgeschrieben worden. Der berühmte Spruch „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." von Leopold Kronecker (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Leopold_Kronecker) ist meines Erachtens schon einmal falsch. Denn unsere Existenz ist unzweifelhaft an das Endliche gebunden. So auch an endlich viele Zahlen. Also können weder die unendlich vielen natürlichen noch die unendlich vielen ganzen Zahlen existieren. Jedoch können wir trotzdem mit ihnen umgehen. Dafür gibt es zwei Methoden: Einmal, indem nur auf die allgemeinen Eigenschaften von natürlichen Zahlen zurückgegriffen werden. Und das andere Mal, indem auf das Prinzip der vollständige Induktion verwendet wird. Doch davon später.

Anstelle des Unendlichen kommt heute immer mehr das Prinzip des Unscharfen. Denn es stellt sich heraus, dass es kein beliebig Kleines gibt. In der Physik kommt das prominent durch die Heisenbergsche Unschärferelation zum Ausdruck, welches besagt, dass von jeder physikalischen Größe nicht gleichzeitig die Geschwindigkeit (genauer: der Impuls) und der Ort beliebig genau gemessen werden kann. Dennoch werden Zahlen verwendet und das ist sicher auch gut so. Jetzt kommt die zweite große Zumutung: Die natürliche Zahlen sind nur darum sinnvoll, weil mit ihnen gut gerechnet werden kann, sie also praktisch sind. Nun möchte ich über die Eigenschaften von natürlichen Zahlen nachdenken.

Zu Beginn möchte ich zeigen:

LEMMA 26. *Die Gleichheit von natürlichen Zahlen ist eine Äquivalenzrelation.*

BEWEIS. Und wie zeige ich das? Dazu muss ich zuerst nachschauen, wie dann die Gleichheit von natürlichen Zahlen überhaupt definiert ist. Ich schlage dazu unter der Definition **??** nach und lese, dass ich zeigen muss, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen identitiv, symmetrisch und transitiv sein muss. Nun denn, dann probiere ich es: Es sei A ein Metasymbol, welches jedoch in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen des Beweises nicht widersprüchlich sein darf. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürlich Zahl. Da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 55 ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist, kann ich schreiben:

$$n \cdot A = n \cdot A$$

Und somit gemäß der Definition der Gleichheit von natürlichen Zahlen

$$n = n$$

Somit ist die Gleichheit von natürlichen Zahlen zumindest identitiv. Nun seien $m, n \in \mathbb{N}$ und

$$m = n$$

Also muss für A gemäß der Definition der Gleichheit von natürliche Zahlen

$$m \cdot A = n \cdot A$$

Da die Gleichheit von von Symbolen gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation ist und somit auch symmetrisch ist, kann ich daraus schließen, dass ebenfalls gilt

$$n \cdot A = m \cdot A$$

Somit muss gemäß der Definition der Gleichheit von natürlichen gelten, dass

$$n = m$$

ist. Also habe ich gezeigt, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen reflexiv ist. Schlussendlich seien $m, n, p \in \mathbb{N}$, also natürliche Zahlen und es gelte

$$m = n \wedge n = p$$

Somit muss gemäß der Definition der Gleichheit von natürlichen Zahlen gelten

$$m \cdot A = n \cdot A \wedge n \cdot A = p \cdot A$$

Da die Gleichheit von Symbolketten gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation und somit ebenfalls transitiv ist, kann ich daraus schließen, dass gilt:

$$m \cdot A = p \cdot A$$

Gemäß der Definition der Gleichheit von natürlichen Zahlen kann ich also schreiben:

$$m = p$$

Darum habe ich endlich auch gezeigt, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen ebenfalls transitiv ist.

Da ich nun gezeigt habe, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen identitiv, symmetrisch und transitiv ist, kann ich also folgern, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Also glaube ich die Richtigkeit des obigen Satzes und somit den Beweis erbracht zu haben. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Ich habe natürlich wieder einmal viel zu lange darüber nachgedacht, was die natürlichen Zahlen ausmacht. Aber ich möchte trotzdem nun etwas wagen, was das Ganze aus meiner Sicht auf einen Schlag viel einfacher machen sollte:

SATZ 27. *Die Vergleichsrelation $\leq$ der natürlichen Zahlen ist total.*

BEWEIS. Es seien n_1, n_2 natürliche Zahlen. Dann ist gemäß dem Korollar 10 über Symbolketten

$$n_1 \cdot A \leq n_2 \cdot A \vee n_1 \cdot A \geq n_2 \cdot A$$

Das bedeutet jedoch gemäß der Definition 25, dass gilt

$$n_1 \leq n_2 \vee n_1 \geq n_2$$

Aus diesem Grund kann ich den Beweis an dieser Stelle als bewiesen betrachten und beende an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Nun regt sich jedoch ein kleines Teufelchen in mir. Aber das soll Dich nicht verdrießen. Es ist bloß ein kleines Kopfexperiment, welches uns ein wenig unterhalten sollte. Angenommen, Alice und Bob sitzen im Sandkasten und streiten darüber, wer wohl mehr Sandkörner in ihrer respektive in seiner Sandburg hätte. Meinst Du, die könnten das einfach so auszählen? Ich für mich denke, das wäre wohl ein hoffnungsloses Unterfangen. Oder, um den Gedankengang auf die Spitze zu treiben: Gemäß Wikipedia ist die Avogadro-Konstante, welche eine reine Zahl ist und den Wert

$$6,022140857\,(74) \cdot 10^{23} \approx 602214085700000000000000$$

besitzt, gleich der Anzahl eine bestimmten Sorte von Atomen (Kohlenstoffatomen mit 6 Protonen und 6 Neutronen), welche 12 Gramm schwer ist. Also ist auch hier die Preisfrage: Wie lange würde es gehen, wenn exakt 12 Gramm dieses Kohlenstoffs genommen würde und jedes einzelne Atom abgezählt würde - falls dies überhaupt gehen würde. In der Physik sind (Irrtum vorbehalten) die genausten Messungen diejenigen, welche mit Zählen zu tun haben. Und hier ist das Messen der Zeit besonders zu erwähnen. Also stelle ich mir folgenden Versuchsaufbau vor: Um zu Messen, wie lange eine Sekunde dauert, wird auf 9’192’631’770 gezählt, falls mittels der Stoffsorte Cäsium eine sogenannte Atomuhr gebaut wird. Angenommen, bei jedem Hochzählen werde gleichzeitig ein Atom abgezählt. Wie lange würde es dauern, bis dann am Schluss die Menge der Atome von 12 Gramm Kohlenstoff der besonderen Sorte 6 Protonen und 6 Neutronen abgezählt wären? Das wären dann

$$\frac{602214085700000000000000}{9192631770}\,s \approx 65510519812760\,s$$

Und wie lange wären dann diese Anzahl Sekunden in Jahren? Ich habe bei Wikipedia einen Wert von

$$1\,y \equiv 31557600\,s$$

für ein Jahr gefunden (y ist die Abkürzung für „Jahr“, auf Englisch „Year“). Dann würde es rund 2 Millionen Jahre dauern, bis die Menge abgezählt würde. Hättest Du so lang Zeit? Ich für mich wohl kaum.

Also sieht es so aus, als ob das ganze Gedankengebäude für die Katz wäre. Als dass Zahlen zwar definiert werden könnten, diese jedoch im Alltag nicht anwendbar seien. Aber das scheint mir ebenfalls übertrieben. Also möchte ich ein drittes und letztes Gedankenexperiment durchführen. Angenommen, die Hirten Markus und Michael möchten gerne wissen, wer mehr Schafe in der Herde hat. Beide haben es jedoch nicht so mit Zählen. Wie können sie trotzdem wissen, wer mehr Schafe (und Böcke) hat? Sie können es so durchführen: Sie nehmen 4 Gehege, wobei je zwei Gehege miteinander durch ein Tor verbunden sind. Ihre Herden haben sie in getrennten Gehegen, jedoch so, dass je ein Gehege eine Schafherde enthält und das mit ihm verbundene Gehege leer ist. Dann lassen sie immer gleichzeitig genau ein Schaf durch das Tor von einem Gehege in das andere Gehege. Nun wissen sie: Sind die ursprüngliche Gehege gleichzeitig leer, dann besitzen beide Herden gleich viele Schafe. Ist jedoch ein Gehege früher leer als das andere, dann besitzt derjenige Hirte mit derjenige Herde, welche früher durch das entsprechende Tor von einem Gehege in das andere übergetreten ist, weniger Schafe. Und auch dieses Vorgehen entspricht genau dem Gedankengang des Beweises des vorhergehenden Satzes 27. Und in diesem Fall ist die Einschränkung, dass immer höchstens endlich viele Schafe vorhanden sein müssen, geradezu grotesk. Denn es ist geradezu absurd, sich vorzustellen, dass ein Schafherde unendlich viele Schafe haben könnte. Und auch wenn das Beispiel wohl an den Haaren herbeigezogen ist, kann ich feststellen, dass die Mathematik aus diesen Fragestellungen heraus entstanden ist, also in solchen Gebieten, in welchen die Anwendung der Mathematik unproblematisch ist und kein Kopfzerbrechen bereitet. Aber ich denke, die Mathematik tut gut daran, dass sie ihre Herkunft nicht vergisst. Denn Theorie und Praxis befruchten sich stets immer wieder aufs Neue vortrefflich[5].

[5] Bist Du in der Pubertät oder Adoleszenz, dann kann und will ich Dir nicht verübeln, dass Du Dir ein Schmunzeln an dieser Stelle nicht verkneifen kannst. „Befruchten“ meint an dieser Stelle nicht „miteinander Sex haben“, sondern „einander zum Wachsen und Gedeihen anregen“.

3.1. Natürliche Zahlen und Zeichenketten

In diesem Abschnitt möchte ich die Sätze und Lemmas der Zeichenketten in entsprechende Sätze der natürlichen Zahlen transformieren.

Ich möchte mit dem Satz 27 nun weiter zeigen:

LEMMA 28. *Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ also natürliche Zahlen. Dann muss gelten*

$$n_1 \leq n_2 \vee n_1 \geq n_2$$

BEWEIS. Es sein also $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sowie A eine beliebiges Symbol, welches nicht in sich sowie in Bezug auf die anderen Symbolen des Satzes widerspruchsfrei sei. Dann sind

$$n_1 \cdot A$$

sowie

$$n_2 \cdot A$$

gemäss der Definition 25 der natürlichen Zahlen Zeichenketten, welche aus entsprechend langen Zeichenketten aus dem Symbol A bestehen. Im Korollar 10 habe ich zu zeigen versucht, dass dann gelten muss

$$n_1 \cdot A \leq n_2 \cdot A \vee n_1 \cdot A \geq n_2 \cdot A$$

Aus den Definitionen

$$n_1 \cdot A \leq n_2 \cdot A \Leftrightarrow n_1 \leq n_2$$

sowie

$$n_1 \cdot A \geq n_2 \cdot A \Leftrightarrow n_1 \geq n_2$$

und dem Äquivalenzsatz **??** der Disjunktion kann ich darum folgern, dass auch gilt

$$n_1 \leq n_2 \vee n_1 \geq n_2$$

Dies wollte ich jedoch zeigen. Aus diesem Grund bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe und beende deshalb an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ∎

LEMMA 29. *Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$n_1 \leq n_2 \wedge n_1 \geq n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$$

BEWEIS. Zuerst einmal möchte ich die Implikation des Satzes beweisen:

Es sei A ein beliebiges Symbol, welches jedoch weder in sich selbst noch bezüglich der anderen Symbole des Satzes widersprüchlich sei. Dann lässt sich die Behauptung des Satzes umschreiben als Aussage:

$$n_1 \cdot A \leq n_2 \cdot A \wedge n_2 \cdot A \geq n_1 \cdot A$$

Nun kann ich gemäss dem Lemma 18 folgern, dass gelten muss

$$n_1 \cdot A = n_2 \cdot A$$

Das bedeutet jedoch, dass gilt

$$n_1 = n_2$$

Also bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Implikation der Behauptung erbracht habe. Nun möchte ich zeigen, dass auch die Replikation des Satzes gilt. Es sei also

$$n_1 = n_2$$

für zwei ansonsten beliebige natürliche Zahlen. Also kann ich gemäss dem Aussage-Dsijunktionssatz 18 folgern, dass gilt

$$n_1 = n_2 \Rightarrow n_1 = n_2 \vee n_1 < n_2$$

sowie

$$n_1 = n_2 \Rightarrow n_1 = n_2 \vee n_1 > n_2$$

mit

$$n_1 \leq n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2 \vee n_1 < n_2$$

sowie

$$n_1 \geq n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2 \vee n_1 > n_2$$

kann ich gemäss dem Satz **??**der Kommutativität der Äquivalenz schlussfolgern, dass auch gilt

$$n_1 = n_2 \vee n_1 < n_2 \Leftrightarrow n_1 \leq n_2$$

sowie

$$n_1 = n_2 \vee n_1 > n_2 \Leftrightarrow n_1 \geq n_2$$

Damit bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

KOROLLAR 30. *Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$n_1 < n_2 \vee n_1 = n_2 \vee n_1 > n_2$$

BEWEIS. Ich habe im Lemma 28 zu zeigen versucht, dass mindestens gelten muss

$$n_1 \leq n_2 \vee n_1 \geq n_2$$

Gemäß der Definition **??** der Disjunktion muss also gelten

$$\begin{array}{rl}(\quad n_1 \leq n_2 \wedge \neg(n_1 \geq n_2)) & \vee \\ (\neg(n_1 \leq n_2) \wedge \quad n_1 \geq n_2) & \vee \\ (\quad n_1 \leq n_2 \wedge \quad n_1 \geq n_2) & \vee \end{array}$$

Ist nun $n_1 \leq n_2 \wedge \neg(n_1 \geq n_2)$, dann kann nicht $n_1 = n_2$ sein. Dann sonst wäre ebenfalls

$$n_1 \geq n_2$$

Also muss in diesem Fall $n_1 \neq n_2$ sein. Somit ist gemäß der Definition 25 der kleiner-gleich Ordnungsrelation und dem Ausschlusssatz **??**

$$n_1 < n_2$$

Im zweiten Fall gilt

$$\neg (n_1 \leq n_2) \wedge \quad n_1 \geq n_2$$

Also muss

$$n_1 \neq n_2$$

gelten. Da jedoch immer noch gilt

$$n_1 \geq n_2$$

muss

$$n_1 > n_2 \vee n_1 = n_2$$

sein. Gemäss dem Satz des Ausschlusses **??** kann ich daher schlussfolgern, dass gelten muss

$$n_1 > n_2$$

Der dritte Fall habe ich im Lemma 29 zu beweisen versucht. Ist also

$$n_1 \leq n_2 \wedge \quad n_1 \geq n_2$$

dann muss gelten

$$n_1 = n_2$$

Also glaube ich den Beweis für die Richtigkeit meiner Behauptung erbracht zu haben.

Also habe ich gezeigt, dass genau einer der drei Fälle

$$n_1 = n_2$$
$$n_1 < n_2$$

oder

$$n_1 > n_2$$

gelten muss. Somit meine ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Definition 31. Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann sei das Minimum von n_1 und n_2 wie folgt definiert.

$$\min\{n_1, n_2\} \equiv \begin{cases} n_1 & \Leftarrow n_1 < n_2 \\ n_1 & \Leftarrow n_1 = n_2 \\ n_2 & \Leftarrow n_1 > n_2 \end{cases}$$

Zusammen mit dem Satz 27 und dem Korollar 30 kann ich dann schreiben:

KOROLLAR 32. *Es sei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann ist das Minimum von n_1 und n_2 für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ eindeutig definiert.*

Noch einmal kurz möchte ich innehalten: Natürlich ist es ein totaler „overkill“, also eine total übertriebener Aufwand, wenn ich soviel Platz brauche, bloß um zu zeigen, dass das Minimum von zwei natürlichen Zahlen eindeutig definiert ist. Aber es geht mir vor allem darum, dass Du siehst, wie so etwas gemacht werden kann und dass es wichtig ist, sich zu überlegen, ob aufgrund der getroffenen Annahmen die Schlüsse in sich selbst widerspruchsfrei sind. Ansonsten könnte ich etwas schließen, was völliger Unfug wäre. Und dann wäre es den ganzen Aufwand in keinster Art und Weise gerechtfertigt.

Ich möchte jetzt einen Satz definieren und zu beweisen, an welchem ich mir lange Zeit schier die Zähne ausgebissen habe:

SATZ 33. *Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Dann besitzt M ein Minimum m_M, welches in M enthalten ist und für welches gilt*

$$\forall m \in M\, m_M \leq m$$

BEWEIS. Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine beliebige, jedoch nichtleere Teilmenge von M. Dann sei A ein Symbol, für welches jedoch gilt, dass es weder in sich selbst noch in Bezug auf die anderen Symbole des Beweises widerspruchsfrei sei. Also sei

$$M_A \equiv \left\{ m \cdot A \,\middle|\, m \in M \right\}$$

die entsprechende Symbolmenge. Dann muss diese Menge gemäss dem Lemma 24 ein Mininimum B besitzen (im Sinn von minimale Symbolkette von gleichartigen Symbolen). Das bedeutet, dass es ein entsprechendes $B \in M_A$ derart geben muss, dass für alle anderen Symbolketten $C \in M_A$ gilt

$$B \leq C$$

Da jedoch $B \in M_A$ ist, muss es folglich ein $m_A \in M$ derart geben, dass

$$B = m_A \cdot A$$

ist. Und ist $m \in M$, dann muss es für $m \cdot A$ gelten, dass

$$m \cdot A \in M_A$$

ist und dass

$$m_A \cdot A \leq m \cdot A$$

Das bedeutet jedoch, dass auch gilt

$$m_A \leq m$$

ist. Also kann ich daraus schliessen, dass

$$m = \min M$$

ist. Also bin ich der Meinung, dass ich den Beweis für die Gültigkeit der Behauptung erbracht habe und beweise aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Somit möchte ich diesen Teil des Kapitels abschließen.

In der Mathematik und auch sonst sind immer zwei Prinzipien vorhanden, welche oft auch miteinander zu tun haben. Das eine Prinzip ist, dass neue Begriffe erfunden werden, damit neu über etwas nach gedacht werden kann. Wie hier der Begriff der natürlichen Zahl. Oder der Begriff eines Punktes in einem Bild. Oder Begriff eines Hauses. Bevor Menschen sesshaft wurden, gab es wohl ausschließlich den Begriff der Höhle, nicht jedoch denjenigen des Hauses. Das andere Prinzip, welches verwendet wird, ist dasjenige des Zurückführens der neuen Begriffe auf bereits bestehende Begriffe. Bei den natürlichen Zahlen bietet sich an, zu versuchen, die natürlichen Zahlen auf den Mengenbegriff zurückzuführen. Und das möchte ich jetzt versuchen:

Satz 34. *Es sei* $\mathbb{N}$ *die Menge der natürlichen Zahlen. Es sei* A *das Metasymbol eines beliebigen Symbols, welches jedoch in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen widerspruchsfrei sei. Weiter sei mit*

$$E_n \equiv \bigcup_{k=1}^{n} \{k \cdot A\}$$

die Menge $\mathcal{M}_u(A)$ *definiert als*

$$\mathcal{M}_u(A) \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{E_n\}$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{M}_u(A) \\ n &\mapsto E_n \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Bevor ich mit dem Beweis beginne, möchte ich zeigen, dass gilt:

$$E_{n(1)} = E_{n(2)} \Rightarrow n_1 = n_2$$

Da $n_1 \in \mathbb{N}$ ist, kann $E_{n(1)}$ nicht die leere Menge sein, da mindestens das Symbol A in $E_{n(1)}$ enthalten sein muss. Das genau gleiche gilt für $E_{n(2)}$: Da $n_2 \in \mathbb{N}$ ist, muss mindestens das Symbol A in $E_{n(2)}$ enthalten sein.

Das Besondere an der Definition von $\mathcal{M}_u(A)$ ist, dass alle deren Elemente ebenfalls Mengen sind. Also muss ich zeigen, dass aus der Gleichheit der beiden Mengen $E_{n(1)}$ und $E_{n(2)}$ folgt, dass die beiden natürlichen Zahlen n_1 und n_2 gleich sind:

$$E_{n(1)} = E_{n(2)} \Leftrightarrow \left(B \in E_{n(1)} \Leftrightarrow B \in E_{n(2)}\right)$$

Falls $n_1 \neq n_2$ wäre, könnte ich gemäß dem Korollar 30 folgern, dass entweder $n_1 < n_2$ oder $n_1 > n_2$ sein müsste. Wäre

$$n_1 < n_2$$

Dann muss gelten:

$$n_2 \cdot A \notin E_{n(1)}$$

Denn da

$$n_1 < n_2$$

ist, kann gemäss dem Satz 9 nicht gelten, dass die Zahlen n_1 und n_2 sind. Gemäss der Definition 25 kann dann auch nicht gelten, dass die Zeichenketten $n_1 \cdot A$ und $n_2 \cdot A$ gleich sind. Ist jedoch

$$B \in E_{n(1)}$$

und

$$B \neq n_1 \cdot A$$

dann muss gelten

$$B < n_1 \cdot A$$

Da die kleiner-als Relation von Zeichenketten gemäss dem Satz 15 ebenfalls transitiv ist, muss mit

$$n_1 < n_2$$

und somit auch

$$n_1 \cdot A < n_2 \cdot A$$

auch

$$B < n_2 \cdot A$$

sein. Also kann auch gemäss dem Satz 9 auch nicht

$$B = n_2 \cdot A$$

sein. Also kann $n_2 \cdot A$ nicht in der Menge $E_{n(1)}$ enthalten sein. Ist jedoch $n_1 > n_2$, dann kann ich die Rollen von n_1 und $n_2$vertauschen und genau die gleiche Überlegung durchführen. Also habe ich den Beweis erbracht, dass tatsächlich folgen muss, dass gilt

$$E_{n(1)} = E_{n(2)} \Rightarrow n_1 = n_2$$

Damit hätte ich die eine Hälfte des Beweises erbracht.

Nun möchte ich die Bijektivität der Abbildung beweisen. Der Beweis ist wiederum so einfach, dass er schon fast wieder schwierig zu zeigen ist, da nicht klar ist, was überhaupt zu beweisen ist. Ich probiere es so, dass ich die Umkehrfunktion suche.

$$\begin{aligned} g : \mathcal{M}_u(A) &\rightarrow \mathbb{N} \\ f(E(n)) &\mapsto n \end{aligned}$$

Jetzt möchte ich zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} &: \quad g \circ f(n) = n \\ \forall E \in \mathcal{M}_u(A) &: \quad f \circ g(E) = E \end{aligned}$$

Es sei also

$$n \in \mathbb{N}$$

dann gilt

$$g \circ f(n) = g(E(n)) = n$$

Dieses Resultat habe ich erhalten, indem ich in $f(n)$ dessen Definition eingesetzt habe. Diese ist $E(n)$. In $g(E(n))$ habe ich die Definition der Funktion g eingefügt und wiederum erhalten

$$g(E(n)) = n$$

Also habe ich das Resultat erhalten. Ist $E \in \mathcal{M}_u(A)$, dann muss es gemäß der Definition der Menge ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$E = E(n)$$

geben. Wie ich oben zu zeigen versuchte, muss dieses n eindeutig definiert sein. Denn gäbe es zwei

$$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

mit

$$E(n_1) = E(n_2)$$

dann könnte ich daraus schließen, dass

$$n_1 = n_2$$

ist. Somit kann ich schreiben

$$f \circ g(E) = f(g(E_n)) = f(n) = E_n = E$$

Da nun die Richtigkeit der Behauptungen

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} &: g \circ f(n) = n \\ \forall E \in \mathcal{M}_u(A) &: f \circ g(E) = E \end{aligned}$$

erbracht sind, kann ich gemäß dem Satz **??** folgern, dass die Abbildung f tatsächlich bijektiv ist. Damit glaube ich, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Doch wieso überhaupt solche Aufregung um so etwas unscheinbares? Üblicherweise werden die natürlichen Zahlen als Mächtigkeiten von Mengen eingeführt. Mit diesem Satz kann ich jetzt zeigen, dass auch meine Definition in Mächtigkeiten von Mengen übersetzbar ist und somit kein Widerspruch zur anderen Definition besteht.

Ich möchte noch kurz aufschreiben, wie dann Elemente von

$$\mathcal{M}_u(A)$$

aussehen könnten. Beispielsweise wäre dann

$$\begin{aligned} E_7 &= \{A, AA, AAA, AAAA, AAAAA, AAAAAA, AAAAAAAA\} \\ E_3 &= \{A, AA, AAA\} \end{aligned}$$

Damit dürfte klar sein, wieso sich diese Menge nur beschränkt für den praktischen Einsatz eignet. Denn ihre Menge sind extrem unübersichtlich aufgebaut. Und ja, das wesentliche der Elemente besteht schlicht und ergreifend darin, dass es darum geht, wie viele Elemente diese besitzt. Bevor ich zeigen möchte, dass das Konzept der Mächtigkeit von Mengen mit endlich vielen Elementen und von natürlichen Zahlen identisch ist, versuche ich zu zeigen, dass gilt:

LEMMA 35. *Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und mit den obigen Bezeichnungen*

$$E_{n(1)}, E_{n(2)} \in \mathcal{M}_u(A)$$

Dann gilt

$$E_{n(1)} \subset E_{n(2)} \vee E_{n(2)} \subset E_{n(1)}$$

BEWEIS. Ich habe im Satz 27 zu zeigen versucht, dass auf jeden Fall gelten muss, das

$$n_1 \leq n_2 \vee n_2 \leq n_1$$

gelten muss. Es sei nun $n_1 \leq n_2$. Nun definiere ich die Menge T wie folgt:

$$T = \{k \in \mathbb{N} | k > n_1 \wedge k \leq n_2\}$$

Ist $n_1 = n_2$, dann ist die Menge T leer. Ansonsten ist sie nicht leer. Es gilt jedoch auf jeden Fall

$$\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; k \leq n_2\right\} = \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; k \leq n_1\right\} \vee \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; k > n_1 \wedge k \leq n_2\right\}$$

Dann kann ich schreiben

$$E_{n(2)} = \bigcup_{k=1}^{n_2} \{k \cdot A\} = \bigcup_{k=1}^{n_1} \{k \cdot A\} \cup \bigcup_{k \in T} \{k \cdot A\}$$

Wiederum gilt die Bemerkung, dass gilt, dass

$$\bigcup_{k \in T} \{k \cdot A\} = \emptyset$$

ist, falls $n_1 = n_2$ ist. ■

SATZ 36. *Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, also natürliche Zahlen. Dann ist genau dann*

$$n_1 \leq n_2$$

falls

$$\left|E_{n(1)}\right| \leq \left|E_{n(1)}\right|$$

BEWEIS. Es sei $n_1 \leq n_2$. Dann ist

$$E_{n(1)} = \bigcup_{k=1}^{n(1)} \{k \cdot A\}$$

Ist $n_1 = n_2$, dann ist ebenfalls

$$E_{n(2)} = E_{n(1)}$$

und somit auch

$$E_{n(1)} \subset E_{n(2)}$$

Ist jedoch $n_1 < n_2$, dann muss es ein $p \in \mathbb{N}$ derart geben, dass gilt

$$n_2 \cdot A = n_1 \cdot A\, p \cdot A$$

■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Es gibt eine offizielle Definition der natürlichen Zahlen. Diese stammt von italienischen Mathematiker Giuseppe Peano. Aber da ich diese Definition aus meiner eigenen Definition herleiten möchte, möchte ich zuerst weiter über die Eigenschaften meiner Zahlen nachdenken und weitere Definitionen anfügen:

Definition 37. Es seien m, n Symbole für natürliche Zahlen und A ein Symbol, welches jedoch nicht in sich widersprüchlich sei und auch weder „1“ noch „+“ sei und auch sonst nicht mit den anderen Symbolen der nachfolgenden Gleichung in Konflikt komme. Dann sei

$$(m+n) \cdot A = m \cdot A\, n \cdot A$$

Es sei genau dann $m < n$, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass gilt

$$n = m + k$$

Schlussendlich sei genau dann $m \leq n$, falls entweder $m = n$ oder $m < n$ ist.

Beispiel: Es sei $m \equiv 1+1+1$ und $n \equiv 1+1$ und A das Symbol für „Esel“ (ich habe heute in meinen Ferien gerade ein solches Grautier gesehen). Dann ist

$$\begin{aligned}
& (m+n) \cdot A \\
= \; & ((1+1+1) \cdot A) \; \cdot ((1+1) \cdot A) \\
= \; & ((1+1) \cdot A\, A) \; (1 \cdot A\, A) \\
= \; & (1 \cdot A\, A\, A) \; (A\, A) \\
= \; & (A\, A\, A) \; (A\, A) \\
= \; & AAA\, AA \\
= \; & AAAAA \\
= \; & \text{Esel Esel Esel Esel Esel}
\end{aligned}$$

Natürlich ist das nicht sonderlich spannend. Aber es geht nur um die grundlegende Sachen.

Ich möchte nun ganz einfach beginnen:

Lemma 38. *Es seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Ist $n_1 = n_2$ gilt*

$$n_1 + n_3 = n_2 + n_3$$
$$n_3 + n_1 = n_3 + n_2$$

Beweis. Zur ersten Behauptung: Es sei A ein Symbol, welches in sich und bezüglich den anderen Symbolen dieses Beweises widerspruchsfrei sei. Dann muss gelten

$$\begin{aligned}&(n_1 + n_3) \cdot A\\ \equiv &n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A\end{aligned}$$

Nun ist $n_1 = n_3$ gerade so definiert, dass gilt

$$n_1 \cdot A = n_2 \cdot A$$

Es muss gemäß der ersten Aussage des Lemma 3 über die Gleichheit von Teilsymbolen gelten, dass

$$n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A = n_2 \cdot A\, n_3 \cdot A$$

ist. Nun ist jedoch per Definition der Addition

$$n_2 \cdot A\, n_3 \cdot A = (n_2 + n_3) \cdot A$$

Da A fast beliebig ist, glaube ich schließen zu können, dass gelten muss

$$(n_1 + n_3) \cdot A = (n_2 + n_3) \cdot A$$

Also muss auch gemäß der Definition der Addition von natürlichen Zahlen gelten

$$n_1 + n_3 = n_2 + n_3$$

Damit glaube ich, den Beweis der ersten Behauptung erbracht zu.

Zur zweiten Behauptung: Es sei A ein Symbol, welches in sich und bezüglich den anderen Symbolen dieses Beweises widerspruchsfrei sei. Dann muss gelten

$$\begin{aligned}&(n_3 + n_1) \cdot A\\ \equiv &n_3 \cdot A\, n_1 \cdot A\end{aligned}$$

Nun ist $n_1 = n_3$ gerade so definiert, dass gilt

$$n_1 \cdot A = n_2 \cdot A$$

Es muss gemäß der zweiten Aussage des Lemma 3 über die Gleichheit von Teilsymbolen gelten, dass

$$n_3 \cdot A\, n_1 \cdot A = n_3 \cdot A\, n_2 \cdot A$$

ist. Nun ist jedoch per Definition der Addition

$$n_3 \cdot A\, n_2 \cdot A = (n_3 + n_2) \cdot A$$

Da A fast beliebig ist, glaube ich schließen zu können, dass gelten muss

$$(n_3 + n_1) \cdot A = (n_3 + n_2) \cdot A$$

Also muss auch gemäß der Definition der Addition von natürlichen Zahlen gelten

$$n_3 + n_1 = n_3 + n_2$$

Damit glaube ich, den Beweis der ersten Behauptung erbracht zu. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

LEMMA 39. *Es sei* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $n + 1 = 1 + n$.

BEWEIS. Es sei A ein Symbol, welches in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole dieses Beweises widerspruchsfrei ist. Dann gilt:

$$(n + 1) \cdot A = n \cdot A\, A$$

Gemäß dem Lemma 6 glaube ich, schließen zu können, dass gilt

$$n \cdot A\, A = A\, n \cdot A$$

Somit kann ich dann folgern

$$A\, n \cdot A = (1 + n) \cdot A$$

Somit gilt auch

$$(n + 1) \cdot A = (1 + n) \cdot A$$

Damit glaube ich, die Richtigkeit des Lemmas erbracht zu haben und beweise aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

KAPITEL 4

Warum sind die Axiome von Peano keine?

Die Kapitelübersicht von mir ist eine pure Anmaßung meinerseits. Der italienische Mathematiker Peano hat die folgenden Axiome bezüglich den natürlichen Zahlen aufgestellt (frei zitiert nach Heuser):

DEFINITION 40. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist wie folgt definiert:

(1) $1 \in \mathbb{N}$
(2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$
(3) $\forall n \in \mathbb{N}: n+1 \neq 1$.
(4) $\forall m, n \in \mathbb{N}: n+1 = m+1 \Rightarrow n = m$
(5) Es gilt

$$\begin{aligned} \forall n\mathbb{N} \quad : \quad & A(n) \in \Omega(n) \Rightarrow \\ & (A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1))) \Rightarrow A(n) \end{aligned}$$

Dieses Axiom möchte ich sprachlich genauer formulieren. Ist für alle natürlichen Zahlen n $A(n)$ eine Aussage, welche eventuell von n abhängt und und gilt $A(1)$ und kann ich zeigen, dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ die Richtigkeit von $A(n+1)$ folgt, dann muss für alle $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gelten.

Jetzt habe ich ein sprachliches Problem. Denn ich habe ja behauptet, diese Definition könne aus meiner Definition der Zahlen abgeleitet werden. Falls das so wäre, dann hätte ich jedoch nicht „Definition“ schreiben dürfen, sondern „Satz“ als Titel des Abschnitts schreiben müssen. Aber ich habe trotzdem „Definition“ geschrieben, da es eine Verbeugung vor dem Mathematiker Peano sein soll. Immerhin habe ich das Symbol $\mathbb{N}$ erst an dieser Stelle eingeführt. Ich möchte mir nun die Axiome von Peano zur Brust nehmen und beweisen:

LEMMA 41. *(„Beweis“ des ersten Axioms von Peano) Es sei A ein Symbol, welches in sich selbst und bezüglich den anderen Symbolen des Beweis widerspruchsfrei sei. Dann gilt:*

$$1 \cdot A = A$$

und somit gilt

$$1 \in \mathbb{N}$$

Beweis. So wie ich 1 weiter oben unter der Definition 33 als Metasymbol definiert habe, gilt definitionsgemäß

$$1 \cdot A = A$$

Also hat 1 die geforderte Eigenschaft. Damit kann ich den Beweis an dieser Stelle auch schon wieder beenden. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Ich möchte nun zeigen:
Weiter möchte weiter beweisen:

Lemma 42. *(„Beweis“ des zweiten Axioms von Peano) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei A ein in sich und gegenüber den anderen Symbolen widerspruchsfreies Symbol. Da n eine natürliche Zahl ist, muss gemäß dem der Definition 33

$$n \cdot A$$

eine Aneinanderreihung von endlichen Symbolen A sein. Also ist

$$n \cdot A\, A$$

wieder eine Aneinanderreihung von endlich vielen Symbolen

$$n \cdot A\, A = (n + 1) \cdot A$$

Das bedeutet jedoch, dass die Zahl $n+1$ wiederum ein Metasymbol ist, welche sinnvoll als natürliche Zahl gemäß der Definition 33 definierbar ist. Damit meine ich, auch den Beweis für diese Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Lemma 43. *(„Beweis“ des dritten Axioms von Peano) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n + 1 \neq 1$.*

Beweis. Es sei A ein Symbol, welches in sich selbst und gegenüber den anderen Symbolen des Beweises widerspruchsfrei sei. Weiter sei

$$n \in \mathbb{N}$$

Dann ist gemäß der Definition von $n + 1$

$$(n + 1) \cdot A \equiv n \cdot A\, A$$

Wie ich weiter oben unter dem Lemma 6 mühevoll zu zeigen versucht habe, muss dann gelten:

$$n \cdot A\, A = A\, n \cdot A$$

Gemäß dem ein dem Lemma 2 kann ich nun folgern, dass gilt

$$(n + 1) \cdot A = A\, n \cdot A$$

Somit kann ich gemäß der Definition 8 des Vergleichs von Symbolen kann ich darum schreiben:

$$A < A\,n \cdot A$$

und gemäß dem Satz 9 muss dann gelten

$$A \neq A\,n \cdot A$$

Dann kann auch nicht

$$A\,n \cdot A \neq A$$

gelten, da gemäß dem Lemma 2 ja die Symbolgleichheit eine Äquivalenzrelation ist. Also muss auch gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen auch nicht

$$n + 1 \neq 1$$

sein.Somit glaube ich, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Lemma 44. *(„Beweis" des vierten Axioms von Peano): Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, in Worten: m und n seien natürliche Zahlen. Dann muss gelten*

$$m + 1 = n + 1 \Rightarrow n = 1$$

Beweis. Es sei A das Metasymbol eines Symbols, welches in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Beweises widerspruchsfrei sei. Nun sei gemäß Voraussetzung

$$(m + 1) \cdot A = (n + 1) \cdot A$$

Dann muss nach Definition 25 der natürlichen Zahlen gelten

$$(m + 1) \cdot A = m \cdot A\,A = n \cdot A\,A = (n + 1) \cdot A$$

Da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 2 eine Äquivalenzrelation ist, kann ich schließen:

$$m \cdot A\,A = n \cdot A\,A$$

Gemäß dem Lemma 6 kann ich schreiben

$$m \cdot A\,A = A\,m \cdot A$$
$$n \cdot A\,A = A\,n \cdot A$$

Wiederum kann ich das Lemma 2 heranziehen, welches besagt, dass die Symbolgleichheit eine Äquivalenzrelation ist. Darum kann ich schreiben:

$$A\,m \cdot A = m \cdot A\,A = n \cdot A\,A = A\,n \cdot A$$

Also muss insgesamt gelten

$$A\,m \cdot A = A\,n \cdot A$$

Aufgrund der Definition **??** kann ich nun folgern, dass also auch gelten muss

$$m \cdot A = n \cdot A$$

Das bedeutet jedoch gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen und insbesondere deren Gleichheit, dass gelten muss

$$m = n$$

Also meine ich, dass ich endlich auch den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht habe. Darum erlaube ich mir an dieser Stelle, die weitere Beweisführung abbrechen zu können. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Ich möchte noch ein Lemma formulieren und beweisen, welches wichtig ist für den Beweis des Satzes der vollständigen Induktion:

Lemma 45. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann ist $n = 1$ oder es gibt eine natürliche Zahl m derart, dass gilt*

$$n = m + 1$$

Beweis. Es sei also $n \in \mathbb{N}$. Ist $n = 1$, dann ist der Beweis an dieser Stelle bereits erbracht. Ist jedoch $n \neq 1$, dann kann ich mindestens folgern, dass gilt

$$n < n + 1$$

Denn es sei A ein Symbol, welches in sich selbst und in Bezug auf die andere Symbole des Beweises widerspruchsfrei sei. Dann gilt gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen

$$n \cdot A\,A = (n + 1) \cdot A$$

gelten. Dies bedeutet jedoch, dass wirklich

$$n \cdot A < (n + 1) \cdot A$$

ist. Gemäß dem (überaus nützlichen) Lemma 6 muss gelten

$$n \cdot A\,A = A\,n \cdot A$$

Nun kann ich beiden zusammengesetzten Symbolketten ein A am Schluss entfernen. Dann müssen immer noch die gleichen Symbolketten links und rechts vom Gleichheitssymbol vorhanden sein müssen. Ebenfalls muss die Symbolkette $n \cdot A$ gemäß Voraussetzung mehr als ein Symbol A besitzen. Also muss es eine natürliche Zahl m derart existieren, dass gilt

$$n \cdot A = A\,m \cdot A$$

Also kann ich gemäß dem Lemma 6 wiederum schreiben:

$$A\,m \cdot A = m \cdot A\,A$$

Und es ist wiederum gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen wiederum

$$m \cdot A\,A = (m+1) \cdot A$$

Da die Gleichheit von Symbolketten transitiv ist, kann ich darum auch wiederum schreiben:

$$n \cdot A = (m+1) \cdot A$$

Also muss darum gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen wiederum gelten:

$$n = m + 1$$

Somit meine ich, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Satz 46. *Der Satz der vollständigen Induktion kann aus der elementaren Logik hergeleitet werden.*

Beweis. Angenommen, der Satz der vollständigen Induktion sei falsch. Es gäbe also eine Folge

$$\begin{aligned}(A_n) :& \mathbb{N} \to \Omega \\ & n \mapsto A_n\end{aligned}$$

derart, dass gelten würde

$$A_1$$

sei wahr und es gelte für alle natürlichen n

$$A_n \Rightarrow A_{n+1}$$

Nun gäbe es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass die Aussage A_m nicht wahr sein würde, also formal geschrieben:

$$\neg A_m$$

Nun möchte ich zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führen würde. Wäre $m = 1$ dann wäre also

$$\neg (A_m) \Leftrightarrow \neg (A_1)$$

Das wäre jedoch ein Widerspruch zur Aussage, dass die Aussage

$$A_1$$

wahr ist. Daraus kann ich darum folgern, dass die Aussage m nicht 1 sein kann. Nun gelte also mit $m \neq 1$ die Aussage

$$\neg (A_m)$$

Nun sei $W \equiv \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \neg (A_{n+1}) \right\}$. Wäre diese Menge nicht leer, dann müsste gemäß dem Satz 24

$$w \equiv \min W$$

existieren. Also müsste A_w wahr sein, so wie ja auch A_1wahr sein muss.

Wäre jetzt die Aussage A_W wahr, dann würde die Aussage

$$A_w \wedge \neg A_{w+1}$$

gelten. Das wäre jedoch gemäß dem Satz **??** der Negation der Implikation äquivalent zur Aussage

$$\neg (A_p \Rightarrow A_{p+1})$$

was jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung

$$A_p \Rightarrow A_{p+1}$$

ist. Somit muss die Menge W leer sein. Das bedeutet jedoch, dass die Aussage A_{n+1} für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ wahr sein muss. Und da ja auch A_1 wahr ist, muss die Behauptung also für alle natürlich Zahlen n zutreffen.

Darum glaube ich an dieser Stelle, den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Natürlich ist es Dir überlassen, ob Du den Beweis akzeptierst oder nicht. In der üblichen mathematischen Literatur wird der Satz der vollständigen Induktion als Axiom (unbewiesene, jedoch als wahr erachtete Aussage) betrachtet und darum überhaupt nicht bewiesen.

Der Satz der vollständigen Induktion ist ein Beispiel für eine Induktion, also als Herleitung eines allgemeinen Prinzips ausgehend von Einzelfällen. Als Gegenprinzip der Deduktion kann der Satz **??** der Schlussfolgerung angesehen werden.

Nun möchte ich mir noch den letzte zu beweisende Teil der Axiome von Peano vornehmen.

Lemma 47. *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m+1 = n+1$. Dann ist $m = n$.*

Beweis. Gemäß dem Satz 51 der Kommutation der Addition gilt

$$m + 1 = 1 + m$$

sowie

$$n + 1 = 1 + n$$

Also muss für ein beliebiges Symbol A gelten

$$\begin{aligned} & (m+1) \cdot A \\ = \quad & (1+m) \cdot A \\ = \quad & A\, m \cdot A \\ = \quad & (n+1) \cdot A \\ = \quad & A\, n \cdot A \end{aligned}$$

Also muss gemäß der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen gelten:

$$m \cdot A = n \cdot A$$

sein. Somit kann ich behaupten, dass auch

$$m = n$$

sein muss. Da ich nun zeigen kann, dass gilt

$$n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$$

Also kann ich gemäß dem Satz **??** folgern, das aus

$$n \neq m \Rightarrow n + 1 \neq m + 1$$

■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Ich möchte nun überprüfen, ob die unter der Definition 3 definierte Gleichheit von Symbolen eine Äquivalenzrelation ist. Das Besondere daran ist, dass ich davon ausgehe, das jedes Symbol (egal ob es aus einem oder mehreren Symbolen zusammengesetzt ist) aus einer endlichen Anzahl von Symbolen besteht. Damit kann ich jedoch bereits mit der vollständigen Induktion arbeiten.

KAPITEL 5

Welche anderen Arten von Zahlen existieren?

Zuerst einmal: Es gibt nicht „die Zahlen“. Es gibt verschiedene Arten von Zahlen. An dieser Stelle möchte ich diese zuerst aufzählen und beschreiben, wo diese verwendet werden:

- die **natürlichen Zahlen**. Das tönt so harmlos: „natürliche Zahlen“. Was wäre dann das Gegenteil? „Künstliche Zahlen“? „Natürlich“ meint nicht, dass diese Zahlen von Bäumen gepflückt werden könnten oder dass sie sonst in der „Natur“ vorkommen würden. „Natürliche Zahlen“ sind diejenige Zahlen, welche im Laufe der menschlichen Entwicklung zuerst gelernt werden. Natürlich hätte ich Lust, bereits die ganze Litanei herunter zu beten, was dann natürliche Zahlen sind. Aber ich denke, das würde nur verwirren. Also begnüge ich mich damit, Beispielsweise von natürlichen Zahlen aufzuzählen: Es sind dies beispielsweise 2, 1, 7, 8. Ist n das Symbol einer natürlichen Zahl, so ist $n+1$ ebenfalls ebenfalls eine natürliche Zahl. Ist beispielsweise 12034 eine natürliche Zahl, dann ist ebenfalls $12035 = 12034 + 1$ eine natürliche Zahl. Keine natürliche Zahl sind jedoch -4 oder 1.4, geschweige denn $\sqrt{18}$. Doch zurück zur menschlichen Entwicklung. „Ein Elefant“ kann verstanden werden als Beschreibung eines Dickhäuters, von welchem der Name nicht so wichtig ist. Oder aber „ein Elefant“ ist in dem Sinn gemeint, als dass nicht zwei oder gar 33 Elefanten gemeint sind. Dann ist „ein“ ein Zahlwort. Ich könnte im zweiten Fall schreiben „1 Elefant“. Dann wäre es klarer.
- die **ganzen Zahlen**. Die bekanntesten ganzen Zahlen sind sicher diejenigen, welche in den Wetterprognosen mitgeteilt werden - sofern es im betreffenden Gebiet überhaupt genügend kalt wird und nicht Fahreinheit als Temperatureinheit verwendet wird. Wenn also die Meteorologin im Fernseher mitteilt, dass es -14°C in der Nacht wird, dann meint sie in erster Linie: Wäre es 15°C wärmer, dann wäre es 1°C kalt. Die einfachste ganze Zahl, welche nicht gleichzeitig eine natürliche Zahl ist, ist übrigens 0. 0 hat die Eigenschaft, dass $0+1 = 1$ ist. Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.
- die **rationalen Zahlen**. „Rational“ heißt meines Wissens „vernünftig“. Diese traten früher oft als Kuchendiagramme in der Mathematik auf. Ich hatte zwar Kuchen gerne, jedoch fand

ich diese Kuchendiagramme nicht schön. Irgendwie hatte ich immer das Gefühl, dass mir irgendwie der Speck durch den Mund gezogen würde. Wenn schon Kuchen, dann bitte solche, welche essbar sind! Ich weiß nicht, wie rationale Zahlen heute den Kindern schmackhaft gemacht werden. Noch ein Wort zum Wort „vernünftig“. Vernünftig bedeutet in diesem Fall, das diese Zahlen überhaupt als Folge von Ziffern darstellbar sind. Das tönt vielleicht für Dich selbstverständlich - ist es jedoch nicht. Jede ganze Zahl ist eine rationale Zahl.
- die **irrationalen Zahlen**. Diese Zahlen sind „unvernünftig“. Die üblichste irrationale Zahl ist $\sqrt{2}$ (ausgesprochen: „Wurzel aus 2“). Sie lässt sich so darstellen: . Die Wurzel aus 2 lässt sich zwar graphisch sehr gut beschreiben (als Länge der beiden Diagonalen von Quadraten). Jedoch mussten bereits die alten Griechen zu ihrem Leidwesen erkennen, dass es keine rationale Zahl gibt, deren Wert exakt $\sqrt{2}$ beträgt. Jede rationale Zahl ist eine irrationale Zahl.
- die **komplexen Zahlen**. Diese Zahlen müssten eigentlich „noch unvernünftiger“ oder „super-irrational“ heißen. Das tun sie jedoch nicht. Aber gibt es solche komplexen Zahlen, welche es „gar nicht gibt“. Der Prototyp einer irrationalen Zahl ist $\sqrt{-1}$. Wenn Du denkst: „Kein Problem, das ist ja 1“, dann würdest Du etwa so denken, wie ich wahrscheinlich gedacht habe, als ich $\sqrt{-1}$ zuerst gesehen habe. Aber es ist nicht 1. Es kann gar keine irrationale Zahl geben, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihr Wert gerade gleich demjenigen von $\sqrt{-1}$ entspricht. Jede irrationale Zahl ist eine komplexe Zahl.

Aber es gibt daneben noch weitere Zahlen. Und zwar solche im mathematischen als auch solche im weiteren Sinn. Die übrigen Zahlen im mathematischen Sinn möchte ich an dieser Stelle nicht mehr erwähnen, da diese nicht das Thema dieser Einführung sind. Sie sind doch eher speziell.

Die Zahlen im weiteren Sinn sind zwar überall vorhanden. Jedoch sind werden diese nicht unbedingt als solche verstanden. Mir kommen dabei vor allem Zahlen in der Informatik in den Sinn. Auch wenn dies für Dich ein wenig abwegig erscheinen sollte. Ich möchte dabei ein Beispiel machen: 32-Bit lange ganze Zahlen. Das sind die Zahlen

$$-2^{31} = -2147483648$$

bis

$$2^{31} - 1 = 2147483647$$

Diese Zahlen werden häufig in Computern gebraucht.

KAPITEL 6

Schlussfolgerungen aus den Axiomen von Peano

Es kommt jetzt ein wenig Knochenarbeit, welche jedoch durchaus reizvoll ist. Ich möchte das Prinzip der vollständigen Induktion immer wieder anwenden.

Der erste Satz ist derart einfach, dass er schon wieder sehr schwierig wird. Denn die Schwierigkeit besteht darin, dass Du Dir die Gleichheit neu denken musst.

Doch zuerst die Definition der Addition von natürlichen Zahlen:

Definition 48. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ sowie A ein Symbol. Dann sei

$$(n+m) \cdot A \equiv n \cdot A\, m \cdot A$$

Ich möchte nun zeigen:

Satz 49. *Es seien* $n, m \in \mathbb{N}$. *Dann ist*

$$n + (m+1) = (n+m) + 1$$

Nebenbemerkung: Mir fällt übrigens auf, dass oft von „$n, m \in \mathbb{N}$“ gesprochen wird: Im Alphabet ist ja der Buchstabe „m“ vor dem Buchstaben „n“. Der Grund, wieso dies so geschrieben wird, ist meines Erachtens der, weil „n“ wohl die Abkürzung für „natürliche Zahl“ ist. Würde nun der nächste Buchstabe genommen, dann müsste „$n, o \in \mathbb{N}$“ geschrieben werden. Jedoch ist o kein gutes Beispiel für einen Variablennamen. Darum kommt es meiner Ansicht nach zu dieser speziellen Reihenfolge. Jetzt aber zum Beweis des Satzes:

Beweis. Es sei A die Bezeichnung eines Symbols oder Metasymbols, welches in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Beweises widerspruchsfrei ist. Dann gilt gemäß der Definition 37 der Addition der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} & (n+(m+1))\, A \\ = \quad & n \cdot A\ (m+1) \cdot A \end{aligned}$$

Gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen muss dann gelten

$$(m+1) \cdot A = m \cdot A\, A$$

Also kann ich gemäß dem zweiten Teil des Lemmas 3 über die Gleichheit von Teilsymbolen folgen, dass gilt:

$$n \cdot A\ (m+1) \cdot A = n \cdot A\, m \cdot A\, A$$

Die Gleichheit ist also im hinteren Teil des Symbols vorhanden. Und da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation und somit auch transitiv ist, kann ich daraus folgern, dass gilt

$$(n + (m + 1))\, A = n \cdot A\, m \cdot A\, A$$

Nun kann ich die Definition der Addition zweier natürlicher Zahlen wieder rückgängig machen. Ich beziehe mich dabei auch ausdrücklich darauf, dass gemäß dem Satz 4 die Verkettungen von Symbolen assoziativ sind. Ich erhalte

$$n \cdot A\, m \cdot A = (n + m) \cdot A$$

und kann wiederum aufgrund des Lemmas 3 über die Gleichheit von Teilsymbolen folgen, dass gilt:

$$n \cdot A\, m \cdot A\, A \quad = \quad (n + m) \cdot A\, A$$

Die Gleichheit ist jetzt jedoch auf dem vorderen Teil des Symbols vorhanden. Wiederum gemäß dem Lemma 55, welches besagt, dass die Äquivalenz und somit auch transitiv ist, kann ich daraus folgern, dass gilt

$$(n + (m + 1)) \cdot A = (n + m) \cdot A\, A$$

Also kann ich gemäß der Definition 25 der natürlichen Zahlen wiederum schreiben

$$(n + m) \cdot A\, A \quad = \quad ((n + m) + 1) \cdot A$$

Und noch ein letztes Mal kann ich das Lemma 55, welches besagt, dass die Äquivalenz und somit auch transitiv ist, zu Hilfe nehmen und erhalte die Gleichheit

$$(n + (m + 1)) \cdot A = ((n + m) + 1) \cdot A$$

Nun kann ich aufgrund der Definition 25 der natürlichen Zahlen folgern, dass gelten muss:

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

Langer Rede kurzer Sinn behaupte ich, damit den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Weiter geht es mit Definitionen:

Definition 50. Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$n_1 < n_2$$

falls es ein $n_3 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$n_2 = n_1 + n_3$$

ist. Weiter bedeute

$$(n_1 \leq n_2) \Leftrightarrow n_1 < n_2 \vee n_1 = n_2$$

SATZ 51. *Die Addition von natürlichen Zahlen ist assoziativ. Es seien also n_1, n_2 sowie $n_3 \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$$

BEWEIS. Der Beweis habe ich für $n_3 = 1$ bereits erbracht. Es ist ja gemäß dem vorhergehenden Satz 49

$$n_1 + (n_2 + 1) = (n_1 + n_2) + 1$$

Nun gelte der Satz für $n_3 \in \mathbb{N}$. Es sei also

$$n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$$

Dann gilt gemäß dem vorhergehenden Satz 49

$$n_2 + (n_3 + 1) = (n_2 + n_3) + 1$$

Gemäß dem Lemma 38 über Gleichheit der Addition mit gleichen Zahlen kann ich daraus schließen, dass gilt:

$$\begin{aligned} & n_1 + (n_2 + (n_3 + 1)) \\ = \quad & n_1 + ((n_2 + n_3) + 1) \end{aligned}$$

Jetzt kann ich die Induktionsvoraussetzung für n_1 sowie $n_2 + n_3$ verwenden. Ich erhalte

$$\begin{aligned} & (n_1 + (n_2 + n_3)) + 1 \\ = \quad & n_1 + ((n_2 + n_3) + 1) \end{aligned}$$

Weiter kann ich den Satz 49 der Assoziativität der Addition mit 1 auf die Zahlen n_1 sowie $(n_2 + n_3)$ anwenden. Ich erhalte die Gleichheit

$$n_1 + ((n_2 + n_3) + 1) = (n_1 + (n_2 + n_3)) + 1$$

Nun kann ich endlich die Voraussetzung der Induktionsschrittes anwenden. Es muss also gelten

$$n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$$

Darum kann gemäß dem Lemma 38 über Gleichheit der Addition mit gleichen Zahlen schreiben:

$$(n_1 + (n_2 + n_3)) + 1 = ((n_1 + n_2) + n_3) + 1$$

Nun kann ich den Satz 49 über die Addition mit 1 sozusagen rückwärts anwenden. Es gilt

$$((n_1 + n_2) + n_3) + 1 = (n_1 + n_2) + (n_3 + 1)$$

Da die Gleichheit von Symbolen gemäß dem Satz 55 eine Äquivalenzrelation und gemäß der Definition **??** der Äquivalenzrelation auch transitiv ist, kann ich darum schließen

$$n_1 + (n_2 + (n_3 + 1)) = (n_1 + n_2) + (n_3 + 1)$$

Also habe ich den Induktionsschritt und somit die ganze Behauptung erbracht. Darum erlaube ich mir, an dieser Stelle die Beweisführung zu beenden. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Nachbemerkung: Eigentlich hätte ich einen einfacheren Beweis verwenden können, welcher nicht auf der vollständigen Induktion basiert. Denn die Assoziativität der Addition von natürlichen Zahlen kann mit meiner Definition der natürlichen Zahlen auf die Assoziativität von Symbolketten zurückgeführt werden. Ich probiere darum einen zweiten

Beweis. Es seien die natürlichen Zahlen n_1, n_2 sowie n_3 gegeben. Weiter sei A ein Metasymbol, welches in sich selbst und in Bezug auf die anderen Symbole des Beweises widerspruchsfrei seien. Dann kann ich gemäß der Definition 37 der Addition der natürlichen Zahlen schreiben

$$((n_1 + n_2) + n_3) \cdot A = (n_1 + n_2) \cdot A\, n_3 \cdot A$$

Gemäß der gleichen Definition 37 der Addition der natürlichen Zahlen kann ich schreiben

$$(n_1 + n_2) \cdot A = n_1 \cdot A\, n_2 \cdot A$$

Nun muss gemäß ersten Teil des Lemmas 3 über die Gleichheit von Teilsymbolen gelten

$$(n_1 + n_2) \cdot A\, n_3 \cdot A = n_1 \cdot A\, n_2 \cdot A\, n_3 \cdot A$$

Da die Gleichheit von Symbolketten gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation ist und gemäß der Definition **??** der Äquivalenz somit auch transitiv ist, kann ich schließen, das gelten muss:

$$((n_1 + n_2) + n_3) \cdot A = n_1 \cdot A\, n_2 \cdot A\, n_3 \cdot A$$

Weiter nutze ich aus, dass die Verknüpfung von Symbolketten gemäß dem Lemma 4 assoziativ ist. Also kann ich wiederum gemäß der Definition 37 der Addition von natürlichen Zahlen und gemäß dem Umstand, dass die Gleichheit von Symbolketten gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation ist und gemäß der Definition **??** der Äquivalenz somit auch symmetrisch ist:

$$n_2 \cdot A\, n_3 \cdot A = (n_2 + n_3) \cdot A$$

Und wiederum gemäß dem zweiten Teil des Lemmas 3 der Gleichheit von Teilsymbolen muss gelten

$$n_1 \cdot A\, n_2 \cdot A\, n_3 \cdot A = n_1 \cdot A\ (n_2 + n_3) \cdot A$$

Da die Gleichheit von Symbolketten gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation ist und gemäß der Definition **??** der Äquivalenz somit auch transitiv ist, kann ich schließen, das gelten muss:

$$((n_1 + n_2) + n_3) \cdot A = n_1 \cdot A\ (n_2 + n_3) \cdot A$$

Nun kann ich noch einmal die Definition der 37 der Addition von natürlichen Zahlen heranziehen und kann darum schreiben

$$(n_1 + (n_2 + n_3)) \cdot A = n_1 \cdot A \ (n_2 + n_3) \cdot A$$

Da die Gleichheit von Symbolketten gemäß dem Lemma 55 eine Äquivalenzrelation und infolge dessen aufgrund der Definition **??** der Äquivalenzrelation auch symmetrisch ist, kann ich auch schreiben:

$$n_1 \cdot A \ (n_2 + n_3) \cdot A = (n_1 + (n_2 + n_3)) \cdot A$$

Schlussendlich kann ich noch einmal die Transitivität der Gleichheit von Symbolketten, welche gemäß dem Lemma 55 der Äquivalenzrelation und Definition **??** der Äquivalenzrelation vorhanden sein muss, verwenden um zu zeigen, dass gilt:

$$(n_1 + (n_2 + n_3)) \cdot A = (n_1 + (n_2 + n_3)) \cdot A$$

Damit glaube ich, erneut den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung erbracht zu haben und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Und was ist die Kommutation? Die Kommutation ist eines der zentralen Gedanken in der Mathematik. Angenommen, Du möchtest am Morgen aus dem Haus und hast es eilig. Sollst Du zuerst hastig eine Tasse körperwarme Milch trinken und anschließend die Schuhe anziehen oder zuerst die Schuhe anziehen und anschließend die körperwarme Tasse Milch trinken? Ich denke, da spielt die Reihenfolge keine Rolle. Es gibt jetzt in der Mathematik viele Vorgänge, bei welchen es auf die Reihenfolge nicht darauf ankommt. Dann heißen diese Vorgänge kommutativ. Ein bekannteres Beispiel dafür ist die Addition von zwei Zahlen. In diesem Fall spielt es keine Rolle, ob 5 mit 3 oder 3 mit 5 addiert wird. Also wird die Addition kommutativ geheißen. Aber nicht alle Operationen sind so lieb! Um das Alltagsbeispiel weiter zu spinnen: Wenn Du anstatt Dich gefragt hättest, ob Du zuerst ein bestrichenes Brot hättest essen oder ob Du zuerst die Schuhe hättest anziehen sollen, dann sind diese zwei Vorgänge unter Umständen nicht kommutativ. Es hängt dann davon ab, ob Du mit dem Rad, mit dem Auto oder zu Fuß und dann mit der Straßenbahn, dem Bus oder dem Zug unterwegs bist. Hast Du Deine Hände frei, dann gewinnst Du Zeit, falls Du zuerst die Schuhe bindest und dann im Gehen das gestrichene Brot isst. Bist Du jedoch mit dem Rad oder mit dem Auto unterwegs, dann spielt es keine Rolle, ob Du zuerst die Schuhe bindest oder zuerst das bestrichene Brot isst (unter der Bedienung, dass Du beim Fahrradfahren kein Brot isst).

Ich möchte weiter mit der vollständigen Induktion arbeiten:

Satz 52. *Die Addition von natürlichen Zahlen ist kommutativ. Es ist also für alle* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$n_2 + n_1 = n_1 + n_2$$

Beweis. Den Beweis möchte ich in zwei Teilen gestalten. Es sei A ein Symbol, welches in sich selbst und mit den anderen Symbolen dieses Beweises widerspruchsfrei sei. Es sei $n_2 = 1$. Gemäß der Definition der Addition kann ich schreiben

$$(n_1 + 1) \cdot A = n_1 \cdot A\, A$$

Dann muss zusammen mit dem Lemma 39 gelten

$$\begin{aligned} & (n_1 + 1) \cdot A \\ = \;& n_1 \cdot A\, A \\ = \;& A\, n_1 \cdot A \\ = \;& (1 + n_1) \cdot A \end{aligned}$$

Somit kann ich folgern, dass gilt

$$n_1 + 1 = 1 + n_2$$

Nun sei $n_2 \neq 1$. Ich möchte nun zeigen, dass es dann für $n_4 \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_4 < n_2$ gelten muss

$$(n_1 + n_2) \cdot A = (n_2 - n_4) \cdot A\, n_1 \cdot A\; (n_4) \cdot A$$

Den Anfang für $n_3 = 1$ sei wie folgt gemacht

$$\begin{aligned} & (n_1 + n_2) \cdot A \\ = \;& n_1 \cdot A\, n_2 \cdot A \\ = \;& n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A\, A \end{aligned}$$

Nun muss gemäß dem Lemma 39 wiederum anwenden, diesmal jedoch auf das Symbol

$$n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A$$

Ich erhalte die Aussage

$$n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A = A\, n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A$$

Dann kann ich genau die gleiche Aussage beliebig lange durchspielen, sofern n_3 ungleich 1 ist. Also erhalte ich für solche beliebigen n_3 die Aussage

$$(n_1 + n_2) \cdot A = (n_2 - n_3) \cdot A\, n_1 \cdot A\, n_3 \cdot A$$

da die Summe $n_2 - n_4 + n_4$ immer gleich viel sein muss, nämlich n_2. Denn jedes Symbol, welches ich vom Symbol

$$n_2 \cdot A$$

wegnehme, muss ich links vom Symbol $n_1 \cdot A$ wieder einfügen. Ist jedoch

$$n_3 = 1$$

dann kann ich das Lemma 39 ein letztes Mal anwenden. Es resultiert

$$\begin{aligned} & (n_1 + n_2) \cdot A \\ = \; & (n_2 - 1) \cdot A \, n_1 \cdot A \, 1 \cdot A \\ = \; & (n_2 - 1) \cdot A \, n_1 \cdot A \, A \\ = \; & (n_2 - 1) \cdot A \, A \, n_1 \cdot A \\ = \; & n_2 \cdot A \, n_1 \cdot A \end{aligned}$$

was jedoch die Behauptung ist. ∎

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Lemma 53. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n + 1 \neq 1$.*

Beweis. Ist $n = 1$, dann möchte ich zeigen, dass

$$1 + 1 \neq 1$$

ist. Es sei A ein Symbol für ein beliebiges Symbol, welches jedoch nicht leer sein darf. Dann ist

$$\begin{aligned} 1 \cdot A &\equiv A \\ (1 + 1) \cdot A &\equiv 1 \cdot A \, A = A \, A \end{aligned}$$

Da jedoch gemäß der Definition **??** gelten muss

$$A \neq A \, A$$

kann darum auch nicht

$$1 = 1 + 1$$

sein. Denn 1 und 1+1 habe ich ja als Metasymbole definiert. Und wenn die erzeugen Symbole nicht gleich sind, können es auch die erzeugenden Metasymbole nicht sein.

Es sei jetzt $n \in \mathbb{N}$. Gemäß der Konstruktion von natürlichen Zahlen muss das Symbol

$$(n + 1) \cdot A$$

mindestens das Symbol

$$A \, A$$

enthalten. Also kann ich gemäß der Definition **??** wiederum folgern, dass

$$1 \cdot A \equiv A \neq (n + 1) \cdot A$$

und darum ebenso

$$1 \neq n + 1$$

sein muss. Wiederum muss dies gelten, weil 1 sowie $n + 1$ als Metasymbole definiert sind. Wenn dann die erzeugten Symbole nicht gleich sind, können auch die erzeugenden Metasymbole auch nicht gleich sein. Darum habe ich meines Erachtens das ganze Lemma bewiesen. ∎

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

LEMMA 54. *Es seien A sowie B Metasymbole, welche gleich seien. Dann müssen die von A respektive B symbolisierten Symbolen aus gleich vielen einzelnen Symbolen zusammengesetzt sein.*

BEWEIS. Das ist wieder so eine Fingerübung, welche daraus hinausläuft, dass Du zwar weniger über die Gleichheit von Symbolen, jedoch mehr über die vollständige Induktion erfahren kannst. Es seien also A und B Metasymbole und es sei $A = B$. Das von A symbolisierte Symbol sei aus einem einzelnen Symbol aufgebaut. Dann muss gemäß der Definition **??** auch B aus einem Symbol aufgebaut sein. Nun gelte die Behauptung für alle Symbole, welche aus $n \in \mathbb{N}$ Symbolen aufgebaut sei. Weiter sei A ein Symbol, welches aus $n + 1$ Symbolen aufgebaut sei. Also muss ein Metasymbol A_{n+1} derart geben, dass das durch A_{n+1} symbolisierte Symbol aus einem Symbol aufgebaut ist. Ebenfalls muss es ein Metasymbol A_n derart derart geben, dass das durch A_n symbolisierte Symbol aus n Symbolen besteht. Weiter sei $A = A_{n+1}\, A_n$. Nun sei $A = B$. Gemäß der Definition **??** muss darum das durch B symbolisierte Symbol ebenfalls mit dem Symbol A_{n+1} beginnen. Wenn B keine weitere Symbole mehr enthalten würde, dann könnte B nicht mehr gleich A sein. Also muss auch das Symbol B_n welches entsteht, indem beim Symbol B das erste Symbol (A_{n+1}) entfernt wird ebenfalls gleich demjenigen von A_n symbolisierten Symbol sein. Also muss gemäß der Induktionsvoraussetzung die Anzahl der Symbole von A_n gleich derjenigen von B_n sein. Das sind jedoch gemäß der Induktionsvoraussetzung n Symbole. Also hat das durch B symbolisierte Symbol ebenfalls $n+1$ Symbole besitzen. Damit ist jedoch die Induktionsvererbung und somit der ganze Induktionsbeweis erbracht. Da gemäß der Definition von Symbolen alle Symbole aus endlich viele Symbolen zusammengesetzt sind, halte ich den Beweis für erbracht. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>
Auch das folgende Lemma ist eigentlich eine Zumutung.

LEMMA 55. *Die unter der Definition 3 festgelegte Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation.*

BEWEIS. Es sei A das Symbol für ein Symbol. Dann ist $A = A$. Denn besteht das von A symbolisierte Symbol aus einem einzelnen Symbol, dann muss das Symbol gleich dem Symbol selbst sein. Angenommen, die Anzahl der Symbole, aus welchen A zusammengesetzt sei, sei $n \in \mathbb{N}$ und die Gleichheit von $A = A$ sei bewiesen. Besteht A jedoch aus $n + 1$ Symbolen, dann kann ich schreiben

$$A = A_{n+1}\, A_n$$

Das Symbol A_n besteht dabei aus n Symbolen, das Symbol A_{n+1} ist aus einem Symbol aufgebaut. Dann muss gemäß der Induktionsverankerung und der Voraussetzung der Induktionsvererbung gelten, dass

$$A_{n+1} = A_{n+1}$$

sowie

$$A_n = A_n$$

ist. Also kann ich gemäß der Definition 3 der Gleichheit von Symbolen schließen, dass

$$A_{n+1}\, A_n = A_{n+1}\, A_n$$

ist. Also muss die Behauptung auch für Symbole A gelten, welche $n+1$ Symbole besitzen. Da gemäß Voraussetzung alle Symbole aus endlich vielen Elementen aufgebaut sind, glaube ich schließen zu dürfen, dass dies für alle Symbole gelten muss. Nun seien A und B Symbole von Symbolen, wobei

$$A = B$$

sei. Falls A ein Symbol symbolisiert, dann muss gemäß der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen das Symbol B ebenfalls ein Symbol symbolisieren. Also müssen die beiden Symbole identisch sein. Es sei C das Symbol welches dieses gemeinsame Symbol symbolisiere. Also ist, da jedes Symbol gleich zu sich selbst ist.

$$C = C$$

Darum kann ich auch schreiben

$$B = A$$

Die Behauptung sei jetzt für $n \in \mathbb{N}$ Symbole bewiesen. Zeigt sowohl A wie auch B auf Symbole, welche auf $n \in \mathbb{N}$ aufgebaut sind, dann muss gelten, dass aus

$$A = B$$

ebenfalls

$$B = A$$

folgt. Nun sei A ein Symbol, welches ein Symbol symbolisiert, welches aus $n + 1$ Symbolen aufgebaut ist. Also muss gelten

$$A = A_{n+1}\, A_n$$

wobei A_{n+1} ein Symbol symbolisiert, welches aus einem Symbol aufgebaut ist. A_n ist ein Symbol, welches aus n Symbolen aufgebaut ist. Gemäß dem Lemma 54 muss ebenfalls gelten

$$B = B_{n+1}\, B_n$$

wobei B_n ebenfalls aus n Symbolen aufgebaut ist. Also muss aufgrund der Definition der Gleichheit von Symbolen gelten, dass

$$A_{n+1} = B_{n+1}$$

Da nun A_n aus n Symbolen zusammengesetzt ist, kann ich aufgrund der Induktionsvoraussetzung folgern, dass

$$A_n = B_n$$

sein muss und A_n wie auch B_n aus n Symbolen zusammengesetzt sein müssen. Weiter kann ich aufgrund der Induktionsvoraussetzung ebenfalls folgern, dass

$$B_{n+1} = A_{n+1}$$

sowie

$$B_n = A_n$$

gelten muss. Das bedeutet jedoch auch, dass

$$B = B_{n+1}\, B_n = A_{n+1}\, A_n = A$$

sein muss. Also habe ich die Symmetrie der Gleichheit von Symbolen gezeigt.

Nun kommt die Frage der Transitivität der Gleichheit von Symbolen. Es seien A, B sowie C Metasymbole. Weiter sei $A = B$ sowie $B = C$. Das von A symbolisierte Symbol bestehe aus einem Symbol bestehe aus einem Symbol. Also muss auch B gemäß der Definition von Symbolen aus einem Symbol bestehen. Da $B = C$ ist, muss gemäß der Definition von Symbolen ebenfalls C aus einem Symbol bestehen. Wäre nun das von C symbolisierte Symbol ungleich dem von A symbolisierten Symbol, dann müsste, da $B = C$ ist, auch das von B symbolisierte Symbol ungleich dem von A symbolisierten Symbol sein. Das ist jedoch gemäß der Voraussetzung über A und B nicht wahr. Also muss das von C symbolisierte Symbol gleich dem von A symbolisierten Symbol sein. Darum glaube ich, schreiben zu können, dass

$$A = C$$

ist. Nun sei die Behauptung für Symbolen bewiesen, welche aus $n \in \mathbb{N}$ Symbolen bestehen. Besteht als A aus n Symbolen und ist

$$A = B$$

sowie

$$B = C$$

dann muss auch

$$A = C$$

sein. Nun bestehe A aus $n + 1$ Symbolen. Also muss es ein Symbole A_{n+1} sowie A_n derart geben, dass

$$A = A_{n+1}\, A_n$$

Dabei besteht A_{n+1} aus einem Symbol und A_n aus n Symbolen. Nun sei

$$A = B$$

Gemäß dem Lemma 54 muss B ebenfalls aus $n+1$ Symbolen bestehen. Also kann ich wieder schreiben

$$B = B_{n+1}\, B_n$$

sein. Wobei B_{n+1} aus einem Symbol und B_n aus n Symbolen besteht. Da $B = C$ ist, muss gemäß dem Lemma 54 wiederum gelten, dass C wiederum aus $n+1$ Symbolen bestehen. Also kann ich wiederum schreiben

$$C = C_{n+1}\, C_n$$

Nun kann ich schließen, dass aufgrund der Definition **??**der Gleichheit von Symbolen gelten muss:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= B_{n+1} \\ B_{n+1} &= C_{n+1} \\ A_n &= B_n \\ B_n &= C_n \end{aligned}$$

Nun sind A_n, B_n, C_n, A_{n+1}, B_{n+1} wie auch C_{n+1} Metasymbole, welche auf Symbole verweisen, welche aus höchstens n Symbolen zusammengesetzt sind. Darum kann ich aufgrund der Induktionsvoraussetzung und der Induktionsverankerung schließen, dass gelten muss

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= C_{n+1} \\ A_n &= C_n \end{aligned}$$

Somit muss aufgrund der Definition **??** der Gleichheit von Symbolen schließen, dass

$$A = C$$

ist. Somit hätte ich den Induktionsschritt und damit auch den ganzen Induktionsbeweis erbracht. Nun ist also klar, dass die Gleichheit von Symbolen ebenfalls transitiv sein muss. Damit hätte ich jedoch (endlich) den ganzen Induktionsbeweis erbracht. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Was jetzt kommt, ist einerseits sehr einfach - andererseits äußerst kompliziert. Um was geht es? Ich habe die Gleichheit von natürlichen Zahlen habe ich unter dem Kapitel 3 festgelegt. Nun möchte ich zeigen, dass diese Gleichheit wirklich eine Gleichheit im mathematischen Sinn

Satz 56. *Die Gleichheit von natürlichen Zahlen ist transitiv.*

Beweis. Es sei A ein beliebiges (jedoch „vernünftig“ gewähltes) Metasymbol sowie a_1, a_2 sowie $a_3 \in \mathbb{N}$ Weiter sei $a_1 = a_2$ und $a_1 = a_3$. Doch was bedeutet dies? Ist $a_1 = 1$, dann muss gelten

$$a_1 \cdot A \equiv A$$

Da nun

$$a_1 \cdot A = a_2 \cdot A$$

sein soll, muss auch gelten

$$a_2 \cdot A = A$$

Daraus kann ich schließen, dass gelten muss

$$a_2 = 1$$

Da jetzt nach Voraussetzung gelten muss, dass $a_2 = a_3$ ist, muss also gelten

$$a_3 \cdot A = 1 \cdot A = A$$

Also kann ich erneut schließen, dass gilt

$$a_3 = 1$$

Somit wäre für $a_1 = 1$ die Behauptung bewiesen. Nun sei $n \in \mathbb{N}$ sowie $a_1 = n + 1$ und $a_2 = a_1$. Das Lemma 53 lehrt mich nun, dass $a_2 \neq 1$ sein muss. Also muss es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$a_2 = m + 1$$

geben. Also gilt

$$n + 1 = m + 1$$

Also kann ich gemäß dem Lemma 47 folgern, dass $m = n$ sein muss. Genau die gleiche Argumentation kann ich für a_3 anstellen. Aus

$$a_3 = a_2 = n + 1$$

kann ich gemäß dem Lemma 53 folgern

$$m = n$$

Also ist wiederum

$$a_3 = n + 1$$

Also kann ich wiederum schließen:

$$a_3 = a_1$$

Also hätte ich den Induktionsschritt und somit den ganzen Induktionsbeweis erbracht. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

Definition 57. Es seien n_1, n_2 natürliche Zahlen. Dann sei $n_1 \leq n_2$ genau dann, falls $n_1 = n_2$ ist oder es eine natürliche Zahl n_3 derart gibt, dass gilt

$$n_1 + n_3 = n_2$$

Umgangssprachlich kann ich den Sachverhalt so ausdrücken: n_1 ist genau dann kleiner oder gleich n_2, falls beide Zahlen identisch sind oder n_2 ein (direkter oder indirekter) Nachfolger von n_1 ist.

Es kommt jetzt, was kommen muss: Der Satz der logischen Induktion kann variiert werden.

Satz 58. *Es sei $A : \mathbb{N} \to \Omega$ Eine folge von Aussagen. Weiter gelte*

$$A(1)$$

Gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ die Aussage $A(m)$ und folgt daraus, dass $A(n+1)$ ebenfalls gilt, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$A(n)$$

Anstelle von $A(1)$ und $A(n)$ kann auch A_1 und A_n geschrieben werden.

Beweis. Der Beweis ist identisch zum Satz der logischen Induktion. Angenommen es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$, für welches die Aussage $A(n)$ nicht gelten würde, dann müsste die Menge $M_n \equiv \left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, \neg(A_m) \right\}$ ein Minimum haben. Es sei $m_0 \in \mathbb{N}$ diejenige natürliche Zahl, für welche diese Aussage zutrifft. Ist jetzt $m_0 = 1$, dann wäre die Aussage $\neg A_1$ nicht wahr. Im Widerspruch zur Voraussetzung. Wäre $m_0 > 1$, dann müsste es gemäß dem Lemma 45 ein $m_1 \in \mathbb{N}$ einen Vorgänger von m_0 mit

$$m_0 = m_1 + 1$$

geben. Für all $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m_0$ wären dann die Aussagen A_n wahr, für $A_{m(0)} = A_{m(1)+1}$ jedoch nicht. Das wäre dann aber gemäß dem Satz **??** die Negation der Implikation der Widerspruch zur Voraussetzung, dass $A_{m(0)}$ in diesem Fall trotzdem wahr sein müsste. Also kann es ein derartiges m_0 nicht geben. Somit muss die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr sein. Aus diesem Grund erachte ich den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung als erbracht und beende aus diesem Grund an dieser Stelle die weitere Beweisführung. ■

<includebackwardreferences>
<includeforwardreferences>

6.1. Über die Multiplikation

Eigentlich ist ja die Multiplikation fast schon einfacher zu verstehen. Aber das wurde auf Symbolebene gemacht. Ist als $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl sowie A die Bezeichnung für eine Symbol, welches in sich selbst nicht widersprüchlich ist, dann dann sei

$$1 \cdot A \equiv A$$

und

$$(n+1) \cdot A \equiv n \cdot A\,A$$

Jedoch ist diese Definition ist hier nicht gedacht. Es sei hier definiert:

Definition 59. Es sein $n, m \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann sei

$$1 \cdot n \equiv n$$

sowie

$$(m+1) \cdot n \equiv m \cdot n + n$$

6.2. Über die Anzahl der Begrüßungen

Eine der Anfängeraufgaben in Kombinatorik lautet:

AUFGABE 60. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n > 1$. Es treffen sich n Leute. Alle schütteln sich zur Begrüßung die Hände. Wie viele Begrüßungen per Hand gibt es?

Üblicherweise lautet die Lösung wie folgt:

LÖSUNG 61. Alle der n Personen schütteln allen anderen Personen (das sind $n-1$ Personen) die Hände (eine Person kann sich nicht selbst die Hände schütteln). Und da n Personen vorhanden sind, werden werden $n \cdot (n-1)$ Mal die Hände geschüttelt. Jedoch wird dabei dabei doppelt so viele Handbegrüßungen gezählt, wie wirklich vorhanden sind. Schüttelt Alice Bob die Hand, dann ist es das gleiche Ereignis, wie wenn Bob Alice die Hand schüttelt. Somit sind es in Tat und Wahrheit nur

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Handbegrüßungen.

Nun ist diese Lösung ja gut und recht. Nur leuchtet sie mir nicht so ganz ein. Ich habe immer den Verdacht, dass dabei „falsch gezählt“ werde. Darum möchte ich eine zweite Lösung präsentieren:

LÖSUNG 62. (Lösung mit vollständiger Induktion) Angenommen, es seien zwei Personen vorhanden. Dann können sich diese die Hand geben. Und das war es auch schon. Also wird in diesem Fall einmal die Hand geschüttelt. Es gilt aber (mit $n = 2$)

$$\frac{2 \cdot (2-1)}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Somit ist die Formel für $n = 2$ korrekt. Nun sei die Formel für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ korrekt. Es gelte also, dass bei einer Gruppe von n Personen

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Mal die Hände geschüttelt werden, falls sich alle per Handschlag begrüssen. Nun komme eine weiter Person dazu. Diese sieht also die n anderen Personen und schüttelt somit n Mal die Hand. Wie viele Hände wurden jetzt total geschüttelt? Es sind

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} + n$$

Ich möchte im Folgenden zeigen, dass dies gleich

$$\frac{(n+1) \cdot ((n+1)-1)}{2}$$

ist. An dieser Stelle rechne ich es einfach aus, ohne die Rechenregeln zu begründen. Mit

$$(n+1)-1 = n+1-1 = n$$

ist

$$\frac{(n+1)\cdot((n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

Es gilt weiter

$$(n+1)\cdot n = n\cdot(n+1)$$

und auch

$$n\cdot(n+1) = n^2+n$$

und darum auch

$$\frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Da die Gleichheit von natürlichen Zahlen transitiv ist, kann ich darum auch schreiben

$$\frac{(n+1)\cdot((n+1)-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Jetzt beginne ich von der anderen Seite her zu rechnen. Wie lässt sich

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}+n$$

vereinfachen?

$$n\cdot(n-1) = n^2-n$$

und darum auch

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Darum ist auch

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}+n$$

Es ist auch

$$n = \frac{2\cdot n}{2}$$

Und somit

$$\frac{n^2-n}{2}+n = \frac{n^2-n}{2}+\frac{2\cdot n}{2}$$

Weiter kann ich schreiben

$$\frac{n^2-n}{2}+\frac{2\cdot n}{2} = \frac{n^2-n+2\cdot n}{2}$$

Ebenso gilt

$$n^2-n+2\cdot n = n^2+n$$

und darum auch

$$\frac{n^2-n+2\cdot n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Zusammenfassend kann ich also schreiben, dass gilt

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Weiter oben habe ich jedoch gezeigt, dass auch gilt

$$\frac{(n+1) \cdot ((n+1) - 1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Also kann ich gemäß der Transitivität und Symmetrie der Gleichheit von natürlichen Zahlen schreiben, dass gilt

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{(n+1) \cdot ((n+1) - 1)}{2}$$

Damit habe ich gezeigt, dass wirklich auch Induktionsvererbung und somit die ganze Behauptung richtig ist.

Ich möchte noch ein paar Gedanken zur Lösung hinzufügen: Die sehr „freihändige“ Lösung („alle Handschläge wurden doppelt gezählt“) erwies sich durch den Beweis per vollständige Induktion als richtig. Dafür ist die Lösung per vollständige Induktion abstrakter und darum weniger plausibel. Es ist allgemein eine gute Sache, nach einem Beweis nicht alle weiteren Anstrengungen ruhen zu lassen - auch wenn die Funktion von Beweisen oftmals ist, ein Gefühl der Plausibilität zu erzeugen. Aber oft sind die Beweise recht vage.