Eksamen info102 mai 2015 - Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Forklar følgende begreper:

i) Tautologi
Utsagn som alltid er sant

ii) Euler-graf. *Graf med vei som passerer alle kantene en og bare en gang*

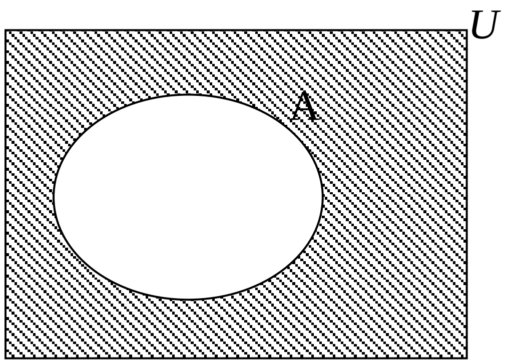
iii) Funksjon. *relasjon der hvert domene-elementer relatert til max 1 element i kodomenet mao: en input-output mekanisme der hver input har kun en output*

iv) Komplement ~

~A er mengden som består av alle elementer som ikke er med i A.

$\sim A = \{x | x \notin A\}$

Dette må forstås relativt til universalmengden *U*

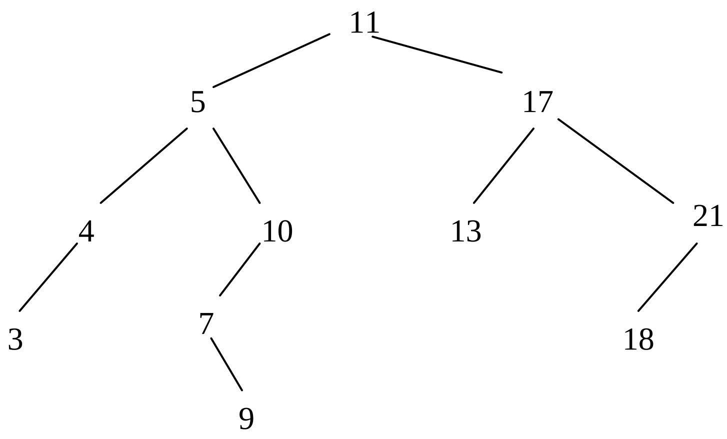


$\sim A = U - A$

iv) Topologisk sortering
Gitt en partiell ordning $R \subseteq A \times A$. Den topologiske sorteringen av R er en total ordning $S \subseteq A \times A$ slik at xRy impliserer xSy .

b) Lag et binært søketre ved å sette inn følgende tall i den gitte rekkefølgen.

11, 5, 17, 4, 10 , 21, 3, 7, 13, 18, 9



c) La $M = \{1,2,3,4\}$ og la $R \subseteq M \times M$. Spesifikt er $R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
Hva er:

i)den refleksive tillukningen til R

$R \cup \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

ii) den symmetriske tillukningen til R

$R \cup \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$

iii) den transitive tillukningen til R

$R \cup \{(1,3), (2,4), (1,4)\}$

Oppgave 2 Mengder

Ta utgangspunkt i følgende mengder: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C=\{3,6\}$

a) Hva er

1. $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
2. $A \cap B = \{2,3\}$
3. $A - B = \{1\}$
5. $(A-C) \cap (B-C) = \{2\}$
6. $(A-B) - (A \times B) = \{1\}$
7. $(A \cup C) - ((B \cap C) \cup (A-C)) = \{6\}$
8. $(A \times C) \cap (C \times B) = \{(3, 3)\}$
9. $A \cap \wp(A) = \emptyset$
10. $\{X \cap Y \mid X \subseteq A \text{ and } Y \subseteq C\} = \{\emptyset, \{3\}\}$

I det følgende er M_1, M_2 og M_3 vilkårlige mengder

b) Sant eller galt?

1. $M_1 \times (M_2 \times M_3) = (M_1 \times M_2) \times M_3$ galt
2. $M_1 \times (M_2 \times M_3) = M_1 \times M_2 \times M_3$ galt
3. $M_1 \times (M_2 \times M_3) = (M_3 \times M_2) \times M_1$ galt
4. $\wp(M_1 \cup M_2) = \wp(M_1) \cup \wp(M_2)$ galt
5. $\wp(M_1) \cap \wp(\wp(M_1)) = \emptyset$ galt

c) Bruk mengdealgebra til å vise at $((M_1 \cap B) \cup \sim(B \cup \sim M_1)) = M_1$

$(M_1 \cap M_2) \cup \sim(M_2 \cup \sim M_1)$
= DeMorgans lov
$(M_1 \cap M_2) \cup (\sim M_2 \cap \sim(\sim M_1))$
= Komplement lov
$(M_1 \cap M_2) \cup (\sim M_2 \cap M_1)$
= Kommutativ lov
$(M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap \sim M_2)$
= Distributiv lov
$(M_1 \cap (M_2 \cup \sim M_2))$
= Komplement lov
$(M_1 \cap \boldsymbol{U})$
= Identitetslov
M_1

Oppgave 3 Logikk

a) Lag sannhetsverditabell for utsagnet $R \Rightarrow (P \text{ and } (\text{not } Q))$

P	Q	R	$R \Rightarrow (P \text{ and } (\text{not } Q))$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	T

b) Hva vil det si at to utsagn er ekvivalente?
De har alltid samme sannhetsverdi

c) Bevis ved selvmotsigelse at det følgende er en tautologi:
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Anta at utsagnet er galt, dvs at premissen er sann og konklusjonen gal.

1 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = T$ (antakelse)
2 $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R) = F$ (antakelse)
3 $Q = T$ (fra 2)
4 $P \Rightarrow R = F$ (fra 2)
5 $P = T$ (fra 4)
6 $R = F$ (fra 4)
7 $Q \Rightarrow R = F$ (fra 3 og 6)
8 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = F$ (fra 5 og 7)

1 og 8 gir en selvmotsigelse, vi konkluderer at implikasjonen er en tautologi.

d) Relasjonen *liker* $\subseteq$ *Personer* $\times$ *Personer* er definert ved at *liker*(x,y) er sant hviss personen x liker personen y.

Oversett det følgende til predikatlogikk:

i)Per liker ikke Kari

not Liker(Per,Kari)

ii) Noen som liker Kari liker ikke Per

$\exists$x (Liker(x,Kari) and not Liker(x,Per))

iii) Den som liker Per liker også Kari

$\forall$x (Liker(x,Per) $\Rightarrow$ Liker(x,Kari))

iv) Den som liker alle liker også seg selv

$\forall$x (($\forall$y Liker(x, y)) $\Rightarrow$ Liker(x, x))

Vedlegg til eksamen INFO102

Mengde algebra (Gitt en universell mengde *U*)

Assosiative lover

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Kommutative lover

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Identitetslover

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$

$A \cap \boldsymbol{U} = A$

Idempotente lover

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Distributive lover

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Komplement lover

$A \cup {\sim}A = \boldsymbol{U}$

${\sim}\boldsymbol{U} = \emptyset$

${\sim}({\sim}A) = A$

$A \cap {\sim}A = \emptyset$

${\sim}\emptyset = \boldsymbol{U}$

De Morgans lover

${\sim}(A \cup B) = {\sim}A \cap {\sim}B$

${\sim}(A \cap B) = {\sim}A \cup {\sim}B$

Boole'sk algebra

Kommutative lover

(P and Q) ≡ (Q and P)

(P or Q) ≡ (Q or P)

Assosiative lover

(P and (Q and R)) ≡ ((P and Q) and R)

(P or (Q or R)) ≡ ((P or Q) or R)

Distributive lover

(P and (Q or R)) ≡ ((P and Q) or (P and R))

(P or (Q and R)) ≡ ((P or Q) and (P or R))

Idempotente lover

(P and P) ≡ P

(P or P) ≡ P

Absorbsjonslover

(P and (P or Q)) ≡ P

(P or (P and Q)) ≡ P

De Morgans lover

not (P and Q) ≡ ((not P) or (not Q))

not (P or Q) ≡ ((not P) and (not Q))

Dobbel negasjon

(not (not P)) ≡ P