

Ejercicio 2, guía 3 – Chapa con agujero traccionada

El ejercicio consiste en calcular los esfuerzos principales y desplazamientos en una chapa con un agujero central, traccionada en sus extremos laterales, mediante el método de elementos finitos. Para ello, se hizo uso de las simetrías del problema: la chapa se subdividió en 4 partes. Se utilizó el programa gmsh para el mallado de la chapa. A continuación, se muestra la imagen de la chapa dividida y mallada. Se consideró la parte superior derecha de la chapa.

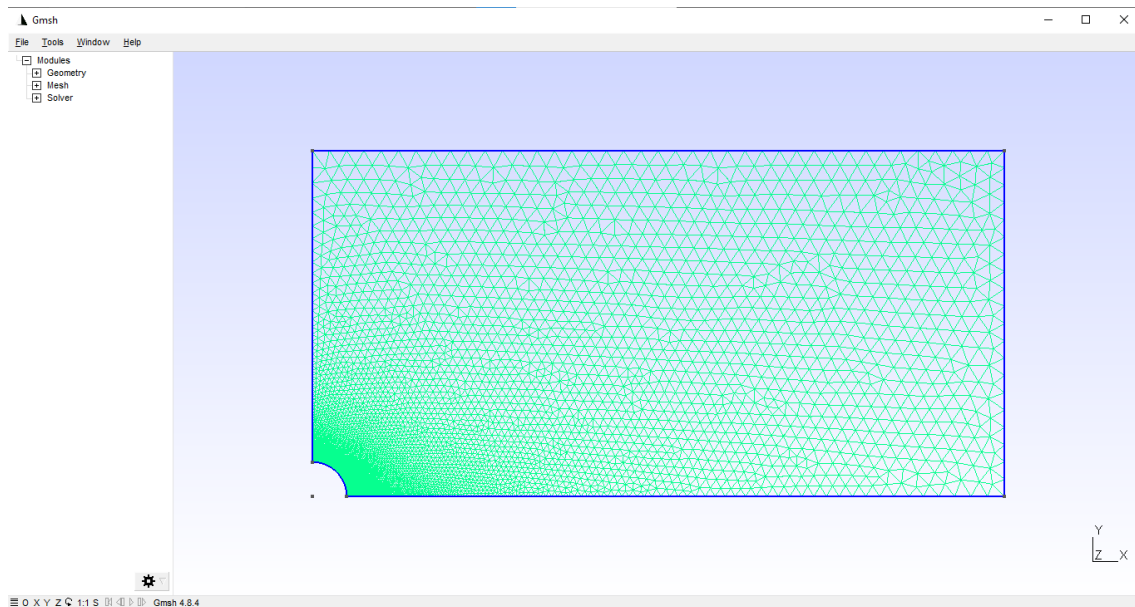


Figura 1.1: representación de la chapa con un mallado arbitrario

Dado que los cantos inferior e izquierdo de la chapa de este problema corresponden a los ejes de simetría de la chapa completa, se decidió empotrar al lado izquierdo, de manera que se restrinja el desplazamiento lateral, y al inferior, de manera que se restrinja el movimiento vertical. Esto es una manera de representar las condiciones de simetría de la chapa completa, dado que las tensiones de tracción se encuentran en los extremos laterales. Además, se siguió considerando como un nodo al punto central del agujero. Este se empotró tanto horizontal como verticalmente, para mantener la simetría del problema. Una consideración geométrica adicional, es que el cálculo realizado tiene en cuenta el espesor de la chapa, solamente para distribuir las tensiones impuestas, pero no en la representación.

El método de elementos finitos subdivide a su vez la chapa en muchos elementos más pequeños (esta cantidad es variable y controlable), en este caso de geometría triangular. A esta subdivisión se la llama mallado. Un mallado particular puede observarse en la figura anterior, de color verde. Se ve que la subdivisión en elementos es más fina cerca del agujero. Esto no es casual, ya que cuanto más fino sea el mallado, mejor aproximará el problema a una situación real. Así, se puede obtener una gran cantidad de información de buena

calidad en zonas específicas y de interés, y engrosar el mallado en partes menos relevantes, mejorando el tiempo de cálculo.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para los desplazamientos, fuerzas resultantes, tensiones y tensiones promediadas para varios mallados.

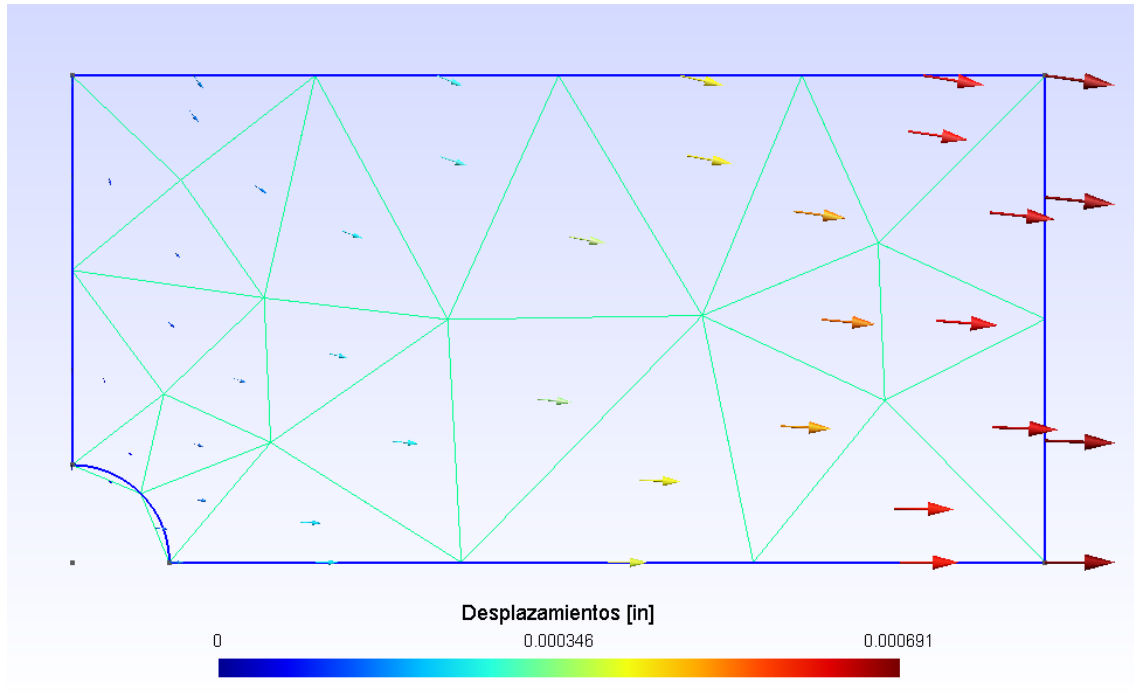


Figura 1.2 a: Desplazamientos calculados con un mallado muy grueso. Se ve que el resultado no es muy bueno.

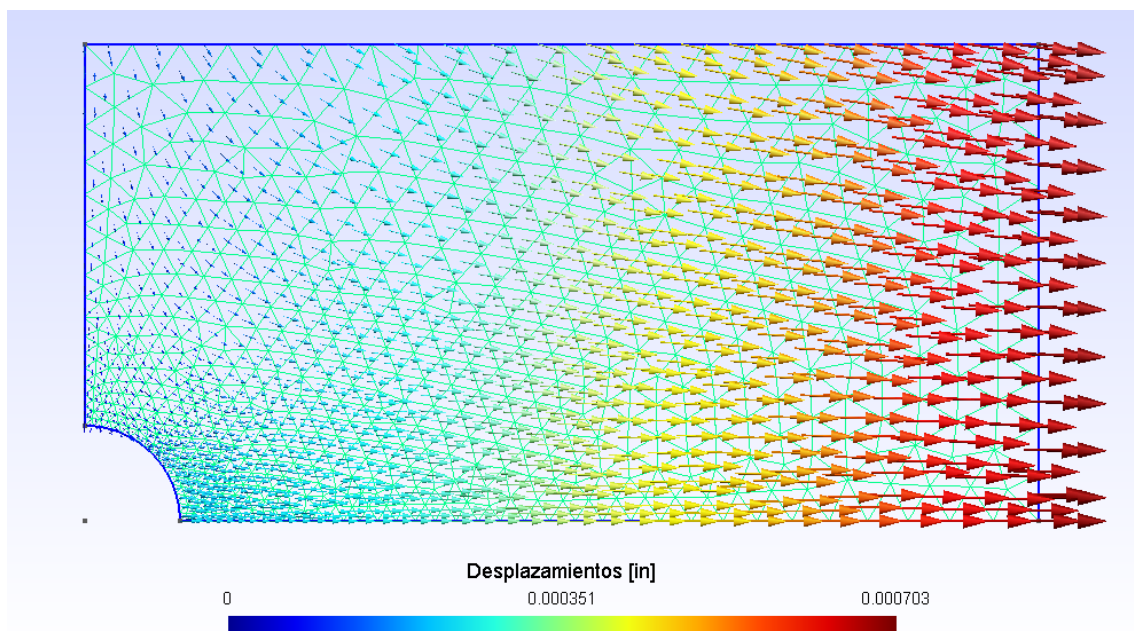


Figura 1.2 b: Desplazamientos calculados con un mallado mucho más fino. Se aprecia una mejor convergencia de los resultados. Los valores de desplazamiento resultaron de todas maneras similares a los calculados con un mallado grueso.

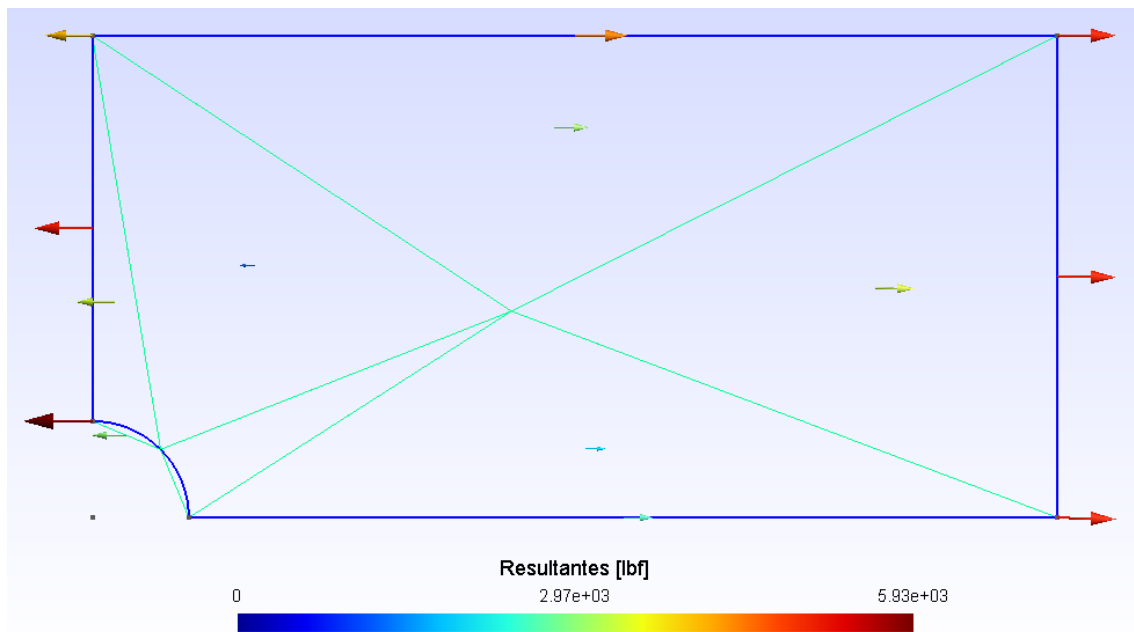


Figura 1.3 a: Resultantes calculadas con un mallado grueso. No se consigue mucha información.

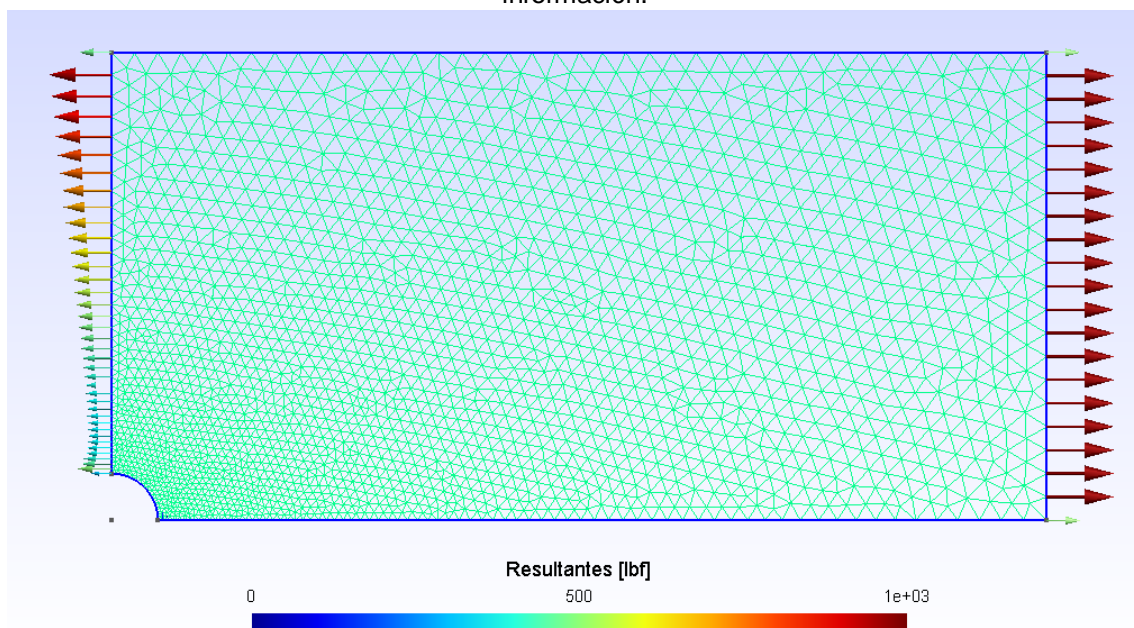


Figura 1.3 b: Resultantes calculadas con un mallado fino. Se ve que en el lado traccionado las resultantes fueron menores. Esto se debe a que, al estar dividido en más elementos, cada uno de ellos resultó tener una fuerza aplicada menor, de manera de conservar la tensión de 1000 psi aplicada en ese lado. Lo mismo ocurre en el lado izquierdo de la imagen. Sin embargo, se obtiene una mucho mayor resolución en cuanto a los esfuerzos principales.

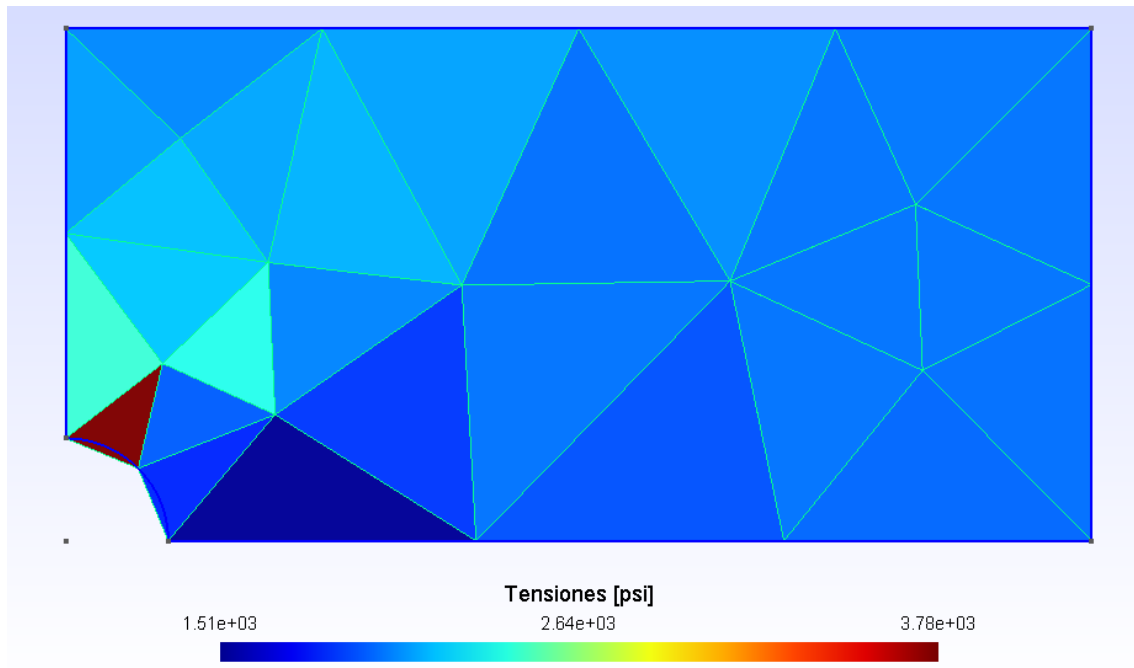


Figura 1.4 a: Tensiones calculadas con un mallado grueso. No aporta mucha información, sólo un elemento se ve traccionado. Se ve que los elementos que rodean al círculo ni siquiera pueden aproximar bien su forma.

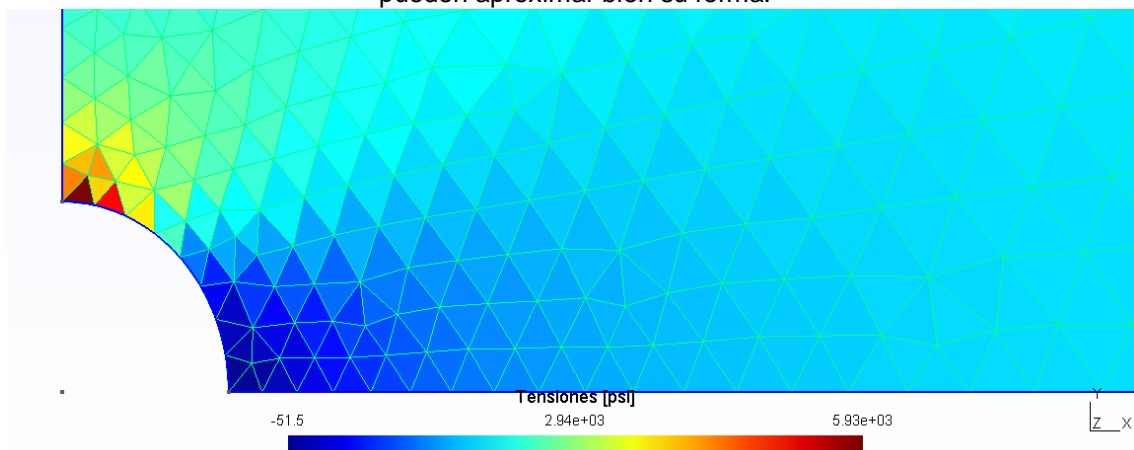


Figura 1.4 b: Mallado intermedio. Se ve que los elementos ya aproximan bien a la geometría, aunque aún no resuelven bien las tensiones. Se aprecia una variación en los valores de las tensiones calculadas.

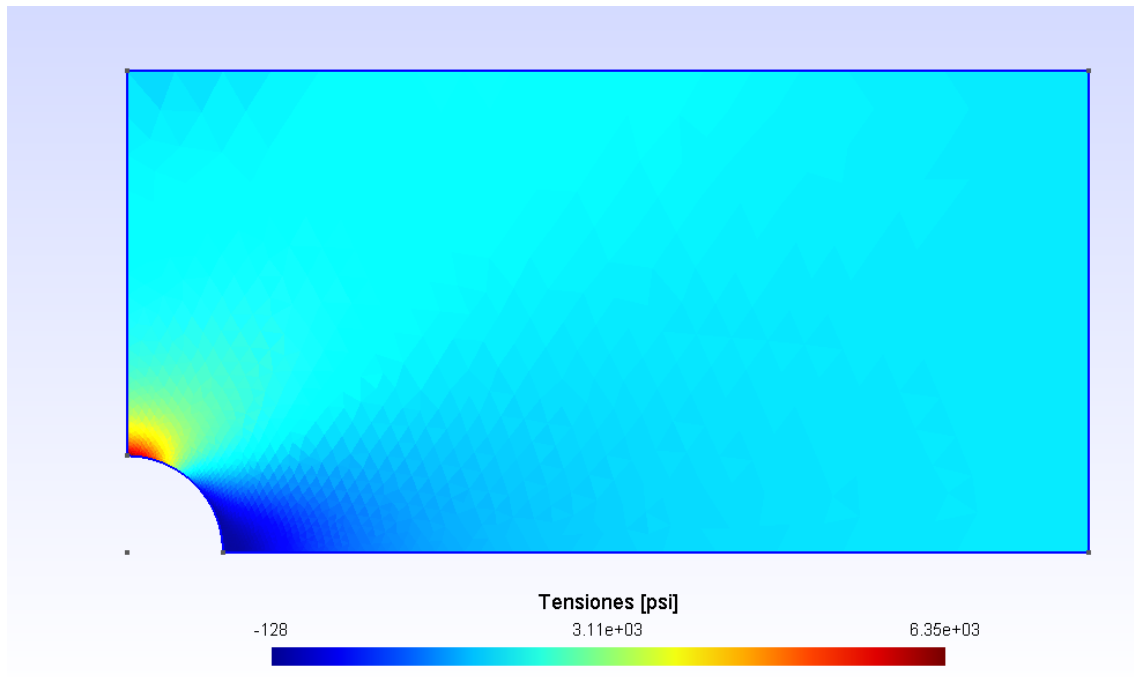


Figura 1.4 c: Mallado fino de tensiones. En las zonas lejanas al agujero se realizó un mallado más grueso, debido a que esas zonas no aportaban mucha información relevante al problema.

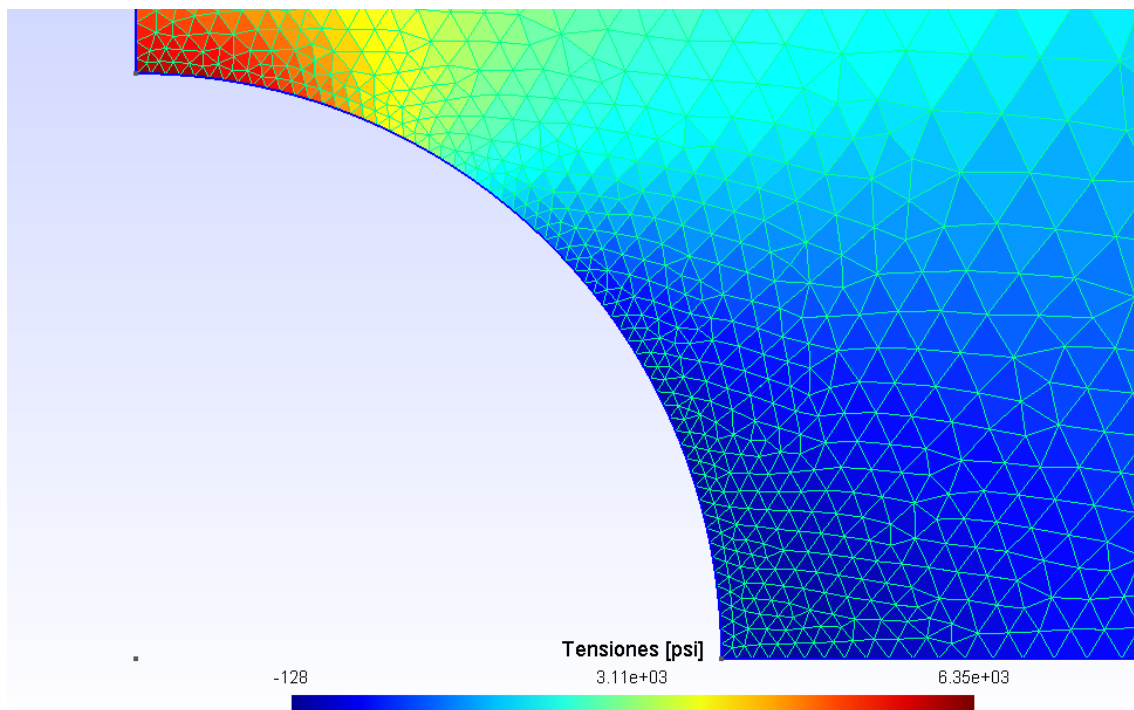


Figura 1.4 d: Ampliación de figura 1.4 c. Los elementos resuelven mucho mejor las tensiones que en el mallado intermedio.

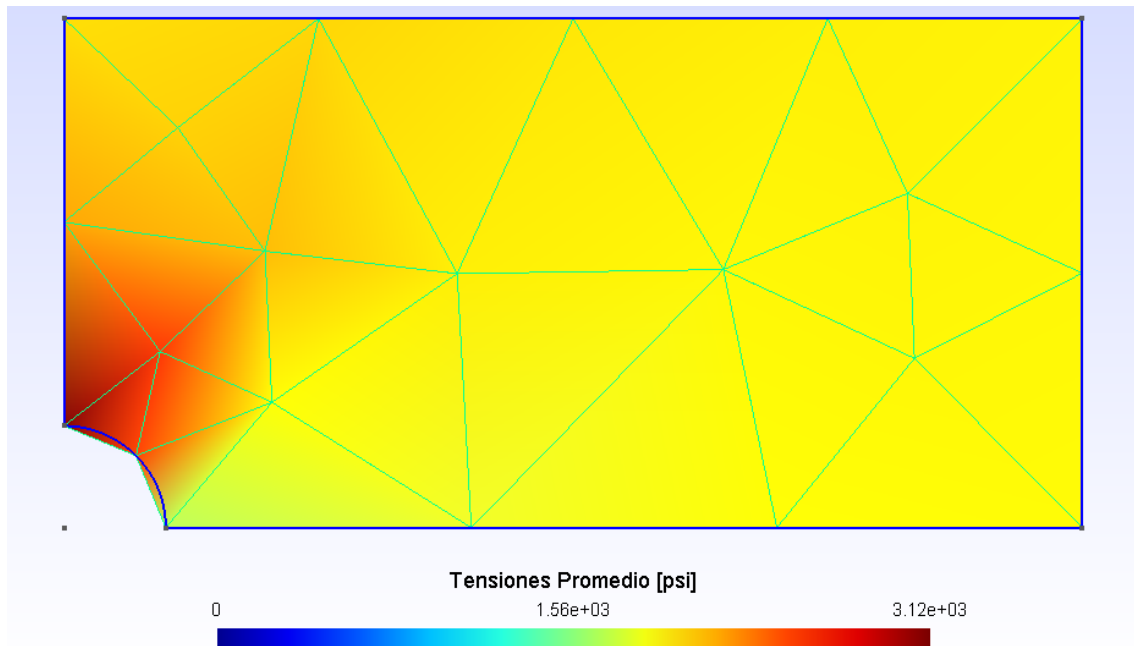


Figura 1.5 a: Tensiones promediadas para un mallado grueso. El promedio de las tensiones se hizo teniendo en cuenta la tensión de los elementos adyacentes.

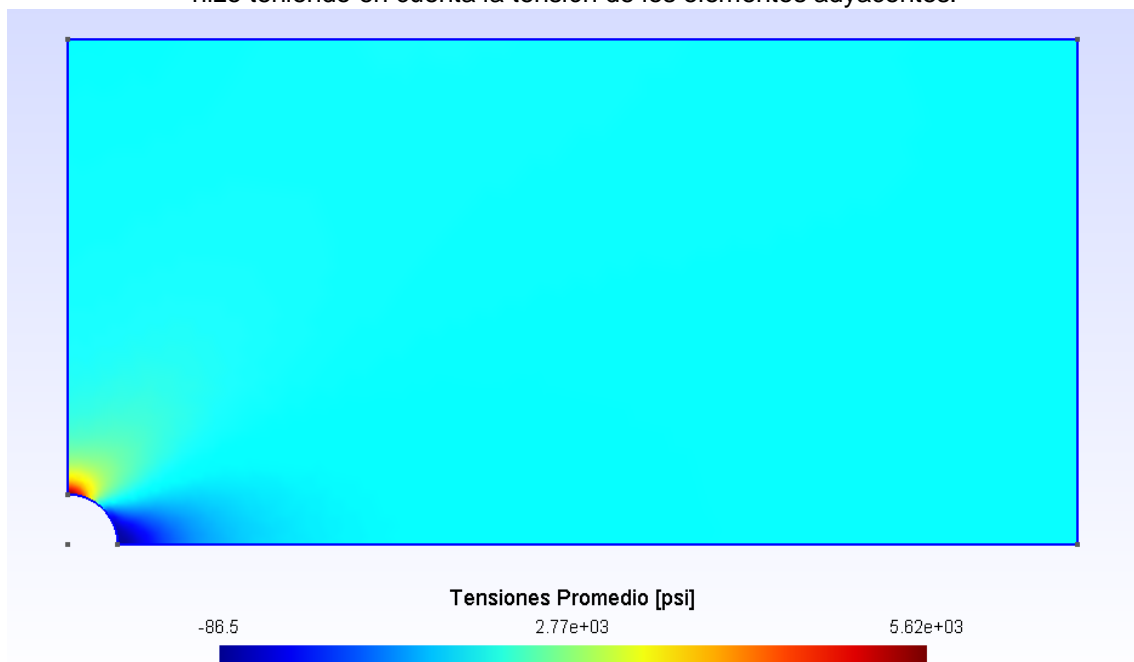


Figura 1.5 b: Tensiones promedio con un mallado más fino. Se ve una gran definición en la distribución de tensiones. Además, se ve como mejora el valor de las tensiones promedio, convergiendo a valores más esperados (intensificados en la parte superior del agujero, nulas o de compresión en el costado del agujero, y similares a la aplicada externamente en el resto de la chapa).

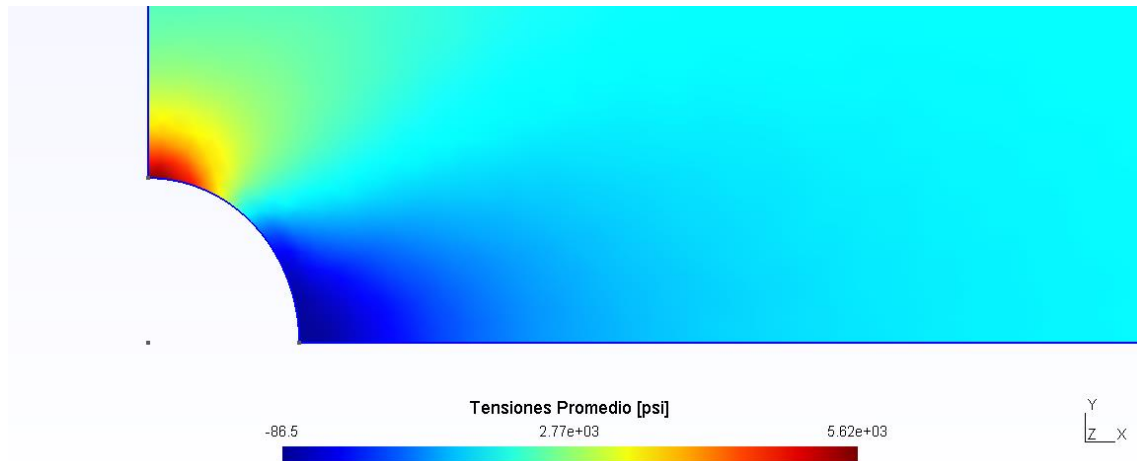


Figura 1.5 c: ampliación de la figura 5 b.

Como conclusiones de este ejercicio, se ve la importancia de realizar mallados que sean lo suficientemente finos como para aportar información relevante sobre el problema. Sin embargo, es necesario también tener en cuenta el costo que tiene realizar mallados cada vez más finos, y evaluar si vale la pena refinar tanto el resultado, aunque se pueden refinar más ciertas secciones que sean más importantes que otras. Otra conclusión importante, es que se pueden usar condiciones de simetría para minimizar el tiempo de cálculo, sin perder necesariamente información.

Ejercicio 1, guía 4 – vibraciones

El ejercicio consiste en analizar los modos normales de vibración de una viga empotrada en uno de sus extremos, sometida a esfuerzos de flexión. No se tuvieron en cuenta los modos longitudinales, sólo los transversales.

Para realizar los cálculos, se dividió la viga primero en una cantidad fija de elementos, para estudiar sus modos normales de vibración, y luego con una cantidad variable, para estudiar la convergencia de las frecuencias de los modos normales de vibración. Además, el cálculo se realizó teniendo en cuenta las matrices de rigidez consistentes (con la función de interpolación) y concentradas (aproximan la matriz de rigidez por una matriz diagonal). A partir de esto, se pudieron determinar los modos normales de vibración, y las frecuencias de estos modos normales mediante la resolución de un problema de autovalores (frecuencias) y autovectores (modos normales). Los autovectores, además, se normalizaron dividiéndolos por el valor del autovector asociado al nodo del extremo derecho de la viga, de manera de que la representación sea más sencilla de interpretar. Las funciones de interpolación utilizadas fueron las siguientes:

$$v(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

$$a_1 = \frac{2}{L_{\text{elemento}}^3} (d_1 - d_2) + \frac{1}{L_{\text{elemento}}^2} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$a_2 = -\frac{3}{L_{\text{elemento}}^2} (d_1 - d_2) - \frac{1}{L_{\text{elemento}}} (2\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$a_3 = \varphi_1$$

$$a_4 = d_1$$

Siendo L elemento la longitud del elemento, d_1 el desplazamiento asociado al nodo izquierdo del elemento, d_2 el desplazamiento asociado al nodo derecho del elemento, φ_1 el ángulo de flexión asociado al nodo izquierdo del elemento y φ_2 el ángulo de flexión asociado al nodo derecho del elemento.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en el cálculo.

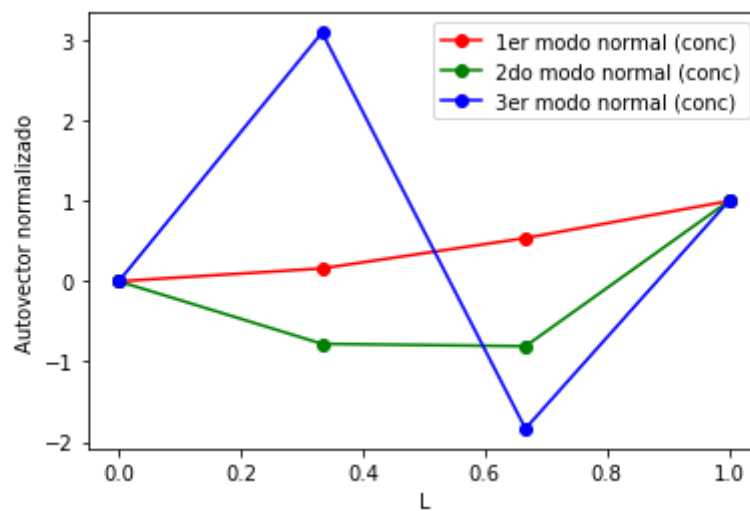


Figura 2.1 a.1: autovectores normalizados para cada nodo calculados con matrices concentradas para los 3 primeros modos normales. 3 elementos.

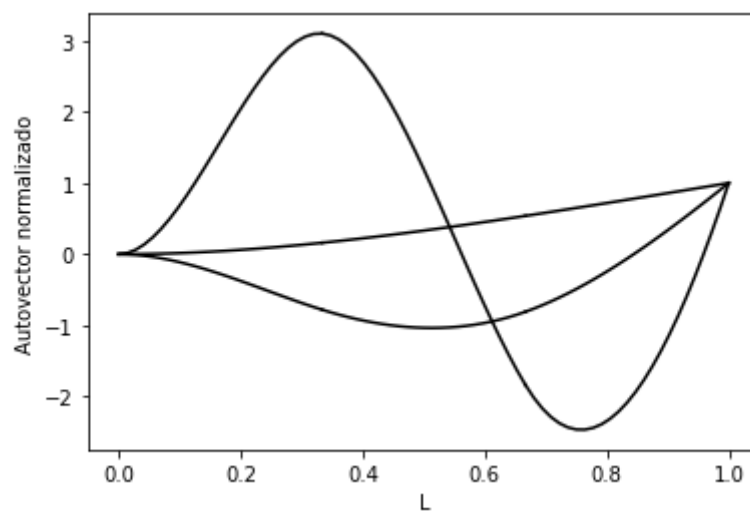


Figura 2.1 a.2: Similar a la figura 2.1 a.1, pero interpolado mediante las funciones de interpolación, en vez de con rectas

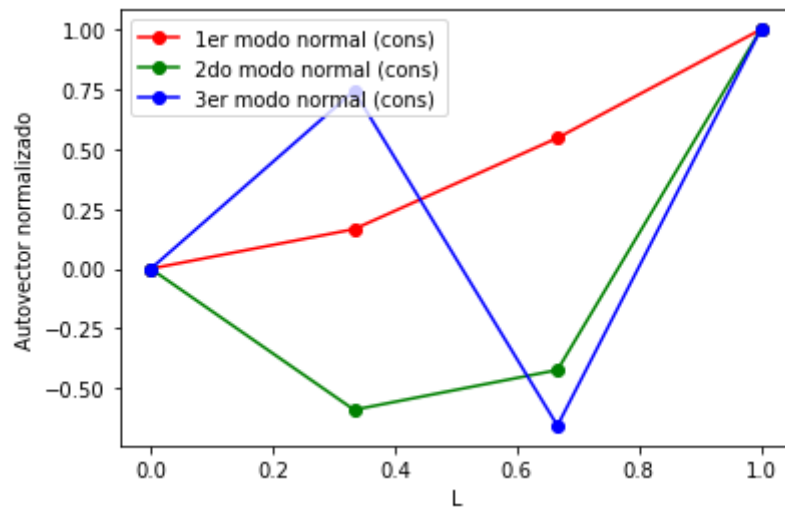


Figura 2.1 b: Similar figura 2.1 a, calculado mediante matrices consistentes. Se ve una diferencia significativa en los valores del 2do y 3er modo normal comparado con el cálculo de matrices concentradas.

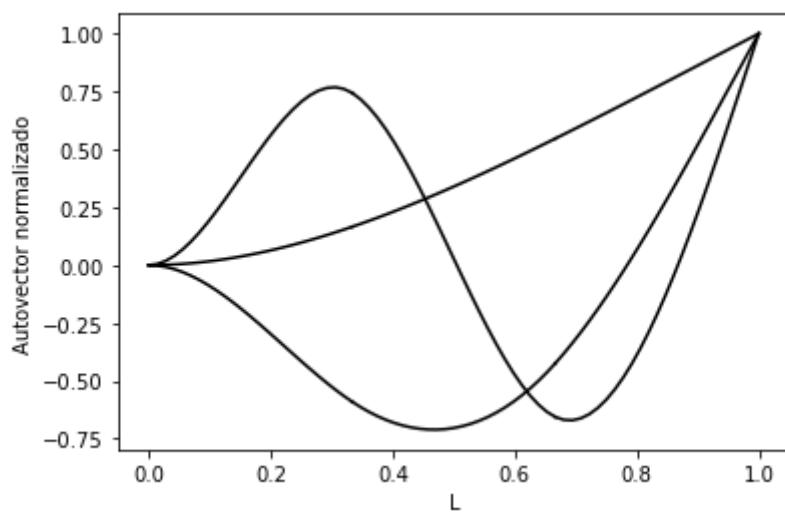


Figura 2.1 b.2: Similar a la figura 2.1 b.1, pero interpolado mediante las funciones de interpolación, en vez de con rectas

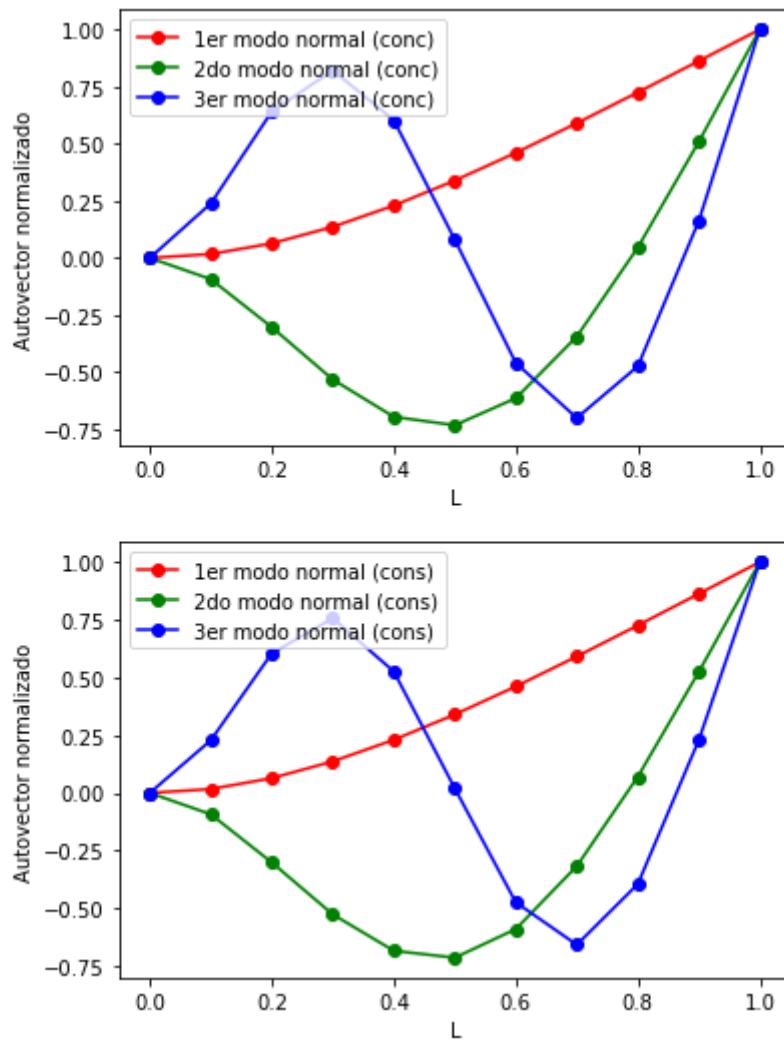


Figura 2.2 a: Cálculo con 10 elementos. Se observa que ya para los primeros 3 modos normales, el cálculo con matrices consistentes y concentradas arroja valores similares.

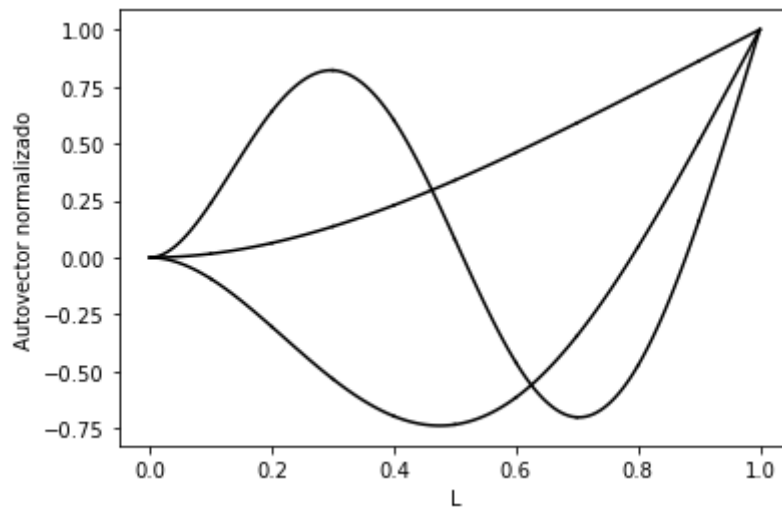


Figura 2.2 b: Similar a la figura 2.2 a, pero interpolado mediante las funciones de interpolación, en vez de con rectas. Dada la convergencia de los dos métodos, ya no es necesario discriminar entre cálculo con matrices concentradas y consistentes, graficando de esta manera.

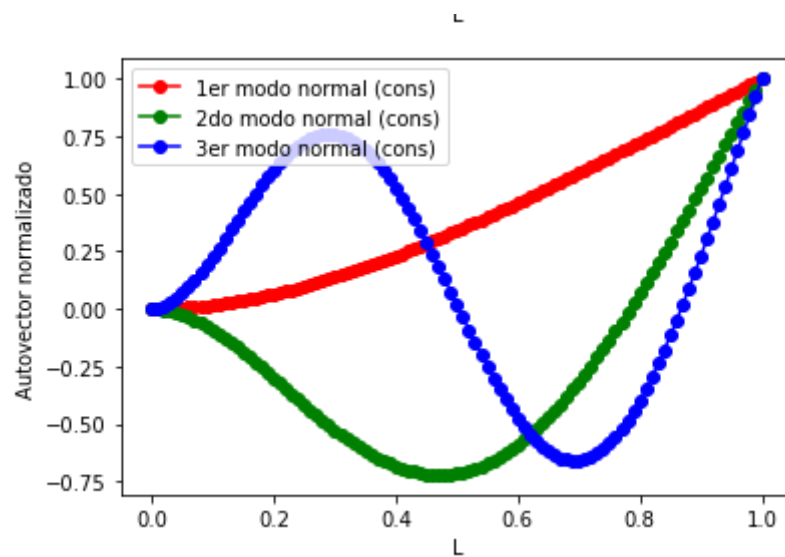


Figura 2.3 a: Se observa cómo se suavizan cada vez más las curvas a medida que se aumenta la cantidad de elementos. Gráfico con 100 elementos.

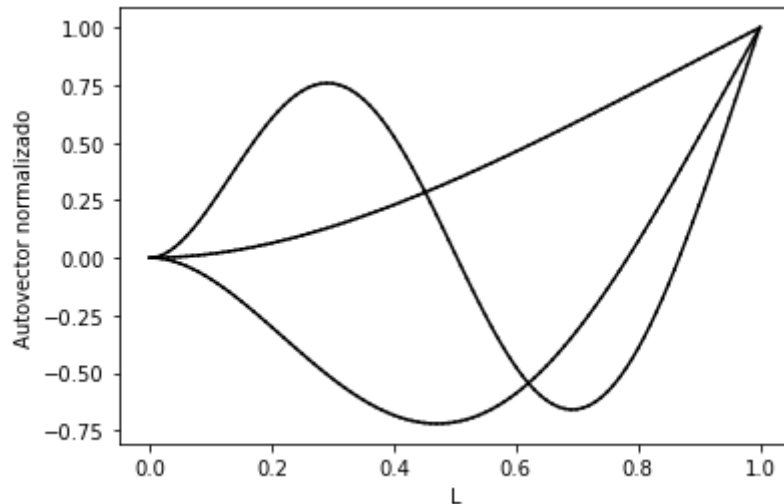


Figura 2.3 b: Similar a la figura 2.3 a, pero interpolado mediante las funciones de interpolación, en vez de con rectas. Si se compara con la figura 2.2 b, se ve que son prácticamente iguales, aunque la 2.3 b tenga un orden de magnitud más en cantidad de elementos. Graficando de esta manera, se puede aumentar la eficiencia de cálculo para sacar resultados válidos.

Por otra parte, se estudió la convergencia de los valores de frecuencia de los primeros modos normales a medida que aumentaba la cantidad de elementos.

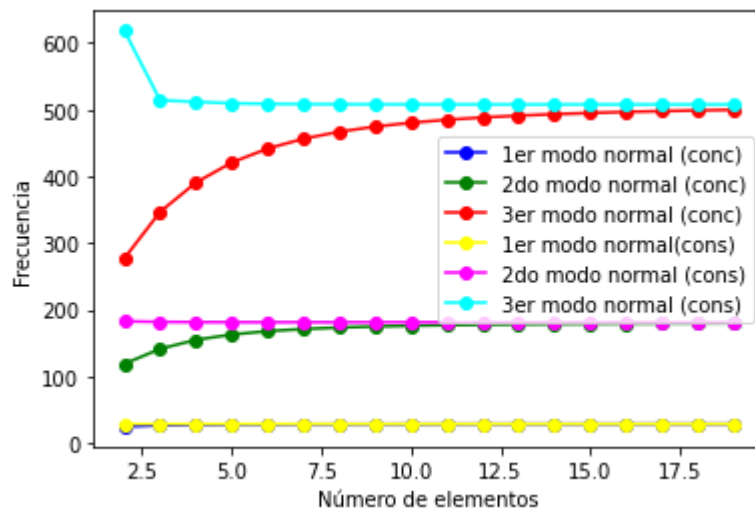


Figura 2.4: Convergencia de las frecuencias asociadas a los 3 primeros modos normales, calculadas mediante matrices concentradas y consistentes. Se ve que, en todos los casos, el método de matrices consistentes converge más rápido que el de matrices concentradas. Además, cuanto mayor sea el modo normal, se ve que se necesitan una mayor cantidad de elementos para lograr que la frecuencia converja a un valor estable.

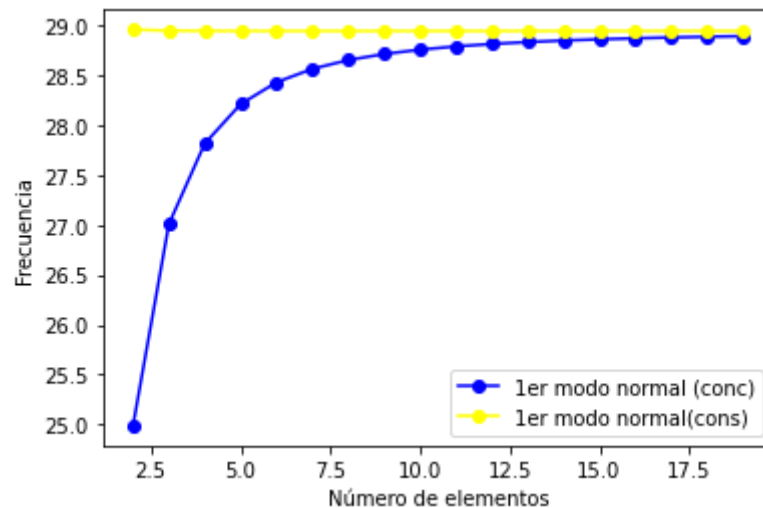


Figura 2.5 a: Convergencia del primer modo normal. Se observa con mayor detalle cómo el cálculo con matrices consistentes converge más rápidamente que el cálculo con matrices concentradas.

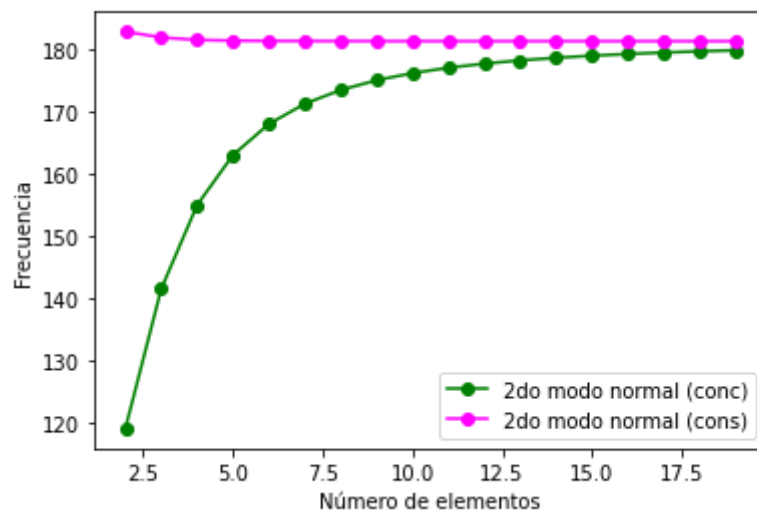


Figura 2.5 b: Convergencia del segundo modo normal. Comportamiento similar a la convergencia del primer modo normal. La convergencia es ligeramente más lenta.

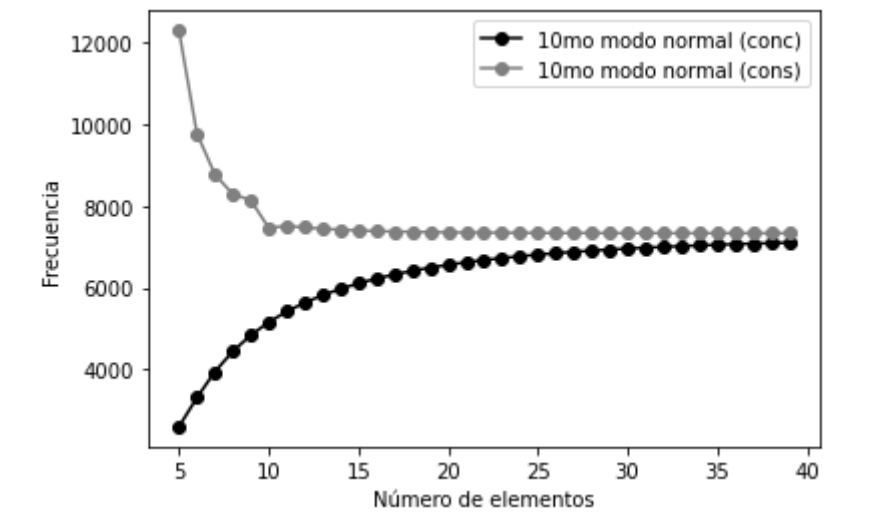


Figura 2.6: Convergencia para el décimo modo normal. Se ve que aún con 40 elementos la convergencia no es completa para el cálculo con matrices concentradas.

En conclusión, este ejercicio nos permitió visualizar la convergencia de las frecuencias de los modos normales de oscilación para una viga empotrada, a medida que se aumentó la cantidad de elementos en los que se dividió la misma. También se comprobó que el cálculo con matrices consistentes converge mucho más rápido que con matrices concentradas.