

MODELIZACIÓN DE PROPIEDADES Y PROCESOS DE MATERIALES

Alumno:

Daniel Guerrero Gil

Fecha:

25/06/2021

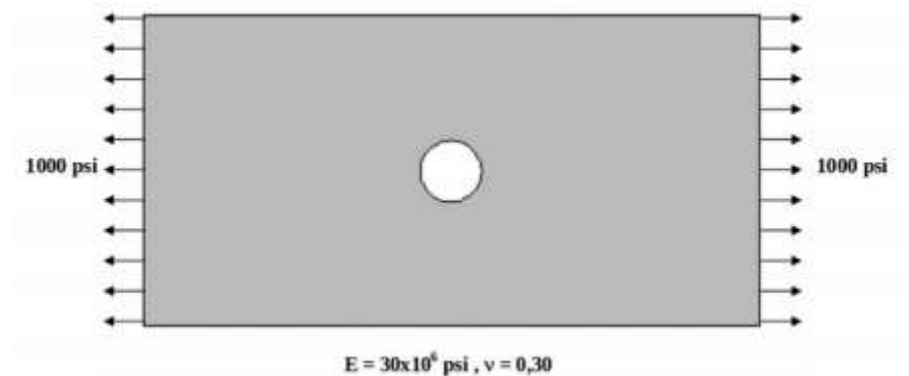
Trabajo a presentar:

Informe de ejercicios

Sección 1: Ejercicio 3.2 (Chapa con agujero)

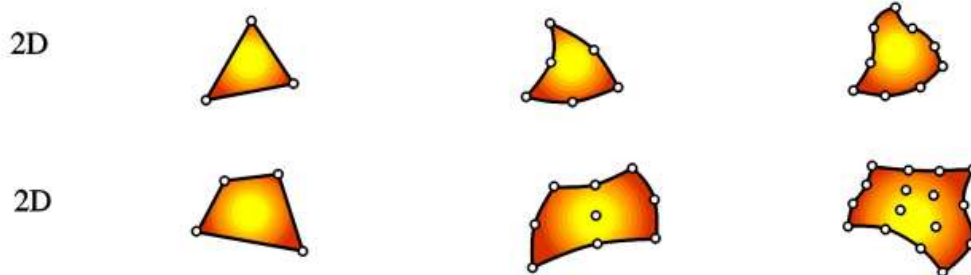
Determine la deformación y los esfuerzos principales en función de la posición para una chapa con un agujero en el centro sujeta a tracción por sus extremos, como se muestra en la figura. Las dimensiones de la chapa son de 20 x 10 pulgadas y su espesor de una pulgada. El radio del agujero central es también de 1 pulgada. Tome $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$. Analice el problema con número creciente de elementos y estudie su convergencia.

Analice el problema con número creciente de elementos y estudie su convergencia.



Para resolver este problema lo primero que debemos definir es el mallado que vamos a utilizar, es decir, en cuantos elementos vamos a dividir el problema. Además, si se observa la imagen de arriba, dada la geometría y las tensiones aplicadas, puede decirse que el mismo es simétrico, en consecuencia, el mismo puede resolverse solo en un cuarto de la chapa con el agujero.

El problema se puede mallar con diversos objetos geométricos, los elementos que se eligen para resolver este problema bidimensional son triángulos.

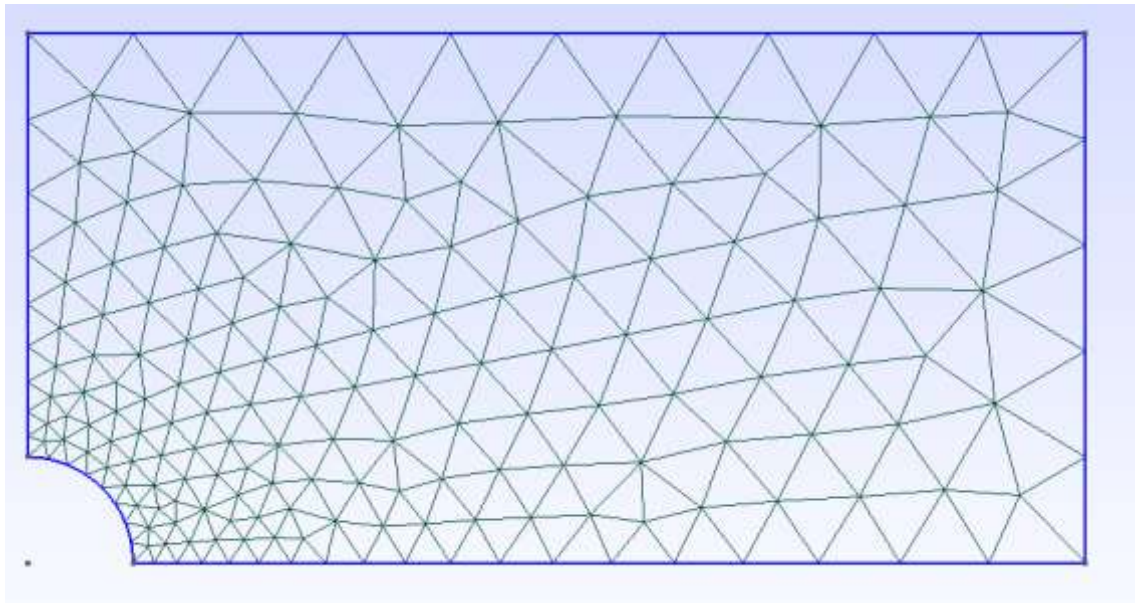


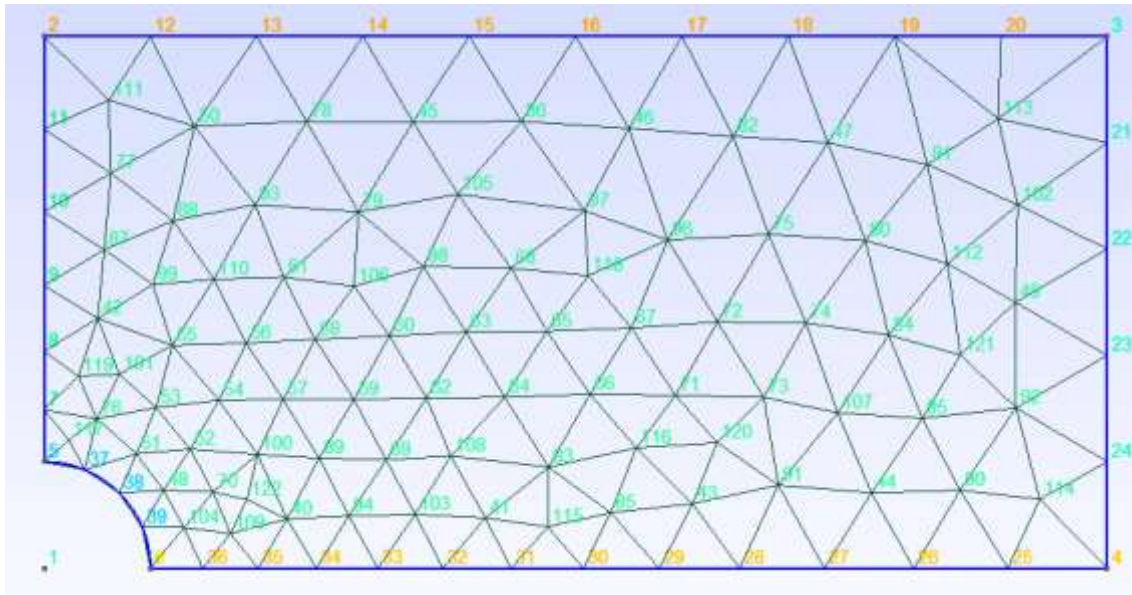
Para realizar el mallado se usa una librería de python llamada gmsh, definiendo la geometría del problema, el mismo produce el mallado automáticamente. En la siguientes figuras puede verse como se realiza el mallado, dado que la zona del agujero es una zona crítica, puesto que actúa el mismo como un concentrador de tensiones,

entonces lo que usualmente se hace es definir un mallado más fino en los alrededores para refinar los resultados.

Luego, cuando ya se ha realizado el mallado, gmsh permite obtener las matrices de nodos, las matrices de conectividad, definir “grupos físicos” en los cuales se van aplicar las condiciones de contorno.

Por ejemplo en el presente, definir la línea del extremo derecho que es donde se aplican las tensiones, eso es la tensión aplicada repartida en cada elemento. En el caso de los desplazamientos, se definen nulos para el borde izquierdo (solo en x), borde inferior (solo en y) y el punto del medio del agujero (en x e y), esto es para mantener la simetría del problema, dado que se tomó solamente $\frac{1}{4}$ de la chapa. Esto puede pensarse en que el borde izquierdo, al tener tensión aplicada de los dos lados, no hay desplazamiento en x, pero si puede haber desplazamiento vertical; en el caso de la línea inferior horizontal, no puede haber desplazamiento vertical pero si horizontal, en el caso del centro es un nodo ficticio que no debería moverse.





Por medio de un desarrollo matemático para una placa sometida a esfuerzos bidimensionales se llega a la siguiente expresión para la matriz de rigidez:

$$[k] = t \cdot \text{abs}(A) [B]^T [D] [B]$$

Donde t es el espesor de la placa, A representa el área de cada elemento que compone el mallado, D es la matriz que vincula las deformaciones con las tensiones en un problema bidimensional por medio de la ley de Hooke, B es una matriz que contiene las coordenadas de los elementos.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

Mediante esto como se ha dicho se crean las matrices de rigidez, dado que cada nodo tiene dos grados de libertad, que son desplazamiento horizontal y vertical, la matriz global de rigidez va ser de $2n \times 2n$, siendo n el número de nodos. Para cada elemento compuesto por tres nodos se va a definir una matriz de rigidez local, que justamente es la matriz k que se ha mostrado arriba, con los índices correspondientes a los nodos de cada elemento, se deben ensamblar las matrices locales a la matriz de rigidez global.

Una vez que se conocen los nodos en los que se aplica la fuerza y las respectivas fuerzas equivalentes actuantes sobre cada elemento, se puede resolver el sistema, invirtiendo la matriz K global para esos nodos, dando como resultado el desplazamiento de los mismos:

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

Luego conociendo estos desplazamientos y con las condiciones de contorno en los desplazamientos, se puede multiplicar la matriz K por los mismos para obtener las fuerzas restantes. Es decir que para estos sistemas tengan resolución, en un nodo cualquiera debo conocer la fuerza o el desplazamiento, cuando se conoce uno, el otro se puede determinar, si no se conoce ninguno de los dos, el problema queda indeterminado.

Finalmente, para conocer las tensiones en cada elemento, se debe aplicar:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\}$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos para este ejercicio:

En las figuras 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 se presentan los desplazamientos y tensiones distribuidos a lo largo del cuarto de la barra para distinto número de nodos y elementos.

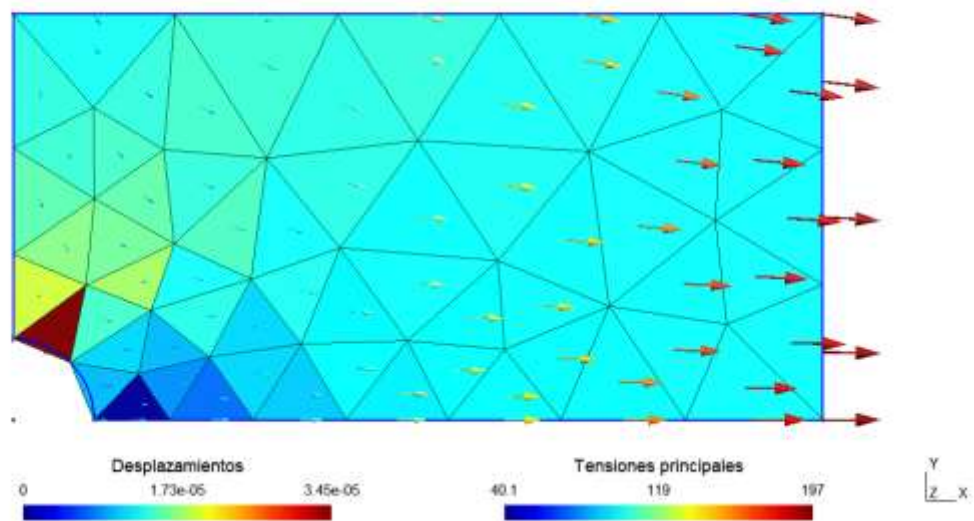


Figura 1.1: Distribución de tensiones y desplazamientos para la barra, Cantidad de elementos: 60, numero de nodos: 42.

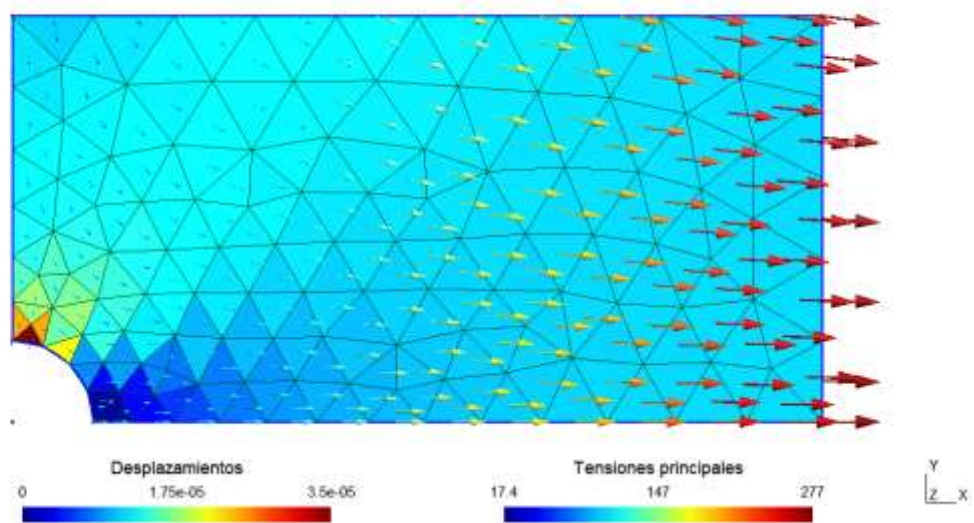


Figura 1.2: Distribución de tensiones y desplazamientos para la barra, Cantidad de elementos: 202, numero de nodos: 122

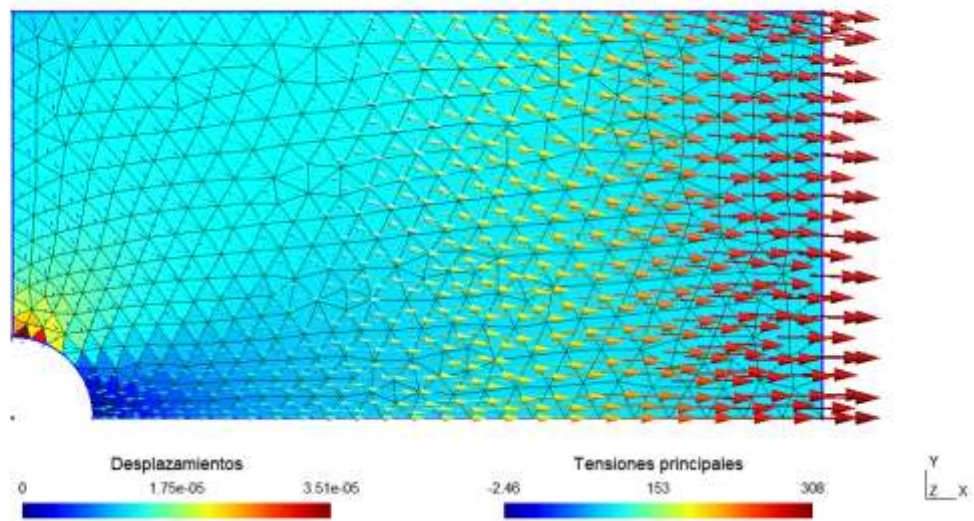


Figura 1.3: Distribución de tensiones y desplazamientos para la barra, Cantidad de elementos: 748, numero de nodos: 413

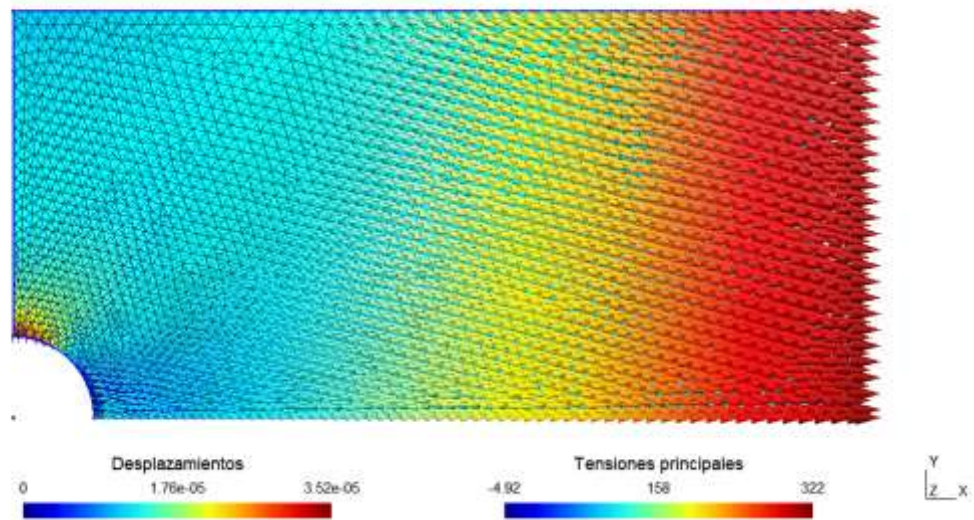


Figura 1.4: Distribución de tensiones y desplazamientos para la barra, Cantidad de elementos: 4382, numero de nodos: 2284.

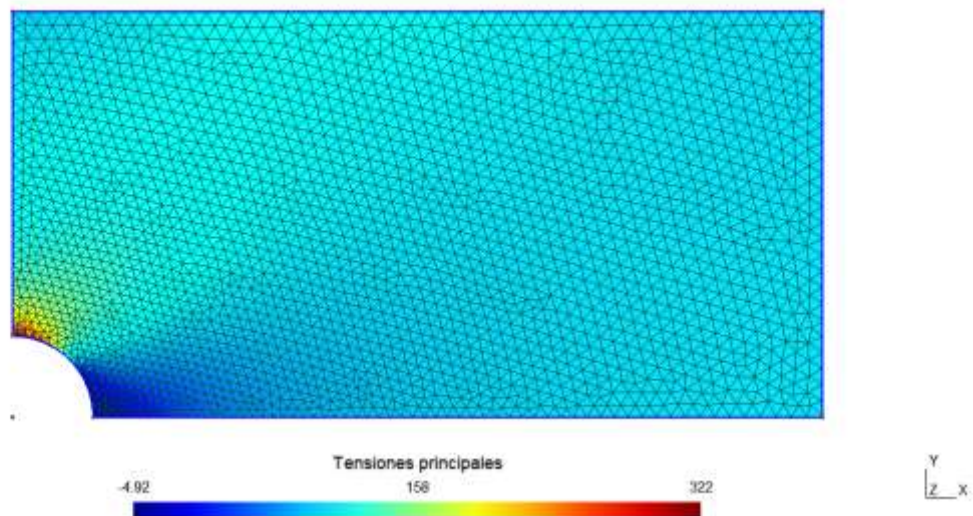


Figura 1.4 bis: Distribución de tensiones y desplazamientos para la barra, Cantidad de elementos: 4382, numero de nodos: 2284. Solo se han suprimido los desplazamientos que antes impedían visualizar las tensiones.

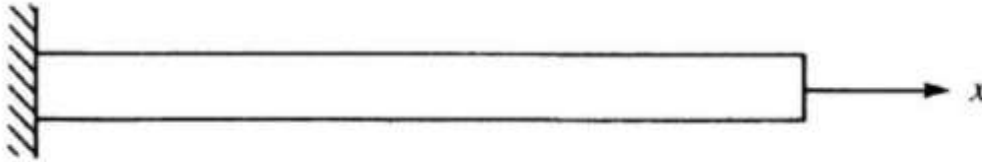
Lo que puede decirse al ver las figuras es que al aumentar la cantidad de nodos o de elementos, las tensiones alrededor del agujero que actúa como concentrador de tensiones, empiezan a ser mayores, a mayor cantidad nodos es mayor la tensión en particular en lo que sería la parte superior e inferior del agujero, no sabiendo hasta que cantidad de número de nodos las tensiones alrededor del mismo tienden a un valor fijo, como puede verse entre la figura 1.3 y 1.4 bis. Esto ocurre tanto para la zona de tracción como la de compresión alrededor del mismo. Queda entonces para el futuro definir cómo va a ser el criterio para definir que tanto vale la pena utilizar un mallado más fino.

Respecto a las tensiones más alejadas del agujero, se ve que la variación no es tan fuerte; esto justifica el hecho de hacer un mallado más fino en dicha zona.

A su vez si se observa la figura 1.1, se ve como un número deficiente de elementos alrededor del agujero no representa la geometría del mismo, viéndose como algunos elementos triangulares sobresalen del agujero.

Sección 2: Ejercicio 4.1 (Oscilaciones)

Calcule las frecuencias naturales de oscilación transversal de una barra de acero (densidad 7850 kg/m^3 y módulo de elasticidad $E = 210 \text{ GPa}$), de 1 m de longitud, 10 cm^2 de área, momento de inercia de 10 cm^4 . Realice el cálculo para un número variable de elementos y estudie la convergencia de sus resultados. Haga el cálculo para matrices de masa concentrada y consistente. Grafique los desplazamientos en función de la posición para los primeros modos normales.



El problema se resuelve por medio de la siguiente ecuación:

$$([K] - \omega^2 [M])\{u\} = 0$$

Donde K es la matriz global de la barra, ω las frecuencias naturales de vibración transversales, M es la matriz de masa y u son los modos normales de vibración.

Lo primero que se debe definir para el problema es la partición de la barra, esto es, definir en cuantos elementos se puede dividir la misma. Las condiciones de contorno de este problema, es que al nodo 0, que va a ser el que está empotrado a la pared, no tiene desplazamiento vertical ni angular. Entonces en principio el problema se debe resolver sobre todos los otros nodos.

Lo segundo es crear la matriz de conectividad, que es la matriz de unión entre los nodos, para este problema que solo tiene desplazamiento vertical y angular, se puede definir como 0-1, 1-2, 2-3, 3-4, etc.

Lo tercero, es crear las matrices de rigidez, dado que cada nodo como se mencionó tiene dos grados de libertad, que son desplazamiento transversal y una rotación, la matriz global va a ser de $2n \times 2n$, siendo n el número de nodos. Ahora bien para cada elemento compuesto por dos nodos se va a definir una matriz de rigidez local, que expresa que ese elemento puede tener tanto desplazamiento vertical como una rotación, dicha matriz local se muestra a continuación.

$$[K] = \left(\frac{EI}{L^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, con los índices correspondientes a los nodos del elemento, se deben ensamblar las matrices de rigidez locales a la matriz de rigidez global.

En la misma línea anterior, la barra va a tener asociada una matriz de masa global, conformado por las matrices de masa locales para cada elemento. La matriz de masas local para una barra se muestra en la siguiente figura, esta matriz se llama consistente, debido a que salen del desarrollo de la elección de las funciones de interpolación para resolver el problema de una viga sometido a flexión y torsión:

$$[m] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, el problema de esta matriz es que no es diagonal, debido a que lo que se tiene que resolver más adelante son sistemas de ecuaciones, que no sea diagonal implica un gasto computacional mayor, entonces, lo que se define es una matriz de masas llamada concentrada, esta si es una matriz diagonal, vendría a representar una masa equivalente, es decir asignando la masa al grado de libertad de desplazamiento y el momento de inercia en el grado de libertad de rotación, sin embargo es solo una aproximación, esta matriz puede verse a continuación:

$$[m] = \frac{\rho AL}{24} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}$$

Al igual que la matriz de rigidez, a la matriz de masas global se le va asignar las matrices locales correspondientes a cada elemento.

Como cuarto paso, entonces se debe resolver la ecuación inicial:

$$([K] - \omega^2 [M])\{u\} = 0$$

Este problema es de autovalores y autovectores, donde los ω van a ser los autovalores asociados a las frecuencias normales de oscilación y los autovectores van a estar asociados a esas frecuencias normales y constituyen los modos normales de oscilación, es decir los desplazamientos a menos de una constante.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para este ejercicio, variando la cantidad de elementos que componen la barra:

En la figura 2.1 se presentan las 3 primeras frecuencias normales de oscilación transversales para la barra. Lo que puede observarse es que a medida que aumenta la cantidad de elementos con que se refina la barra el resultado tiende, a converger a valores fijos de frecuencia, tanto para la masa consistente y la masa concentrada.

Ahora bien, cuando se usa la masa consistente se puede ver que se hacen necesarios menos elementos para converger al valor, y para la masa concentrada se hacen necesarios aún más elementos, incrementándose para ambos casos la cantidad de elementos para converger a medida que aumenta el valor de las frecuencias normales de oscilación. Vale destacar que si bien la masa consistente converge más rápido al valor de frecuencia, el gasto computacional es mayor a priori por lo comentado anteriormente, es decir, que no dice nada sobre el tiempo que puede tardar para alcanzar dicho valor, en el presente no se comparó el tiempo de cada uno de los métodos.

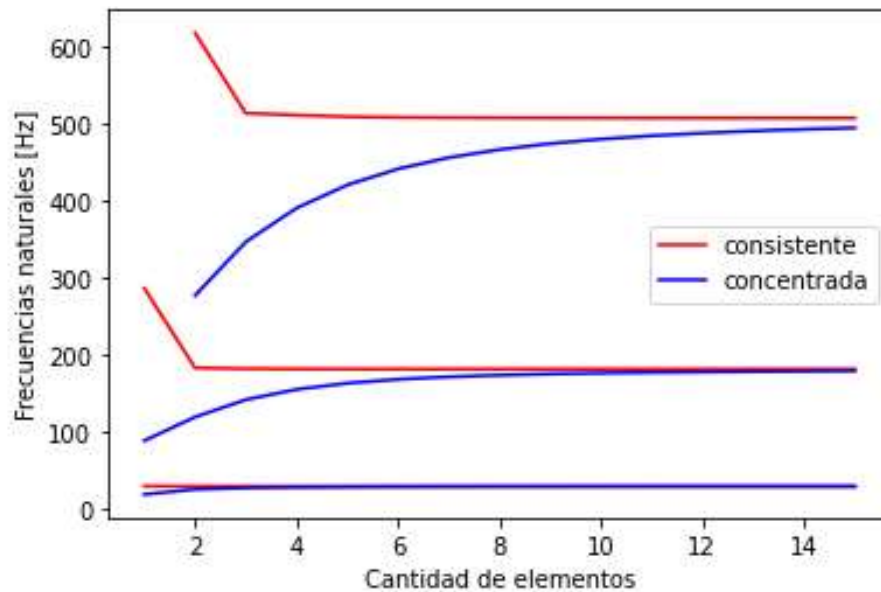


Figura 2.1: Tres primeras frecuencias normales de oscilación en función de la cantidad de elementos

Siguiendo con el problema, lo que se va a graficar ahora son los modos normales de vibración para distintos elementos. En la Figura 2.2 se graficaron los tres primeros modos normales de vibración variando la cantidad de elementos, esto se merece varios comentarios:

- 1) Se ve como al aumentar la cantidad de elementos las diferencias entre lo que es masa consistente y concentrada es cada vez menor, es decir que tienden a tener los mismos autovectores, siendo crítico para la masa concentrada los autovectores correspondientes a las frecuencias normales más altas, esto está en la misma línea con lo que se discutió anteriormente, en particular observar el 3 modo de las curvas en café y violeta.
- 2) Al aumentar la cantidad de elementos, como es obvio, la curva se suaviza, siendo los cambios menos abruptos para mayor cantidad de elementos.

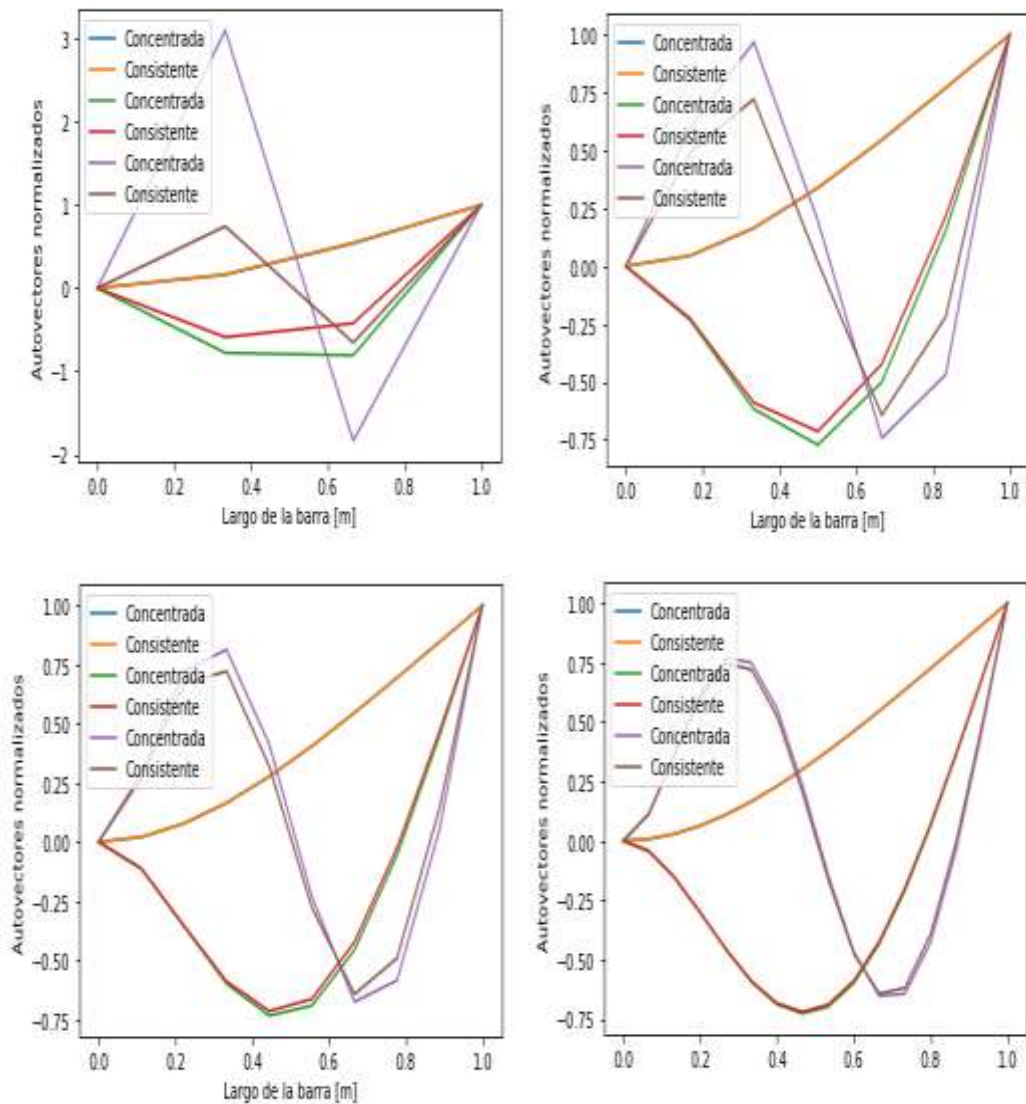


Figura 2.2: Arriba Izquierda corresponde 3 elementos, 3 modos de vibración, arriba derecha 6 elementos, 3 modos de vibración, Abajo izquierda 9 elementos, 3 modos de vibración y abajo derecha 15 elementos, 3 modos de vibración

Respecto al punto 2 anterior, muestra que las curvas para una baja cantidad de elementos no están suavizadas, para esto existe una solución y es usar las funciones de interpolación para calcular el desplazamiento vertical para una viga, esto puede verse en la siguiente expresión, donde $d1$ y $d2$ corresponden al desplazamiento de cada elemento en sus extremos al igual que los ángulos para cada elemento:

$$v = \left[\frac{2}{L^3} (d_1 - d_2) + \frac{1}{L^2} (\phi_1 + \phi_2) \right] x^3 + \left[-\frac{3}{L^2} (d_1 - d_2) - \frac{1}{L} (2\phi_1 + \phi_2) \right] x^2 + \phi_1 x + d_1$$

En la figura 2.3 se grafican para la matriz consistente y concentrada, 3 modos de vibración y variando la cantidad de elementos para las mismas condiciones anteriores, pero usando las funciones de interpolación. Como puede verse, las conclusiones son las mismas que la figura 2.3, a mayor cantidad de elemento, los desplazamientos de la masa concentrada tienden a la masa consistente, el efecto es más notorio a los autovectores que corresponden a los modos normales más altos.

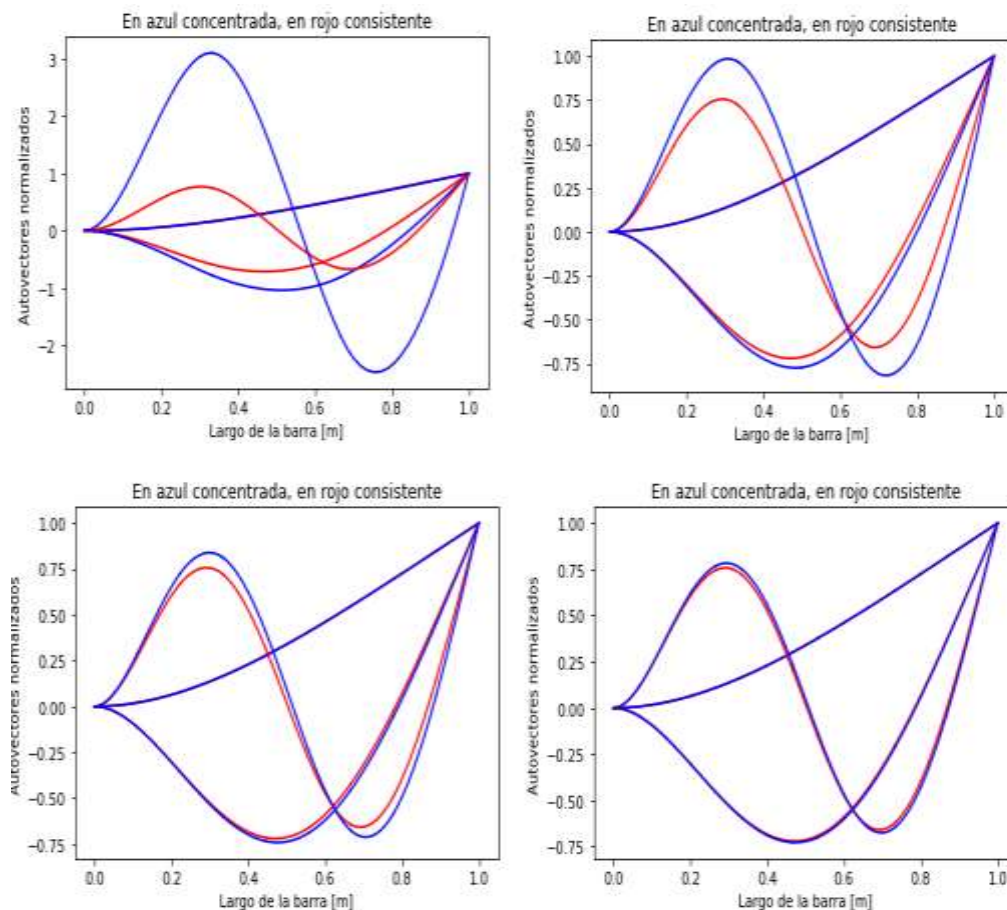


Figura 2.3: Arriba Izquierda corresponde 3 elementos, 3 modos de vibración, arriba derecha 6 elementos, 3 modos de vibración, Abajo izquierda 9 elementos, 3 modos de vibración y abajo derecha 15 elementos, 3 modos de vibración