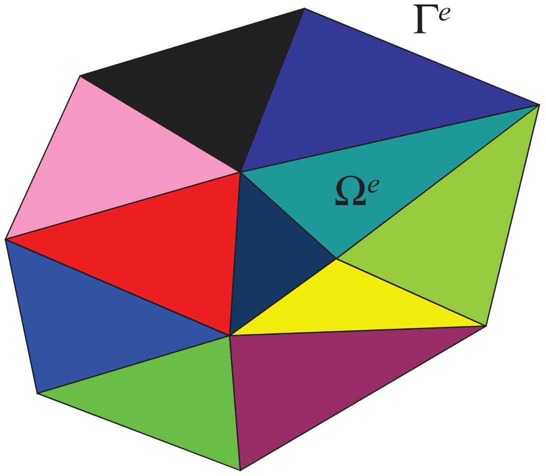
Modelización y Simulación Computacional de Materiales

Método de Elementos Finitos en 2D

Elementos finitos, idea básica

La idea fundamental es dividir el dominio total en subdominios o elementos, Ω_e, que no se solapen unos con otros



resolviendo el problema en cada elemento.

Elementos finitos, idea básica

Cada elemento estará caraterizado por una serie de nodos y una función de interpolación o desplazamiento

Se interconecta con sus vecinos a través de sus interfaces, dando lugar a un conjunto de ecuaciones acopladas.

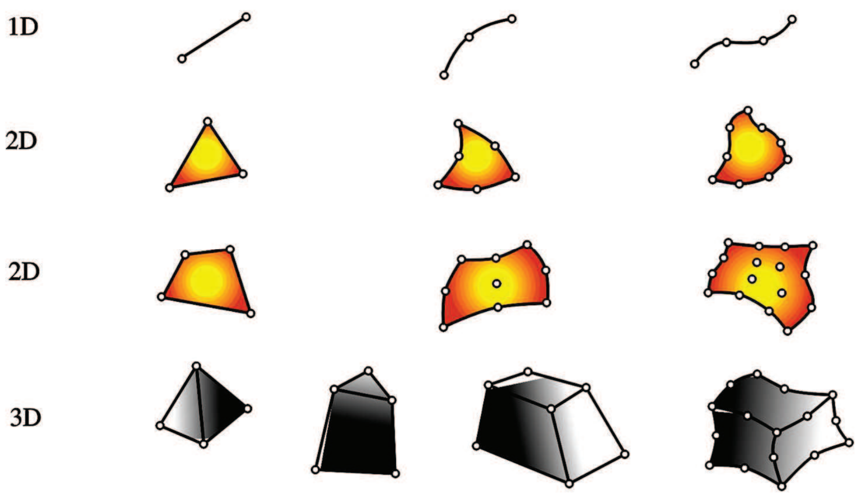
El valor de la variable de interés, *u(x)*, en un punto cualquiera de cada uno de los elementos estará dado por los valores de la variable en los nodos, u_j, y las funciones de interpolación, *N(x)*.

Para simplificar usaremos funciones de interpolación tales que: $N_i^{(e)}(u_j) = \delta_{ij}$

$$\Longrightarrow u^{(e)}(x) = N_1^{(e)}(x) \cdot u_1^{(e)} + \cdots + N_k^{(e)}(x) \cdot u_k^{(e)} = \sum_i N_i^{(e)}(x) \cdot u_i^{(e)}$$

$$u^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \cdots N_k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ \vdots \\ u_k^{(e)} \end{bmatrix}$$

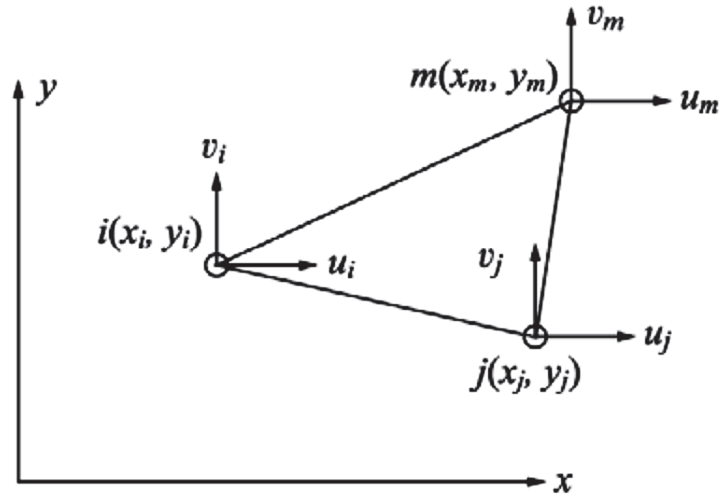
Elementos finitos, elementos más comunes



Problemas bidimensionales, elemento triangular

Veamos ahora como se pueden encontrar las funciones de interpolación para el caso bidimensional más sencillo:

el elemento triangular.



$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

Problemas bidimensionales, elemento triangular

Pensemos en una función lineal en cada coordenada

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

En general puedo poner

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

Problemas bidimensionales, elemento triangular

Las constantes deberán ser definidas en función de las coordenadas de los puntos

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \qquad v_i = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \qquad v_j = a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j$$

$$u_m = a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m \qquad v_m = a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{a\} = [X]^{-1}\{u\}$$

$$[X]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & y_m \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad 2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

Problemas bidimensionales, elemento triangular

Haciendo cuentas

$$\alpha_i = x_j y_m - x_m y_j \qquad \beta_i = y_j - y_m \qquad \gamma_i = x_m - x_j$$

$$\alpha_j = x_i y_m - x_m y_i \qquad \beta_j = y_m - y_i \qquad \gamma_j = x_i - x_m$$

$$\alpha_m = x_i y_j - x_j y_i \qquad \beta_m = y_i - y_j \qquad \gamma_m = x_j - x_i$$

y finalmente

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}$$

en forma similar

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix}$$

Problemas bidimensionales, elemento triangular

Combinando todo

$$u(x,y)=\frac{1}{2A}\left\{\left(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y\right)u_i+\left(\alpha_j+\beta_j x+\gamma_j y\right)u_j+\left(\alpha_m+\beta_m x+\gamma_m y\right)u_m\right\}$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2A}\left\{\left(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y\right)v_i+\left(\alpha_j+\beta_j x+\gamma_j y\right)v_j+\left(\alpha_m+\beta_m x+\gamma_m y\right)v_m\right\}$$

con lo que podemos definir

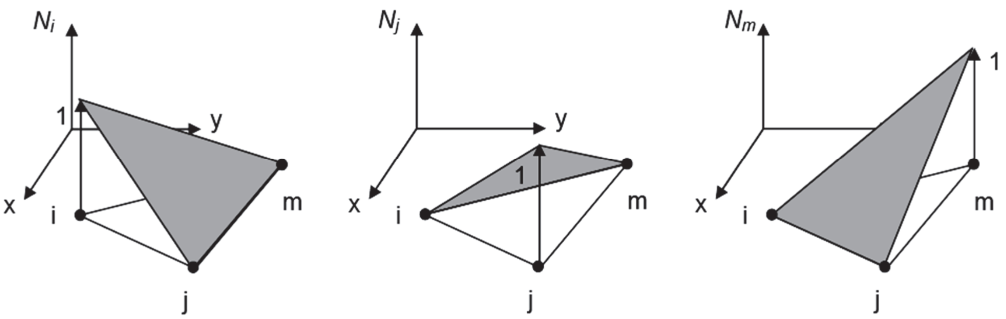
$$N_i=\frac{1}{2A}\left(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y\right) \qquad N_j=\frac{1}{2A}\left(\alpha_j+\beta_j x+\gamma_j y\right) \qquad N_m=\frac{1}{2A}\left(\alpha_m+\beta_m x+\gamma_m y\right)$$

$$\{\Psi_i\}=\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} N_i u_i+N_j u_j+N_m u_m \\ N_i v_i+N_j v_j+N_m v_m \end{Bmatrix}$$

Problemas bidimensionales, elemento triangular

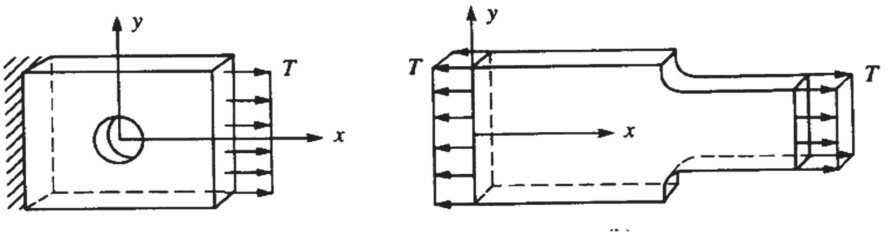
$$N_i=\frac{1}{2A}\left(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y\right) \qquad N_j=\frac{1}{2A}\left(\alpha_j+\beta_j x+\gamma_j y\right) \qquad N_m=\frac{1}{2A}\left(\alpha_m+\beta_m x+\gamma_m y\right)$$

$$\{\Psi_i\}=\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} N_i u_i+N_j u_j+N_m u_m \\ N_i v_i+N_j v_j+N_m v_m \end{Bmatrix}$$

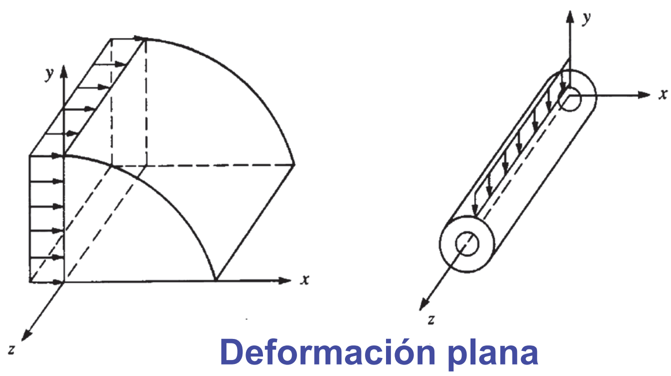


Ejemplo de problema bidimensional: elasticidad plana

Supongamos que quiero resolver problemas como estos:



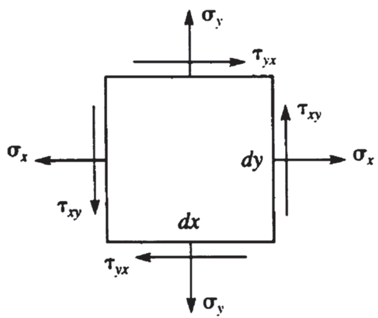
Esfuerzo plano



Deformación plana

Ejemplo de problema bidimensional: elasticidad plana

El estado de tensiones de un elemento plano es:



$$\{\sigma\}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Magnitudes importantes son:

Esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} = \sigma_{\max}$$

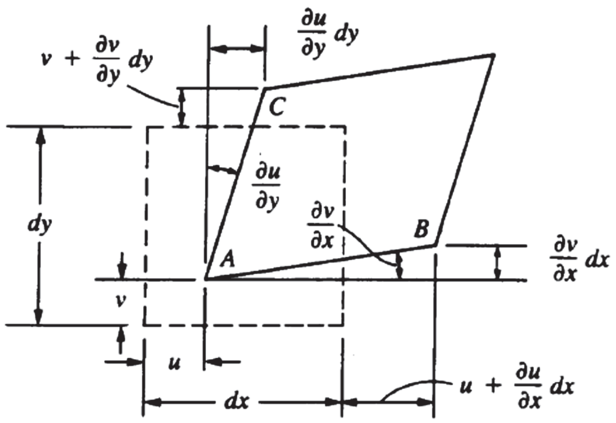
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} = \sigma_{\min}$$

Angulo principal:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Ejemplo de problema bidimensional: elasticidad plana

Su estado de deformaciones es:



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\{\varepsilon\}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Ejemplo de problema bidimensional: elasticidad plana

La relación tensiones/deformaciones para un problema de tensiones planas es (Ley de Hooke):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix}$$

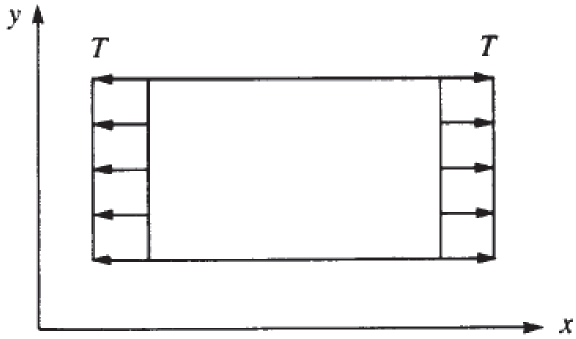
(E: módulo de elasticidad, ν: coef. Poisson)

Mientras que para el problema de deformaciones planas resulta:

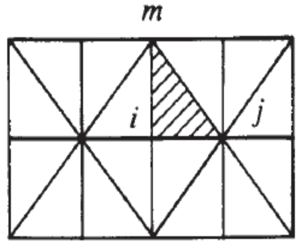
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Supongamos un problema simple:



Lo dividimos en elementos:



Problema de tensiones planas: ejemplo simple

El vector deformaciones era:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

En función de las funciones de interpolación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m\right)$$

$$u_{,x} = N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j + N_{m,x} u_m$$

$$N_{i,x} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y\right) = \frac{\beta_i}{2A} \qquad N_{j,x} = \frac{\beta_j}{2A} \qquad N_{m,x} = \frac{\beta_m}{2A}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Resumiendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_m v_m\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(\beta_i u_i + \gamma_i v_i + \beta_j u_j + \gamma_j v_j + \beta_m u_m + \gamma_m v_m\right)$$

$$\{\varepsilon\} == \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{cc:cc:cc} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

$$\{\varepsilon\} == \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{cc:cc:cc} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

Matricialmente: $\{\varepsilon\} = [B]\{d\}$

Por la relación esfuerzo/deformación:
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Finalmente: $\{\sigma\} = [D][B]\{d\}$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Cuando vimos el problema general de elementos elásticos y cargas distribuidas, teníamos:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \qquad U = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} dV$$

Llegamos a:

$$\int_V [B]^T [D][B] dV \{d\} = \{f\}$$

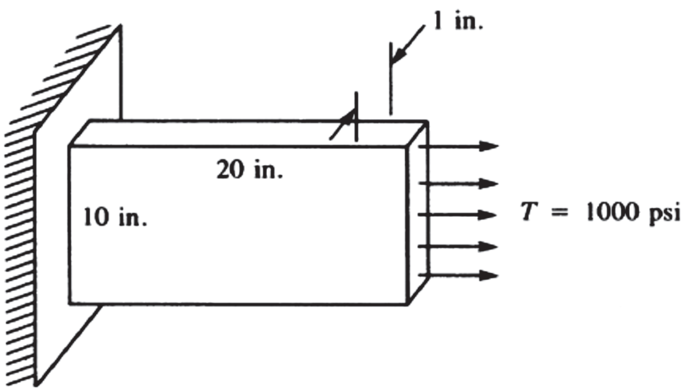
Donde {f} eran las fuerzas totales, en los nodos y las equivalentes, y la matriz rigidez:

$$[k] = \int_V [B]^T [D][B] dV$$

$$[k] = tA\,[B]^T [D][B]$$

(t : espesor de la chapa)

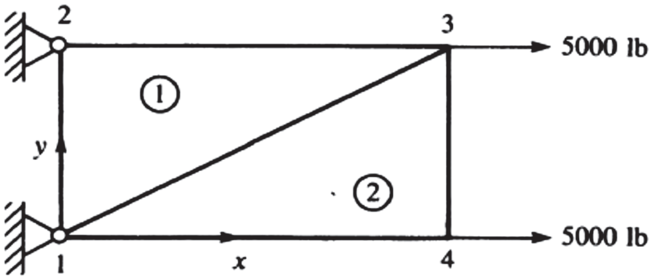
Problema de tensiones planas: ejemplo simple



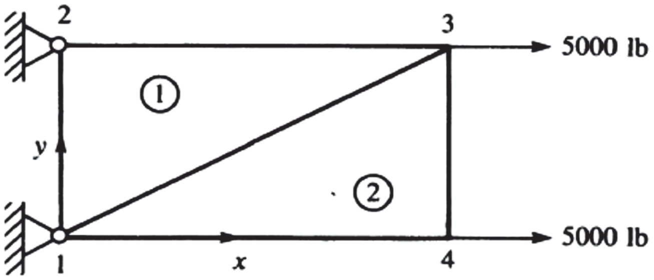
$E = 30 \times 10^6$ psi, $\nu = 0.30$, $t = 1$ in.

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Discreticemos en dos elementos triangulares:



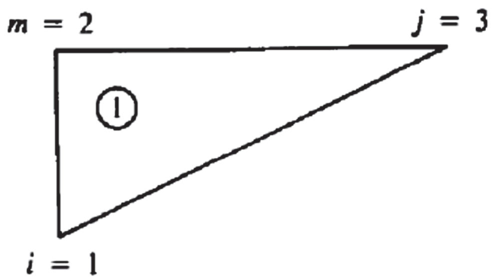
Problema de tensiones planas: ejemplo simple



$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5{,}000\ lb \\ 0 \\ 5{,}000\ lb \\ 0 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Elemento 1:



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{(20)(10)}{2} = 100 \ in.^2$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

$$\beta_i = y_j - y_m = 10 - 10 = 0 \qquad \gamma_i = x_m - x_j = 0 - 20 = -20$$
$$\beta_j = y_m - y_i = 10 - 0 = 10 \qquad \gamma_j = x_i - x_m = 0 - 0 = 0$$
$$\beta_m = y_i - y_j = 0 - 10 = -10 \qquad \gamma_m = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} {}^{1}\!/_{in}$$

$$[D] = \frac{30 \times 10^6}{0.91}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} psi$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

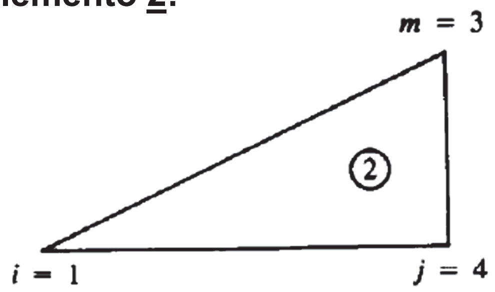
Elemento 1:

$$[k] = tA[B]^T[D][B]$$

$$[k] = \frac{75{,}000}{0.91}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix} \end{array}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Elemento 2:



$$A = \frac{(20)(10)}{2} = 100\ in.^2$$

$$\beta_i = y_j - y_m = 0 - 10 = -10 \qquad \gamma_i = x_m - x_j = 20 - 20 = 0$$

$$\beta_j = y_m - y_i = 10 - 0 = 10 \qquad \gamma_j = x_i - x_m = 0 - 20 = -20$$

$$\beta_m = y_i - y_j = 0 - 0 = 0 \qquad \gamma_m = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Elemento 2:

$$[B] = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} {}^{1}\!/_{in}$$

$$[k] = \frac{75,000}{0.91}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 & 60 & 0 & -60 \\ 0 & 35 & 70 & -35 & -70 & 0 \\ -100 & 70 & 240 & -130 & -140 & 60 \\ 60 & -35 & -130 & 435 & 70 & -400 \\ 0 & -70 & -140 & 70 & 140 & 0 \\ -60 & 0 & 60 & -400 & 0 & 400 \end{bmatrix} \end{array}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

$$[k] = \frac{375,000}{0.91}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 28 & 0 & -28 & 14 & 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 12 & -80 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -20 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 14 & -7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[k] = \frac{375,000}{0.91}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -14 & 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 & 28 & 0 & -28 & 14 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \end{array}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Ensamblando:

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5{,}000\ lb \\ 0 \\ 500\ lb \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{375{,}000}{0.91} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\ 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\ -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix}$$

CC: $d_{1x} = d_{1y} = d_{2x} = d_{2y} = 0$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Resolviendo:

$$\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \left(10^{-6}\right) \begin{Bmatrix} 609.6 \\ 4.2 \\ 663.7 \\ 104.1 \end{Bmatrix} in$$

Notar la asimetría!!

Si hubiésemos considerado el problema unidimensional obtendríamos:

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(10{,}000)20}{10(30 \times 10^{6})} = 670 \times 10^{-6}\ in$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

Para lo esfuerzos:

Elemento 1

$$\{\sigma\} = \frac{E}{2A(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_2 & \beta_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}005\ psi \\ 301\ psi \\ 2.4\ psi \end{bmatrix}$$

Problema de tensiones planas: ejemplo simple

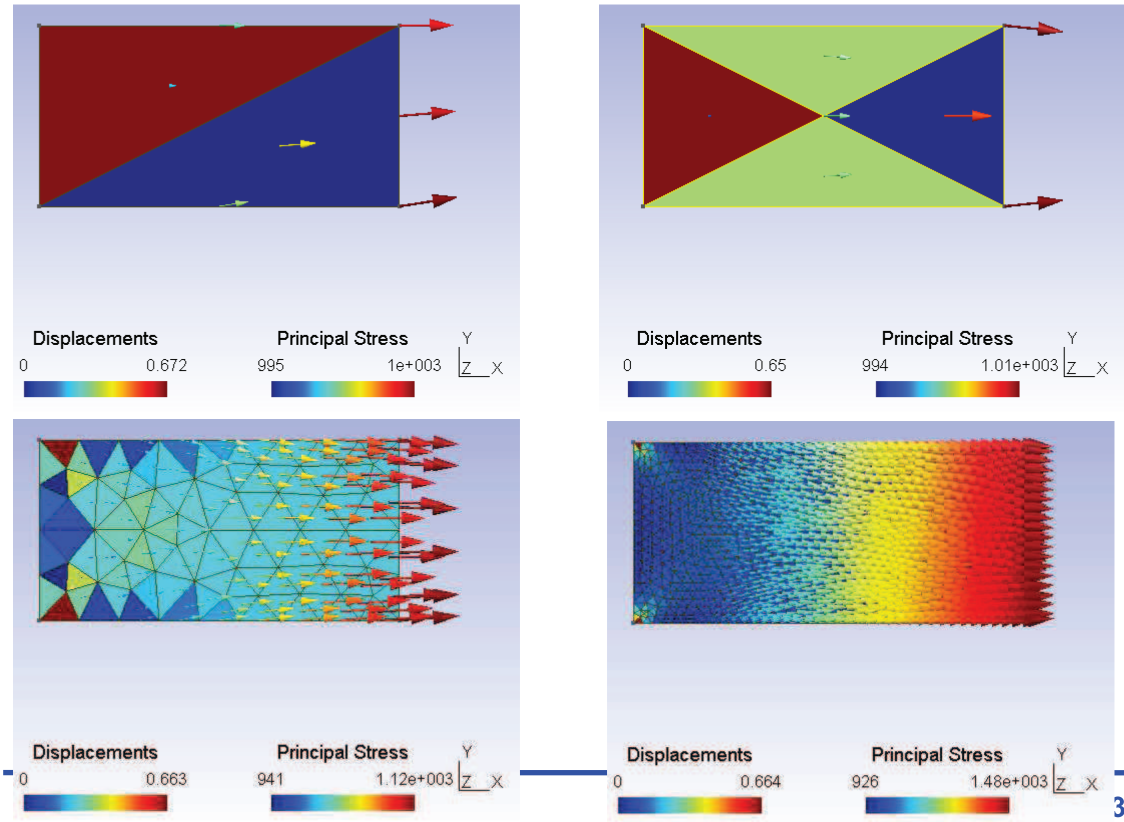
Para lo esfuerzos:

Elemento 2

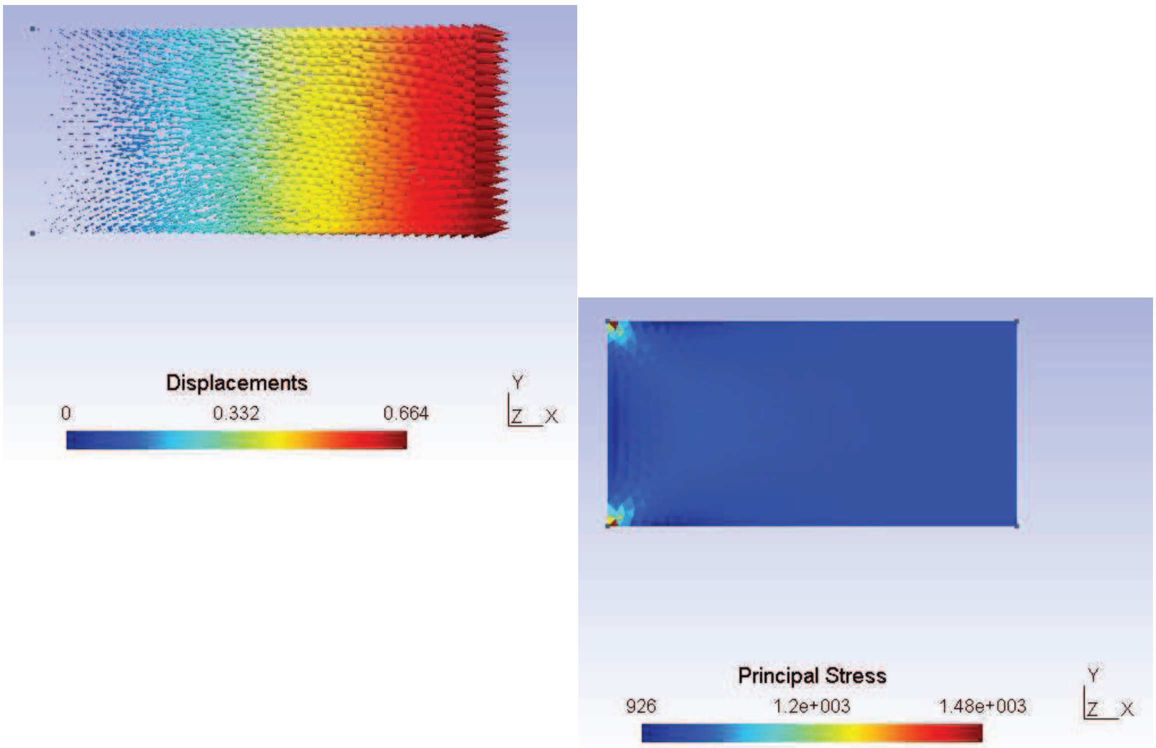
$$\{\sigma\} = \frac{E}{2A(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_4 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_4 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_4 & \beta_4 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 995\ psi \\ -1.2\ psi \\ -2.4\ psi \end{bmatrix}$$

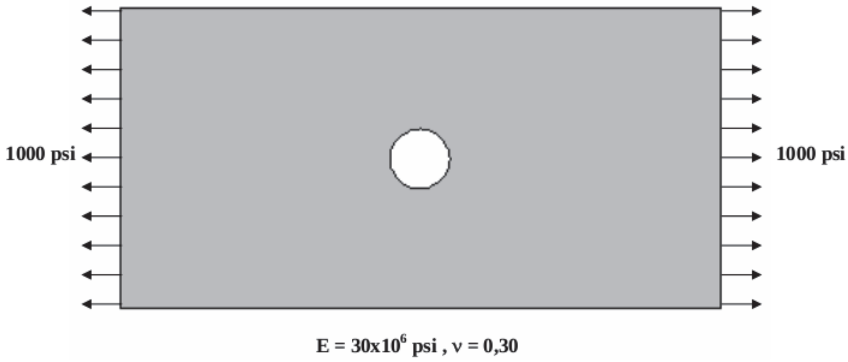
Problema de tensiones planas: ejemplo simple



Problema de tensiones planas: ejemplo simple



Problema de tensiones planas: otro ejemplo



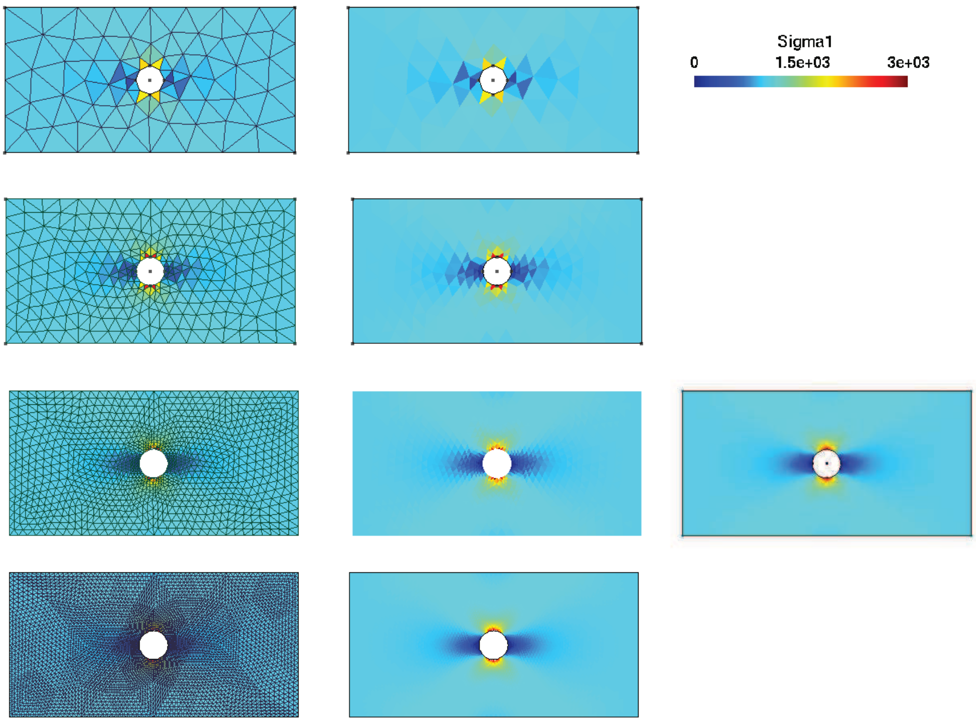
Problema de tensiones planas: otro ejemplo

80 nodos
128 triang.

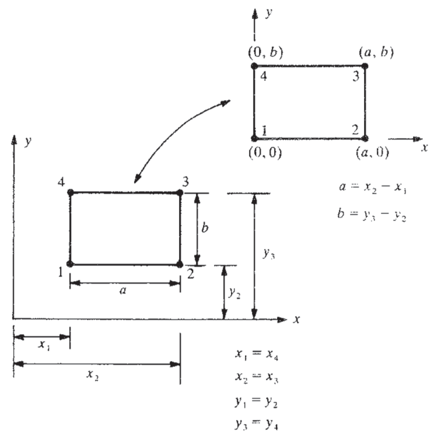
288 nodos
512 triang.

1088 nodos
2048 triang.

4224 nodos
8192 triang.

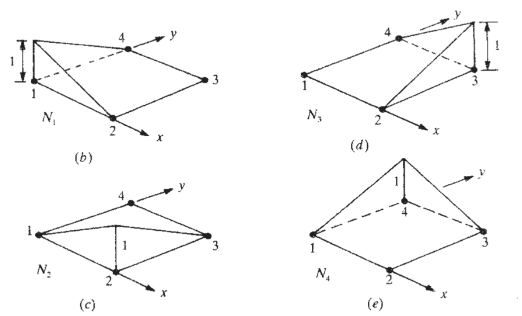


Problemas bidimensionales, elemento rectangular



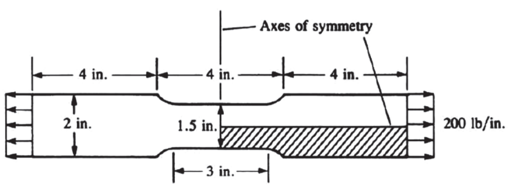
$$\phi = A + B\,x + C\,y + Dxy$$
$$\phi = N_1\,\phi_1 + N_2\,\phi_2 + N_3\,\phi_3 + N_4\,\phi_4$$
$$N_i = N_i(x,y) = f(x)\,g(y)$$

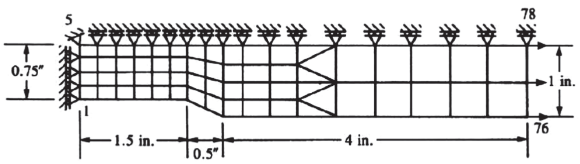
$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{ab} \qquad N_2 = \frac{x(b-y)}{ab}$$
$$N_3 = \frac{xy}{ab} \qquad N_4 = \frac{y(a-x)}{ab}$$



Condiciones generales de modelado

- **Forma y relación de aspecto de los elementos**
- **Consideraciones de simetría**





- **División natural en discontinuidades**
- **Refinamiento del mallado**