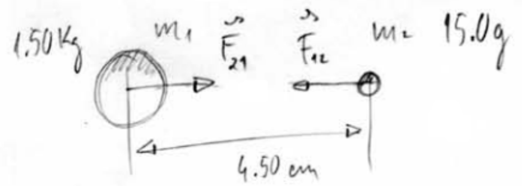
# 6 Gravitação universal

**1)** Na experiência de laboratório para determinar a constante de gravitação universal duas bolas de chumbo de massas 1.50 kg e 15.0 g são utilizadas, com separação de 4.50 cm. Determine a atracção gravitacional entre as duas esferas.




$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = |F_g| = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$= \underline{7.41 \times 10^{-10}\,N}$$

**2)** Quando um meteoro está a uma distância acima da superfície da Terra de 3.00× o raio da Terra, qual é a aceleração que sofre devido à acção da gravidade?

$$m a = G\,\frac{M_T\, m}{(R_T + 3.00\,R_T)^2} \Leftrightarrow a = G\,\frac{M_T}{16\,R_T^2} = 0.613\ m/s^2$$

**3)** A aceleração em queda livre na Lua é cerca de 1/6 da na Terra. Se o raio da Lua fôr 0.250 $R_T$ determine a razão entre as suas densidades médias, $\rho_{Lua}/\rho_{Terra}$.

$$a_{Terra} = G\,\frac{M_T}{R_T^2} \qquad M_T = \rho_{TERRA} \cdot V_{TERRA} = \rho_{TERRA} \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$a_{Terra} = G\,\frac{4}{3}\pi R_T^3 \cdot \frac{\rho_{TERRA}}{\cancel{R_T^2}} = \frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho_{TERRA} \cdot R_T$$

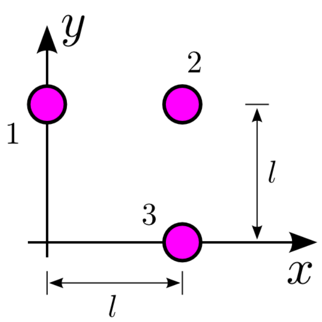
$$a_{LUA} = G\frac{M_{LUA}}{R_{LUA}^2} = \ldots = \frac{4}{3}\pi G \rho_{LUA} R_{LUA}$$

$$\frac{a_{LUA}}{a_{Terra}} = \frac{\rho_{LUA}\cdot R_{LUA}}{\rho_{TERRA}\cdot R_{TERRA}} \Leftrightarrow \frac{\rho_{LUA}}{\rho_{TERRA}} = \frac{a_{LUA}}{a_{Terra}}\cdot\frac{R_{TERRA}}{R_{LUA}}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{0.250}$$

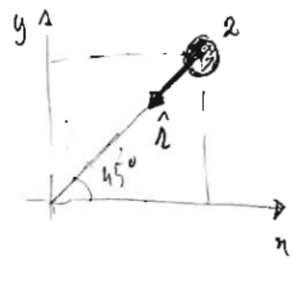
$$\frac{\rho_{LUA}}{\rho_{Terra}} = \frac{2}{3} = 0.6(6)$$

**4)** Três objectos de massas iguais estão colocados nos vértices de um quadrado de lado $l$. Determine o campo gravitacional no vértice restante devido a estes três objectos.




$$\vec{g}_1 = G\frac{m}{l^2}\hat{j}$$

$$\vec{g}_3 = G\frac{m}{l^2}\hat{i}$$




$$r^2 = 2l^2$$

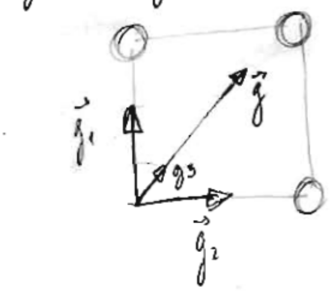
$$\vec{g}_2 = -G\frac{m}{2l^2}\hat{r}$$

Temos agora que decompor $\vec{g}_2$ nas suas coordenadas x e y

$$\vec{g}_2 = \frac{Gm}{2l^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$$ já que o angulo é de 45°

O campo gravítico total vem então

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = \frac{Gm}{l^2}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(\hat{i} + \hat{j})$$




**5)** Quanto trabalho efectua o campo gravitacional Lunar quando um meteoro de 1000 kg vem do espaço e embate na superfície da Lua?

$$W_g = -\Delta U_g = U_i - U_f = -G M_{LUA} m \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

vem do espaço $r_i = +\infty$ ; embate na lua $r_f = R_{LUA}$

$$W_g = G \frac{M_{LUA}\, m}{R_{LUA}}$$

**6)** Um satélite de massa m = 200 kg é colocado numa órbita com uma altura h = 200 km acima da superfície terrestre.

a) Se a órbita fôr circular quanto tempo demora o satélite a completar uma órbita?

Mov. circular uniforme $m\frac{v^2}{R} = F_g = G\frac{M_T m}{R^2}$ ; $R = R_T + h$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \cdot \sqrt{\frac{R}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

$$T = 5.31\times10^3\,s = 1h\;28'\;29''$$

b) Qual é a velocidade do satélite?

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = 7.79\times10^3\,m/s = 7.79\,Km/s$$

c) Qual é a mínima energia necessária para colocar o satélite em órbita? (Despreze o atrito do ar mas inclua o efeito da rotação da Terra)

$$\Delta E = E_f - E_i$$

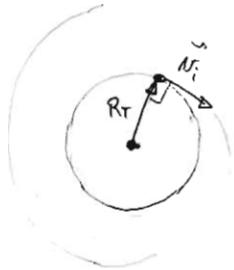
$$E_f = K_f + U_{gf} = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R_T+h} - G\frac{mM_T}{R_T+h} = -\frac{G\,mM_T}{2(R_T+h)}$$

(da alínea b) $= -6.06\times10^9\,J$

Para a energia inicial temos que considerar o movimento de rotação da Terra. Um objecto

"pousado" à superfície da Terra executa um movimento de rotação de raio $R_T$ e período $T = 1$ dia.
assim a sua velocidade será:

$$v_i = \frac{2\pi R_T}{T_{dia}} = 464 \text{ m/s}$$




A energia inicial vem então

$$E_i = K_i + U_{gi} = 2m\frac{\pi^2 R_T^2}{T_{dia}^2} - G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$= -1.25 \times 10^{10} \text{ J}$$

A energia mínima para pôr o objecto em órbita será então $\Delta E_{min} = E_f - E_i = 6.42 \times 10^9$ J

- Note-se que para este caso foi necessário assumir que o lançamento foi feito do equador para tirar proveito da rotação da Terra. Se lançássemos do polo Norte não teríamos rotação e $K_i = 0$ o que daria $\Delta E = 6.44 \times 10^9$ J ou seja mais 21.5 MJ de Energia
- Além disso, para tirar partido da rotação da Terra o lançamento deveria ser feito na horizontal ...

**7)**

a) Determine o trabalho necessário (realizado por uma força externa) para levantar uma carga de m = 100 kg a uma altura de h=1000 km acima da superfície da Terra.

$$W_{Fext} = \Delta E = \underbrace{\cancel{\Delta K}}_{=0} + \Delta U = -G M_T m \left( \frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right)$$

$$= 8.47 \times 10^8 \text{ J}$$

b) Determine o trabalho adicional para colocar a carga numa órbita circular a esta altitude

$$W_{Fext} = \Delta K + \underbrace{\cancel{\Delta U}}_{\text{mesma altitude}} = \frac{G M_T m}{2(R_T + h)} = 2.70 \times 10^9 \text{ J}$$

órbita circular

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{R}} \rightarrow K = \frac{G M_T m}{2R}$$

A maior parte de Trabalho está em criar o movimento de rotação, não em elevar a carga

$$W_{b)} = 3.2 \times W_{a)}$$