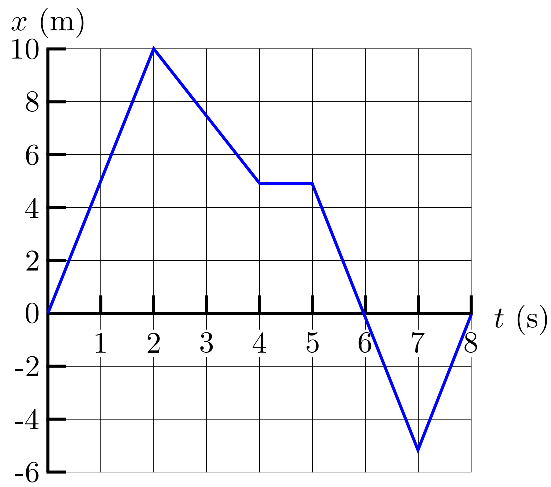
Série de Problemas n.º 2 - Movimento Unidimensional

Parte I - Posição, Velocidade e Aceleração

Problema 1

O gráfico da posição ao longo do tempo para uma certa partícula que se move segundo o eixo Ox é o que se apresenta na figura seguinte:



Determine a velocidade média nos intervalos de tempo

a) 0 a 2 segundos

b) 0 a 4 segundos

c) 2 a 4 segundos

d) 4 a 7 segundos

e) 0 a 8 segundos

Solução

a)

$$\bar{v} = \frac{10.0 \text{ m} - 0 \text{ m}}{2.0 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

b)

$$\bar{v} = \frac{5.0\text{ m} - 0\text{ m}}{4.0\text{ s} - 0\text{ s}} = 1.3\text{ m/s}$$

c)

$$\bar{v} = \frac{5.0\text{ m} - 10.0\text{ m}}{4.0\text{ s} - 2.0\text{ s}} = -2.5\text{ m/s}$$

d)

$$\bar{v} = \frac{-5.0\text{ m} - 5.0\text{ m}}{7.0\text{ s} - 4.0\text{ s}} = -3.3\text{ m/s}$$

e)

$$\bar{v} = \frac{0.0\text{ m} - 0\text{ m}}{8.0\text{ s} - 0\text{ s}} = 0.0\text{ m/s}$$

Problema 2

A posição de um carrinho de corridas feito de madeira foi observada em vários instantes de tempo e os resultado são os que se apresentam na seguinte tabela:

t (s)	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x (m)	0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5

Determine a velocidade média do carro para

a) Os primeiros dois segundos

b) Os últimos três segundos

c) Todo o periodo de observação

Solução

a)

$$\bar{v} = \frac{9.2\text{ m} - 0}{2.0\text{ s} - 0} = 4.6\text{ m/s}$$

b)

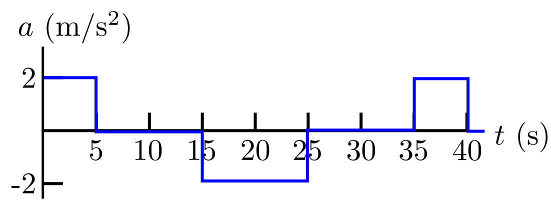
$$\bar{v} = \frac{57.5 \text{ m} - 9.2 \text{ m}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 16 \text{ m/s}$$

c)

$$\bar{v} = \frac{57.5 \text{ m} - 0}{5.0 \text{ s} - 0} = 12 \text{ m/s}$$

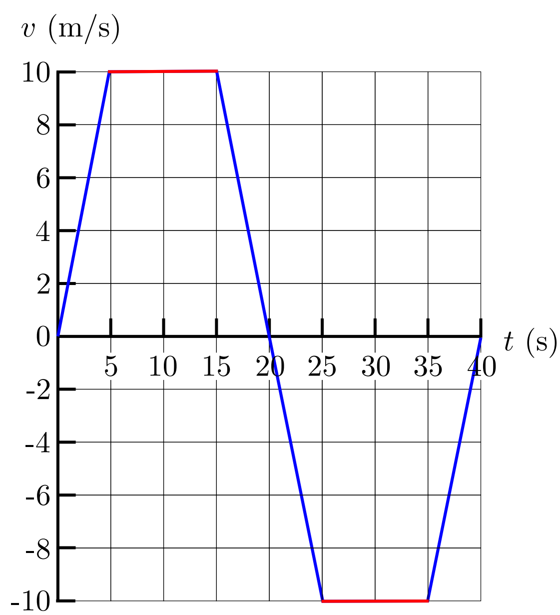
Problema 3

O gráfico da figura mostra a aceleração de um modelo de locomotiva que se move no eixo Ox. Faça um gráfico da velocidade e da posição sabendo que $x = 0$ e $v = 0$ para $t = 0$.

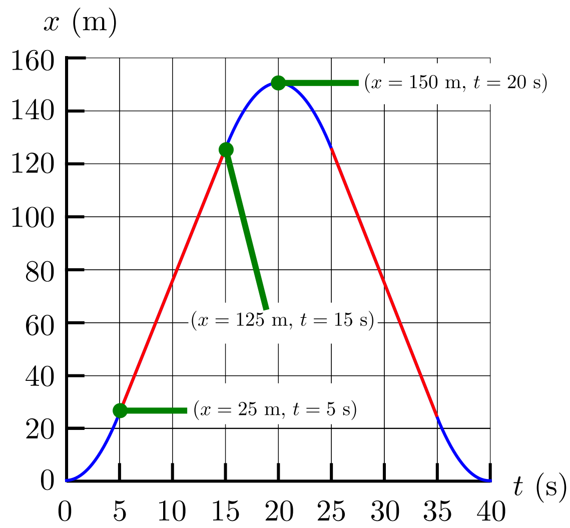


Solução

O gráfico da velocidade da locomotiva ao longo do tempo é o seguinte:



Neste gráfico as partes a azul correspondem a movimento uniformemente acelerado e as partes a vermelho a movimento retilíneo e uniforme. Do gráfico da velocidade podemos obter o da posição da locomotiva ao longo do tempo:



Problema 4

A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo Ox varia de acordo com a expressão $x = 3t^2$, onde x é em metros e t em segundos. Determine:

a) A posição em $t = 3.00$ s.

b) A posição em $t = 3.00\text{ s} + \Delta t$.

c) O limite de $\Delta x/\Delta t$ quando $\Delta t \mapsto 0$, para determinar a velocidade em $t = 3.00$ s.

Solução

a)

$$x = 3 \times (3.00)^2 = 27.0\text{ m}$$

b)

$$\begin{aligned} x &= 3 \times (3.00 + \Delta t)^2 \\ &= 3 \times \left(9.00 + 6.00 \times \Delta t + \Delta t^2\right) \\ &= 27.0 + 18.0 \times \Delta t + 3 \times \Delta t^2 \end{aligned}$$

c)

$$v\,(t = 3.00\text{ s}) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{18.0 \times \cancel{\Delta t} + 3 \times \Delta t^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta t}} = 18.0\text{ m/s}$$

Parte II - Movimento com Velocidade Constante ou Aceleração Constante

Problema 5

Se alguém pisar um dedo do seu pé, sentirá a pressão quase imediatamente, porque os sinais de toque viajam a 76.2 m/s. Mas não sentirá a dor nos primeiros dois ou três segundos, porque os sinais de dor geralmente viajam apenas 0.61 m/s. Para uma pessoa com altura h =1.90 m, determine:

a) O tempo que o sinal de toque leva a chegar ao seu cérebro.

b) O tempo que o sinal de dor leva a chegar ao seu cérebro.

Solução

a)

Admitindo que os impulsos de toque viajam com velocidade constante, temos

$$\Delta t_{\text{toque}} = \frac{h}{v_{\text{toque}}} = \frac{1.90 \text{ m}}{76.2 \text{ m/s}} = 2.49 \times 10^{-2} \text{ s} = 24.9 \text{ ms}$$

b)

Admitindo que os impulsos de dor também viajam com velocidade constante, temos

$$\Delta t_{\text{dor}} = \frac{h}{v_{\text{dor}}} = \frac{1.90 \text{ m}}{0.61 \text{ m/s}} = 3.11 \text{ s}$$

Problema 6

O condutor de um carro trava quando vê uma árvore a bloquear a estrada. O carro perde velocidade de forma uniforme com uma aceleração de -5.60 m/s^2 por 4.20 s, deixando marcas de pneus na estrada por 62.4 m até à árvore. Com que velocidade é que o carro bateu na árvore?

Solução

A velocidade que o carro tem ao chegar à árvore é calculada a partir da equação

$$v_f = v_{0x} - at_f$$

onde $t_f = 4.20$ s, $a = 5.60$ m/s^2 e v_{0x} é a velocidade inicial do carro, que temos de determinar a partir da equação da posição:

$$x_f - x_0 = v_{0x}t_f - \frac{1}{2}at_f^2$$

Sabendo que $\Delta x = x_f - x_0 = 62.4$ m, vem

$$v_{0x} = \frac{\Delta x + \frac{1}{2}at_f^2}{t_f} = 26.6 \text{ m/s}$$

Assim

$$v_f = v_{0x} - at_f = 3.10 \text{ m/s}$$

Problema 7

Um avião precisa de 280 m de pista para atingir a velocidade necessária para descolagem. Sabendo que parte do repouso e que se move com aceleração constante, demorando 8.0 s no percurso, qual é a sua velocidade no momento da descolagem?

Solução

Para um avião que parte do repouso temos

$$x_f = \frac{1}{2}a_x t_f^2$$

que podemos utilizar para determinar a aceleração do avião

$$a_x = \frac{2x_f}{t_f^2} = 8.75 \text{ m/s}^2$$

A velocidade no momento da descolagem é então dada por

$$v_f = a_x t_f = 70.0 \text{ m/s}$$

Problema 8

Um carro tem uma velocidade inicial v_0 quando um condutor vê um obstáculo à sua frente. O tempo de reação do condutor é Δt_r, e a travagem do carro corresponde a uma aceleração $-a$. Determine a distância total que o carro percorre antes de parar:

a) Ignorando o tempo de reação, isto é, fazendo $\Delta t_r = 0$.

b) Contando com o tempo de reação.

Solução

a)

O carro está em movimento uniformemente acelerado com aceleração $a_x = -a$ e velocidade inicial $v_{0x} = v_0$. As equações da posição e da velocidade do carro são as seguintes:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ v_x &= v_{0x} + a_x t \end{aligned}$$

O instante de tempo em que o carro pára, t_f, é calculado a partir da equação da velocidade com $v_x = 0$:

$$v_x = 0 \quad \mapsto \quad t_f = \frac{v_0}{a}$$

a partir do qual podemos calcular a posição em que o carro parou, utilizando a equação da posição:

$$x_f = x_0 + v_0 t_f - \frac{1}{2}a t_f^2 = x_0 + \frac{v_0^2}{2a}$$

Como em $t = 0$ o carro se encontrava na posição inicial x_0, a distância total percorrida vem então

$$l = x_f - x_0 = \frac{v_0^2}{2a}$$

b)

Tendo em conta o tempo de reação, o condutor só consegue pôr o pé no travão um tempo Δt_r depois de ver o ostáculo. Nesse intervalo de tempo o carro move-se em movimento retilíneo e uniforme com velocidade v_0 e percorre uma distância $v_0 \Delta t_r$. Assim, a distância necessária para parar o carro, contando com o tempo de reação, é igual à soma da distância percorrida em movimento retilíneo e uniforme com a distância calculada na alínea anterior :

$$l_{paragem} = v_0 \Delta t_r + \frac{v_0^2}{2a}$$

Problema 9

A luz amarela de um semáforo deve ficar ligada tempo suficiente para que um carro passe o cruzamento ou trave antes do sinal. Um carro necessita da distância calculada no problema anterior para parar. Se o carro estiver a uma distância inferior ao cruzamento, a luz amarela deve ficar ligada tempo suficiente para o carro passar.

a) Demonstre que a luz amarela deve ficar ligada por um tempo $\Delta t_{luz} = \Delta t_r + \frac{v_0}{2a} + \frac{l_c}{v_0}$, em que l_c é a largura do cruzamento.

b) Projete um sistema de semáforos (ou melhor, determine o tempo que o amarelo deve ficar ligado) para um cruzamento de 16.0 m de largura onde os carros passam a uma velocidade de 60.0 km/h. Assuma um tempo de reação lento $\Delta t_r = 1.1$ s e uma aceleração na travagem de 2.00 m/s^2.

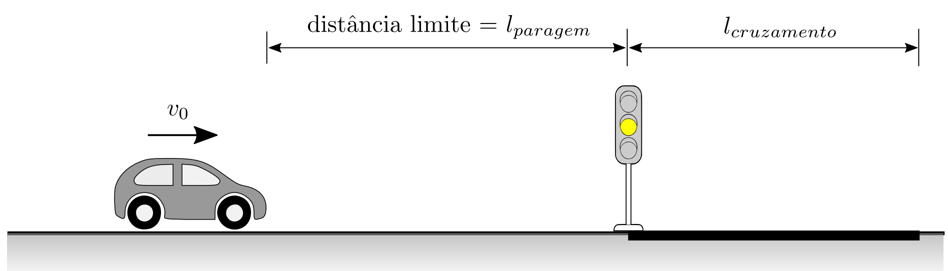
Solução

a)

De acordo com o enunciado, quando o sinal fica amarelo o condutor do carro deve:

1. Seguir com velocidade constante v_0 se se encontrar a uma distância inferior a $l_{paragem}$ do semáforo, pois não tem forma de parar em segurança.
2. Parar se se encontrar a uma distância superior a $l_{paragem}$ do semáforo.

O sinal deve ficar amarelo tempo suficiente para que todos os carros que se encontrem na condição 1. consigam atravessar o cruzamento em segurança. Um carro que se encontre à distância $l_{paragem}$ do semáforo precisa de mais tempo para fazer o percurso que qualquer outro carro que cumpre a condição 1.



Assim, o tempo que este condutor precisa para fazer o percurso deve corresponder ao tempo que o sinal fica amarelo:

$$t_{amarelo} = \frac{l_{paragem} + l_c}{v_0} = \frac{v_0 \Delta t_r + \frac{v_0^2}{2a} + l_c}{v_0} = \Delta t_r + \frac{v_0}{2a} + \frac{l_c}{v_0}$$

b)

Temos de converter a velocidade v_0 para metros por segundo:

$$v_0 = 60.0 \text{ km/h} = \frac{60.0 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16.7 \text{ m/s}$$

Assim

$$t_{amarelo} = 1.10 \text{ s} + \frac{16.7 \text{ m/s}}{2 \times 2.00 \text{ m/}s^2} + \frac{16.0 \text{ m}}{16.7 \text{ m/s}} = 6.23 \text{ s}$$

Parte III - Composição de Dois ou Mais Regimes de Movimento

Problema 10

Numa corrida de 100 m dois corredores chegam empatados, demorando 10.2 s. Ambos os atletas aceleram uniformemente até atingirem uma determinada velocidade e depois mantiveram essa velocidade até ao final. O atleta A acelerou durante 2.00 s e o atleta B durante 3.00 s.

a) Qual foi a aceleração de cada atleta?

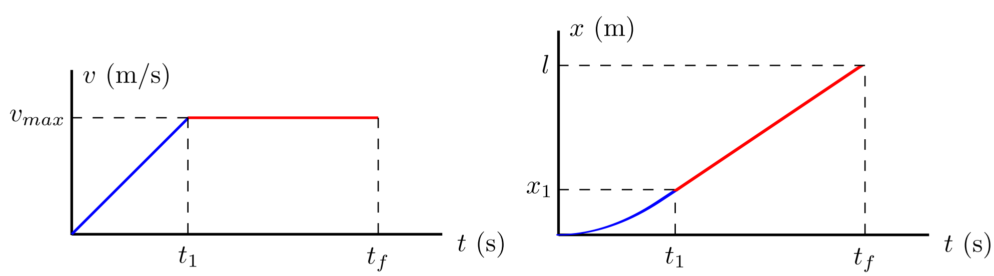
b) Quais foram as suas velocidades máximas?

c) Quando estavam decorridos 6.00 segundos, quem estava à frente e por que distância?

Solução

a)

A velocidade e posição dos atletas tem a forma geral apresentada na figura seguinte:



onde $t_f = 10.2$ s e $l = 100$ m para ambos os atletas. Para $t < t_1$ temos movimento uniformemente acelerado (troço azul) e para $t > t_1$ movimento retilíneo e uniforme (troço vermelho). De acordo com o enunciado, o instante t_1 tem valores diferentes para cada atleta. Para o atleta A temos $t_{1A} = 2.00$ s, e $t_{1B} = 3.00$ s para o atleta B. As equações do movimento para $t < t_1$ são as seguintes:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 \\ v &= at \end{aligned}$$

A partir destas equações podemos relacionar x_1, v_{max} e t_1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}at_1^2 \\ v_{max} &= at_1 \end{aligned}$$

Para $t > t_1$ as equações são as seguintes:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + v_{max}\left(t - t_1\right) \\ v &= v_{max} \end{aligned}$$

Substituíndo as relações entre x_1, v_{max} e t_1 nestas expressões vem

$$x = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1\left(t - t_1\right)$$

Para $t = t_f$ temos $x = l$. Assim

$$l = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1\left(t_f - t_1\right) \quad \mapsto \quad a = \frac{l}{\frac{1}{2}t_1^2 + t_1\left(t_f - t_1\right)} = \frac{l}{t_1 t_f - \frac{1}{2}t_1^2}$$

Particularizando para os atletas A e B resulta

$$a_A = \frac{l}{t_{1A}t_f - \frac{1}{2}t_{1A}^2} = 5.43 \text{ m/s}^2, \quad a_B = \frac{l}{t_{1B}t_f - \frac{1}{2}t_{1B}^2} = 3.83 \text{ m/s}^2$$

b)

$$v_{max,A} = a_A t_{1A} = 10.9 \text{ m/s}, \quad v_{max,B} = a_B t_{1B} = 11.5 \text{ m/s}$$

c)

Ao fim de 6.00 segundos ambos os atletas se encontram em movimento retilíneo e uniforme. A equação do movimento foi obtiga na alínea a) e é a seguinte:

$$x = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1\left(t - t_1\right)$$

A posição do atleta A é

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t_{1A}^2 + a_A t_{1A}\left(6.00 \text{ s} - t_{1A}\right) = 54.4 \text{ m}$$

E a posição do atleta B é

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t_{1B}^2 + a_B t_{1B} \left(6.00 \text{ s} - t_{1B}\right) = 51.7 \text{ m}$$

O atleta A estava à frente por uma distância $d = x_A - x_B = 2.62$ m.

Problema 11

Um camião numa estrada em linha reta parte do repouso, acelerando 2.00 m/s^2 até atingir uma velocidade de 20.0 m/s. A partir desse momento viaja durante 20.0 s a uma velocidade constante até que o condutor carrega no travão, parando o camião de forma uniforme em 5.00 s adicionais.

a) Por quanto tempo esteve o camião em movimento?

b) Qual é a velocidade média do camião para o movimento descrito?

Solução

a)

O percurso do camião é composto de três partes. O tempo que o camião esteve em movimento é calculado como

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

onde Δt_1 é o intervalo de tempo em que o condutor acelerou, $\Delta t_2 = 20.0$ s o intervalo em que a velocidade se manteve constante e $\Delta t_3 = 5.00$ s aquele que foi necessário para parar o camião. Para determinar Δt_1 vamos ter em conta que na primeira parte do percurso o camião encontra-se em movimento uniformemente acelerado com aceleração $a_1 = 2.00$ m/s^2, velocidade inicial $v_{1i} = 0$ m/s e velocidade final $v_{1f} = 20.0$ m/s. A partir da equação da velocidade $v_1 = v_{1i} + a_1 t$ vem então

$$v_{1f} = v_{1i} + a_1 \Delta t_1 \quad \mapsto \quad \Delta t_1 = \frac{v_{1f} - v_{1i}}{a_1} = \frac{20.0 \text{ m/s}}{2.00 \text{ m/s}^2} = 10.0 \text{ s}$$

O tempo que o camião esteve em movimento foi

$$\Delta t = 10.0 \text{ s} + 20.0 \text{ s} + 5.00 \text{ s} = 35.0 \text{ s}$$

b)

A velocidade média do camião é dada por

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t}$$

onde Δx_1, Δx_2 e Δx_3 são, respetivamente, as distâncias percorridas pelo camião em cada uma das partes do movimento. Tendo em conta que o camião parte do repouso, podemos calcular Δx_1 assim:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1\Delta t_1^2 = 100 \text{ m}$$

Na segunda parte do percurso o camião move-se com velocidade constante $v_2 = 20.0$ m/s. Assim

$$\Delta x_2 = v_2\Delta t_2 = 20.0 \text{ m/s} \times 20.0 \text{ s} = 400 \text{ m}$$

Na terceira parte do percurso, as equações do movimento são as seguintes:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_{3i} + v_{3i}t - \frac{1}{2}a_3t^2 \\ v_3 &= v_{3i} - a_3t \end{aligned}$$

A distância percorrida nesta parte é

$$\Delta x_3 = x_{3f} - x_{3i} = v_{3i}t_{3f} - \frac{1}{2}a_3t_{3f}^2$$

onde $t_{3f} = 5.00$ s. A aceleração resulta da equação da velocidade

$$a_3 = \frac{v_{3f} - v_{3i}}{t_{3f}} = \frac{0 - 20.0 \text{ m/s}}{5.00 \text{ m/s}} = 4.00 \text{ m/s}^2$$

Assim $\Delta x_3 = 50.0$ m e a velocidade média pode ser calculada

$$\bar{v} = \frac{100\text{m} + 400 \text{ m} + 50.0 \text{ m}}{35.0 \text{ s}} = 15.7 \text{ m/s}$$

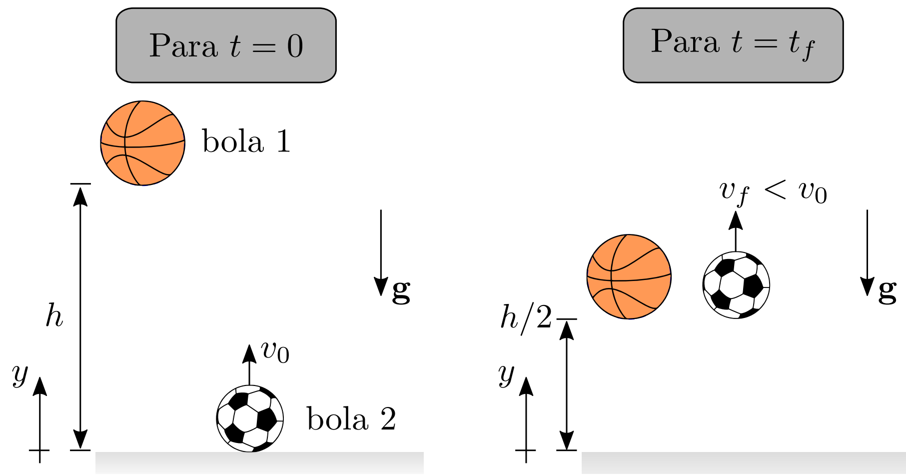
Parte IV - Queda Livre

Problema 12

Uma bola é largada do repouso de uma altura h acima do chão. Uma outra bola é lançada do chão verticalmente no mesmo instante em que a primeira bola foi largada. Determine a velocidade inicial da segunda bola sabendo que as duas bolas se cruzam à altura $h/2$ acima do chão.

Solução

As duas bolas são apenas actuadas pela força da gravidade pelo que estão ambas em queda livre (ver figura).



A equação da posição na queda livre é a seguinte:

$$y = y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Para a bola 1 temos $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$, e podemos determinar o tempo em que as duas bolas se cruzam assim:

$$\frac{h}{2} = h - \frac{1}{2}gt_f^2 \quad \mapsto \quad t_f = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Para a bola 2 temos $y_0 = 0$, $v_{oy} = v_0$, vindo

$$\frac{h}{2} = v_o\sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2}\cancel{g}\frac{h}{\cancel{g}}$$

Reescrevendo a equação em termos de v_0 resulta então que a velocidade da bola 2 é

$$v_0 = \sqrt{gh}$$

Problema 13

Uma pedra é largada de uma situação de repouso para dentro de um poço. O som da pedra a bater no fundo do poço é ouvido 2.40 s depois de se largar a pedra.

a) Considerando que a velocidade do som (PTN) no ar é $c_s = 336$ m/s determine a profundidade do poço.

b) Supondo que despreza o tempo que o som se demora a propagar, qual é o erro em percentagem na medida da profundidade do poço?

Solução

a)

O intervalo de tempo $\Delta t = 2.4$ s desde que a pedra é largada até que o som é ouvido é igual à soma do tempo de queda Δt_q com o tempo de propagação do som no poço Δt_s:

$$\Delta t = \Delta t_q + \Delta t_s$$

Vamos relacionar os intervalos de tempo Δt_q e Δt_s com a altura h do poço, e substituíndo na equação anterior ficamos com uma equação que podemos resolver para obter h. A partir das equações da queda livre vem então

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t_q^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Como o som se propaga do fundo ao cimo do poço com velocidade constante temos também

$$h = c_s \Delta t_s \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t_s = \frac{h}{c_s}$$

pelo que

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c_s} \quad \mapsto \quad \frac{2h}{g} = \left(\Delta t - \frac{h}{c_s}\right)^2$$

que podemos escrever na forma de uma equação de 2.º grau:

$$h^2 - \left(2 c_s \Delta t + \frac{2 c_s^2}{g}\right) h + c_s^2 \Delta t^2 = 0$$

Usando a fórmula resolvente obtemos as seguintes soluções:

$$h = 24.6 \text{ km} \quad \vee \quad h = 26.4 \text{ m}$$

Destas duas apenas a segunda hipótese, $h = 26.4$ m, é solução da equação

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c_s}$$

Assim, a solução desta alínea é $h = 26.4$ m.

b)

Desprezando a propagação do som vem

$$\Delta t = \Delta t_q = \sqrt{\frac{2h'}{g}} \quad \mapsto \quad h' = \frac{1}{2} g \Delta t^2 = 28.2 \text{ m}$$

O erro percentual é de

$$ERR = \left(\frac{h' - h}{h} \right) \times 100 = 6.88 \text{ \%}$$

Problema 14

Um tijolo é largado do alto de um edifício com velocidade incial nula. Ele atinge o solo em 2.50 s. A resistência do ar pode ser desprezada, de modo que o tijolo se encontra em queda livre.

a) Qual é a altura do edifício?

b) Qual o módulo da velocidade do tijolo quando atinge o solo?

Solução

a)

A partir da equação para a posição do tijolo podemos escrever

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_{solo}^2$$

onde $t_{solo} = 2.50$ s. Assim,

$$h = \frac{1}{2} g t_{solo}^2 = 30.6 \text{ m}$$

b)

A velocidade quando atinge o solo é

$$v_y = -g t_{solo} = -24.5 \text{ m}$$

Assim, o módulo da velocidade é $v = 24.5$ m.

Problema 15

Se uma pulga podesse dar um salto e atingir uma altura de 0.440 m, qual seria a sua velocidade incial ao sair do chão?

Solução

Designando por t_f o instante de tempo para o qual a pulga se encontra à altura máxima $h_{max} = 0.440$ m, temos a seguinte equação:

$$h_{max} = v_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2$$

Por outro lado, nesse instante a velocidade da pulga é nula, logo

$$0 = v_0 - g t_f \quad \Leftrightarrow \quad t_f = \frac{v_0}{g}$$

Substituindo este resultado na primeira equação vem então:

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Assim

$$v_0 = \sqrt{2 g h_{max}} = 8.62 \text{ m/s}$$