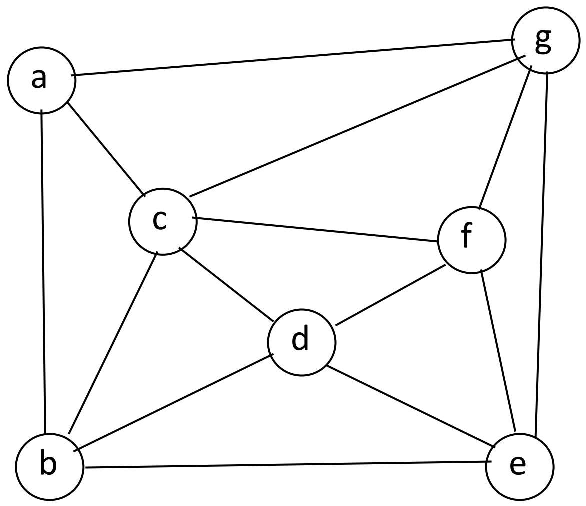
Eksamen info102 mai 2016 – Løsningsforslag

Oppgave 1 Grafer og trær

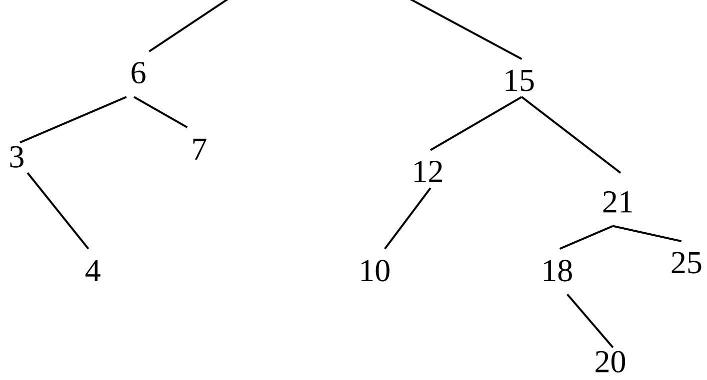
a) Hva er en Euler-graf
Graf med sykel som passerer alle kantene en og bare en gang.
b) Hva er en Hamilton-graf
Graf med sykel som besøker alle nodene en og bare en gang.
c) Avgjør om den følgende grafen er en Euler- og/eller Hamilton-graf.



Dette er ikke en Euler-graf siden nodene a og c har odde grad. (jfr Eulers teorem).
Det er en Hamilton-graf: stien ebdcagfe er en Hamilton-sykel.

d) Lag et binært søketre ved å sette inn følgende tall i den gitte rekkefølgen.

9, 15, 6, 21, 3, 12, 4, 7, 10, 18, 25, 20



Oppgave 2 Mengder, relasjoner og funksjoner

Ta utgangspunkt i følgende mengder: A = {1,2,3}, B = {2,3,4,5}, C={3,6}

a) Hva er

1. $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
2. $A \cap B = \{2,3\}$
3. $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$
4. $A - B = \{1\}$
5. $(A-C) \cap (B-C) = \{2\}$
6. $(C-A) \cap (C-B) = \{6\}$
7. $(A \cup C)-((B \cap C) \cup (A-C)) = \{6\}$
8. $(A \times C) \cap (C \times B) = \{(3, 3)\}$
9. $\wp(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{3,6\}\}$
10. $|\wp(A)| = 8$

b) Sant eller galt?

1. $A \in \wp(A)$ ja
2. $A \subseteq \wp(A)$ nei
3. $A \in A \times A$ nei
4. $A \subseteq A \times A$ nei
5. $\emptyset \in A$ nei
6. $\emptyset \subseteq A$ ja
7. $\emptyset \in \wp(A)$ ja
8. $\emptyset \subseteq \wp(A)$ ja
9. $\emptyset \in A \times A$ nei
10. $\emptyset \subseteq A \times A$ ja

c) Vis ved hjelp av mengdealgebra at følgende likhet holder for vilkårlige mengder A og B.

$$(B \cup (B \cap A)) \cap ((A \cap B) \cup A) = (A \cap B)$$

Løsning:
Noen alternative løsninger i varierende detalj:

$(\underline{B \cup (B \cap A)}) \cap ((A \cap B) \cup A) =$ komm
$((\underline{B \cap A}) \cup B)) \cap ((A \cap B) \cup A) =$ komm
$\underline{((A \cap B) \cup B)) \cap ((A \cap B) \cup A)} =$ distr (baklengs)
$(A \cap B) \cup (\underline{B \cap A}) =$ komm
$\underline{(A \cap B) \cup (A \cap B)} =$ idem
$\underline{(A \cap B)}$

$(B \cup (B \cap A)) \cap ((A \cap B) \cup A)$ = distr
$((B \cup B) \cap (B \cup A)) \cap ((A \cup A) \cap (B \cup A))$ = idem
$(B \cap (B \cup A)) \cap (A \cap (B \cup A))$ = assoc/komm-pirk + idem
$(A \cap B) \cap (A \cup B)$ = distr
$(A \cap B \cap A) \cup (A \cap B \cap B)$ = komm +idem
$(A \cap B) \cup (A \cap B)$ = idem
$(A \cap B)$

$(B \cup (B \cap A)) \cap ((A \cap B) \cup A)$ = distr
$((B \cup B) \cap (B \cup A)) \cap ((A \cup A) \cap (B \cup A))$ = idem
$(B \cap (B \cup A)) \cap (A \cap (B \cup A))$ = assoc
$B \cap ((B \cup A) \cap (A \cap (B \cup A)))$ = komm
$B \cap ((B \cup A) \cap ((B \cup A) \cap A))$ = assoc
$B \cap (((B \cup A) \cap (B \cup A)) \cap A)$ = idem
$B \cap ((B \cup A) \cap A)$ = distr
$B \cap (((B \cap A) \cup (A \cap A))$ = idem
$B \cap ((B \cap A) \cup A)$ = distr
$((B \cap (B \cap A)) \cup (B \cap A))$ = assoc
$(((B \cap B) \cap A) \cup (B \cap A))$ = idem
$((B \cap A) \cup (B \cap A))$ = idem
$(B \cap A)$

Oppgave 3 Logikk

a) Hva er en tautologi?
Et utsagn som alltid er sant.

b) Bevis ved selvmotsigelse at det følgende er en tautologi:
$(A \Rightarrow (C \text{ or } (\text{not } B))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((\text{not } A) \text{ or } C))$

Anta at utsagnet er usant, dvs at premissen er sann og konklusjonen gal
1 $(A \Rightarrow (C \text{ or } (\text{not } B))) = T$ (antakelse)
2. $(B \Rightarrow ((\text{not } A) \text{ or } C)) = F$ (antakelse)
3. $B=T$ (fra 2.)
4. $((\text{not } A) \text{ or } C) = F$ (fra 2.)
5. $A \Rightarrow C = T$ (fra 1 og 3)
4. og 5. utgjør en selvmotsigelse siden $A \Rightarrow C \equiv ((\text{not } A) \text{ or } C)$

c) Relasjonen *liker* $\subseteq$ *Personer* $\times$ *Personer* er definert ved at *liker*(x,y) er sant hviss personen x liker personen y.

Oversett det følgende til predikatlogikk:

1. Per liker noen. .
   $\exists x\ \mathit{liker}(\text{Per}, x)$
2. Alle liker Per
   $\forall x\ \mathit{liker}(x, \text{Per})$
3. Per liker ikke noen som Pål liker.
   $\forall x(\mathit{liker}(\text{Pål}, x) \Rightarrow \text{not } \mathit{liker}(\text{Per}, x))$
4. Pål liker bare seg selv.
   $\mathit{liker}(\text{Pål}, \text{Pål}) \text{ and } \forall x(\mathit{liker}(\text{Pål}, x) \Rightarrow x=\text{Pål})$

d) Bevis at sannhetsverditabellen til et utsagn med *n* utsagnsvariable har 2^n rekker (utenom overskriften).

Bevis ved induksjon mhp n.

***Basis** n=1:*

La oss anta at utsagnet kun har utsagnsvariabelen P, for eksempel utsagnet (P or (not P))

P	*(not P)*	*(P or (not P))*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*

Tabellen har 2^1 rekker (vi regner ikke med overskriften i tabellen).
Dette viser at påstanden holder for basistilfellet.

***Induksjonssteg** Vi skal vise at hvis påstanden holder for utsagn med k utsagnsvariable så holder den også for utsagn med k+1 utsagnsvariable.*

Anta, induksjonshypotesen, at påstanden holder for k utsagnsvariable.

La oss se på en tabell for variablene P_1, ..., P_k.

P_1	P_2	...	P_k	...
		⋮		
T	*F*	...	*T*	...
		⋮		

2^k (induksjonshypotesen)

I en tabell for P_1, ..., P_k, P_{k+1} vil en vilkårlig kombinasjon av sannhetsverdier for P_1, ..., P_k forekomme <u>to ganger</u>: én gang for P_{k+1} = T og én gang for P_{k+1} = F.

P_1	P_2	...	P_k	P_{k+1}	...
		⋮			
T	*F*	...	*T*	*T*	...
T	*F*	...	*T*	*F*	...
		⋮			

Dette betyr at tabellen for P_1, ..., P_{k+1} er dobbelt så stor som tabellen for P_1, ..., P_k: Induksjonhypotesen gir oss dermed at den har $2*2^k$ rekker. Dvs at den har 2^{k+1} rekker, som vi ønsket å vise. Da er også induksjonssteget vist og ved prinsippet for matematisk induksjon kan vi nå konkludere at påstanden holder.

Vedlegg til eksamen INFO102

Mengde algebra (Gitt en universell mengde *U*)

Assosiative lover

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Kommutative lover

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Identitetslover

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U$

$A \cap U = A$

Idempotente lover

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Distributive lover

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Komplement lover

$A \cup \sim A = U$

$\sim U = \emptyset$

$\sim(\sim A) = A$

$A \cap \sim A = \emptyset$

$\sim\emptyset = U$

De Morgans lover

$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

Boole'sk algebra

Kommutative lover

(P and Q) ≡ (Q and P)
(P or Q) ≡ (Q or P)

Assosiative lover

(P and (Q and R)) ≡ ((P and Q) and R)
(P or (Q or R)) ≡ ((P or Q) or R)

Distributive lover

(P and (Q or R)) ≡ ((P and Q) or (P and R))
(P or (Q and R)) ≡ ((P or Q) and (P or R))

Idempotente lover

(P and P) ≡ P
(P or P) ≡ P

Absorbsjonslover

(P and (P or Q)) ≡ P
(P or (P and Q)) ≡ P

De Morgans lover

not (P and Q) ≡ ((not P) or (not Q))
not (P or Q) ≡ ((not P) and (not Q))

Dobbel negasjon

(not (not P)) ≡ P