K. N. Toosi University of Technology 1928

به نام خدا

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده برق

شبیه سازی و مدلسازی

استاد: آقای دکتر مهدی علیاری

گردآورنده:پارسا شکرللهی

بهمن 1402

فهرست مطالب

عنوان شماره صفحه

بخش اول:توضیحات کلی 3

.... 4

.... 4

جدول 1-1. روشهای مختلف شناسایی 5

توضیح روش حداقل مربعات 6

حداقل مربعات وزن داده شده (WLS): 7

قضیه BLUE:.. 8

روش حداکثر احتمال وقوع تکراری IML (IELS یا PEM): 9

بخش اول:توضیحات کلی

مدل ها به دو دسته فیزیکی (white box) و ریاضی (Black box) تقسیم می شوند. دید نسبت به مدل white box ساختاری (Structural) و نسبت به Black box (Functional) است.

- مدل
  - White box → Transparent → Structural
    - ODE
    - PDE
    - Alg…
  - Gray box
  - Black box → Functional

سیستم های Black box بر اساس دیتا کار می کنند که در برخی مواقع دیتاها را ما می توانیم کم و زیاد کنیم و گاهی نمی توانیم در دیتاست دخالتی داشته باشیم.

هدف این است بر اساس مشاهدات و اندازه گیری ها به مدل تخمینی از ؟؟؟ برسیم.

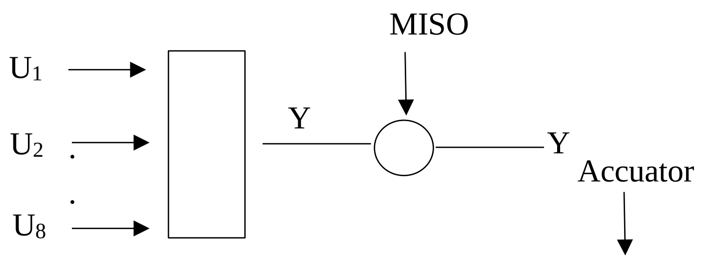
فروبی نسبت به ورودی در حالت بیش Over Acutor است و در حالت کمتر Under Accuotor است.

ما در مدل کردن باید به سه مورد زیر توجه داشته باشیم.

- Under modeling
- Modeling
- Over modeling

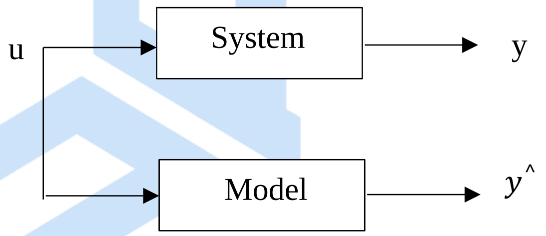
در مدل سازی ساده ترین مدل که جواب مسئله باشد بهترین مدل است یعنی باید به اصل پارسمونی Parsimonypriciple توجه داشت.

- سیستم
  - خطی
    - استاتیکی
    - دینامیکی
  - غیرخطی
    - استاتیکی
    - دینامیکی



$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots . \\ y^n \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1^1 \; u_2^1 \;\; \dots \dots u_n^1 \\ \dots . \\ u_1^N \; \dots \dots \; u_n^N \end{pmatrix}$$

$$Y = U\theta \;\rightarrow LS \;\rightarrow\; \theta = (u^T u)^{-1} U^T Y$$



$E_{(error)} = y - y^\wedge$

$$Y = U\theta + n$$

جدول 1-1. روشهای مختلف شناسایی

نام روش به لاتین	Abv.	نام روش به فارسی	
Classical Methods	CM	روش های کلاسیک	روش های یکباره
Ordinary Least Square	OLS	روش حداقل مربعات معمولی	
Weighted Least Square	WLS	حداقل مربعات وزن داده شده	
Generalized Least Square	GLS	حداقل مربعات تعمیم داده شده	
Bayes Estimation	BE	تخمین بیز	
Maximum Likelihood	ML	حداکثر احتمال وقوع	
Iterative Generalized Least Square	IGLS	حداقل مربعات تعمیم داده شده تکراری	روش های تکراری
Iterative Instrumental Variable	IIV	متغیرهای کمکی تکراری	
Iterative Maximum Likelihood	IML	حداکثر احتمال وقوع تکراری	
Prediction Error Method	PEM	روش پیش بینی خطا	
Recursive Least Square	RLS	حداقل مربعات بازگشتی	روش های بازگشتی
Recursive Extended Least Square	RELS	حداقل مربعات بازگشتی	
Recursive Instrumental Variable	RIV	متغیرهای کمکی بازگشتی	
Recursive Maximum Likelihood	RML	حداکثر احتمال وقوع بازگشتی	
Extended Matrix Method	EMM	روش ماتریس توسعه یافته	
Stochastic Approximation	SA	تقریب تصادفی	
Orthogonal Projection Algorithm	OPA	تصویر متعامد	

جدول 1-4. روش های شناسایی پارامتری سیستم

	نام روش	علامت اختصاری
روش های یکباره	حداقل مربعات	LS
	حداقل مربعات وزن داده شده	WLS
	حداقل مربعات تعمیم داده شده	GLS
	حداقل مربعات توسعه یافته	ELS
	متغیرهای ابزاری	IV
	بیشترین شباهت	ML
	شناسایی فیلتر کالمن/ رویتگر	OKID
روش های تکراری	حداقل مربعات تعمیم داده شده تکراری	IGLS
	پیشگویی خطا	PEM
	حداقل مربعات توسعه یافته تکراری	IELS
	شناسایی فیلتر کالمن/ رویتگر بهبود یافته	IOKID
روش های بازگشتی	حداقل مربعات بازگشتی	RLS
	حداقل مربعات تعمیم داده شده بازگشتی	RGLS
	حداقل مربعات توسعه یافته بازگشتی	RELS
	متغیرهای ابزاری بازگشتی	RIV
	پیشگویی خطا بازگشتی	RPEM
	شناسایی فیلتر کالمن/ رویتگر بازگشتی	ROKID

توضیح روش حداقل مربعات:

در روش حداقل مربعات، این واقعیت درنظر گرفته می شود که هرگونه اندازه گیری از اطلاعات، همراه با خطا و نویز می باشد. از طرفی حتی با فرض بدون خطا بودن اندازه گیری ها، معمولاً ساختار درنظر گرفته شده برای مدلسازی سیستم نیز با واقعیت سیستم اختلاف دارد. مثلاً ممکن است برای یک سیستم غیرخطی، یک مدل خطی درنظر گرفته شود. در این صورت، پارامترهای مدل مفروض هرچقدر هم دقیق

تخمین زده شوند، باز هم خطایی بین خروجی اندازه گیری شده با خروجی مدل مفروض وجود خواهد داشت. اگر مجموعه و برآیند این دو نوع خطا (خطای ناشی از اندازه گیری و خطای ناشی از تعریف ساختار) را با سیگنال e_t نشان دهیم، در روش حداقل مربعات هدف این است که، پارامترها طوری تخمین زده شوند که مجموع مربعات خطا $(\sum e_t^2)$ حداقل گردد. برای انجام روش حداقل مربعات، مراحل زیر باید انجام شود.

حداقل مربعات وزن داده شده (WLS):

درروش حداقل مربعات معمولی (OLS) با مجموع مربعات خطا به صورت رابطه زیر سروکار داشتیم.

$$S = \sum_{t=1}^{N} e_t^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_N^2 = \underline{e}^T . \underline{e}$$

در روش حداقل مربعات معمولی، خطاها در لحظات مختلف از اهمیت یکسانی برخوردار هستند. لذا، توان دوم تمام خطاها با ضریب واحد، در تعریف S ظاهر می شود. ولی ممکن است بنا به دلایلی، بخواهیم به خطاها در لحظات مختلف وزن های مختلف بدهیم. (یعنی برای خطاها در لحظات مختلف، اهمیت مختلفی قائل شویم.) این کار، در روش حداقل مربعات وزن داده شده (WLS) انجام می گیرد. بدین ترتیب که S را به صورت رابطه(4-39) تعریف می کنیم.

:(4-39)

$$S = \sum_{t=1}^{N} w_1 e_t^2 = w_1 e_1^2 + w_2 e_2^2 + \cdots + w_N e_N^2$$

رابطه (4-39) را می توان به فرم ماتریسی، به صورت رابطه (4-40) نوشت.

:(4-40)

$$S = \sum_{t=1}^{N} w_t e_t^2 = \underline{e}^T . W . \underline{e} \quad ; \quad W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N \end{bmatrix}$$

در WLS در حالت کلی، ماتریس W می تواند هر ماتریسی باشد (قطری یا غیرقطری)، به شرط آنکه مثبت معین باشد. ولی عموماً ماتریس W را قطری درنظر می گیریم. حال اگر بر اساس تعریف $S = \underline{e_t^T} . W . \underline{e_t}$، محاسباتی مشابه با روش OLS انجام می دهیم، بهترین بردار پارامترها در این حالت $(\underline{\hat{\theta}}WLS)$، به صورت رابطه (4-41) بدست خواهد آمد (جزئیات محاسبات به عهده خواننده واگذار می شود).

:(4-41)

$$\underline{\hat{\theta}}WLS = (U^T W\, U)^{-1}.\, U^T\, W\, \underline{y}$$

حال می خواهیم نشان دهیم که تخمین پارامترهای معادله تفاضلی به روش حداقل مربعات، در چه مواقعی بایاس دار است و در چه مواقعی بایاس دار نیست؟ برای بررسی این مسأله، مدل *ARMA* را یادآوری می کنیم. همانطور که در فصل دوم بحث شد، هم نویز رنگی (w_t) را می توان خروجی یک سیستم *LTI* دانست که ورودی آن نویز سفید (v_t) است (شکل 5-3)

$$v_t \xrightarrow{\text{نویز سفید}} \boxed{\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}} \xrightarrow{\text{نویز رنگی}} w_t$$

شکل 5-3. مدل *ARMA* برای یک نویز رنگی

فرض کنید که تابع تبدیل سیستم $\frac{B\,(Z^{-1})}{A\,(Z^{-1})}$ باشد. ورودی x_t را به سیستم اعمال کرده ایم. خروجی بدون نویز و خطای سیستم را که قابل دسترسی نیست با $\tilde{y}_t$ نمایش می دهیم. نویز و خطای موجود در سیستم (خطای اندازه گیری و خطای ساختار) را به طور یکجا در سیگنال w_t درنظر گرفته و خروجی اندازه گیری شده y_t را که آغشته به این نویز است، با y_t نشان می دهیم.

شکل 5-4 سیگنال های مذکور و ارتباط آنها با یکدیگر را نشان می دهد.

قضیه BLUE:

قضیه: روش حداقل مربعات، بهترین تخمینگر بدون بایاس خطی است.

یک تخمینگر خطی در حالت کلی به صورت $\underline{\widehat{\theta_A}} = A.\underline{y}$ بیان می شود. مثلاً در روش حداقل مربعات $\underline{\widehat{\theta_{LS}}} = (U^T U)^{-1} U^T \underline{y}$ و یا به عبارتی $A_{LS} = (U^T U)^{-1} U^T$ می باشد.

اگر یک تخمینگر خطی بدون بایاس باشد، AU=I است. این شرط معادل است با اینکه ماتریس A به فرم $A = (B^T U)^{-1} B^T$ باشد. به عنوان مثال، در روش حداقل مربعات معمولی $B = U$ و در روش حداقل مربعات وزن داده شده $B = W^T U$ است.

اثبات قضیه *BLUE*:

برای اثبات قضیه *BLUE*، ابتدا یک ماتریس مثبت معین به نام D به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D \triangleq (A-(U^TU)^{-1}U^T).\underbrace{(A-(U^TU)^{-1}U^T)^T}_{A^T-U(U^TU)^{-1}} = (A-A_{LS}).(A-A_{LS})^T$$

بدیهی است، ماتریس D یک ماتریس مثبت نیمه معین است. $(D \geq 0)$

حال، ماتریس D تعریف شده در فوق را به صورت زیر بسط داده و ساده می کنیم. (توجه داریم که در تخمینگر خطی بدون بایاس، همواره $AU=I$ می باشد).

:(5-63)

$$D = AA^T - (U^TU)^{-1} \underbrace{U^TA^T}_{=(AU)^T=I^T=I} - \underbrace{AU}_{=I}(U^TU)^{-1} +$$

$$\underbrace{\left(U^TU\right)^{-1} U^TU}_{=I} \left(U^TU\right)^{-1} \Rightarrow D = AA^T - (U^TU)^{-1}$$

می دانیم که اگر یک ماتریس مثبت معین را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، همچنان مثبت معین باقی خواهد ماند. بنابراین، با ضرب کردن طرفین رابطه (63-5) در واریانس نویز (σ^2)، با توجه به اینکه $(D \geq 0)$ است خواهیم داشت:

(5-64)

$$\sigma^2 D = \underbrace{\sigma^2.AA^T}_{cov(\widehat{\theta_A})} - \underbrace{\sigma^2(U^TU)^{-1}}_{cov(\widehat{\theta_{LS}})} \geq 0 \Rightarrow cov\left(\widehat{\theta_A}\right) \geq cov(\widehat{\theta_{LS}})$$

که دربه دست آوردن رابطه فوق، از روابط (56-5) و (59-5) نیز استفاده شده است.

روش حداکثر احتمال وقوع تکراری IML (IELS یا PEM):

در ساختار $ARMAX$ که برای سیستم LTI معرفی شد، می توان نوشت:

(7-29)

$$A(z^{-1})y_t = B(z^{-1})x_t + \underbrace{C(z^{-1})v_t}_{e_t}$$

در حداقل مربعات معمولی (OLS) تمام خطای موجود در سیستم، اعم از خطاهای ناشی از سنسورها یا خطاهای اندازه گیری و خطای ناشی از تعریف ساختار برای سیستم (به علت اعمال تخمین) را در e_t فشرده کردیم. در OLS گفته شد که اگر از ساختار $AEMAX$ تبدیل Z معکوس بگیریم، می توان مدل $ARMAX$ را به فرم رگرسیون خطی بصورت زیر نوشت:

(7-30)

$$y_t = \underbrace{[-y_{t-1} \cdots - y_{t-n} \quad x_t \cdots x_{t-m}]}_{\underline{u_t^T}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\underline{\theta}} + e_t$$

حال به معرفی حداقل مربعات بسط داده شده (ELS) می پردازیم. در ELS تفاوتی که با OLS وجود دارد این است که نویز رنگی e_t را نیز بر حسب v_t می نویسیم. یعنی در ساختار $ARMAX$ که برای سیستم بکار رفت $A(z^{-1})y_t = B(z^{-1})x_t + C(z^{-1})v_t$ در OLS، $C(z^{-1})v_t$ را e_t درنظر گرفته و آنرا به فرم رگرسیون خطی فوق تبدیل نمودیم ولی در ELS، $C(z^{-1})v_t$ را نیز بسط داده و آنرا در رگرسیون خطی بصورت زیر وارد می کنیم. یعنی:

(7-31)

$$y_t = -a_1 y_{t-1} - \cdots - a_n y_{t-n} + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \cdots + b_m x_{t-m} + v_t + c_I v_{t-I} + \cdots + c_I v_{t-I}$$

(7-32)

$$\Longrightarrow y_t = \underbrace{\left[-y_{t-1} \cdots - y_{t-n} \quad x_t \cdots x_{t-m} \quad v_{t-1} \cdots v_{t-1}\right]}_{\underline{u_t^T}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ c_1 \\ \vdots \\ c_I \end{bmatrix}}_{\underline{\theta}} + v_t$$

در OLS تمام متغیرهای تعریف شده در $\underline{U_t^T}$ معلوم هستند و درایه های $\underline{U_t^T}$ همان مقادیر نمونه برداری از ورودی و خروجی سیستم می باشد. در صورتی که در ELS، مقادیر $v_{t-1}, \dots, v_{t-I}$ در $\underline{U_t^T}$ مجهول هستند و نمی توان آنها را همانند x_t و y_t، اندازه گرفت (نمونه برداری نمود). راه حل این است که مسئله ELS را بصورت تکراری از طریق روش نیوتن – رافسون حل کنیم. این روش را حداقل مربعات توسعه داده شده تکراری $(IELS)$ می نامیم. این روش به نامهای PEM و یا IML نیز گفته شده است.

از آنجا که اساس کار در این روش، روش عددی نیوتن- رافسون (گوس – نیوتن) است، در این قسمت آنرا به صورت مختصر بررسی می کنیم. فرض کنید یک تابع $f(\theta)$ داده شده است، می خواهیم حداقل آنرا بدست آوریم یا به عبارت دیگر به دنبال یک $\hat{\theta}$ هستیم. به گونه ای که $f(\theta)$ را حداقل کند. در روش نیوتن- رافسون $\hat{\theta}$ ایکه تابع $f(\theta)$ را حداقل می کند باید بصورتی تکراری از رابطه زیر بدست آید: