UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

FACULTATEA
DE
MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

SPECIALIZAREA INFORMATICĂ

Lucrare de licenţă

INTRODUCERE ÎN LOGICA MODALĂ. IMPLEMENTAREA UNUI VERIFICATOR DE DEMONSTRAŢII

Absolvent

Mocanu Alexandru

Coordonator ştiinţific

Conf. dr. Şerbănuţă Traian-Florin

Bucureşti, iulie 2020

Rezumatul lucrării

Această lucrare este adresată în principal studenţiilor sau, în general, persoanelor care doresc să descopere bazele logicii modale. În prima parte a acestei lucrări, sunt sintetizate noţiunile cele mai comune, plecând de la elementele de sintaxă şi semantică şi ajungând la demonstraţiile sintactice. Toate acestea sunt însoţite de exemple menite să ilustreze conceptele prezentate, dar şi să arate principalele utilizări ale logicii modale, precum şi diversitatea acestora. La sfârşitul acestei părţi, cititorul ar trebui să poată înţelege puterea de modelare pe care o oferă această logică. Mai mult decât atât, partea a doua a acestei lucrări doreşte să nuanţeze legătura dintre conceptele logice şi programare, prin implementarea unui verificator de demonstraţii pentru logica modală de bază, sub forma unui modul de Haskell denumit ModalProofChecker. Acesta are atât un rol practic putând fi utilizat pentru a verifica demonstraţii realizate pentru logica modală de bază, cât şi un rol didactic ilustrând modul în care pot fi utilizate conceptele logice teoretice în cadrul programelor.

Paper abstract

This paper is mainly addresed to students or, in general, to any person who wishes to discover the basics of modal logic. The first part of this paper is synthesizing the most common notions, starting with the synthax and semantic elements and reaching the synthactic proofs. All of these are accompanied by examples which are designed to illustrate the presented concepts, but also to show the main use cases of modal logic, as well as their diversity. By the end of this part, the reader should be able to understand the power of modelling that this logic has to offer. More than that, the second part of this paper wishes to emphasize the connection between the logic concepts and programming, by implementing a proof checker for basic modal logic, presented as a Haskell module entitled ModalProofChecker. This one has not only a practical role by being used for checking proofs made in basic modal logic, but also an academic role by showing a way in which the theoretical logic concepts can be used in the context of programs.

Cuprins

Capitolul I

Introducere

I.1 Contextul domeniului

În viața de zi cu zi, se întâmplă adesea ca cineva să considere că o afirmație este adevărată, fără a se îndoi de aceasta, chiar dacă nu este bazată pe un raționament. Astfel de presupuneri pot conduce la deducția altor raționamente greșite. De aceea, în mod natural, apare necesitatea unei modalități mai riguroase decât părerile personale pentru a stabili dacă o afimație este adevărată sau nu. Însă, pentru a putea realiza astfel de raționamente, nu a putut fi folosit limbajul natural din cauza ambiguității pe care o prezintă în anumite contexte, fiind nevoie de o altă modelare a afirmațiilor. Pe aceste considerente, s-a dezvoltat domeniul de studii cunoscut astăzi sub denumirea de logică. Acesta are o istorie foarte îndelungată, bazele sale fiind puse încă din antichitate în secolul 4 î.Hr. de filozoful grec, Aristotel. Deși încă de atunci au fost descoperite moduri de a face inferențe, acestea au reprezentat doar începutul unui drum lung către dezvoltarea unui sistem formal, logica necunoscând schimbări fundamentale până în secolul 17 când Leibniz a realizat că este necesară o conexiune între teoria inferențelor și tipurile de raționamente deductive utilizate în matematică [12]. Această idee a inspirat mai târziu și alți logicieni precum Boole care a introdus algebra booleană la mijlocul secolului 19 care a reprezentat bază matematică pentru componentele hardware, cât și pentru logica propozițională [11]. În final, acestea au culminat la începutul secolului trecut cu realizarea sistemelor de deducție datorită muncii multor logicieni și matematicieni, dintre care probabil cei mai importanți au fost Frege, Peano, Russell, Kurt Gödel, David Hilbert și Alfred Tarski [12]. Acestea sunt astăzi utilizate în diverse tipuri de logici, precum și în logica modală.

Logica modală este referită de multe ori sub denumirea de „logica posibilități și necesitătii”, prin expresie modală înțelegându-se un mod de a califica adevărul în raționamente [4]. Motivația apariției acestui tip de logică este legată de necesitatea de a avea mai multe „tipuri” de adevăr („posibil adevărat", „se crede că este adevărat", „este necesar să fie adevărat"). Acesta a fost introdus prima dată de C.I. Lewis în lucrarea *Survey of Symbolic Logic* publicată îm anul 1918, care a extins logica propozițională printr-un operator modal unar I ce semnifica „este imposibil ca". Un alt moment important în istoria logicii modale este marcat de introducerea elementelor semantice precum conceptele de *frame* și model ce au permis rezolvarea unor probleme dificile până la acel moment [2]. În contextul actual, logica modală cunoaște o creștere foarte accelerată, fiind dezvoltate multe *tool*-uri pentru diverse aplicații în domeniu. Probabil cel mai de interes dintre acestea sunt demonstratoarele automate de teoreme (*eng: automated theorem prover, ATP*) care au cunoscut diverse abordări. Câteva exemple de astfel de programe sunt KSP, MLTP și MleanCop, care este implementat pentru a suporta și operatorii din logica de ordinul întâi [8][7][9]. Însă problema este una complexă și multe sisteme ajung să renunțe la performanță pentru a crește gradul de generalitate. Pe de altă parte, o altă abordare a fost de a restrânge cerințele în dorința de a se rezolva o problemă mai specifică, dar cu o performanță sporită. Un astfel de exemplu este KeYmaera X care este axat pe verificarea corectitudinii programelor, folosind logica dinamică [10].

I.2 Descrierea lucrării

Logica modală este un subiect foarte vast care a condus și la apariția multor altor sisteme logice bazate pe conceptele sale. În plus, gradul de generalitate pe care îl conferă permite modelarea multor probleme diverse. Acest lucru poate fi rezumat de un citat din cartea „Modal Logic": *„once you get to the end of the book, you will discover that far from having learned everything about modal logic, you have merely arrived at the beginning of an unending journey...*" („când vei ajunge la sfârșitul acestei cărți, vei descoperi că te afli departe de a fi învățat totul despre logica modală, ci te afli abia la începutul unei călători fără sfârșit...") [2].

De aceea, acest domeniu poate părea greu de pătruns de cineva ce are doar cunoștințe de bază în ceea ce privește logica. Acesta este problema principală ce se dorește a fi abordată în această lucrare, o prezentare a logicii modale care să fie accesibilă cât mai multor persoane. Aceasta nu înseamnă că se dorește o renunțare la definiții formale sau demonstrații riguroase, ci că se urmărește construirea unei intuiții pe baza acestora. În plus, în a doua parte a lucrării, se vrea nuanțarea importanței practice pe care o are acest domeniu. Exemplul practic prezentat nu este o inovație pentru logica modală, prin prezentarea sa dorindu-se mai mult a se arăta că noțiunile prezentate nu reprezintă doar concepte abstracte, fiind ilustrat un mod în care acestea pot fi modelate și utilizate în cadrul unui program. În ceea ce privește punctele ce se doresc a fi atinse în implementarea verificatorului de demonstrații trebuie menționate claritatea modelării conceptelor (acestea trebuie să fie ușor de înțeles), specificarea detaliată a erorilor apărute de-a lungul unei demonstrații și, nu în ultimul rând, ușurința de utilizare a acestuia.

I.3 Structura lucrării

Acum că obiectivele acestei lucrări sunt clare, va fi prezentată structura lucrării pentru a ilustra și modul în care vor fi atinse aceste obiective. În capitolul II, sunt introduse conceptele cele mai imporante din logica modală. În secțiunea 1, este prezentată o motivație a necesității logicii modale. Apoi, în secțiunile 2, 3 și 5 sunt definite noțiunile de bază ale logicii modale ce includ elementele de sintaxă și semantică, cât și conceptele de satisfiabilitate și validitate a formulelor. Secțiunea 4 a capitolului este rezervată prezentării câtorva exemple care ilustrează puterea de modelare oferită de logica modală. Mai departe, în secțiunile 6 și 7 sunt definite demonstrațiile sintactice fiind utilizate sisteme de tip Hilbert. Pentru a introduce gradual elementele noi din logica modală, primele șapte secțiuni fac doar trimiteri la logica modală de bază, generalizarea acesteia realizându-se în secțiunea 8. Aceasta are și rolul de a prezenta și câteva exemple mai complexe ce pot fi modelate cu ajutor logicii modale. Definițiile și propozițiile prezentate sunt o sinteză a multor rezultate deja consacrate ce se regăsesc în cartea „Modal Logic" scrisă de Patrick Blackburn, Maarten de Rijke și Yde Venema [2], precum și în alte publicații ce abordează această tematică. În capitolul III, discuția este dedicată detaliilor implementării modulului **ModalProofChecker**, realizat în Haskell, ce oferă funcționalitate pentru verificarea demonstrațiilor ce utilizează logica modală de bază. În primele două secțiuni sunt descrise în detaliu seminificația unui verificator, respectiv limbajul de programare utilizat și avantajele conferite de acesta. Secțiunea 3 prezintă modul în care au fost modelate conceptele necesare din logica modală, iar secțiunea 4 descrie implementarea efectivă a verificatorului de demonstrații. Ultima secțiune a acestui capitol oferă detalii pentru utilizarea modulului ce sunt ilustrate prin exemple. Modulul **ModalProofChecker** prezentat în acest capitol reprezintă contribuția personală a autorului. În ultimul capitol, capitolul IV, este realizată o apreciere critică menită să stabilească cât de bine a reușit această lucrare să și atingă obiectivele. În plus, sunt prezentate și posibile îmbunătățiri ale lucrării.

Un alt fapt ce trebuie menționat este legat de cunoștințele pe care trebuie să le aibă o persoană pentru a putea înțelege cât mai bine ideile prezentate în această lucrare. Din acest punct de vedere, capitolul II nu necesită nici o cunoștință legată de logica modală, fiind o introducere în acest domeniu. Cu toate acestea, ținând cont de faptul că logica modală este o extensie a logicii propoziționale, este necesar să se fi studiat anterior aceast tip de logică chiar și la un nivel de bază. O cunoaștere bună a logicii propoziționale va conduce automat la o înțelegere mai ușoară a conceptelor din logica modală. În ceea ce privește capitolul III, din punct de vedere teoretic, trebuie să fie parcurs capitolul anterior pentru a putea înțelege atât implementarea, cât și utilitatea exemplului practic.

Implementarea acestuia este descrisă în detaliu astfel încât structura utilizată poate fi înțeleasă și fără a se cunoaște particularități ale limbajului Haskell sau ale programării funcționale, totuși, sunt necesare cunoștințe de bază de programare. Pe de altă parte, limbajul Haskell este o cerință pentru o înțelegere completă a exemplului, fiind necesare chiar și concepte mai avansate precum monadele. În plus, având în vedere că funcționalitatea implementată este încapsulată într-un modul de Haskell, este evident necesară cunoașterea limbajului pentru a putea utiliza produsul dezvoltat.

Capitolul II

Logică Modală

II.1 Introducere în logica modală

În logica propozițională și în logica de ordinul întâi, formulele sunt interpretate doar ca fiind adevărate sau false, fără a putea fi evaluate din punct de vedere calitativ sau contextual. Însă, de multe ori, este necesar să existe și posibilitatea unei interpretări a expresiilor în timp sau în funcție de ipostaza în care se află un sistem. Acest lucru este formalizat în cadrul logicii modale prin utilizarea stărilor. Introducerea acestora conservă generalitatea sistemul logic, deoarece interpretarea semnificației acestor stări poate fi diversă. De asemenea, logica modală introduce expresii precum *este necesar să fie adevărat*, *va fi întotdeauna adevărat*, *se știe că este adevărat* sau *se crede că este adevărat* [6]. Spre exemplu, afirmația

„Uniunea Europeană este constituită din 27 state membre.”

este adevărată în luna iunie a anului 2020. Totuși, aceasta nu reprezintă un adevăr ce persistă în timp, având în vedere că alte state pot adera ulterior. Pe de altă parte, în analiza propoziției

„Singurul număr prim par este 2.”

se distinge o afirmație care este adevărată în acest moment, dar care va continua să fie adevărată și în viitor.

II.2 Sintaxa

În această secțiune este ilustrat cum arată o expresie în logica modală, cum se definește o formulă bine formată și cum putem descrie mulțimea formulelor logice. Pentru a defini aceste formule, se pornește de la o mulțime de propoziții atomice, similară celei folosite în logica propozițională și în logica de ordinul întâi. În cele ce urmează, se notează această mulțime cu *Prop*.

Definiția 2.1. *O formulă a logicii modale de bază* φ *este o expresie peste mulțimea simbolurilor* $Prop \cup \{\bot, \top, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \Box, \Diamond, (,)\}$*, care respectă una din următoarele reguli:*

- $\varphi \in Prop \cup \{\bot, \top\}$ *(este o propoziție atomică, adevărul sau falsul)*
- $\varphi = \chi \vee \psi$*, unde* χ, ψ *sunt formule (este o disjuncție între două formule)*
- $\varphi = \chi \wedge \psi$*, unde* χ, ψ *sunt formule (este o conjuncție între două formule)*
- $\varphi = \chi \rightarrow \psi$*, unde* χ, ψ *sunt formule (este o implicație în care premisa și concluzia sunt formule)*
- $\varphi = \chi \leftrightarrow \psi$*, unde* χ, ψ *sunt formule (este o echivalență între două formule)*
- $\varphi = \neg\chi$*, unde* χ *este formulă (este negația unei formule)*
- $\varphi = \Box\chi$ *sau* $\varphi = \Diamond\chi$*, unde* χ *este formulă (pătratul și diamantul sunt operatori specificii logicii modale, al căror comportament va fi detaliat ulterior)*

Se observă că definiția formulelor pentru logica modală nu diferă foarte mult față de logica propozițională. Singurele elemente de noutate, care apar în această definiție, sunt cei doi operatori, pătrat și diamant. Sintactic, este importantă dualitatea dintre cei doi operatori. Din acest punct de vedere, $\Box$ *și* $\Diamond$ se aseamănă foarte mult cu operatorii logicii de ordinul întâi, $\forall$ *și* $\exists$.

II.3 Semantica

Din perspectiva semantică, logica modală începe să difere semnificativ față de sistemul logicii propoziționale, deoarece este necesară o structură care să permită evaluarea diferită a unei expresii în funcție de un context. Astfel, apar două noi concepte strâns legate între ele, și anume conceptul de *frame* și cel de model Kripke.

Definiția 2.2. *Un frame pentru logica modală de bază este o pereche* $\mathcal{F} = (W, R)$*, unde:*

1. *W este o mulțime nevidă*
2. *R este o relație binară peste W,* $R \subseteq W \times W$

Dintr-o perspectivă mai intuitivă, mulțimea W este mulțimea stărilor, denumite și lumile *frame*-ului. Relația R este cea care creează legăturile între aceste lumi. Dacă $(w_1, w_2) \in R$, se spune că lumea w_2 este accesibilă din lumea w_1. Fără aceste legături, totul s-ar reduce la modelul logicii propoziționale, fiecare afirmație fiind evaluată într-o lume ținând cont doar de contextul lumii respective și nu de cum se poziționează aceasta față de celelalte lumi.

Exemplul 2.3. *O utilizare des întâlnită a logici modale este definirea mulțimii W ca fiind formată din stările prin care trece un sistem la diverse momente de timp și a lui R ca fiind relația care ordonează cronologic aceste stări. Astfel, o lume w_2 este accesibilă dintr-o altă lume w_1 doar dacă w_2 corespunde unui moment de timp ulterior celui corespunzător lui w_1.*

Însă acest exemplu nu este singura interpretare posibilă, această definiție a *frame*-urilor permițând modelarea tuturor sistemelor la baza cărora se află o structură de graf [3].

Conceptul de *frame*, deși prezintă structura unui sistem de logică modală, nu oferă informații calitative pentru interpretarea expresiilor. Pentru a putea stabili o valoare de adevăr pentru expresii, avem nevoie de o funcție de evaluare, similară celei din logica propozițională, dar care să țină cont și de structura logicii modale. Astfel, se introduce modelul Kripke, denumit astfel după Saul Kripke, cel care l-a introdus în anii 1950 [6].

Definiția 2.4. *Un model pentru logica modală de bază este o pereche $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$, unde:*

1. *$\mathcal{F} = (W, R)$ este un frame*
2. *L este o funcție de evaluare (eng: labelling function), $L : W \to \mathcal{P}(Prop)$*

Se poate observa că un model este doar alăturarea dintre un *frame* și o funcție de evaluare care permite interpretarea expresiilor. Funcția de evaluarea atribuie fiecărei lumii w o mulțime de atomi propoziționali, cu semnificația că aceștia sunt toți atomii adevărați în lumea w. Este important de menționat faptul că, în contextul unui model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$, se spune că $\mathcal{M}$ este bazat pe *frame*-ul $\mathcal{F}$ sau că *frame*-ul $\mathcal{F}$ stă la baza lui $\mathcal{M}$.

Odată fixate conceptele de *frame* și model, se poate defini ce înseamnă că o afirmație este adevărată în cadrul unei lumi.

Definiția 2.5. *Fie un model $\mathcal{M} = ((W, R), L)$ și $x \in W$. Se definește inductiv ce înseamnă că o formulă este adevărată în lumea x sau ce înseamnă că x satisface o formulă (se notează cu $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$, unde φ este o formulă):*

- $\mathcal{M}, x \Vdash \top$
- $\mathcal{M}, x \nVdash \bot$
- $\mathcal{M}, x \Vdash v$ *dacă și numai dacă* $v \in L(x)$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \neg\varphi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \nVdash \varphi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \land \chi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$ *și* $\mathcal{M}, x \Vdash \chi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \lor \chi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$ *sau* $\mathcal{M}, x \Vdash \chi$

- $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \rightarrow \chi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \chi$ *când* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \leftrightarrow \chi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \chi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \Box\varphi$ *dacă și numai dacă pentru orice* $y \in W$ *cu* $(x, y) \in R$ *are loc* $\mathcal{M}, y \Vdash \varphi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \Diamond\varphi$ *dacă și numai dacă există* $y \in W$ *cu* $(x, y) \in R$ *pentru care are loc* $\mathcal{M}, y \Vdash \varphi$

Adaptând definiția din logica propozițională (ce înseamnă că o expresie este adevărată) folosind funcția de evaluare din logica modală, se obține definiția de mai sus, exceptând operatorii $\Box$ și $\Diamond$ (deoarece aceștia nu apar în logica propozițională). Așadar, noutatea care se remarcă în acestă definiție este dată de modalitatea prin care sunt evaluați operatorii $\Box$ și $\Diamond$. Se poate observa că acești operatori sunt introduși pentru a realiza conexiunile dintre lumi. Este notabil și faptul că, deși evaluarea celor doi operatori este bine definită, aceasta permite interpretarea operatorilor în diverse moduri. Acest lucru va fi detaliat și exemplificat ulterior.

II.4 Interpretări ale logicii modale

După cum a fost prezentat și anterior, logica modală conferă flexibilitate sporită, permițând modelarea multor probleme diverse, folosind la bază același sistem. Acest lucru este realizat oferind interpretări diferite celor doi operatori specifici logicii modale, pătratul și diamantul. În continuare, vor fi introduse exemple pentru o mai bună înțelegere a acestui concept, în care se observă cum aceeași formulă logică simbolizează diferite tipuri de adevăr sub interpretări diferite. De asemenea, se ilustrează în aceste exemple și dependența dintre interpretările celor doi operatori duali.

Se consideră următoarele trei cazuri uzuale pentru interpretarea formulei $\Box\varphi$ [6]:

- Este necesar ca φ să fie adevărată.
- Întotdeauna φ va fi adevărată.
- Agentul A știe φ.

Pornind de la aceste interpretări ale operatorului pătrat, se vor analiza cum sunt influențate interpretarea operatorului diamant și semnificația lumilor din fiecare caz.

Pentru început, se va determina interpretarea operatorului diamant, în fiecare dintre cele trei cazuri prezentate. Acest lucru este realizat utilizând proprietatea de dualitate a operatorilor pătrat și diamant. Mai precis, utilizând relația $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$, se ajunge la următoarele interpretări pentru formula $\Diamond\varphi$ [6]:

- Nu este necesar ca $\neg\varphi$ să fie adevărată.
  $\Leftrightarrow$ Este posibil ca $\neg\neg\varphi$ să fie adevărată.
  $\Leftrightarrow$ Este posibil ca φ să fie adevărată.
- Nu întotdeauna $\neg\varphi$ va fi adevărată.

$\Leftrightarrow$ Într-un moment din viitor, $\neg\neg\varphi$ va fi adevărată.
$\Leftrightarrow$ Într-un moment din viitor, φ va fi adevărată.

- Agentul A nu știe $\neg\varphi$.
  $\Leftrightarrow$ Cunoștințele agentului A sunt consistente (nu intră în contradicție) cu $\neg\neg\varphi$.
  $\Leftrightarrow$ Cunoștințele agentului A sunt consistente (nu intră în contradicție) cu φ.

Pentru a avea o imagine de ansamblu, trebuie punctat și cum influențează interpretarea operatorului pătrat semnificația relației dintre lumi. Analizând cele trei cazuri prezentate anterior, se pot observa următoarele interpretări corespunzătoare pentru relația $(x,y) \in R$ [6]:

- y este o lume posibilă ținând cont de informația din lumea x.
- Lumea/Starea y este situată cronologic după lumea/starea x.
- y este o lume posibilă conform cunoștințelor agentului A în lumea x.

II.5 Satisfiabilitate și validitate

A fost definit în secțiunea II.3 ce înseamnă ca o formulă să fie adevărată în contextul unui model și al unei lumi stabilite. Însă acest lucru nu este suficient, de multe ori fiind necesar să se poată exprima și adevăruri care au un grad mai larg de răspândire. Cu alte cuvinte, este de dorit să se poată spune despre o anumită afirmație că este adevărată în orice lume a unui model. Astfel, plecând de la definiția existentă, se construiesc următoarele definiții prin generalizare:

Definiția 2.6. *Fie $\mathcal{M} = ((W,R),L)$ un model și φ o formulă. Se spune că formula φ este universal adevărată în modelul $\mathcal{M}$, dacă este adevărată relația $\mathcal{M},x \Vdash \varphi$ pentru orice $x \in W$. Acest lucru se notează astfel: $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.*

Definiția 2.7. *Fie $\mathcal{M} = ((W,R),L)$ un model și φ o formulă. Se spune că formula φ este satisfiabilă în modelul $\mathcal{M}$, dacă există o lume $x \in W$ pentru care este adevărată relația $\mathcal{M},x \Vdash \varphi$.*

Exemplul 2.8. *Se consideră următoarele mulțimi:*

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $R = \{(w_1,w_2),(w_1,w_3),(w_2,w_4),(w_3,w_4)\}$
- $L(w_1) = \emptyset$, $L(w_2) = \{p,q,r\}$, $L(w_3) = \{q,r,s\}$, $L(w_4) = \{q,s\}$

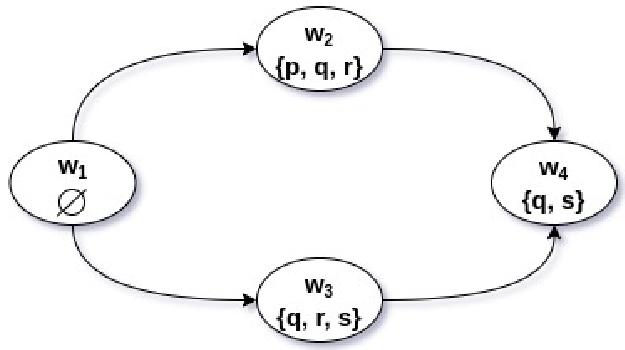


Figura 2.1: Reprezentare grafică a exemplului 2.8

Analizând modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$, se constată următoarele:

- *Este adevărată relația $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond p \wedge \Diamond s$, deoarece avem $\mathcal{M}, w_2 \Vdash p$ (w_2 este accesibilă din w_1) și $\mathcal{M}, w_3 \Vdash s$ (w_3 este accesibilă din w_1). Însă, se remarcă și faptul că formula $\Diamond(p \wedge s)$ nu este adevărată în lumea w_1, deoarece nici în w_2, nici în w_3, nu este adevărată formula $p \wedge s$. Acest lucru relevă o proprietate mai generală: $\Box$ nu este distributivă față de $\vee$, iar $\Diamond$ nu este distributivă față de $\wedge$ [6]. De asemenea, se poate arăta că $\Box$ este distributivă față de $\wedge$, iar $\Diamond$ este distributivă față de $\vee$.*
- *Formula $p \wedge s$ nu este satisfiabilă în acest model, deoarece nu avem nici o lume în care să fie adevărate atât p, cât și s.*
- *Este adevărat că $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Box r$, deoarece w_2 și w_3 sunt singurele lumi accesibile din lumea w_1, iar în ambele este adevărată propoziția r.*
- *Formula $\Box q$ este universal adevărată în model ($\mathcal{M} \Vdash \Box q$). Folosind un raționament similar celui de la subpunctul anterior, se demonstrează că formula este adevărată în lumile w_1, w_2 și w_3. Pentru w_4, formula $\Box q$ este adevărată, deoarece nu există nici o lume accesibilă din w_4. Aceste tipuri de lumi sunt denumite dead ends și toate formulele de forma $\Box\varphi$ sunt adevărate în aceste lumi [2]. În plus, toate formulele de forma $\Diamond\varphi$ sunt false în aceste lumi.*

Conceptul de satisfiabilitate se referă la adevărul doar pentru o anumită evaluare, dar, similar cu logica propozițională, se poate vorbi despre o altă noțiune importantă, și anume validitatea. Aceasta este o generalizare a satisfiabilității, întrucât în acest caz raportarea nu se mai realizează la un anumit model, ci la un *frame*, la toate *frame*-urile (în general) sau, după cum va fi prezentat și în secțiunea II.6, la o clasă de *frame*-uri.

Definiția 2.9. *Se spune despre o formulă φ că este validă în contextul unei stări w din cadrul unui frame $\mathcal{F}$, dacă este adevărată pentru toate modelele $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$ ($\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$), unde L este o funcție de evaluare. Acest lucru se notează astfel: $\mathcal{F}, w \vDash \varphi$.*

Definiția 2.10. *Se spune despre o formulă φ că este validă în cadrul unui frame $\mathcal{F}$, dacă este validă* *pentru toate stările din $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}, w \vDash \varphi$, pentru oricare $w \in W$). Acest lucru se notează astfel: $\mathcal{F} \vDash \varphi$.*

Observație: Sunt folosite simboluri diferite pentru a realiza distincția dintre cele două concepte prezentate, satisfiabilitatea și validitatea.

Exemplul 2.11. *Se consideră:*

- $W = \{1,2,3,4\}$
- $R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\}$ *(relația de divizibilitate pe mulțimea W între numere strict diferite)*

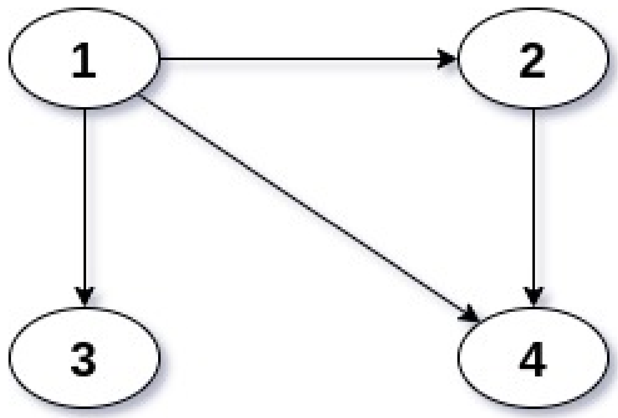


Figura 2.2: Reprezentare grafică a exemplului 2.11

Se va demonstra că $\mathcal{F} \vDash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$, unde $\mathcal{F} = (W,R)$. După cum a fost punctat și în exemplul anterior, în cazul stărilor dead end (pentru care nu există nici o stare accesibilă), toate formulele care încep cu $\Box$ sunt adevărate. Deci, pentru stările 3 și 4 se poate concluziona că formula analizată este validă. Rămân de discutat cazul stărilor 1 și 2.

- *În cazul stării 1: Se presupune că premisa formulei este adevărată ($\Box\varphi$). Deci pentru toate stările accesibile din 1 (toate stările din W, mai puțin starea 1) formula φ este validă. Se dorește să se arate că formula $\Box\Box\varphi$ este validă în starea 1. Pentru aceasta, este suficient să se arate că formula $\Box\varphi$ este validă în stările 2, 3 și 4. În toate stările, cu excepția stării 1, formula φ este validă. În plus, din nici o stare nu este accesibilă starea 1 ($(x,1) \notin R$, pentru orice x), deci se poate conchide că formula $\Box\Box\varphi$ este validă în starea 1 și deci și formula inițială este validă în starea 1.*
- *În cazul stării 2: Se arată că formula este validă, deoarece concluzia implicației este totdeauna adevărată. Pentru ca $\mathcal{F}, 2 \vDash \Box\Box\varphi$ trebuie ca în toate stările accesibile din 2 să fie validă formula $\Box\varphi$. Singura stare accesibilă din 2 este 4, deci trebuie ca $\mathcal{F}, 4 \vDash \Box\varphi$, ceea ce este adevărat folosind același argument pentru stările dead end.*

Pentru a finaliza studiul acestui exemplu, se poate concluziona că formula $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ este validă în cadrul frame-ului analizat.

Observație: Acesta este doar un rezultat particular care se bazează pe o proprietate mai generală a *frame*-urilor a căror relație de accesibilitate este tranzitivă. Acest cadru mai general va fi prezentat în secțiunea II.6 alături de alte exemple de astfel de proprietăți.

Un alt caz de validitate care merită menționat este cazul general, cel al formulelor adevărate indiferent de structura în care sunt evaluate.

Definiția 2.12. *Se spune despre o formulă φ că este validă dacă este validă în toate frame-urile ($\mathcal{F} \vDash \varphi$, pentru orice frame $\mathcal{F}$). Acest lucru se notează astfel: $\vDash \varphi$.*

Propoziția 2.13. *Formula $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, cunoscută sub denumirea de formula K în onoarea lui Saul Kripke [6], este validă.*

Demonstrație: Fie $\mathcal{F}$ un *frame* care stă la baza modelului $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$ și w o stare din acest *frame*. Se presupune că premisa formulei și premisa concluziei formulei sunt adevărate în această stare, deci sunt veridice următoarele două afirmații: $\mathcal{M}, w \Vdash \Box(\varphi \to \psi)$ și $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$. Din cele două relații se poate deduce că pentru orice stare x accesibilă din starea w trebuie să fie adevărate $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \to \psi$ și $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$. În continuare, folosindu-se regula de evaluare a implicației, se poate deduce că și formula ψ este adevărată în starea x, ceea ce înseamnă că formula $\Box\psi$ este adevărată în starea w. Urmând înlănțuirea definițiilor anterioare se poate vedea că aceasta este ceea ce se dorea să se demonstreze, deci se poate conchide că formula K este validă. $\Box$

II.6 Clase de *frame*-uri

În secțiunea anterioară, a fost prezentată noțiunea de validitate a unei formule, începând de la contextul unei stări, apoi continuând cu validitatea în cadrul unui *frame* și, în final, cazul formulelor valide indiferent de structura unui *frame*. Ultimele două dintre acestea relevă cazuri interesante de studiat din punct de vedere al generalității pe care îl prezintă, însă a fost nevoie de o structură cu un grad intermediar de generalitate, ceea ce a dus la introducerea noțiunii de clase de *frame*-uri [2]. Aceste clase sunt mulțimi de *frame*-uri care au una sau mai multe proprietăți comune. Așadar, înainte de a prezenta mai detaliat clasele de *frame*-uri, trebuie să se definească ce reprezintă o proprietate.

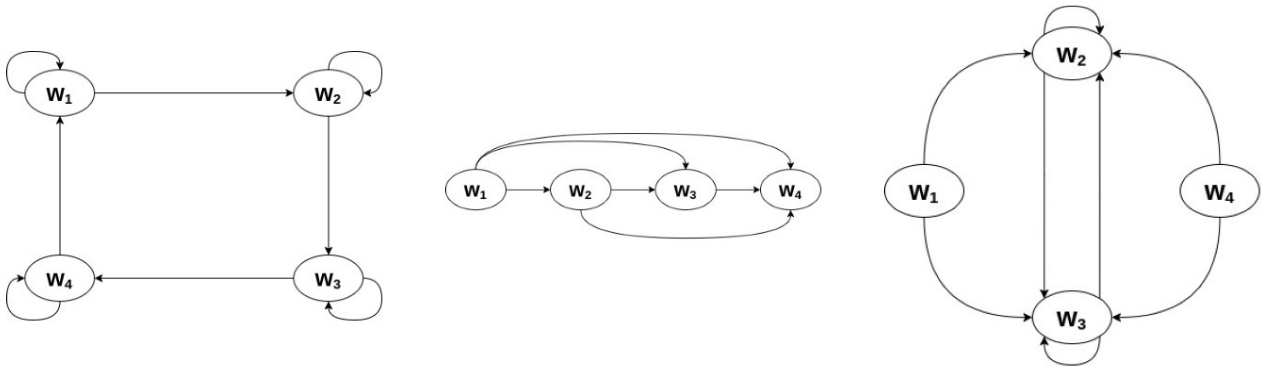
Definiția 2.14. *Se spune despre o formulă φ din logica modală că definește o proprietate P a unui frame $\mathcal{F} = (W, R)$, dacă $\mathcal{F} \vDash \varphi$ dacă și numai dacă relația R are proprietatea P.*

În continuare, vor fi prezentate cele mai comune, și totodată importante, proprietăți ale relațiilor de accesibilitate dintre lumi [4]:

1. Formula $\Box\varphi \to \varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **M**, definește proprietatea de reflexivitate a relației de accesibilitate ($(w,w) \in R$ pentru orice $w \in W$)
2. Formula $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **4**, definește proprietatea de tranzitivitate a relației de accesibilitate (dacă $(w,v) \in R$ și $(v,u) \in R$ atunci $(w,u) \in R$, pentru orice $w,v,u \in W$)
3. Formula $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **D**, definește proprietatea de serialitate a relației de accesibilitate (pentru orice $w \in W$, există $u \in W$ astfel încât $(w,u) \in R$)
4. Formula $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **B**, definește proprietatea de simetrie a relației de accesibilitate (dacă $(w,v) \in R$ atunci $(v,w) \in R$ pentru orice $w,v \in W$)
5. Formula $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **5**, definește o relație euclidiană de accesibilitate (dacă $(w,v) \in R$ și $(w,u) \in R$ atunci $(v,u) \in R$, pentru orice $w,v,u \in W$)
6. Formula $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **CD**, definește o relație funcțională de accesibilitate (dacă $(w,v) \in R$ și $(w,u) \in R$ atunci $v = u$, pentru orice $w,v,u \in W$)
7. Formula $\Box(\Box\varphi \to \varphi)$, cunoscută și sub denumirea de axioma $\Box$**M**, definește o relație de accesibilitate *shift reflexivă* (dacă $(w,v) \in R$ atunci $(v,v) \in R$, pentru orice $w,v \in R$)
8. Formula $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **C4**, definește o relație de accesibilitate densă (pentru orice $w,v \in W$ dacă $(w,v) \in R$ atunci există $u \in W$ pentru care $(w,u) \in R$ și $(u,v) \in R$)
9. Formula $\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, cunoscută și sub denumirea de axioma **C**, definește o relație convergentă de accesibilitate (pentru orice $w,v,x \in W$ dacă $(w,v) \in R$ și $(w,x) \in R$ atunci există $u \in W$ pentru care $(v,u) \in R$ și $(x,u) \in R$)

Observație: Când se face referire la formulele care descriu proprietăți ale *frame*-urilor, acestea au o formă generală. Astfel, când se spune, de exemplu, că formula $\Box\varphi \to \varphi$ este validă în cadrul unui *frame*, trebuie interpretat că această afirmație este adevărată pentru orice formulă φ.

Pentru a ilustra mai bine această noțiune, vor fi prezentate demonstrații pentru proprietățile de reflexivitate (1), tranzitivitate (2) și pentru relația euclidiană (5). Ținând cont de definiția 2.14, relațiile **(1)-(9)** sunt relații de echivalență. Ca urmare, va fi necesar să se demonstreze, pentru fiecare caz, câte două implicații: **(a)** dacă formula este validă în *frame*, atunci relația de accesibilitate trebuie să aibă proprietatea dorită; **(b)** dacă relația de accesibilitate are proprietatea dorită, atunci formula trebuie să fie validă în contextul *frame*-ului.



(a) Relație reflexivă (b) Relație tranzitivă (c) Relație euclidiană

Figura 2.3: Exemple de relații din cele prezentate

Demonstrație (1): Pentru implicația **(a)**, se dorește să se arate că dacă se cunoaște $\mathcal{F} \vDash \Box\varphi \to \varphi$, unde $\mathcal{F} = (W,R)$ este un *frame*, atunci relația R este reflexivă. Acest caz va fi abordat folosind metoda reducerii la absurd. Așadar, se presupune prin absurd că relația R nu este reflexivă și se va construi un model, mai precis o funcție de evaluare, pentru care formula $\Box p \to p$ nu este adevărată, unde $p \in Prop$ este o propoziție atomică. R nu este o relație reflexivă, atunci înseamnă că există o stare $w \in W$ pentru care $(w,w) \notin R$. Se consideră următorul model $\mathcal{M} = (\mathcal{F},L)$, unde L este o funcție de evaluare, pentru care se definesc: $p \notin L(w)$ și $p \in L(x)$ pentru orice stare x accesibilă din w ($(w,x) \in R$). Se poate observa ușor că această definire a funcției de evaluare este consistentă, datorită faptului că w nu este accesibilă din ea însăși. Acum rămâne doar să se stabilească valorile de adevăr pentru implicația și concluzia formulei inițiale. Din definiția funcției de evaluare decurg natural următoarele rezultate: $\mathcal{M},w \nVdash p$ și $\mathcal{M},w \Vdash \Box p$, ceea ce conduce la $\mathcal{M},w \nVdash \Box p \to p$, însă acest lucru intră în contradicție cu presupunerea că formula inițială este validă în acest *frame*. Deci se poate concluziona că relația R este reflexivă.

Pentru implicația **(b)**, se presupune că, pentru *frame*-ul $\mathcal{F} = (W,R)$, relația R este reflexivă și se dorește să se arate că afirmația $\mathcal{F} \vDash \Box\varphi \to \varphi$ este adevărată. Fie $w \in W$ o stare a acestui *frame*, pentru care se știe că $\mathcal{F},w \vDash \Box\varphi$, și se urmărește să se ajungă la relația $\mathcal{F},w \vDash \varphi$. Din prima relație rezultă că pentru toate stările $u \in W$ accesibile din starea w se știe că $\mathcal{F},u \vDash \varphi$. În plus, deoarece relația R este reflexivă, se cunoaște și faptul că starea w este accesibilă din ea însăși. Combinând ultimele două rezultate se obține că $\mathcal{F},w \vDash \varphi$, adică ceea ce se dorea. $\Box$

Demonstrație (2): Similar demonstrației anterioare, se începe cu implicația **(a)** și se dorește să se arate că dacă $\mathcal{F} \vDash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$, unde $\mathcal{F} = (W,R)$ este un *frame*, atunci relația R este tranzitivă. Această problemă va fi abordată asemenea prin metoda reducerii la absurd. Se presupune prin reducere la absurd, că relația R nu este tranzitivă, deci că există trei stări $w,u,v \in W$ pentru care următoarea relație este adevărată: $(w,u) \in R$ și $(u,v) \in R$, dar $(w,v) \notin R$. Pornind de la această presupunere, se arată că formula anterior menționată nu-și păstrează validitatea pentru o variabilă propozițională $p \in Prop$, lucru care va intra în contradicție cu presupunerea inițială. Se construiește funcția de evaluare L, din cadrul modelului $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$, astfel: $p \notin L(v)$ și $p \in L(x)$ pentru orice stare x cu $(w,x) \in R$ (x accesibilă din w). Din această definiție reies următoarele afirmații $\mathcal{M}, w \Vdash \Box p$ și $\mathcal{M}, w \nVdash \Box\Box p$ (deoarece v este accesibilă în 2 „pași” din w și $p \notin L(v)$). Așadar, se poate deduce că $\mathcal{M}, w \nVdash \Box p \to \Box\Box p$, deci formula $\Box p \to \Box\Box p$ nu este validă în *frame*-ul considerat, ceea ce reprezintă o contradicție.

Pentru sensul invers al echivalenței, cel din implicația **(b)**, se urmărește demonstrarea faptului că într-un *frame* $\mathcal{F} = (W,R)$, a cărui relație de accesibilitate este tranzitivă, formula $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ este validă. Se consideră o stare $w \in W$ pentru care se cunoaște $\mathcal{F}, w \vDash \Box\varphi$ și se dorește să se demonstreze $\mathcal{F}, w \vDash \Box\Box\varphi$. Deci, din prima relație, rezultă că $\mathcal{F}, u \vDash \varphi$ pentru orice stare u accesibilă din starea w. Pentru a stabili validitatea formulei $\Box\Box\varphi$ în starea w, se consideră o stare $y \in W$ accesibilă în doi „pași” din w (există $x \in W$ astfel încât $(w,x) \in R$ și $(x,y) \in R$), dar faptul că relația R este tranzitivă implică existența unei relații directe între starea w și stare y ($(w,y) \in R$). Combinând ultimele două rezultate obținute se deduce că $\mathcal{F}, y \vDash \varphi$, fapt ce implică imediat și $\mathcal{F}, w \vDash \Box\Box\varphi$, adică ceea ce se dorea. Deci se poate conchide că $\mathcal{F}, w \vDash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$. $\Box$

Demonstrație (5): În ceea ce privește implicația **(a)** a echivalenței, se va dovedi că, dacă într-un *frame* $\mathcal{F} = (W,R)$ este validă formula $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, atunci relația de accesibilitate este euclidiană. Urmârind tiparul din demonstrațiile anterioare, și această implicație folosește metoda redurcerii la absurd. Așadar, se presupune că relația R nu este euclidiană, ceea ce înseamnă că există stările $w, u, v \in W$ pentru care sunt adevărate următoarele: $(w,u) \in R$ și $(w,v) \in R$, dar $(u,v) \notin R$. Se construiește o funcție de evaluare L, din modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$ pentru care formula $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ să nu fie adevărată în lumea w. Pentru aceasta, se construiește funcția L după următoarele reguli: $p \in L(v)$ și $p \notin L(x)$ pentru orice stare $x \in W$. Folosind această definiție pentru L se disting următoarele: $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$ (deoarece v este accesibilă din w și $\mathcal{M}, v \Vdash p$) și $\mathcal{M}, u \nVdash \Diamond p$ (deoarece singura stare în care p este adevărată este v, iar aceasta nu este accesibilă din starea u, conform presupunerii făcute). Din a doua afirmație rezultă că $\mathcal{M}, w \nVdash \Box\Diamond p$, deoarece u este accesibilă din starea w. Din aceste două rezultate: $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$, $\mathcal{M}, w \nVdash \Box\Diamond p$ se poate deduce că $\mathcal{M}, w \nVdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$, ceea ce conduce la o contradicție. Deci relația de accesibilitate R trebuie să fie euclidiană.

Pentru a arăta implicația **(b)** a acestei echivalențe, trebuie să se demonstreze că, dacă se consideră o relație de accesibilitate euclidiană R a unui *frame* $\mathcal{F} = (W,R)$, atunci formula $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ este validă în contextul lui $\mathcal{F}$. Fie $w \in W$ o stare pentru care se cunoaște că $\mathcal{F}, w \vDash \Diamond\varphi$ și se va arată că $\mathcal{F}, w \vDash \Box\Diamond\varphi$. Din afirmația anterioară rezultă că există o stare $x \in W$ cu $(w,x) \in R$ pentru care $\mathcal{F}, x \vDash \varphi$. Pentru a arăta că formula $\Box\Diamond\varphi$ este validă în starea w, se consideră o stare $y \in W$ pentru care $(w,y) \in R$. Ținând cont că starea x și starea y sunt ambele accesibile din starea w și că relația de accesibilitate este euclidiană, se deduce că $(y,x) \in R$. Conectând acest rezultat cu $\mathcal{F},x \vDash \varphi$, reiese că $\mathcal{F},y \vDash \Diamond\varphi$. Având în vedere că această afirmație se poate obține pentru orice stare y accesibilă din starea w rezultă că $\mathcal{F},y \vDash \Box\Diamond\varphi$, deci formula $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ este validă. $\Box$

Clasele de *frame*-uri au un rol foarte important în cadrul demonstrațiilor sintactice, deoarece oferă un criteriu pe baza căruia se poate decide care sunt formulele ce trebuie incluse ca axiome în problema analizată. Împreună cu seminificația simbolurilor $\Box$ și $\Diamond$, descrisă în detaliu în secțiunea II.4, acestea reprezintă principiile care stau la baza alegerii axiomelor pentru demonstrațiile sintactice [6].

Exemplul 2.15. *Dacă se modelează o problemă care urmărește evoluția în timp a unui sistem, stările acestuia pot fi considerate momente de timp. Atunci, este de dorit ca relația de accesibilitate, care ordonează cronologic lumile, să aibă proprietatea de tranzitivitate (dacă o stare y este în viitorul unei stări x și o stare z este în viitorul stării y, atunci este natural ca starea z să fie și în viitorul stării x). În plus, în cazurile studierii unor sisteme care funcționează fără oprire, poate fi de dorit și proprieteatea de serialitate (pentru fiecare stare să existe o viitoare stare posibilă).*

II.7 Logici modale normale

În această secțiunea, accentul este pus pe demonstrațiile sintactice din cadrul logicii modale. Acestea reprezintă un punct de interes major din perspectiva practică deoarece se pliază cel mai bine pe sistemele de automatizare a demonstrațiilor dezvoltate până în acest moment. Până acum a fost prezentată în secțiunea II.5 noțiunea de validatate a unei formule care constituie baza demonstrațiilor sintactice, însă acest lucru nu este suficient. Dacă în contextul unui *frame* se poate face pentru fiecare funcție de evaluare o analiză pentru a stabili dacă o formulă este validă sau nu, în contextul unei demonstrații în care se urmărește să se arate că o formulă este validă în orice *frame* sau într-o clasă de *frame*-uri, această abordare nu mai este plauzibilă. Mai mult decât atât, chiar și în contextul unui *frame*, problema poate deveni una dificilă dacă se ia în considerare faptul că mulțimea lumilor poate avea un număr mare de elemente, potențial infinit. Ca urmare, trebuie să se definească riguros o modalitate prin care se poate stabili dacă o formulă este validă.

Pentru început, se va pleca de la problema validității unei formule într-un context general, abordarea pentru celelalte cazuri dezvoltându-se în jurul acesteia. Pentru obținerea rezultatului dorit, se va construi un sistem axiomatic de tip Hilbert denumit **K**, acesta fiind sistemul „minimal” folosit pentru a raționa în contextul *frame*-urilor [2].

Definiția 2.16. *O **K**-demonstrație este o secvență de formule, fiecare dintre acestea fiind fie o axiomă, fie se obține din una sau mai multe formule demonstrate anterior aplicând o regulă de* *deducție (eng: rule of proof). Axiomele sistemului **K** sunt toate tautologiile din logica propozițională, la care se adaugă formula K ($\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$) și formula duală ($\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$), iar regulile de deducție sunt următoarele:*

- *Modus ponens: dacă se cunoaște φ și $\varphi \to \psi$, atunci se poate arăta ψ*
- *Substituția uniformă: dacă se cunoaște φ, atunci se poate demonstra ψ, dacă ψ a fost obținută din formula φ prin înlocuirea uniformă (a tuturor aparițiilor) a unor propoziții atomice cu formule arbitrare ale logicii modale*
- *Generalizarea: dacă se știe φ, atunci se deduce $\Box\varphi$*

*O formulă φ se numește **K**-demonstrabilă dacă apare ca ultimă formulă a unei **K**-demonstrații. Acest lucru se notează astfel: $\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi$.*

Observație: Nu este necesar să se considere toate tautologiile din logica propozițională, ci este suficient să se aleagă o submulțime a lor astfel încât toate celelalte să se poată deduce din acestea.

Noțiunea de **K**-demonstrație este folosită pentru a arăta că o formulă este validă. Deci un lucru foarte important pentru corectitudinea acestei metode este ca axiomele considerate să fie valide și, în plus, regulile de deducție trebuie să conserve validitatea formulelor (intuitiv, aplicând reguli de deducție unor formule valide să nu putem deduce o formulă care să nu fie validă).

Propoziția 2.17. *Orice tautologie din logica propozițională este o formulă validă în logica modală.*

Demonstrație: Pentru aceasta se consideră un *frame* $\mathcal{F} = (W,R)$ care stă la baza unui model $\mathcal{M} = (\mathcal{F},L)$ și o stare $w \in W$ din acest *frame*. Ținând cont de faptul că o tautologie φ din logica propozițională nu conține operatorii $\Box$ și $\Diamond$, rezultă imediat că valoarea de adevăr a formulei φ depinde de $L(w)$ și nu depinde de nici un alt $L(x)$, unde $x \in W$ cu $x \neq w$. Mai departe, se poate construi funcția de evaluare e, din logica propozițională, astfel:

$$e(p) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \notin L(w) \\ 1, & \text{dacă } p \in L(w) \end{cases}$$

Se poate verifica ușor, folosind definițiile funcțiilor de evaluare, că valoarea de adevăr a formulei în starea w în modelul $\mathcal{M}$ coincide cu valoare de adevăr a formulei în evaluare e. Ținând cont de aceasta și de faptul că formula analizată φ este tautologie în logica propozițională, se poate concluziona că φ este validă în logica modală. $\Box$

Axioma K, cunoscută și sub denumirea de axioma distributivității, este importantă deoarece, intuitiv, permite aplicarea regulii *modus ponens* și pentru formulele cu $\Box$ [2]. Mai precis, dacă în cadrul unei demonstrații se obțin formulele $\Box(\varphi \to \psi)$ și $\Box\varphi$, plecând de la axioma K și folosind substituția universală, se poate deduce și formula $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$. Apoi, se poate aplica de două ori regula *modus ponens*, pentru a obține o demonstrație pentru formula $\Box\psi$.

Observație: Pentru formula K a fost realizată deja o demonstrație formală a validității acesteia în propoziția 2.13.

Propoziția 2.18. *Axioma duală, cea care descrie relația dintre operatorii $\Box$ și $\Diamond$, este o fomulă validă în logica modală.*

Demonstrație: Se consideră un *frame* $\mathcal{F} = (W,R)$ care stă la baza unui model $\mathcal{M} = (\mathcal{F},L)$ și o stare $w \in W$ din acest *frame*. Se va analiza valoarea de adevăr în starea w pentru cei doi termeni ai echivalenței:

- $\Diamond p$ este adevărată dacă există o stare $x \in W$ cu $(w,x) \in R$ pentru care $\mathcal{M},x \Vdash p$.
- $\neg\Box\neg p$ este adevărată dacă formula $\Box\neg p$ nu este adevărată în starea w. Deci, nu trebuie să fie adevărat că pentru orice stare $y \in W$ cu $(w,y) \in R$ se întâmplă $\mathcal{M},y \Vdash \neg p$. Mergând și mai departe, trebuie să nu fie adevărat că în orice stare $y \in W$ cu $(w,y) \in R$ nu este adevărată propoziția p. Așadar, există o stare $y \in W$ cu $(w,y) \in R$ pentru care $\mathcal{M},y \Vdash p$.

$\Box$

După finalizarea acestei ultime demonstrații, se poate concluziona că toate axiomele sistemului **K** sunt formule valide. În continuare, trebuie realizată o analiză și a regulilor de deducție. Se va începe discuția cu probabil cea mai cunoscută regulă de deducție, și anume *modus ponens*. Se poate verifica imediat că această regulă conservă validitatea. Mai precis dacă se consideră $\models \varphi$ și $\models \varphi \to \psi$, atunci rezultă că $\models \psi$.

A doua regulă de deducție nu este nici ea una specifică sistemului **K**, aceasta fiind prezentă și în alte sisteme logice de deducție. Această regulă permite înlocuirea propozițiilor atomice dintr-o formulă validă cu alte formule din logica modală. Aplicând această regulă se conservă validitatea. Intuitiv, această proprietate poate fi explicată prin faptul că dacă o formulă este validă, atunci acest lucru nu se datorează unei atribuiri particulare a valorilor de adevăr pentru propozițiile atomice, ca urmare acestea pot fi înlocuite uniform cu alte formule [2].

Observație: În cadrul unei substituții uniforme trebuie să se înlocuiască toate aparițiile unei propoziții atomice cu aceeași formulă, altfel acest procedeu nu ar mai conserva validitatea. Deci nu reprezintă o substituție uniformă următoarea: pornind de la formula validă $p \vee \neg p$ (tautologie) se înlocuiește prima apariție a lui p cu propoziția q și a doua apariție cu propoziția r obținându-se formula $q \vee \neg r$ care nu este validă.

Ultima regulă de deducție rămasă este generalizarea, denumită în alte lucrări și regula necesității. Aceasta poate părea neobișnuită la prima vedere, deoarece dacă se știe că φ este validă într-o stare atunci nu rezultă că $\Box\varphi$ este validă în acea stare [6], deci nu conservă validitatea locală. Cu toate acestea, se poate demonstra că aceasta conservă validitatea generală, deci că dacă $\models \varphi$ atunci se știe și că $\models \Box\varphi$.

Analiza realizată anterior (faptul că axiomele sistemului sunt valide, iar regulile de deducție conservă validitatea) conduce la concluzia că sistemul **K** este corect, în sensul că, dacă pentru o formulă există o **K**-demonstrație, atunci acea formulă este validă. Se poate arăta că și implicația inversă este adevărată [3], adică dacă se consideră o formulă validă atunci pentru aceasta există o **K**-demonstrație, însă această demonstrație este una mult mai complexă decât cea a corectitudinii și depășeste scopul acestei lucrări.

După cum a fost prezentat și anterior, sistemul **K** este un sistem complet și corect foarte util, care oferă o modalitate sintactică prin care se poate verifica validitatea unei formule. Însă, acest lucru poate să nu fie suficient în unele cazuri. Spre exemplu, cineva poate dori să verifice validitatea unei formule doar în contextul *frame*-urilor tranzitive. Mai precis, după cum s-a arătat în secțiunea II.6, formula $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ este validă doar în cadrul unui *frame* a cărui relație de accesibilitate este tranzitivă, deci nu se poate arăta că aceasta este validă folosind sistemul **K**.

Cu toate acestea, se poate folosi sistemul **K** ca bază pentru alte sisteme logice de tip Hilbert care să permită astfel de raționamente, iar acest lucru se poate realiza într-un mod foarte simplu. Mai precis, dacă la axiomele sistemului **K** se adaugă formula $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, atunci se obține un nou sistem, cunoscut sub denumirea de sistemul **K4**. În acesta, se pot folosi aceleași reguli de deducție ca și în sistemul **K**, pentru a realiza demonstrații pentru validitatea formulelor în cadrul *frame*-urilor tranzitive. Mai mult decât atât, se poate arăta că și acest sistem este complet și corect raportat la *frame*-urile tranzitive, adică o formulă este validă în toate *frame*-urile tranzitive dacă și numai dacă pentru aceasta se poate realiza o **K4**-demonstrație. În plus, această construcție poate fi realizată pentru orice mulțime de formule Γ, obținându-se un sistem de deducție **K**Γ, al cărui axiome sunt axiomele sistemului **K** la care se adaugă formulele din mulțimea Γ.

Definiția 2.19. *Se numește o logică modală normală (eng: normal modal logic) o mulțime de formule Λ ce conține toate tautologiile din logica propozițională, formula K ($\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$) și formula duală ($\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$) și este închisă la aplicarea regulilor modus ponens, substituției uniforme și generalizării.*

Se poate observa că noțiunea de logică modală normală transpune sistemele de deducție de tip Hilbert prezentate mai devreme într-un concept din teoria mulțimilor. Practic, o logică modală normală reprezintă mulțimea formulelor valide plecând de la o mulțime de axiome Γ. De aceea, se spune și că cea mai mică mulțime care constituie o logică modală normală este mulțimea formulelor valide în toate *frame*-urile. În plus, dacă se adaugă și formula **4** (cea care definește proprietatea de tranzitivitate), atunci se obține mulțimea formulelor valide în *frame*-urile tranzitive. Similar, se pot obține și alte logici modale normale plecând de la formule discutate în secțiunea II.6. Mai general decât atât, pentru o clasă de *frame*-uri F, se poate obține o logică modală normală Λ_F care să fie formată din toate formulele valide în F.

II.8 Generalizarea logicii modale de bază

Până în acest moment, a fost abordat în exclusivitate limbajul modal de bază (*eng: basic modal language*). Cu toate acestea, multe dintre ideile dezvoltate rămân valabile și în limbajul modal, însă altele necesită o adaptare minimală. În această secțiune, se va introduce o generalizarea a logicii modale de bază, care oferă o putere mai mare de modelare. Înainte de a prezenta cum se va realiza acest lucru, trebuie să se răspundă la o întrebare: „De ce nu este suficient limbajul modal de bază?”. Pentru a oferi un răspuns, se va aborda, din nou, problema modelării cunoștințelor unui agent. Așa cum a fost arătat în secțiunea II.4, această problemă poate fi modelată folosind limbajul modal de bază. Însă, dacă pentru aceeași problemă se dorește modelarea cunoștințelor a doi sau mai mulți agenți, atunci va fi necesar un instrument de modelare mai puternic. Astfel, a apărut ideea îmbogățirii limbajului modal de bază cu mai mulți operatori modali, nefiind necesară restricționarea numărului acestora. Mai mult decât atât, aritatea operatorilor poate fi variabilă, spre deosebire de aritatea operatorilor pătrat și diamant, care până la acest moment era unu.

Definiția 2.20. *Fie o mulțime nevidă O și o funcție $\rho : O \to \mathbb{N}$. Se definește ca fiind o similaritate modală de tip (eng: modal similarity type) perechea $\tau = (O, \rho)$.*

În această definiție mulțimea O semnifică mulțimea operatorilor modali, care sunt notați, de obicei, cu $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$ și așa mai departe, iar funcția ρ atribuie fiecărui operator o aritate finită, adică numărul de argumente pe care acționează acesta. Folosind această noțiune și definiția 2.1, se poate defini sintaxa unui limbaj modal.

Observație: Denumirea de operator pătrat și diamant se folosește în continuare, însă doar pentru operatori de aritate 1. Acești operatori pot apărea și sub o altă notație. Mai precis, pentru operatori pătrat se mai utilizează notațiile $\Box_i$ sau $[\, i\,]$, iar pentru operatori diamant se folosește $\Diamond_i$ sau $< i >$.

Definiția 2.21. *Se consideră o similaritate modală de tip $\tau = (O, \rho)$. Se definește o formulă în limbajul modal ca fiind o expresie peste mulțimea simbolurilor $Prop \cup \{\bot, \neg, \wedge, \to, (,)\} \cup O$, care respectă una din următoarele reguli:*

- $\varphi \in Prop \cup \{\bot\}$
- $\varphi = \chi \wedge \psi, unde\, \chi, \psi\ sunt\, formule$

- $\varphi = \chi \to \psi$, *unde* χ, ψ *sunt formule*
- $\varphi = \neg\chi$, *unde* χ *este formulă*
- $\varphi = \nabla(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n)$, *unde* χ_1, χ_2, ..., χ_n *sunt formule și* $\nabla \in O$ *cu* $\rho(\nabla) = n$

Similar cu operatorii din logica modală de bază, se definește pentru fiecare operator ∇, un operator dual, notat cu $\triangle$, astfel: $\triangle(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) := \neg\nabla(\neg\varphi_1, \neg\varphi_2, ..., \neg\varphi_n)$, unde $n = \rho(\nabla)$. Odată fixate aceste modificări aduse sintaxei în cadrul logicii modale, se poate vorbi și despre semantică, adică modul în care sunt interpretați acești operatori. Pentru a putea prezenta acest lucru, trebuie să fie introduse și modificările făcute asupra noțiunii de *frame*. Noutatea care apare aici este că *frame*-urile încorporează acum câte o relație de accesibilitate pentru fiecare operator din mulțimea O.

Definiția 2.22. *Fie* $\tau = (O, \rho)$ *o similaritate modală de tip. Se numește* τ*-frame un tuplu, notat* $\mathcal{F}$*, care este format din:*

1. *o mulțime nevidă* W
2. *o mulțime de relații (pentru fiecare* $\nabla \in O$*, se definește relația* R_∇ *de aritate (n+1), unde* $n = \rho(\nabla)$*)*

Definiția 2.23. *Un* τ*-model pentru logica modală este o pereche* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$*, unde:*

1. $\mathcal{F}$ *este un* τ*-frame*
2. L *este o funcție de evaluare*

Pentru a defini complet semantica logicii modale, trebuie să se descrie și cum este realizată evaluarea unei formule. Singura diferență, în comparație cu formulele logicii modale de bază, se produce în cazul operatorilor din mulțimea O.

Definiția 2.24. *Fie un* τ*-model* $\mathcal{M}$ *și* x *o stare din acest model. Se definește inductiv ce înseamnă că o formulă este adevărată în lumea* x *sau ce înseamnă că* x *satisface o formulă (se notează cu* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$*, unde* φ *este o formulă):*

- $\mathcal{M}, x \nVdash \bot$
- $\mathcal{M}, x \Vdash v$ *dacă și numai dacă* $v \in L(x)$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \neg\varphi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \nVdash \varphi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \wedge \chi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$ *și* $\mathcal{M}, x \Vdash \chi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \to \chi$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{M}, x \Vdash \chi$ *când* $\mathcal{M}, x \Vdash \varphi$
- $\mathcal{M}, x \Vdash \nabla(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$*, unde* $\nabla \in O$ *cu* $\rho(\nabla) = n$*, dacă și numai dacă pentru orice* $y_1, y_2, ..., y_n \in W$ *cu* $(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in R_\nabla$ *are loc* $\mathcal{M}, y_i \Vdash \varphi_i$ *pentru orice* $i = \overline{1,n}$

Observație: Pornind de la ultimul punct al acestei definiții, se poate defini și evaluarea pentru $\triangle$, operatorul dual al unui operator $\nabla \in O$ cu $\rho(\nabla) = n$ astfel: $\mathcal{M}, x \Vdash \triangle(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, dacă și numai dacă există $y_1, y_2, ..., y_n \in W$ cu $(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in R_\nabla$ astfel încât $\mathcal{M}, y_i \Vdash \varphi_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Dezvoltând noțiunea de evaluare a unei formule, se definesc conceptele de satisfiabilitate și validitate, similar cu definițiile prezentate în secțiunea II.5. Acestea nu vor mai fi reluate în această secțiune deoarece nu apar modificări majore. Totuși, pentru a acoperi și aceste noțiuni în contextul logicii modale, se vor analiza mai multe exemple care vor fi introduse gradual în funcție de nivelul de complexitate al acestora.

Exemplul 2.25. *Se consideră următoarele:*

- *Mulțimea operatorilor modali* $O = \{\Box_1, \Box_2\}$ *cu* $\rho(\Box_1) = \rho(\Box_2) = 1$
- *Mulțimea lumilor* $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$
- *O relație binară* $R_1 = \{\ (w_1,w_2),\ (w_1,w_4),\ (w_2,w_3),\ (w_3,w_5),\ (w_4,w_3),\ (w_4,w_5)\}$
- *O relație binară* $R_2 = \{\ (w_2,w_1),\ (w_4,w_1),\ (w_3,w_2),\ (w_5,w_3),\ (w_3,w_4),\ (w_5,w_4)\} = R_1^{-1}$
- *Funcția de evaluare* L *care se definește astfel:* $L(w_1) = \{p\}$, $L(w_2) = \{q,r\}$, $L(w_3) = \{q,r,s\}$, $L(w_4) = \{q,s\}$, $L(w_5) = \{p,r\}$

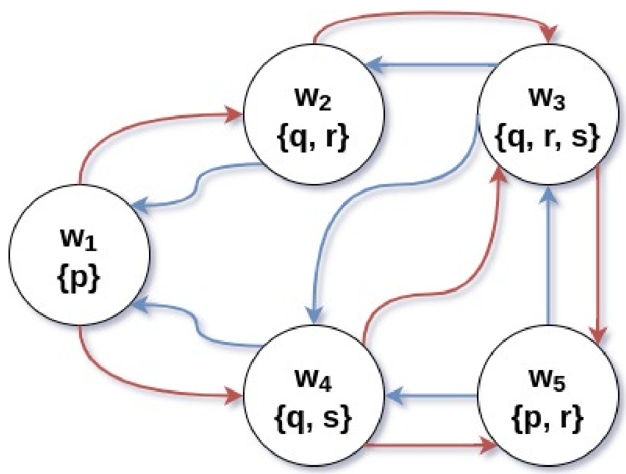


Figura 2.4: Reprezentare grafică a exemplului 2.25

Analizând τ*-frame-ul* $\mathcal{F} = (W, \{R_1, R_2\})$ *și* τ*-modelul* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$*, se pot face următoarele observații:*

- *Se verifică dacă* $\mathcal{M}, w_4 \Vdash \Box_1 \Diamond_2 q$*. Pentru a fi adevărată trebuie ca orice stare x, accesibilă din* w_4 *prin relația* R_1*, să respecte* $\mathcal{M}, x \Vdash \Diamond_2 q$*. Deci, în stările* w_3 *și* w_5 *trebuie să fie adevărată formula* $\Diamond_2 q$*, ceea ce se întâmplă deoarece din starea* w_3 *este accesibilă starea* w_2*, prin relația* R_2*, în care este adevărată formula q, iar din starea* w_5 *este accesibilă starea* w_3*, prin relația* R_2*. in care este adevărată formula q.*
- *Se poate verifica afirmația* $\mathcal{M} \Vdash \Box_1(r \vee \Box_2 p)$*. Este suficient să se arate că formula* $r \vee \Box_2 p$ *este adevărată pentru orice stare x accesibilă prin relația* R_1 *(pentru care există o stare y astfel încât* $(y,x) \in R_1$*). Aceste stări sunt* w_2*,* w_3*,* w_4 *și* w_5*. Formula r este adevărată în toate aceste stări, mai puțin în* w_4*. Deci rămâne de arătat că* $\mathcal{M}, w_4 \Vdash \Box_2 p$*, ceea ce este corect*

deoarece în starea w_1, unica accesibilă prin relația R_2 din w_4, formula p este adevărată în acest model.

- *Se poate demonstra că $\mathcal{F}, w_1 \vDash \Box_1 \Diamond_1 p \to \Diamond_1 \Box_1 p$. Se pleacă de la presupunerea că formula $\Box_1 \Diamond_1 p$ este validă în starea w_1, adică în stările w_2 și w_4, cele accesibile din w_1 prin relația R_1, trebuie ca formula $\Diamond_1 p$ să fie validă. Dar pentru starea w_2 există o singură stare accesibilă prin relația R_1, deci se poate deduce și că formula $\Box_1 p$ este validă în starea w_2. Acest lucru implică faptul că, în starea w_1, este validă formula $\Diamond_1 \Box_1 p$, adică ceea ce se dorea.*
- *Se poate arăta că $\mathcal{F} \vDash \varphi \to \Box_1 \Diamond_2 \varphi$. Această afirmație nu va fi demonstrată, ea fiind o consecință a unui caz mai general care va fi prezentat în cele ce urmează.*

Observație: Un *frame* bidirecțional este un τ-*frame* ce conține doar două relații binare de accesibilitate, R_1 și R_2, astfel încât una din relații este inversa celelalte: $R_2 = R_1^{-1}$ (pentru orice stări $x, y \in W$ se știe că $(x,y) \in R_1$ dacă și numai dacă $(y,x) \in R_2$).

Propoziția 2.26. *Fie $\mathcal{F} = (W, \{R_1, R_2\})$ un τ-frame. $\mathcal{F}$ este un frame bidirecțional dacă și numai dacă afirmația $\mathcal{F} \vDash \varphi \to (\Box_1 \Diamond_2 \varphi \wedge \Box_2 \Diamond_1 \varphi)$ este adevărată pentru orice formulă φ.*

Demonstrație: Pentru început, se va demonstra implicația directă, adică se presupune că $\mathcal{F}$ este un *frame* bidirecțional și se va arăta că $\mathcal{F} \vDash \varphi \to (\Box_1 \Diamond_2 \varphi \wedge \Box_2 \Diamond_1 \varphi)$ pentru orice formulă φ. Se consideră o formulă a logicii modale φ și o stare $w \in W$ din *frame*-ul $\mathcal{F}$ pentru care se știe că $\mathcal{F}, w \vDash \varphi$. Pentru simplitate, se va demonstra doar validitatea uneia dintre cele două formule din conjuncție, cealaltă demonstrație fiind similară. În cele ce urmează se va arăta că $\mathcal{F}, w \vDash \Box_1 \Diamond_2 \varphi$. Fie $y \in W$ o stare accesibilă din starea w prin relația R_1 ($(w,y) \in R_1$), se dorește ca $\mathcal{F}, y \vDash \Diamond_2 \varphi$. Această ultimă afirmație este adevărată, deoarece $\mathcal{F}, w \vDash \varphi$ și $(y,w) \in R_2$ (din bidirecționalitate și faptul că $(w,y) \in R_1$). Așadar, această implicație este adevărată.

Pentru implicația inversă, se știe că $\mathcal{F} \vDash \varphi \to (\Box_1 \Diamond_2 \varphi \wedge \Box_2 \Diamond_1 \varphi)$ pentru orice formulă φ și se urmărește să se arate că $\mathcal{F}$ este bidirecțional. Se presupune, prin reducere la absurd, că $\mathcal{F}$ nu este bidirecțional, deci rezultă că există două stări $x, y \in W$ pentru care $(x,y) \in R_1$ și $(y,x) \notin R_2$ sau $(x,y) \notin R_1$ și $(y,x) \in R_2$. Ținând cont de faptul că formula analizată este simetrică (dacă se interschimbă $\Box_1$ cu $\Box_2$ și $\Diamond_1$ cu $\Diamond_2$ se obține aceeași formulă), se poate presupune, fără a restrânge generalitatea, că există două stări $x, y \in W$ pentru care $(x,y) \in R_1$ și $(y,x) \notin R_2$. Se va construi un τ-model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, L)$, unde L este o funcție de evaluare, în care formula $p \to (\Box_1 \Diamond_2 p \wedge \Box_2 \Diamond_1 p)$ nu este adevărată în starea x, astfel: $p \in L(x)$ și $p \notin L(w)$ pentru orice $w \in W$ cu $w \neq x$. Din această definiție se poate vedea ușor că formula p este adevărată în starea x ($\mathcal{M}, x \Vdash p$). În plus, se știe că $(y,x) \notin R_2$ și $p \notin L(w)$ pentru orice $w \in W$ cu $w \neq x$, deci $\mathcal{M}, y \nVdash \Diamond_2 p$. Combinând acest rezultat cu faptul că $(x,y) \in R_1$, rezultă că $\mathcal{M}, x \nVdash \Box_1 \Diamond_2 p$. Recapitulând rezultate demonstrate, se cunoaște

$\mathcal{M},x \Vdash p$ și $\mathcal{M},x \nVdash \Box_1\Diamond_2 p$, deci este evident că nu se poate ca $\mathcal{M},x \Vdash p \to (\Box_1\Diamond_2 p \wedge \Box_2\Diamond_1 p)$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Deci *frame*-ul considerat este bidirecțional.

Având în vedere că ambele sensuri ale implicație sunt adevărate, se poate afirma că propoziția analizată este adevărată. □

Exemplul 2.27. *O aplicație importantă a frame-urilor bidirecționale este Limbajul Temporal De Bază (eng: The Basic Temporal Language). După cum a fost prezentat și în secțiunea II.4, folosind logica modală se poate modela persistența unui adevăr în viitor. Acest model se dezvoltă, urmărindu-se și modelarea acțiunilor care s-au petrecut în trecut. Concret, se pornește de la o similaritate de tip ce conține doi operatori unari, $O = \{[G],[H]\}$. Aceștia sunt notați cu literele G și H, ce provin de la denumirea din limba engleză a expresiilor „va fi întotdeauna cazul" (eng: "it is always Going to be the case") și „a fost întotdeauna cazul" (eng: "it always Has been the case") [2]. Aceste expresii stau, de altfel, și la baza interpretării operatorilor, formula $[G]\varphi$ semnificând că „φ va fi întotdeauna adevărată" și formula $[H]\varphi$ că „φ a fost întotdeauna adevărată".*

În plus, se pot defini operatorii duali ai acestora, care se notează, de obicei, cu $<F>$ și $<P>$, de la termenii din limba engleză viitor (eng: Future), respectiv trecut (eng: Past). Folosindu-ne de modul în care sunt definiți acești operatori, se poate deduce și interpretarea acestora. Mai explicit, formula $<F>\varphi$ simbolizează că „φ va fi adevărată la un moment dat în viitor", iar formula $<P>\varphi$ exprimă faptul că „φ a fost adevărată la un moment dat în trecut". De multe ori, pentru o scriere mai curată a formulelor, operatori modali ($[G],[H],<F>,<P>$) sunt referențiați doar prin litera acestora, adică G, H, F, respectiv P.

Este ușor de înțeles acum de ce este de dorit ca τ-frame-ul care stă la baza acestei construcții să fie unul bidirecțional. Dacă aceasta nu ar fi adevărată, atunci ar fi posibil, de exemplu, să existe un moment x în viitor raportat la un alt moment y, dar momentul y să nu existe în trecut față de momentul x. Acest lucru nu are sens în problema care se dorește a fi modelată și, în plus, conduce la invalidarea multor altor adevăruri. De exemplu, formula $P\varphi \to GP\varphi$, care se interpretează ca „Dacă φ a fost adevărată la un moment dat, atunci va fi întotdeauna adevărat că φ a fost adevărată la un moment din trecut", nu ar rămâne validă într-un τ-frame care nu are proprietatea de bidirecționalitate. Formula anterior menționată ilustrează proprietatea de non-repudiere a unui eveniment (odată petrecut un eveniment, existența acestuia nu mai poate fi negată).

O cerință interesantă, care nu poate fi satisfăcută folosind limbajul temporal de bază, este modelarea expresiilor „din acel moment" (eng: since) și „până la acel moment" (eng: until). O soluție pentru aceasta este oferită de logica hibridă, care adaugă limbajului modal posibilitatea de a referi în cadrul unei formule o lume din contextul frame-ul [3].

Exemplul 2.28. *Un alt caz din logica modală care merită menționat este cel prin care a fost* *motivată necesitatea utilizării mai multor operatori modali, și anume modelarea cunoștințelor mai multor agenți. Se consideră problema reprezentării pentru un număr finit de n agenți pentru care se definește mulțimea $O = \{\Box_1, \Box_2, ..., \Box_n\}$. Similar cu problema unui singur agent, discutată în secțiunea II.4, formula $\Box_i\varphi$ se interpretează ca fiind „Agentul i știe φ". Avantajul acestui nou model este că se pot reprezenta interacțiunile dintre agenți. De exemplu, se poate afirma că formula $\Box_i(p \wedge \Box_j q)$ este adevărată, adică „Agentul i cunoaște afirmația p, dar știe și că agentul j cunoaște informația q".*

Exemplul 2.29. *Ultimul exemplu abordat în această secțiune este și cel care ilustrează cel mai bine puterea de modelare conferită de limbajul logicii modale. Acesta este reprezentat de Logica Propozițională Dinamică (eng: Propositional Dynamic Logic). Acest limbaj este foarte interesant atât din punct de vedere practic, întrucât ajută la modelarea execuției programelor, cât și dintr-un punct de vedere teoretic, deoarece se bazează pe o similaritate modală ce conține un număr infinit de operatori modali. Mai precis, operatori din mulțimea O au forma $[\pi]$, unde π reprezintă un program care poate fi și nedeterminist, iar operatorul dual este $< \pi >$. Interpretarea formulei $[\pi]\varphi$ este că „după terminarea oricărei execuții a programului π este adevărată proprietatea φ, iar a formulei $< \pi > \varphi$ este că „există o execuție a programului π la sfârșitul căreia este adevărată proprietatea φ".*

Așa cum a fost prezentat anterior, definirea operatorilor modali din acest limbaj este dată de mulțimea programelor analizate. Așadar, pentru a defini complet signatura modală a limbajului, trebuie să fie descrisă mai întâi mulțimea programelor, acest lucru fiind realizat inductiv. Similar cu propozițiile logicii, se definește o mulțime de programe atomice pe care se pot aplica secvențial mai mulți operatori specifici pentru a se obține alte programe. Regulile folosite pentru crearea noilor programe sunt asemănătoare cu regulile folosite pentru definirea expresiilor regulate și pot fi descrise astfel [5]:

***compunere (eng: composition)**: Dacă π_1 și π_2 sunt programe, atunci și $(\pi_1;\pi_2)$ este program. Semnificația acestuia este „Execută secvențial programul π_1 și apoi programul π_2".*

***alegere (eng: choice)**: Dacă π_1 și π_2 sunt programe, atunci și $(\pi_1 \cup \pi_2)$ este program. Semnificația acestuia este „Alege nedeterminist unul din programele π_1 sau π_2 și execută-l".*

***iterație (eng: iteration)**: Dacă π este un program, atunci și $(\pi^\star)$ este program. Semnificația acestuia este „Se execută programul π de un număr finit de ori ales în mod nedeterminist".*

***testare (eng: test)**: Dacă φ este o formulă, atunci $(\varphi?)$ este un program. Semnificația acestuia este „Testează formula φ, dacă este adevărată continuă, altfel execuția se oprește".*

Cu ajutorul acestor operatori se pot descrie formule mai complexe, cum ar fi formula $< \pi^\star > \varphi \leftrightarrow \varphi \vee < \pi;\pi^\star > \varphi$ exprimă că o stare în care φ este adevărată poate fi atinsă executând programul π de un număr finit de ori dacă și numai dacă φ este adevărată în starea curentă sau dacă executând programul π cel puțin o dată se ajunge într-o stare în care φ este adevărată. O altă *formulă importantă pentru limbajul propozițional dinamic este $\varphi \to ([\pi^\star](\varphi \to [\pi]\varphi) \to [\pi^\star]\varphi)$, cunoscută și sub denumirea de axioma lui Segerberg [6]. Chiar dacă nu pare evident, aceasta ilustrează un principiu matematic bine cunoscut, principiul inducției. O explicație pentru aceasta poate fi dată de interpretarea formulei: „Dacă se cunoaște φ (pasul inițial, P(0)) și, în plus, se știe că, după un număr aleator finit de execuții ale programului π, dacă formula φ este adevărată atunci aceasta va fi adevărată și după încă o execuție a programului π (pasul inducției, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)), atunci se poate deduce că φ este adevărată după un număr arbitrar finit de execuții ale programului π(concluzia inducției, P(n) adevărată pentru orice n)". Această axiomă are o importanță deosebită în verificarea corectitudinii secvențelor de cod repetitive, precum „for" sau „while", aceste verificări putând fi rezumate, de multe ori, la demonstrarea conservării unor proprietății de la o iterație la alta.*

Un alt lucru important care nu a fost încă prezentat este legat de relațile de accesibilitate. Se știe că pentru fiecare operator dintr-un sistem al logicii modale trebuie să se definească o relație de accesibilitate. Aceasta poate deveni o problemă dificilă sau chiar una imposibil de rezolvat în contextul unui model care conține un număr infinit de operatori. În ceea ce privește modelarea limbajului propozițional dinamic, acest fapt nu reprezintă o dificultate deoarece fiecare regulă de construcție a programelor definește o regulă pentru relația de accesibilitate a programului nou format. Deci, ținând cont de aceasta, este suficient să se definească relațiile de accesibilitate doar pentru mulțimea de programe atomice, adică o mulțime finită. Reguli ce pot fi folosite pentru definirea relațiilor de accesibilitate sunt următoarele [6]:

$$
\begin{aligned}
R_{\pi_1 \cup \pi_2} &= R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2} \\
R_{\pi_1;\pi_2} &= R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2} \; (= \{(x,y) | \exists z((x,z) \in R_{\pi_1} \land (z,y) \in R_{\pi_2})\}) \\
R_{\pi^\star} &= (R_\pi)^\star \; (= \{(x,y) | \exists k \in \mathbb{N}((x,y) \in R_\pi^k)\})
\end{aligned}
$$

Observație: Un *frame* construit pe baza regulilor prezentate în exemplul anterior poartă denumirea de *frame* normal (*eng: regular frame*).

Propoziția 2.30. *Fie $\mathcal{F} = (W, \{R_\pi | \pi \in \Pi\})$ (Π reprezintă mulțimea programelor) un frame. $\mathcal{F}$ este un frame normal dacă și numai dacă $\mathcal{F} \models \Delta \cup \Gamma$, unde:*

$$
\begin{aligned}
\Delta :=& \{p \to ([\pi^\star](p \to [\pi]p) \to [\pi^\star]p) | \pi \in \Pi\} \cup \\
& \{< \pi^\star > p \leftrightarrow p \lor < \pi >< \pi^\star > p | \pi \in \Pi\} \\
\Gamma :=& \{< \pi_1; \pi_2 > p \leftrightarrow < \pi_1 >< \pi_2 > p | \pi_1, \pi_2 \in \Pi\} \cup \\
& \{< \pi_1 \cup \pi_2 > p \leftrightarrow < \pi_1 > p \lor < \pi_2 > p | \pi_1, \pi_2 \in \Pi\}
\end{aligned}
$$

Acest rezultat de caracterizare a *frame*-urilor regulate este foarte important pentru limbajul propozițional dinamic deoarece oferă totodată și bazele unui sistem în care se pot demonstra proprietăți ale programelor. Concret, acest sistem poate fi creat folosind o structură similară cu exemplele prezentate în secțiunea II.7, formulele ce caracterizează *frame*-urile regulate putând fi folosite ca axiome ale unui astfel de sistem.

Capitolul III

Verificator de demonstrații

III.1 Prezentarea problemei

Scopul acestui capitol este de a prezenta un exemplu practic pentru a ilustra cum pot fi folosite conceptele teoretice din logica modală pentru rezolvarea unor probleme concrete. După cum a fost prezentat în capitolul II, logica modală poate ajuta la modelarea diverselor probleme și la demonstrarea anumitor proprietăți, însă nu s-a făcut nici o referire la modul în care pot fi automatizate aceste procese. Acesta reprezintă subiectul ce va fi abordat în continuare, accentul fiind pus pe construirea unui verificator de demonstrații.

În majoritatea problemelor, se dorește determinarea proprietăților care sunt valabile într-un caz general, nu doar într-un context particular. În terminologia folosită în logică, acest lucru s-ar traduce prin noțiunea de validitate a formulelor, iar un instrument puternic pentru testarea validității este reprezentat de demonstrațiile sintactice. Acestea sunt prezente în multe sisteme logice, nefiind specifice numai logicii modale. O problemă semnificativă în cazul acestor demonstrații este că, deși regulile ce le definesc sunt complete și corecte, din cauza complexității pe care le ating, pot apărea erori umane de-a lungul realizării lor. În acest context, au apărut verificatoarele de demonstrații automate, care pot avea implementate regulile de deducție ale sistemului pe care le folosesc pentru a verifica dacă demonstrația realizată este corectă, eliminând astfel complet erorile apărute pe parcurs. Restrângând această problemă la contextul logicii modale, un verificator de demonstrații poate fi utilizat în verificarea corectitudinii **K**-demonstrațiilor, concept prezentat pe larg în secțiunea II.7.

Construirea unui astfel de verificator pentru logica modală reprezintă obiectul acestui capitol. Concret, va fi prezentat un modul propriu, denumit **ModalProofChecker**, realizat folosind limbajul Haskell. Acesta modelează conceptele necesare pentru realizarea **K**-demonstrațiilor și oferă o funcționalitate ce permite verificarea acestor demonstrații. În cele ce urmează, vor fi prezentate atât detaliile legate de implementarea acestui modul, precum noile tipuri de date definitie și cele mai importante funcții utilizate în verificarea demonstrațiilor, cât și mențiuni utile pentru utilizarea acestuia cum ar fi formatul în care trebuie să fie scrise demonstrațiile și cum pot fi verificate acestea. Este important de menționat faptul că acest exemplu se rezumă la limbajul modal de bază, deci oferă posibilitatea utilizării doar a unei perechi de operatori modali, $\Box$ și $\Diamond$.

III.2 Alegerea limbajului de programare

Înainte de a intra în detalii specifice implementării exemplului, este oferită o justificare pentru alegerea limbajului de programare Haskell în dezvoltarea acestui verificator de demonstrații. Motivația acestei secțiuni nu este de a explica de ce trebuie să fie utilizat Haskell pentru acest exemplu, având în vedere că implementarea acestei probleme putea fi realizată în multe alte limbaje de programare, ci de a prezenta avantajele utilizării acestui limbaj, în acest caz concret.

Un punct cheie pentru implementarea unui verificator de demonstrații, sau a unui sistem logic în general, este reprezentat de capacitatea de a modela conceptele logice abstracte. Din acest punct de vedere, Haskell a oferit un avantaj considerabil, poate în acest caz particular mai mare decât un limbaj orientat pe obiecte (*eng: object oriented*), fiind un limbaj cunoscut pentru puterea sa de modelare [1]. O altă caracteristică a limbajului, care îmbunătățește procesul de implementare, este constituită de utilizarea funcțiilor șablon (*eng: pattern matching*). Acest aspect poate fi neînsemnat în unele cazuri, dar în altele, precum cel de față în care este întâlnită des inducția pe formule, are un rol foarte important în separarea fiecărui caz. În afară, de acestea, se mai pot menționa și alte avantaje ale limbajului Haskell, precum codul compact sau puritatea funcțiilor.

III.3 Modelarea conceptelor

Pentru început, va fi făcută o prezentare a modului în care au fost modelate conceptele logice necesare pentru a rezolva problema. Dintre acestea, vor fi prezentate formulele, regulile de deducție, sistemul de deducție și demonstrațiile.

```
data Proof = Proof Deduction_System [(Formula, Deduction_Rule)]
                deriving Show
```

Primul tip de dată considerat este cel care le înglobează pe toate celelate, `Proof`. Acesta modelează noțiunea de demonstrație pentru care sunt necesare un `Deduction_System`, contextul în care este realizată demonstrația, și o listă a căror elemente sunt perechi de `Formula` și `Deduction_Rule`, fiecare dintre acestea reprezentând formula dedusă și regula utilizată pentru deducția acesteia. Ordinea în care sunt deduse formulele de-a lungul demonstrației este importantă în sensul în care, pentru demonstrarea formulei de pe poziția i, nu pot fi folosite formulele de pe pozițiile i+1, i+2 și așa mai departe. În cadrul demonstrațiilor, aceste poziții vor fi folosite pentru a identifica formulele deja deduse. De exemplu, dacă se dorește utilizarea regulii „modus ponens”, pentru a specifica pe ce formule se aplică, vor fi utilizate aceste numere de ordine. Indexarea formulelor începe de la 1, această decizie fiind luată deoarece în demonstrațiile logice acest lucru este mult mai des întâlnit decât indexarea de la 0. În continuare, vor fi detaliate tipurile de date care compun `Proof`.

```haskell
type Atom = String

data Formula = F | T
             | AtomF Atom
             | NotF Formula
             | AndF Formula Formula
             | OrF Formula Formula
             | ImpF Formula Formula
             | EqvF Formula Formula
             | BoxF Formula
             | DiaF Formula
             | ErrorF
             deriving Eq
infixl 7 `AndF`
infixl 6 `OrF`
infixr 5 `ImpF`
infixr 5 `EqvF`
```

Discuția va continua cu modelarea formulelor din limbajul modal de bază. Definiția tipului de date `Formula` reprezintă o transpunere în limbajul Haskell a definiției 2.1. Pentru reprezentarea formulelor ce semnifică adevărul ($\top$) și falsul ($\bot$) sunt utilizați constructori fără parametrii `T`, respectiv `F`. Pentru atomi propoziționali, cei din mulțimea *Prop*, este utilizat constructorul de date `AtomF` împreună cu denumirea atomului. Se observă faptul că denumirea atomilor este de tip `Atom`, care nu este decât o altă denumire pentru tipul `String`, utilizată pentru claritatea modelării. În plus, utilizarea tipului `String` ca tip de bază al denumiri atomilor permite folosirea unei mulțimi arbitar de mare de atomi propoziționali. În ceea ce privește ceilalți constructori din definiția tipului de date `Formula`, aceștia modelează operatori logici conform următoarelor corespondențe: `NotF` și $\neg$, `AndF` și $\wedge$, `OrF` și $\vee$, `ImpF` și $\rightarrow$, `EqvF` și $\leftrightarrow$, `BoxF` și $\Box$, `DiaF` și $\Diamond$. Ultimul caz, cel al constructorului `ErrorF`, este folosit pentru a semnala diverse erori care pot apărea în funcțiile care întorc date de tipul `Formula`. Aceste cazuri speciale vor fi detaliate în descrierea funcțiilor care folosesc acest constructor. De asemenea, se pot observa utilizarea funcțiilor `infixr` și `infixl` care permit stabilirea de priorități pentru constructorii de date binari. Aceasta are o consecință foarte importantă, permițând scrierea mult mai clară a formulelor, deoarece sunt eliminate multe paranteze. Numărul întreg din apelul funcțiilor reprezintă prioritatea asociată fiecărui operator, putându-se observa faptul că `AndF` are cea mai mare prioritate, apoi evaluându-se constructorul `OrF` și, în final, `ImpF` și `EqvF`. Important de menționat este că pentru a beneficia de această facilitate trebuie să fie folosită forma infixată a constructorilor (plasarea între operanzi) și nu forma prefixată a acestora (plasarea înaintea operanziilor).

```
newtype Deduction_System = Axioms { get_axioms :: [Formula]}
                           deriving Show
```

Tipul de date `Deduction_System` este utilizat pentru a încapsula contextul în care este realizată demonstrația. Concret, în cazul acesta, demonstrația este influențată de formulele ce sunt considerate axiome. De menționat este și faptul că, similar formulelor deduse, și axiomelor li se asociază un număr de ordine pentru a putea fi utilizate în cadrul demonstrațiilor. De asemenea, la fel ca în cazul formulelor, și această indexare se realizează începând de la 1. Se poate observa că definirea tipului de date folosind această scriere conduce și la crearea unei funcții „getter” pentru lista de axiome, numită `get_axioms`.

```
data Deduction_Rule = Axiom Int
                    | Taut
                    | KAxiom
                    | DualAxiom
                    | MP Int Int
                    | US Int
                    | Gen Int
                    deriving Show
```

Următorul tip de dată prezentat este `Deduction_Rule`, care modelează conceptul de regulă de deducție. Conceptul este extins față de definiția regulilor de deducție din capitolul anterior, în sensul în care sunt adăugate și câteva reguli care semnifică deducția axiomelor (`Axiom`, `Taut`, `KAxiom` și `DualAxiom`). Constructorul `Axiom` modelează deducerea formulelor ce sunt instanțe ale unei axiome a sistemului, numărul asociat reprezentând numărul de ordine al axiomei utilizate. Următoarele trei cazuri, `Taut`, `KAxiom` și `DualAxiom`, modelează tot deducții ale axiomelor și anume al instanțelor tautologiilor din logica propozițională, al axiomei K, respectiv al axiomei duale. Este important ca pentru deducția instanțelor acestor axiome să existe o regulă diferită față de cea a deducerii unei axiome adăugate în sistemul de deducție, deoarece orice sistem de deducție considerat trebuie să conțină axiomele K, duală și toate tautologiile din logica propozițională. Ultimii trei constructori se referă la cazurile de deducție din sistemul logicii modale „modus ponens”, substituția uniformă și respectiv generalizarea. Parametrii pe care aceștia îi primesc reprezintă numerele de ordine, din cadrul demonstrației, ale formulelor folosite în aplicarea acestor reguli.

Acestea reprezintă cele mai importante tipuri de date utilizate în construirea verificatorului de demonstrații. Odată cu introducerea formatului unei demonstrații, poate fi descrisă abordarea utilizată în implementarea verificatorului. Concret, trebuie realizată o funcție care testează corectitudinea unei demonstrații încapsulate într-o dată de tipul `Proof`. Pentru aceasta, va trebui să se verifice modul în care a fost dedusă fiecare formulă de-a lungul demonstrație.

III.4 Descrierea funcționalității

În această secțiune, vor fi prezentate detaliile implementării modulului **ModalProofChecker**. Înainte de a prezenta funcțiile, trebuie introduse câteve tipare utilizate mai frecvent în funcțiile acestui modul. Pentru a putea avea un cod flexibil și mentenabil, procesul de testare a demonstrațiilor a fost împărțit în unități mai mici, fiecare dintre acestea fiind rezolvată de o funcție diferită. Pe de altă parte, această abordare conduce la alte provocări. De exemplu pentru returnarea motivului unei erori apar dificultăți deoarece, chiar dacă este depistată cauza, aceasta trebuie să fie trimisă prin mai multe funcții, până când ajunge la utilizator. Pentru rezolvarea acestei probleme, va fi utilizată monada `Writer` care permite menținerea atât a unei valori, cât și a altor informații utile. În cazul de față, este utilizată monada `Writer [String] Bool`, informația reținută fiind reprezentată de o listă de mesaje care, în cazul unei erori, semnifică motivele acesteia, de la cel mai specific la cel mai general, asemănător unui *stack trace*. Mai multe exemple care ilustrează aceste cazuri pot fi găsite în secțiunea III.5.

O altă tehnică des utilizată în scrierea funcțiilor din modul este cea a inducției pe formule. Pentru a fi mai explicit, este vorba despre cazul funcțiilor care trebuie să efectueze un calcul pentru o formulă dată. Soluția presupune împărțirea acestei probleme în mai multe subprobleme în funcție de operatorul „principal” al formulei, apoi definindu-se modul în care trebuie efectuat calculul dorit pentru fiecare caz. Prin operator principal se înțelege operatorul ce are prioritatea cea mai mică (este interpretat ultimul) din cadrul formulei.

Acestea fiind spuse, în cele ce urmează va fi prezentată funcția principală a acestui modul, și anume `verify_proof`, ce reprezintă principalul punct de interacțiune al utilizatorilor cu modulul. Această funcție primește ca argument o demonstrație de tipul `Proof`, după care apelează funcția `verify_proof_recursive`. Asupra răspunsului primit de la această funcție, care este de tipul monadei `Writer`, este aplicată funcția `runWriter` pentru a extrage rezultatul verificării, precum și mesajele de eroare, dacă este cazul. Acestea sunt returnate către utilizator cu mențiunea că lista mesajelor de eroare este inversată, deoarece se dorește ca acestea să fie ordonate de la cel mai generic la cel mai specific.

După cum se poate observa și din denumirea funcții `verify_proof_recursive`, pentru realizarea verificării demonstrației se va folosi o metodă recursivă. Mai precis, pentru testarea corectitudinii unei demonstrații în care sunt deduse n formule, trebuie să fie testată demonstrația formată din primele $n-1$ deducții (`are_previous_deductions_correct`) și corectitudinea ultimei deducții (`is_current_deduction_correct`). Dacă toate verificările sunt efectuate cu succes atunci demonstrația este evaluată ca fiind corectă, altfel programul va întoarce o eroare, iar la lista mesajelor va fi adăugat faptul că deducția curentă este greșită (`wrong_deduction_message $ length fs`). Este important că, deoarece apelul recursiv este realizat înaintea verificării deducției curente, dacă există mai multe greșeli de-a lungul demonstrației atunci va fi detectată și semnalată prima dintre ele. Pasul de oprire al recursivității este dat în prima descriere a funcției (pentru cazul în care demonstrația nu are nici o deducție, atunci demonstrația este considerată corectă). Pentru verificarea corectitudinii unei deducții se poate observa că este utilizată funcția `verify_deduction`, care va fi prezentată în cele ce urmează.

Scopul funcției `verify_deduction` este de a verifica dacă o deducție este corectă. Înainte de a intra în detalii pentru fiecare caz considerat, va fi discutată signatura funcției. Primul argument este o listă a axiomelor sistemului în care se lucrează. În afară de aceste axiome, este necesar să se cunoască și formulele care au fost deduse înainte de pasul curent, deoarece și acestea pot fi utilizate în deducerea formulei curente. De aceea, al doilea parametru reprezintă o listă a formulelor care au fost deduse până în acest moment, fără regulile folosite pentru deducția acestora, deoarece nu sunt necesare. Următoarele două argumente semnifică formula analizată la acest pas, precum și regula de deducție utilizată pentru obținerea ei.

La acest pas, sunt efectuate mai multe verificări pentru indicii axiomelor și inidicii formulelor asupra cărora sunt aplicate regulile de deducție. Dacă una dintre aceste testări eșuează, atunci demonstrația este greșită și, ca atare, va fi adăugat un mesaj sugestiv pentru eroarea detectată. Mai precis, indicii axiomelor trebuie să fie numere întregi mai mari ca 0 (`reason_index_axiom_too_small`), dar să fie și cel mult egali cu numărul de axiome din sistemul în care este realizată demonstrația (`reason_index_axiom_too_big`). În cazul indicilor formulelor, după cum a fost menționat și anterior, trebuie ca acestea să fie de asemenea numere întregi strict pozitive (`reason_index_formula_too_small`) și mai mici decât indicele axiomei curente (`reason_index_formula_too_big`). De asemenea, se poate observa că și în cazul regulii „modus ponens" (`reason_wrong_modus_ponens`) și al generealizării (`reason_wrong_generalisation`) sunt adăugate mesaje de eroare, în caz de eșec. Celelalte cazuri sunt mai complexe și pot conduce la apariția unor greșeli mai diverse. Ca urmare, tratarea acestora este realizată în funcțiile mai specifice.

Pe lângă acestea, funcția `verify_deduction` ajută la separarea verificării regulilor de deducție. Practic, fiecare regulă este testată independent de o funcție diferită, iar aceasta îmbină rezultatele tuturor. Spre exemplu, în primul caz din această definiție este apelată funcția `verify_axiom` pentru a verifica dacă formula dată a fost dedusă îm mod corect ca fiind instanță a axiomei referite prin indicele specificat. Este de remarcat că funcția `verify_axiom` este utilizată și pentru cazul instanțelor axiomei K, axiomei duale, folosindu-se argumente diferite. În timp ce pentru cazul axiomelor menționate în cadrul sistemului de deducție sunt utilizate formulele extrase din lista de axiome, pentru cazul axiomei K se utilizează variabila `axiom_k`. Pentru celelate cazuri rămase sunt verificate regulile astfel: `verify_tautology` pentru tautologii, `verify_mp` pentru „modus ponens", `verify_usubs` pentru substituția uniformă și `verify_gen` pentru regula generalizării.

Alt lucru care trebuie menționat este că această funcție realizează o transformare de la un mod de indexare la altul (`ind_axiom-1` sau `ind_form-1`). Mai precis, este vorba de trecerea de la numerotarea axiomelor din sistemul deductiv și a formulelor deduse de-a lungul demonstrației (care se realizează începând de la 1) la indexarea listelor din Haskell (care se realizează începând de la 0). În cele ce urmează, a rămas de prezentat doar implementarea pentru funcțiile care verifică fiecare regulă de deducție.

Prima funcție dintre cele care verifică regulile de deducție este `verify_axiom`. Aceasta primește ca prim argument o axiomă, iar al doilea argument este formula dedusă la pasul curent. Scopul funcției este să returneze dacă formula dată este o instanță a axiomei primite ca parametru. Soluția pentru aceasta este foarte simplă. Se va utiliza funcția `verify_usubs`, ce va fi detaliată ulterior. Folosind această funcție se poate verifica dacă formula dorită poate fi obținută din axioma dată printr-o substituție uniformă. În caz afirmativ, rezultând faptul că într-adevăr este o instanță a acesteia, altfel deducția făcută este greșită ca urmare va fi adăugat un mesaj corespunzător (`reason_no_instance_axiom`).

În privința funcției ce se ocupă de verificarea tautologiilor `verify_tautology`, abordarea este puțin mai complexă, testarea putând fi împărțită în două componente distincte. În prima etapă, se determină toți atomi propoziționali din formulă, pentru ca după să se poată obține toate evaluările posibile. Apoi, în cea de a doua parte formula va fi evaluată folosind toate evaluările găsite în prima parte. Înainte acestor pași este verificat faptul că formula dată nu conține operatori modali, deci este o formulă din logica propozițională. În caz contrar, se adaugă un mesaj care să descrie eroarea produsă (`reason_modal_operator_in_tautology`). Constructorul `LabelFunc` este folosit pentru definirea unui tip de date ce modelează funcția de evaluarea din logica propozițională. Scopul utilizării acestui tip de date este de a putea afișa funcțiile de evaluare folosind clasa `Show`.

Funcția `get_atoms` primește ca parametru o formulă și trebuie să întoarcă o listă cu denumirile atomilor propoziționali ce se regăsesc în formula dată. Funcția are o structură specifică unei operații bazate pe inducția pe formule, fiind descrise reguli pentru fiecare operator. Mai precis, formulele F și T nu au nici un atom în compoziția lor, iar în cazul formulelor formate doar dintr-un atom propozițional, lista atomilor îl conține doar pe acesta. În cazul operatorilor unari este suficient să se determine lista atomilor din formula obținută prin eliminarea operatorului, iar pentru operatori binari trebuie să se facă reuniunea listelor de atomi obținute din fiecare operand. Este de menționat și faptul că pentru ca rezultatul funcției să fie o mulțime de atomi, trebuie utilizată funcția `nub` pentru eliminarea duplicatelor. Funcția `get_evaluations` este utilizată pentru a genera toate evaluările posibile pentru o mulțime de atomi. O funcție de evaluare este reprezentată ca o listă de perechi de atomi propoziționali cu valoarea lor de adevăr. Aceste evaluări vor fi utilizate mai departe pentru a determina dacă formula evaluată este sau nu tautologie.

Pentru a încheia discuția despre verificarea tautologiilor, trebuie să se analizeze și partea de evaluare a formulelor. Funcția `truth_table` modelează conceptul de tabel de adevăr, primind ca prim parametru mai multe funcții de evaluare în formatul descris anterior, iar al doilea argument este o formulă. Este evaluată formula primită ca argument folosind toate funcțiile de evaluare date. Verificarea este oprită imediat ce este găsită o funcție de evaluare pentru care formulă este falsă, întrucât în acest caz formula considerată nu poate fi tautologie. În plus, mesajul returnat ce explicitează eroare va conține și funcția de evaluarea ce invalidează proprietatea de tautologie a formulei (`reason_no_tautology eval`). Pentru interpretarea efectivă a formulelor este utilizată funcția `evaluation`, care primește ca parametri o funcție de evaluare și o formulă. Similar cu funcția `get_atoms`, și această funcție se bazează pe inducția pe formule, regulile pentru fiecare caz fiind descrise de definiția funcțiilor de evaluare din logica propozițională.

Până acum au fost descrise funcțiile pentru verificarea regulilor care se refereau la deducția axiomelor. În continuare, rămâne de prezentat modul în care sunt verificate și regulile de deducție clasice, cele definite și în sistemul **K**. Dintre acestea, se va face referire pentru început la cea mai cunoscută dintre ele, și anume „modus ponens”.

Funcția `verify_mp` primește ca argumente trei formule, primele două dintre ele fiind cele asupra căreia este aplicată regula, iar ceea de-a treia reprezentând rezultatul obținut. Pentru verificarea corectitudinii acestei reguli trebuie verificate următoarele: (1) una din primele două formule să fie o implicație, (2) premisa acelei implicații să fie cealaltă formulă dintre primele două și (3) ultima formulă să fie concluzia implicației. Doar dacă cele trei afirmații sunt toate adevărate regula este adevărată, în orice alt caz regula fiind aplicată greșit.

Următoare regulă de deducție ce va fi abordată este generalizarea. Această regulă spune că dacă o formulă φ este validă, atunci și formula $\Box\varphi$ este validă. Deci în funcția `verify_gen` care se ocupă de verificarea aplicării acesteia, trebuie testat dacă formula dedusă (al doilea argument) este generalizarea formulei pe care s-a aplicat regula (primul argument).

Ultima regulă rămasă este substituția uniformă, a cărei verificare este realizată de către funcția `verify_usubs`. Abordarea în cazul acestei reguli de deducție este mai complexă decât în celelalte două cazuri, aceasta deoarece în cazul substituției uniforme trebuie să se determine o funcție de substituție care să facă transformarea de la o formulă la alta. Mai concret, funcția `verify_usubs` primește ca argument două formule, cea pe care s-a aplicat regula și cea care a fost obținută, iar testarea regulii se împarte în două etape obținerea unei funcții de substituție și verificarea corectitudinii acesteia.

Prima parte este realizată de funcția `build_substitution`, a cărei parametri au aceeași semnificație ca cei ai funcției `verify_usubs` și care întoarce o funcție de substituție sub forma unei liste de perechi care atribuie fiecărui atom propozițional câte o formulă. Acest lucru este realizat folosind inducția pe formule conform următoarelor reguli: (1) dacă formulele sunt egale între ele și sunt egale cu F sau T, atunci funcția de substituție nu trebuie să reflecte nici o schimbare, (2) dacă prima formulă este un atom propozițional, notat p, atunci se adaugă la funcția de substituție perechea formată din p și a doua formulă, (3) dacă pentru ambele formule, operatorul cu prioritatea cea mai mică (operatorul care este evaluat ultimul în cadrul formulei) este același, atunci acesta poate fi eliminat iar construcția substituției va continua pe subformula rămasă (în cazul operatorilor unari) sau pe subformulele rămase (în cazul operatorilor binari), (4) în orice alt caz cu excepția celor trei descrise până acum se va adăuga la funcția de substituție perechea formată din șirul vid și formula specifică erorilor `ErrorF` pentru a semnala că nu poate fi construită o substituție. Câteva exemple de cazuri care vor conduce la producerea unei erori în timpul construcției funcției de substituție sunt cazul în care operatorii cu cea mai mică prioritate nu sunt aceiași (exemplu: $p \wedge q$ și $p \vee q$) sau cazul în care formula a doua este un atom propozițional și prima este o formulă (exemplu: $p \vee \neg p$ și p). Cel din urmă reprezintă un caz de eroare, deoarece o funcție de substituție nu poate transforma formule în atomi, ci doar invers. Se poate observa utilizarea funcției `nub` pentru ca, în final, să fie returnată o listă fără intrări multiple.

În al doilea pas al testării substituției uniforme, se va verifica dacă funcția de substituție obținută la pasul anterior este corectă, utilizând funcția `check_substitution`. Mai precis, pentru aceasta sunt realizate două verificări. Prima dintre ele caută dacă în substituția primită sub forma unei liste există o pereche al cărei al doilea element este ErrorF (`has_error`). Dacă este găsită o astfel de pereche, atunci, așa cum a fost notat și anterior, nu se poate obține o substituție de la formula inițială la cea de-a doua formulă, deci regula a fost aplicată greșit. A doua verificare este realizată pentru a depista dacă există un atom propozițional pentru care substituția ia valori diferite (`has_contradictions`). După cum a fost discutat în secțiunea II.7, doar o substituție uniformă conservă validitatea, iar aceasta înseamnă că toate aparițiile unui atom propozițional trebuie înlocuite cu aceeași formulă. Dacă funcția de substituție trece cu succes de ambele verificări, se poate concluziona că aceasta poate realiza transformarea dorită, deci ca urmare regula a fost aplicată corect. În caz contrar, vor fi adăugate mesaje sugestive pentru aceste erori (`reason_no_substitution`, respectiv `reason_no_uniform_substitution`).

III.5 Detalii pentru utilizare

Până în acest punct, accentul a fost pus pe modalitatea de realizare a acestui modul. Această secțiune propune o trecere de la implementarea modulului la utilizarea acestuia. Mai precis, vor fi prezentate exemple de utilizare a acestui modul, precum și alte funcționalități pe care acesta le oferă pentru a ajuta în realizarea demonstrațiilor. Înainte de a începe prezentarea acestora, este important de notat care dintre componentele prezentate până acum sunt de interes pentru un utilizator al modulului. Din această categorie, cele mai importante de menționat sunt tipurile de date utilizate, descrise în secțiunea III.3, fără de care nu pot fi realizate demonstrațiile. Funcțiile descrise în secțiunea III.4 nu au o importanță semnificativă pentru un utilizator, singurul lucru care prezintă interes fiind că funcția `verify_proof` este cea care trebuie utilizată pentru verificarea demonstrațiilor.

Pentru început, vor fi prezentate câteva exemple de scriere a unor deducții. Pentru aceasta, se consideră următoarul exemplu de **K**-demonstrație al formulei $\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$:

(1)	$p \to (q \to (p \wedge q))$	Tautologie
(2)	$\Box\, (p \to (q \to (p \wedge q)))$	Generalizare: 1
(3)	$\Box\, (p \to q) \to (\Box\, p \to \Box\, q)$	Axioma K
(4)	$\Box\, (p \to (q \to (p \wedge q))) \to (\Box\, p \to \Box\, (q \to (p \wedge q)))$	Substituția uniformă: 3
(5)	$\Box\, p \to \Box\, (q \to (p \wedge q))$	Modus Ponens: 2, 4

O scriere echivalentă a demonstrației utilizând modulul **ModalProofChecker** poate fi următoarea:

```
deductions_example :: [(Formula, Deduction_Rule)]
deductions_example = [(
        AtomF "p" `ImpF` (AtomF "q" `ImpF` AtomF "p" `AndF` AtomF "q"),
        Taut
    ),(
        BoxF (AtomF "p" `ImpF` (AtomF "q" `ImpF` (AtomF "p" `AndF` AtomF "q"))),
        Gen 1
    ),(
        BoxF (AtomF "p" `ImpF` AtomF "q") `ImpF` (BoxF (AtomF "p") `ImpF` BoxF (AtomF "q")),
        KAxiom
    ),(
        BoxF (AtomF "p" `ImpF` (AtomF "q" `ImpF` AtomF "p" `AndF` AtomF "q")) `ImpF`
        ((BoxF (AtomF "p")) `ImpF` BoxF (AtomF "q" `ImpF` AtomF "p" `AndF` AtomF "q")),
        US 3
    ),(
        (BoxF (AtomF "p")) `ImpF` BoxF (AtomF "q" `ImpF` AtomF "p" `AndF` AtomF "q"),
        MP 2 4
    )]
```

În acest exemplu a fost utilizată forma infix a operatorilor pentru a crește lizibilitatea scrierii, prin eliminarea parantezelor. Pentru a ușura scrierea formulelor, tipul de date `Formula` instanțiază clasa `Show`, fapt ce permite printarea într-o formă mai intuitivă a formulelor, după cum se poate vedea în exemplul următor:

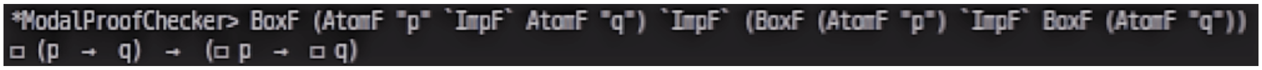


Figura 3.1: Exemplu de apel al funcției show pentru o formulă

În plus, nu este necesară scrierea axiomelor cel mai des întâlnite, deoarece pentru acestea sunt deja definite variabile în cadrul modulului. Mai mult decât atât, sunt definite variabile și pentru cele mai cunoscute sisteme de deducție, după cum se observă în următorul exemplu:

```haskell
axiom_k :: Formula
axiom_k = BoxF (AtomF "p" `ImpF` AtomF "q") `ImpF`
          (BoxF (AtomF "p") `ImpF` BoxF (AtomF "q"))

axiom_dual :: Formula
axiom_dual = DiaF (AtomF "p") `EqvF` NotF (BoxF (NotF (AtomF "p")))

axiom_4 :: Formula
axiom_4 = BoxF (AtomF "p") `ImpF` BoxF (BoxF (AtomF "p"))

system_k :: Deduction_System
system_k = Axioms []

system_k4 :: Deduction_System
system_k4 = Axioms [axiom_4]
```

O listă completă a sistemelor de deducție implementate în cadrul modulului este următoarea:

- `system_k` pentru orice tip de *frame*
- `system_k4` pentru *frame*-urile tranzitive
- `system_kt` pentru *frame*-urile reflexive
- `system_kb` pentru *frame*-urile euclidiene
- `system_kd` pentru *frame*-urile seriale
- `system_kd45` pentru *frame*-urile tranzitive, euclidiene și seriale
- `system_s4` pentru *frame*-urile reflexive și tranzitive
- `system_s5` pentru *frame*-urile a căror relație de accesibilitate este una de echivalență

Pot fi create și alte sisteme în afară de acestea, în funcție de necesități, iar în acest scop pot fi folosite și axiomele oferite de modul. O listă completă a acestor axiome este următorarea:

- `axiom_k`
- `axiom_dual`
- `axiom_4`
- `axiom_m`
- `axiom_d`
- `axiom_b`
- `axiom_5`
- `axiom_cd`
- `axiom_box_m`
- `axiom_c4`
- `axiom_c`

Pentru o descriere mai detaliată a acestor axiome, se poate consulta secțiunea II.6.

Folosind aceste definiții, precum și exemplul de demonstrație prezentat la începutul acestei secțiuni (`deductions_example`), se poate construi o variabilă de tipul `Proof` care să încapsuleze o demonstrație corectă.

```
correct_proof :: Proof
correct_proof = Proof system_k deductions_example
```

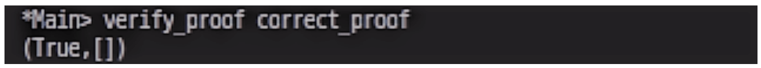


Figura 3.2: Rezultatul funcției `verify_proof` pentru o demonstrație corectă

Se poate observa în acest exemplu că pentru cazul unei demonstrații corecte este întors răspunsul `True` pe prima poziție a perechii, iar pe a doua poziție este o listă vidă deoarece nu a fost detectată nici o eroare. În cele ce urmează, vor fi introduse și câteva exemple de demonstrații care conțin erori pentru a vedea răspunsul oferit de funcția `verify_proof`. Pentru aceasta se definesc următoarele două demonstrații:

```
wrong_axiom_proof :: Proof
wrong_axiom_proof =
    Proof system_k [(
        axiom_k,
        KAxiom
    ),(
        axiom_4,
        DualAxiom
    )]

wrong_tautology_proof :: Proof
wrong_tautology_proof =
    Proof system_k4 [(
        NotF (AtomF "p") `OrF` AtomF "q",
        Taut
    )]

wrong_usub_proof :: Proof
wrong_usub_proof =
    Proof system_k [(
        AtomF "p" `OrF` NotF (AtomF "p"),
        Taut
    ),(
        AtomF "p" `OrF` NotF (AtomF "q"),
        US 1
    )]
```

Primul dintre aceste exemple ilustrează o demonstrație în care este utilizată în mod greșit o axiomă. Mai precis, este dedusă axioma tranzitivității ca fiind axioma duală. Următorul exemplu arată cazul deducției unei formule ca fiind tautologie, deși formula dată nu este adevărată pentru orice evaluare. Ultimul exemplu reprezintă o aplicare greșită a substituției uniforme. Concret, greșeala constă în faptul că o apariție a atomului propozițional p este înlocuită cu atomul q, iar cealaltă rămâne nemodificată. În continuare, este prezentată ieșirea pe care o produce funcția `verify_proof` în aceste două cazuri.

```
*Main> verify_proof wrong_axiom_proof
(False,["WRONG! Found a mistake in deduction 2.","Reason: The formula is not an instance of the given axiom.","Reason:
Couldn't determine a substitution function for the given formulas."])
*Main> verify_proof wrong_tautology_proof
(False,["WRONG! Found a mistake in deduction 1.","Reason: The given propositional formula is not a tautology. It can be
 falsified by the following labelling function { p:True, q:False }."])
*Main> verify_proof wrong_usub_proof
(False,["WRONG! Found a mistake in deduction 2.","Reason: Found a substitution, but it is not uniform. The substitution
 used MUST be uniform."])
```

Figura 3.3: Rezultatul funcției `verify_proof` pentru demonstrații greșite

Se poate observa că în toate cazurile este semnalat faptul că demonstrația este greșită prin valoarea `False` de pe prima poziție a perechii returnate. Pe lista de pe poziția a doua se poate vedea că în fiecare caz primul mesaj semnalează la ce deducție a fost detectată eroarea printr-un mesaj de forma „WRONG! Found a mistake in deduction *i*.” („INCORECT! Am găsit o greșeală în deducția *i*.”), numărul *i* reprezentând numărul de ordine al formulei în cadrul demonstrației. Acest mesaj este urmat de cel puțin un altul care detaliază motivul erorii. De accentuat este faptul că pot apărea mai multe explicații, un astfel de exemplu fiind cazul deducției greșite a unei axiome, unde sunt oferite mai multe detalii despre greșeala detectată. De asemenea, se poate vedea că pentru greșelile în deducția tautologiilor este oferit și câte un exemplu de evaluare care invalidează proprietatea de tautologie a acestora.

Capitolul IV

Concluzii

IV.1 Aprecieri critice

Această secțiune își propune să facă o analiză a modului în care a fost realizată a această lucrare, expunând atât părțile pozitive precum și aspectele care ar putea fi îmbunătățite, cât și provocările întâlnite. Totodată, se va urmări și în ce măsură au fost îndeplinite obiectivele propuse la începutul acestei lucrări.

Pentru început, atenția va fi concetrată asupra capitolul teoretic. În ceea ce privește prima parte a lucrării, cel mai important aspect îl reprezintă conținutul acesteia. Din acest punct de vedere, se poate considera că lucrarea și-a atins scopul ținând cont că au fost introduse conceptele de bază ale logicii modale până la cele necesare demonstrațiilor sintactice în sistemele de tip Hilbert. Un alt plus important al lucrării este reprezentat de exemplele prezentate de-a lungul acesteia. Chiar dacă numărul acestora nu este mare, prin exemplele oferite au fost acoperite majoritatea noțiunilor prezentate. Mai mult decât atât, în ultima secțiune, au fost detaliate și cazuri mai complexe de utilizare a logicii modale, care pot oferi o idee asupra importanței acesteia. Un punct important ce a fost atins este accesibilitatea, deoarece chiar și în contextul exemplelor mai complexe, au fost aduse explicații cuprinzătoare.

Un alt aspect ce trebuie luat în considerare, în evaluarea redactării capitolului teoretic este structura acestuia. Structurarea ideilor a reprezentat un pas important în elaborarea lucrării și ar trebui considerat astfel pentru orice tip de lucrare indiferent de scopul acesteia. Din punct de vedere structural, se remarcă ca aspect pozitiv alegerea de a prezenta în prima partea a capitolului logica modală de bază, fapt ce, fără nici un dubiu, a condus la o lucrarea mult mai ușor de urmărit, elementele noi fiind introduse gradual. De asemenea,un element imporant este reprezentat și de faptul că prezentarea unei secțiuni cu exemple de interpretări ale logicii modale de bază (secțiunea

4) a fost realizată cât mai devreme în lucrare (imediat după introducerea sintaxei și a semanticii) pentru a putea construi o intuiție cititorului asupra rolului pe care îl au operatorii modali. Se poate spune că unele idei prezentate ar putea fi dezvoltate mai mult, însă ținând cont de aspectele expuse anterior, cât și de dimensiunile capitolului teoretic raportat la complexitatea temei abordate, se poate concluzia că rezultatul obținut este foarte bun și relevant.

În cele ce urmează, se va face referire la exemplul practic atât la etapele dezvoltării, cât și la documentarea acestuia. În ceea ce privește implementarea, cel mai important pas a fost modelarea conceptelor logice necesare. Odată ce acesta a fost definitivat într-o manieră convenabilă, o mare parte a implementării a decurs în mod natural. Un alt punct important în dezvoltarea modulului a fost reprezentat de oferirea de explicații cât mai clare în cazul detectării erorilor. Pentru aceasta, poate fi considerată inspirată alegerea utilizării monadei `Writer`, care a permis atingerea acestui țel fără a afecta foarte mult structura codului. Făcând trecerea la perspectiva unui utilizator al modulului, acesta ar trebui să fie destul de accesibil pentru o persoană ce posedă cunoștințe de bază ale limbajului Haskell. Totuși, un aspect ce ar putea fi îmbunătățit este legat de introducerea formulelor, care pot deveni destul de complexe și greu de scris utilizând constructori definiți, care nu se aseamănă cu simboluri logice și pot deveni dificil de urmărit. Pentru a rezolva acest incovenient, se poate implementa un *parser* pentru expresii ce ar permite atât utilizarea unor simboluri mai sugestive pentru operatorii logici, cât și creșterea accesibilității acestui modul, oferind posibilitatea utilizării acestuia și de către persoanele ce nu au cunoștințe de Haskell. Însă, această sarcină ar fi fost destul de consumatoare de timp și avantajul oferit nu ar fi fost unul consistent în contextul acestei lucrări, reușindu-se o ameliorare a problemei prin implementarea metodei de printare a formulelor care poate înlocui parțial un *parser*.

În ceea ce privește redactarea capitolului practic, chiar dacă exemplul prezentat a fost realizat în limbajul Haskell, explicațiile oferite pentru implementarea modulului nu s-au rezumat doar la particularități ale limbajului, ci s-a încercat o prezentare a funcționalității accesibilă și unei persoane fără cunoștințe de programare în Haskell. Din acest punct de vedere, prezentarea a fost reușită, deși secțiunea III.3 dedicată tipurilor de date, care are o importanță deosebită pentru înțelegerea implementării, se poate dovedi a fi mai dificil de urmărit pentru o persoană care nu are experiență cu utilizarea acestui limbaj. Din perspectiva modului de utilizare, sunt expuse toate detaliile necesare și, în plus, acestea sunt ilustrate cu exemple edificatoare.

Punând la un loc toate ideile prezentate anterior, se poate spune că lucrarea de față și-a atins obiectivele setate la început, reprezentând un punct de plecare pentru o persoană care dorește să descopere ce este logica modală sau dorește să afle cum pot fi aplicate conceptele logicii modale în programare.

IV.2 Posibile dezvoltări

În privința dezvoltărilor viitoare, discuția poate fi, și aici, împărțită în funcție de cele două direcții importante ale lucrării, cea practică și cea teoretică. Din punctul de vedere al aplicației, ar fi interesantă dezvoltarea verificatorului de demonstrații pentru a permite compatibilitate completă cu logica modală și nu doar cu cea de bază (cum este la momentul actual). Pentru aceasta, trecerea la un număr finit de operatori modali cu diferite arități nu ar trebuie să se realizeze foarte dificil. Însă, modelarea unei probleme cum ar fi cea a logicii propoziționale dinamice, a cărei definiție permite un număr infinit de mare de operatori și ale cărei axiome sunt de asemenea infinit de multe, ar reprezenta fără îndoială o provocare. De asemenea, trebuie menționată ca posibilă îmbunătățire și ideea punctată în secțiunea anterioară referitoare la implementarea unei modalități mai simple de introducere a formulelor sub forma unui *parser*.

În ceea ce privește dezvoltările părții teoretice, ținând cont de generalitatea logicii modale studierea acesteia permite deschiderea către multe alte domenii de studiu. Dintre acestea, merită menționată logica dinamică, care se bazează pe logica modală. Aceasta ajută la modelarea execuției programelor și la verificarea corectitudinii acestora. De asemenea, un alt domeniu de studiu interesant poate fi reprezentat de construcția demonstratoarelor pentru astfel de tipuri de logică. Principală deosebire dintre un verificator de demonstrații și un demonstrator este că scopul celui din urmă este de a determina dacă o formulă este validă sau nu, fără a primi pașii pe care trebuie să-i urmeze.

Bibliografie

[1] Haskell documentation. `https://wiki.haskell.org/Why_Haskell_matters`. (Accesat la 3 iulie 2020).

[2] Patrick Blackburn, Maarlen de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.

[3] Patrick Blackburn and Johan van Benthem. *Handbook of Modal Logic*, volume 3. Elsevier, 2007.

[4] James Garson. Modal logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2018 edition, 2018.

[5] David Harel, Dexter Kozen, and Jerzy Tiuryn. *Dynamic Logic*. The MIT Press, 2000.

[6] Anton Hedin. Lecture notes for applied logic. October 2008.

[7] Zhen Li. *Efficient and generic reasoning for modal logics*. PhD thesis, University of Manchester, 2008.

[8] Cláudia Nalon, Ullrich Hustadt, and Clare Dixon. A modal-layered resolution calculus for k. In Hans De Nivelle, editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, pages 185–200, Cham, 2015. Springer International Publishing.

[9] Jens Otten. Mleancop: A connection prover for first-order modal logic. In Stéphane Demri, Deepak Kapur, and Christoph Weidenbach, editors, *Automated Reasoning*, pages 269–276, Cham, 2014. Springer International Publishing.

[10] André Platzer. *Logical Foundations of Cyber-Physical Systems*. Springer, Cham, 2018.

[11] Steve Reeves and Mike Clarke. *Logic for Computer Science*. Addison-Wesley Publishers Ltd., 1990.

[12] Patrick Suppes. *Introduction to Logic*. Litton Educational Publishing, Inc., 1957.