# Vorkurs Theoretische Informatik

## Grundlagen der Logik und der Beweise

---

Arbeitskreis Theoretische Informatik

Dienstag, 02.10.2018

Fachgruppe Informatik

# Übersicht

# Aussagenlogik

# Was ist Aussagenlogik? (Auffrischung)

## Aussagen

- Paris ist die Hauptstadt von Frankreich
- Mäuse jagen Elefanten
- $5 \in \mathbb{N}$
- $5 = 8$
- $u \in \{u, v, w\}$

Eine Aussage A ist entweder **wahr** oder **falsch**.

# Was ist Aussagenlogik? (Auffrischung)

## Das sind keine Aussagen

- Macht theoretische Informatik Spaß?
- Geh dein Zimmer aufräumen!
- Wie viele Tiere wohnen in der Uni?
- $(x + y)^2 + 1$
- {a,b,c}
- ...

Diesen Sätzen können wir keinen eindeutigen Wahrheitswert **wahr** oder **falsch** zuordnen.

# Was ist Aussagenlogik? (Auffrischung)

## Wozu brauchen wir das?

- Wir untersuchen, wie wir Aussagen verknüpfen können.
- Damit ziehen wir formale Schlüsse und führen Beweise.

# Logische Operationen (Auffrischung)

Wir können Aussagen verändern oder durch Operationen zu neuen Aussagen verbinden.

- A: Fred möchte Schokolade.
- B: Fred möchte Gummibärchen.

## Grundoperationen

- **Und**: $A \land B \rightsquigarrow$ Fred möchte Schokolade und Gummibärchen.

# Logische Operationen (Auffrischung)

Wir können Aussagen verändern oder durch Operationen zu neuen Aussagen verbinden.

- A: Fred möchte Schokolade.
- B: Fred möchte Gummibärchen.

## Grundoperationen

- **Und**: $A \land B \rightsquigarrow$ Fred möchte Schokolade und Gummibärchen.
- **Oder**: $A \lor B \rightsquigarrow$ Fred möchte Schokolade oder Gummibärchen.
  *Anmerkung*: Inklusives „oder”, kein „entweder oder”
  Das heißt, es können auch beide Aussagen wahr sein.

# Logische Operationen (Auffrischung)

Wir können Aussagen verändern oder durch Operationen zu neuen Aussagen verbinden.

- A: Fred möchte Schokolade.
- B: Fred möchte Gummibärchen.

## Grundoperationen

- **Und**: $A \land B \rightsquigarrow$ Fred möchte Schokolade und Gummibärchen.
- **Oder**: $A \lor B \rightsquigarrow$ Fred möchte Schokolade oder Gummibärchen.
- **Nicht**: $\neg A \rightsquigarrow$ Fred möchte keine Schokolade.

# Logische Operationen: Implikation

$A \implies B$

- "Wenn A wahr ist, dann muss auch B wahr sein."
- kurz: "**Wenn** A, **dann** B."
- Wenn A falsch ist können wir keine Aussage über B treffen.
- $A \implies B$ ist dieselbe Aussage wie $\neg A \lor B$

# Logische Operationen: Äquivalenz

$A \iff B$

- "A ist wahr, **genau dann wenn** B wahr ist."
- kurz: "A gdw. B"
- A und B müssen den selben Wahrheitswert haben.
- $A \iff B$ ist dieselbe Aussage wie $(A \implies B) \land (B \implies A)$

## Aufgaben

Berechne den Wahrheitswert folgender Aussagen.

### Normal

- $A_1$: $5 \in \mathbb{N} \land a \in \{a, b, c\}$
- $A_2$: $0 \in \mathbb{N} \lor a \in \{a, b, c, d\}$
- $A_3$: $A_1 \iff A_2$

### Etwas Schwerer

- $A_4$: $(\emptyset = \emptyset^*) \implies (a \in \emptyset)$
- $A_5$: $(a \notin \emptyset) \implies (\emptyset = \emptyset^*)$
- $A_6$: $A_4 \iff A_5$
- $A_7$: Wenn mein Auto fliegen kann, hast du auch ein fliegendes Auto.

# Lösungen

- $A_1$: wahr

# Lösungen

- $A_1$: wahr
- $A_2$: wahr

# Lösungen

- $A_1$: wahr
- $A_2$: wahr
- $A_3$: wahr

# Lösungen

- $A_1$: wahr
- $A_2$: wahr
- $A_3$: wahr
- $A_4$: wahr

# Lösungen

- $A_1$: wahr
- $A_2$: wahr
- $A_3$: wahr
- $A_4$: wahr
- $A_5$: falsch

# Lösungen

- $A_1$: wahr
- $A_2$: wahr
- $A_3$: wahr
- $A_4$: wahr
- $A_5$: falsch
- $A_6$: falsch

# Lösungen

- $A_1$: wahr
- $A_2$: wahr
- $A_3$: wahr
- $A_4$: wahr
- $A_5$: falsch
- $A_6$: falsch
- $A_7$: wahr

Murmelpause

# Anwendung der Implikation

Wir haben zwei Aussagen A und B. Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass A $\implies$ B wahr ist, wissen wir auch, dass B wahr ist.

**Beispiel**

1. Wir zeigen, es gibt eine ganze Zahl x,
   sodass $3 = x - 2 \implies x = 5$ wahr ist.

# Anwendung der Implikation

Wir haben zwei Aussagen A und B. Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass A $\Longrightarrow$ B wahr ist, wissen wir auch, dass B wahr ist.

**Beispiel**

1. Wir zeigen, es gibt eine ganze Zahl x,
   sodass $3 = x - 2 \implies x = 5$ wahr ist.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...

# Anwendung der Implikation

Wir haben zwei Aussagen A und B. Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass A $\Longrightarrow$ B wahr ist, wissen wir auch, dass B wahr ist.

## Beispiel

1. Wir zeigen, es gibt eine ganze Zahl x,
   sodass $3 = x - 2 \implies x = 5$ wahr ist.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.

# Anwendung der Implikation

Wir haben zwei Aussagen A und B. Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass $A \implies B$ wahr ist, wissen wir auch, dass B wahr ist.

## Beispiel

1. Wir zeigen, es gibt eine ganze Zahl x,
   sodass $3 = x - 2 \implies x = 5$ wahr ist.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.
4. $(3 = x - 2) \implies (3 + 2 = x) \implies (5 = x) \implies (x = 5)$

# Anwendung der Implikation

Wir haben zwei Aussagen A und B. Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass $A \implies B$ wahr ist, wissen wir auch, dass B wahr ist.

**Beispiel**

1. Wir zeigen, es gibt eine ganze Zahl x,
   sodass $3 = x - 2 \implies x = 5$ wahr ist.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.
4. $(3 = x - 2) \implies (3 + 2 = x) \implies (5 = x) \implies (x = 5)$
5. Also gilt die rechte Aussage $\square$

# Beweisen

## Was ist ein Beweis?

- lückenlose Folge von logischen Schlüssen,
  welche zur zu beweisenden Behauptung führen
- nicht nur einleuchtend, sondern zweifelsfrei korrekt

# Beispielbeweis

Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.

1. zu zeigen: $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. Umschreiben:
   $$\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$$
   $$\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$$

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. *Implikation*
   linke Seite wahr $\implies$ rechte Seite muss wahr sein.
   linke Seite falsch $\implies$ beliebiges kann folgen
   $\implies$ uns interessiert also nur der Fall *links ist wahr*

# Beispielbeweis

Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Wir machen uns also *"die linke Seite ist wahr"* zur Voraussetzung

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Wir machen uns also *"die linke Seite ist wahr"* zur Voraussetzung:
   Angenommen, $A \subseteq B \land B \subseteq C$ gilt.

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \land B \subseteq C$.
4. Jetzt geht der Beweis richtig los.
   Wähle beliebiges x um Allgemeinheit zu wahren...
   Sei $x$ beliebig

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \land B \subseteq C$.
4. Sei $x$ beliebig, mit $x \in A$.

# Beispielbeweis

Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \land B \subseteq C$.
4. Sei $x$ beliebig, mit $x \in A$.
5. Wir können jetzt unsere Voraussetzungen ausnutzen, um $x \in C$ zu folgern.

# Beispielbeweis

Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \land B \subseteq C$.
4. Sei $x$ beliebig, mit $x \in A$.
5. $\implies x \in B$

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \land B \subseteq C$.
4. Sei $x$ beliebig, mit $x \in A$.
5. $\implies x \in B \implies x \in C$

# Beispielbeweis

**Zeigen sie, Teilmengen sind transitiv.**

1. z.z. $A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \land (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
   $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \land B \subseteq C$.
4. Sei $x$ beliebig, mit $x \in A$.
5. $\implies x \in B \implies x \in C$ $\square$

Verdauungspause

# Direkter Beweis

## Zeige A $\implies$ B direkt

Setze A voraus und folgere dann schrittweise B.
Durch jede korrekte Folgerung, vergrößert sich die Menge der als wahr bekannten Aussagen (sog. Annahmen).

### Beispiel

Z.z.: $\forall a \in \mathbb{Z}$: a ist gerade $\implies$ $a^2$ gerade.

1. Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. Angenommen, a ist gerade.
3. $\implies \exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n$
4. $\implies a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
5. $\implies a^2$ ist gerade $\square$

*Anmerkung*: Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k$.

# Direkter Beweis

## Zeige A $\implies$ B direkt

Setze A voraus und folgere dann schrittweise B.
Durch jede korrekte Folgerung, vergrößert sich die Menge der als wahr bekannten Aussagen (sog. Annahmen).

### Beispiel

Z.z.: $\forall a \in \mathbb{Z}$: a ist gerade $\implies$ $a^2$ gerade.

1. Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. Angenommen, a ist gerade.
3. $\implies \exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n$
4. $\implies a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
5. $\implies a^2$ ist gerade $\square$

*Anmerkung*: Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k$.

# Direkter Beweis

## Zeige A $\Longrightarrow$ B direkt

Setze A voraus und folgere dann schrittweise B.
Durch jede korrekte Folgerung, vergrößert sich die Menge der als wahr bekannten Aussagen (sog. Annahmen).

### Beispiel

Z.z.: $\forall a \in \mathbb{Z}$: a ist gerade $\Longrightarrow$ $a^2$ gerade.

1. Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. Angenommen, a ist gerade.
3. $\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n$
4. $\Longrightarrow a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
5. $\Longrightarrow a^2$ ist gerade $\square$

*Anmerkung*: Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k$.

# Direkter Beweis

## Zeige A $\implies$ B direkt

Setze A voraus und folgere dann schrittweise B.
Durch jede korrekte Folgerung, vergrößert sich die Menge der als wahr bekannten Aussagen (sog. Annahmen).

### Beispiel

Z.z.: $\forall a \in \mathbb{Z}$: a ist gerade $\implies$ $a^2$ gerade.

1. Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. Angenommen, a ist gerade.
3. $\implies \exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n$
4. $\implies a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
5. $\implies a^2$ ist gerade $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k$.

# Direkter Beweis

## Zeige A $\implies$ B direkt

Setze A voraus und folgere dann schrittweise B.
Durch jede korrekte Folgerung, vergrößert sich die Menge der als wahr bekannten Aussagen (sog. Annahmen).

### Beispiel

Z.z.: $\forall a \in \mathbb{Z}$: a ist gerade $\implies$ $a^2$ gerade.

1. Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. Angenommen, a ist gerade.
3. $\implies \exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n$
4. $\implies a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
5. $\implies a^2$ ist gerade $\square$

*Anmerkung*: Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k$.

# Direkter Beweis

## Zeige A $\implies$ B direkt

Setze A voraus und folgere dann schrittweise B.
Durch jede korrekte Folgerung, vergrößert sich die Menge der als wahr bekannten Aussagen (sog. Annahmen).

### Beispiel

Z.z.: $\forall a \in \mathbb{Z}$: a ist gerade $\implies$ $a^2$ gerade.

1. Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. Angenommen, a ist gerade.
3. $\implies \exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n$
4. $\implies a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
5. $\implies a^2$ ist gerade $\square$

*Anmerkung*: Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k$.

# Beweis durch Kontraposition

**Zeige $A \implies B$, indem man stattdessen $\neg B \implies \neg A$ zeigt.**

## Beispiel

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\rightsquigarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

**Zeige A $\implies$ B, indem man stattdessen $\neg$B $\implies$ $\neg$A zeigt.**

### Beispiel

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies$ $n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\rightsquigarrow$ $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies$ $n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies$ $n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

**Zeige $A \implies B$, indem man stattdessen $\neg B \implies \neg A$ zeigt.**

### Beispiel

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\rightsquigarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

**Zeige $A \implies B$, indem man stattdessen $\neg B \implies \neg A$ zeigt.**

### Beispiel

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\overset{\text{quadrieren}}{\rightsquigarrow} n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

**Zeige $A \implies B$, indem man stattdessen $\neg B \implies \neg A$ zeigt.**

## Beispiel

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\rightsquigarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

Zeige $A \implies B$, indem man stattdessen $\neg B \implies \neg A$ zeigt.

**Beispiel**

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\rightsquigarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

## Zeige A $\implies$ B, indem man stattdessen $\neg$B $\implies$ $\neg$A zeigt.

### Beispiel

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
2. Angenommen, $n$ ist *nicht* gerade.
3. $\implies$ $n = 2k + 1$, für ein $k \in \mathbb{Z}$
4. $\rightsquigarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
5. $\implies$ $n^2 = 2m + 1$, für $m = 2k^2 + 2k$
6. $\implies$ $n^2$ ist ungerade.
7. Da ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n$ ungerade $\implies$ $n^2$ ungerade) gilt,
   $\rightsquigarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies$ $n$ gerade), was zu beweisen war. $\square$

*Anmerkung:* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$.

# Beweis durch Kontraposition

## Wieso dürfen wir das so machen?

.

**Beweis**

Z.z.: $(\neg \mathrm{A} \implies \neg \mathrm{B}) \iff (\mathrm{B} \implies \mathrm{A})$

$$
\begin{aligned}
(\neg A \implies \neg B) &\iff (\neg(\neg A) \vee \neg B) \\
&\iff (A \vee \neg B) \\
&\iff (\neg B \vee A) \\
&\iff (B \implies A)
\end{aligned}
$$

□

*Erinnerung:* $A \implies B$ kann man auch $\neg A \vee B$ schreiben.

Verdauungspause

# Beweis durch Widerspruch

**Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass $\neg A$ falsch ist.**

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Wenn $\neg A$ falsch ist, muss A wahr sein.

## Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass ¬A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn ¬A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \land p, q$ sind teilerfremd.
   *Anmerkung:* $r \in \mathbb{Q} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$.
   *Anmerkung:* $\frac{p}{q}$ kann man immer soweit kürzen, dass $p, q$ teilerfremd sind.

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass $\neg A$ falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn $\neg A$ falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \land p, q$ sind teilerfremd.
   *Anmerkung:* $r \in \mathbb{Q} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$.
   *Anmerkung:* $\frac{p}{q}$ kann man immer soweit kürzen, dass $p, q$ teilerfremd sind.

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass $\neg$A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Wenn $\neg$A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \land p, q$ sind teilerfremd. .
3. Quadrieren und Umformen:
   $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass ¬A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn ¬A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \wedge p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
   *Erinnerung:* $\forall n \in \mathbb{Z} : n$ gerade $\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2k = n$.
   *Erinnerung:* $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies n$ gerade
   (siehe Beispiel Kontraposition)

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass ¬A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn ¬A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \wedge p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
   *Erinnerung:* $\forall n \in \mathbb{Z} : n$ gerade $\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2k = n$.
   *Erinnerung:* $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2$ gerade $\implies n$ gerade
   (siehe Beispiel Kontraposition)

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass ¬A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn ¬A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \land p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
5. Also ist $p^2$ durch 4 teilbar. $\rightsquigarrow 2q^2$ ist durch 4 teilbar.
   *Herleitung:* $p^2 = p \cdot p \overset{\text{p gerade}}{=\!=\!=} (2k) \cdot (2k) = 4k^2$, mit $k \in \mathbb{Z}$

# Beweis durch Widerspruch

**Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass ¬A falsch ist.**

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn ¬A falsch ist, muss A wahr sein.

## Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \wedge p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
5. Also ist $p^2$ durch 4 teilbar. $\rightsquigarrow 2q^2$ ist durch 4 teilbar.

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass ¬A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn ¬A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \wedge p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
5. Also ist $p^2$ durch 4 teilbar. $\rightsquigarrow 2q^2$ ist durch 4 teilbar.
6. $\rightsquigarrow q^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow q$ ist gerade.

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass $\neg$A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn $\neg$A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \land p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
5. Also ist $p^2$ durch 4 teilbar. $\rightsquigarrow 2q^2$ ist durch 4 teilbar.
6. $\rightsquigarrow q^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow q$ ist gerade.
7. $\rightsquigarrow p, q$ nicht teilerfremd. $\rightsquigarrow$ Widerspruch

# Beweis durch Widerspruch

## Zeige, dass A gilt, indem man zeigt dass $\neg$A falsch ist.

*Erinnerung:* Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Wenn $\neg$A falsch ist, muss A wahr sein.

### Beispiel

Z. z. $\sqrt{2}$ ist irrational.

1. Ang. $\sqrt{2}$ ist rational.
2. Dann $\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \land p, q$ sind teilerfremd. .
3. $\rightsquigarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$
4. $\rightsquigarrow p^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow p$ ist gerade.
5. Also ist $p^2$ durch 4 teilbar. $\rightsquigarrow 2q^2$ ist durch 4 teilbar.
6. $\rightsquigarrow q^2$ ist gerade. $\rightsquigarrow q$ ist gerade.
7. $\rightsquigarrow p, q$ nicht teilerfremd. $\rightsquigarrow$ Widerspruch $\square$

Verdauungspause

# Tricks: Fallunterscheidung

## Hilfe! Der Beweis ist zu komplex! Was nun?

Manchmal lässt sich ein Beweis in kleinere Aussagen zerlegen. Wenn wir alle Teilaussagen beweisen, haben wir die Gesamtaussage gezeigt.

### Beispiel

Z.z. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass der Rest von $n^2 \div 4$ entweder 0 oder 1 ist.

- Fall 1: n ist gerade
  $n^2 = n \cdot n \overset{\text{n gerade}}{=\!=\!=} (2k) \cdot (2k) = 4k^2$, mit $k \in \mathbb{Z}$
  $\implies 4k^2 \div 4 = k^2$ Rest: 0
- Fall 2: n ist ungerade
  $n^2 = n \cdot n \overset{\text{n ungerade}}{=\!=\!=} (2k+1) \cdot (2k+1) = (2k)^2 + 2(2k) + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, mit $k \in \mathbb{Z}$
  $\implies (4(k^2 + k) + 1) \div 4 = k^2 + k$ Rest: 1

Da $n$ nur gerade oder ungerade sein kann, ist der Rest von $n^2 \div 4$ entweder 0 oder 1. $\square$

## Reicht nicht auch ein Beispiel als Beweis?

**Wann ein Beispiel *nicht* ausreicht:**

Zeige allgemeine Aussagen, also Aussagen der Form:
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt ..., $\neg\exists n \in \mathbb{N}$..., $\exists! n \in \mathbb{N}$..., etc.

Warum nicht?

Beispiele zeigen uns nur endlich viele Möglichkeiten.
"für Alle gilt...", "es existiert kein...", es existiert genau ein..., etc.
sind meist zu allgemeine Aussagen um sie mit endlich vielen Beispielen lückenlos zu beweisen.

# Tricks: Beispiele und Gegenbeispiele

## Reicht nicht auch ein Beispiel als Beweis?

**Wann ein Beispiel ausreichen kann:**

Zeige nicht allgemeine Aussagen der Form:
$\exists n \in \mathbb{N}$, $\neg\forall n \in \mathbb{N}$ gilt, ...
Warum?
"es gibt ein Element, sodass...", "für nicht alle Element gilt..."
wären durch Angabe eines solchen Elements gezeigt.

$\rightsquigarrow$ will man zeigen, dass eine Aussage falsch ist, sind die Formen entsprechend negiert.

## Aufgaben

Welche Beweistechnik könnte sich für die folgenden Aussagen eignen? Warum?

### Normal

- Für jede Primzahl $p$ ist $2^p - 1$ eine Primzahl.

### Etwas schwerer

- Es gibt eine ganze Zahl x, sodass $x \equiv 1 \bmod 4 \implies x \equiv 1 \bmod 2$

# Lösungen

## Aufgaben

Welche Beweistechnik könnte sich für die folgenden Aussagen eignen? Warum?

### Normal

- Für jede Primzahl $p$ ist $2^p - 1$ eine Primzahl.
  $\rightarrow$ Gegenbeispiel (sei $p := 11$)

### Etwas schwerer

$\rightarrow$Direkter Beweis

- $x \equiv 1 \bmod 4 \iff \exists z \in \mathbb{Z} : 4 \cdot z + 1 = x$
- $\iff \exists z \in \mathbb{Z} : (2 \cdot 2) \cdot z + 1 = x$
- $\implies \exists u, z \in \mathbb{Z} : u = 2z, 2u + 1 = x$
- $\implies x \equiv 1 \bmod 2$

Induktion folgt Übermorgen

# Murmelpause

# Mengenbeweise

# einfacher Einstieg

Zu zeigen: Schnitt ist Kommutativ, d.h. $A \cap B = B \cap A$

„ $\Longrightarrow$ ":

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in A \\ &\Longrightarrow x \in B \cap A \end{aligned}$$

„ $\Longleftarrow$ ":

$$\begin{aligned} x \in B \cap A &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in A \\ &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Longrightarrow x \in A \cap B \end{aligned}$$

$\square$

*Anmerkung:* $\wedge$ ist kommutativ

# einfacher Einstieg

Zu zeigen: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \land \neg(x \in B \cup C) \\
&\iff x \in A \land \neg(x \in B \lor x \in C) \\
&\iff x \in A \land \neg(x \in B) \land \neg(x \in C) \\
&\iff x \in A \land \neg(x \in B) \land x \in A \land \neg(x \in C) \\
&\iff (x \in A \land \neg(x \in B)) \land (x \in A \land \neg(x \in C)) \\
&\iff (x \in A \setminus B) \land (x \in A \setminus C) \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned}$$

$\square$

*Rechenregel:* $\neg(A \land B) \iff \neg A \lor \neg B,$

$\neg(A \lor B) \iff \neg A \land \neg B$

# Denkpause

## Aufgaben

Versuche dich an den folgenden Mengenbeweisen.

### Normal

- $\overline{\overline{A}} = A$

### Etwas schwerer

- $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$

# Lösungen

Zu zeigen: $A = \overline{\overline{A}}$

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{\overline{A}} &\iff \neg(x \in \overline{A}) \\
&\iff \neg(\neg(x \in A)) \\
&\iff x \in A
\end{aligned}
$$

$\square$

# Lösungen

Zu zeigen: $B \cap A = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} &\iff \neg(x \in \overline{A} \cup \overline{B}) \\
&\iff \neg(x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}) \\
&\iff \neg(\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\
&\iff x \in A \wedge x \in B \\
&\iff x \in A \cap B \\
&\iff x \in B \cap A
\end{aligned}
$$

$\square$

Noch Fragen?

Wunschdenken:
falls noch Zeit ist

# Quantoren

Oft wollen wir Aussagen nicht nur für ein Element, sondern für viele Elemente treffen.

**Beispiel**

$A_1$: Für die Zahl 5 gilt: Sie hat einen Nachfolger
*Allgemeiner:*
$A_2$: Für jede natürliche Zahl n gilt: n hat einen Nachfolger

**Beispiel**

$A_3$: Für die Zahl 5 gilt: Sie ist eine Primzahl
*Allgemeiner:*
$A_4$: Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass gilt: n ist eine Primzahl

# Quantoren

Mithilfe von **Quantoren** vereinfachen wir uns die Schreibweise dieser Aussagen.

Quantor $\forall$: Die Aussage gilt für alle Elemente.

**Beispiel**

$A_1$: $\forall k \in \mathbb{N}$ : 2k ist gerade

Quantor $\exists$: Die Aussage gilt für mindestens ein Element.

**Beispiel**

$A_2$: $\exists k \in \mathbb{N}$ : k ist Primzahl

In einer Aussage können mehrere Quantoren vorkommen.
Wir lesen dann von links nach rechts.

**Beispiel**

$A_1$: $\forall x, y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : x + y = z$

Bedeutung: Für zwei beliebige Zahlen x und y aus $\mathbb{N}$ gibt es eine weitere natürliche Zahl z, so dass $x + y = z$ gilt.

Achtung!

Die Reihenfolge von zwei Quantoren zu vertauschen, kann die Bedeutung einer Aussage deutlich verändern.

**Beispiel**

x,y $\in$ Studenten

$A_1$**:** $\forall x \exists y$ : **x schlägt y**

$A_2$**:** $\exists x \forall y$ : **x schlägt y**

Was ist der Unterschied zwischen beiden Aussagen?

# Quantoren

## Aufgabe

Wir formulieren folgende Aussage mithilfe von Quantoren und den Symbolen der Aussagenlogik (Junktoren).

### Beispiel

- $A_1$: Eine ganze Zahl ist eine natürliche Zahl, wenn sie positiv oder null ist.

### Hinführung

- $A_1$: Für alle ganzen Zahlen x gilt: Wenn x positiv oder null ist, ist x eine natürliche Zahl.

### Lösung

- $A_1$: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \geq 0 \implies x \in \mathbb{N}$

# Denkpause

## Aufgaben

Formuliere folgende Aussagen mithilfe von Quantoren und den Symbolen der Aussagenlogik (Junktoren).

### Normal

- $A_1$: Die Differenz zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.

### Schwer

- $A_2$: Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen.

### Da haben selbst wir keinen Bock drauf

- $A_3$: Eine natürliche Zahl, die von einer von ihr verschiedenen natürlichen Zahl größer als 1 geteilt wird, ist nicht prim.

# Lösungen

- $A_1$: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$

# Lösungen

- $A_1$: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$
- $A_2$: $\forall x \in \mathbb{N} : \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

# Lösungen

- $A_1$: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$
- $A_2$: $\forall x \in \mathbb{N} : \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- $A_3$: $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : (y > 1) \wedge (y \neq x) \wedge (y \mid x) \implies$ $x$ ist keine Primzahl.

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| z.z. | zu zeigen | Was zu beweisen ist |
| Sei | | bereits bekannte Objekte werden eingeführt und benannt |
| $\exists$ | es gibt ein | |
| $\exists!$ | es gibt genau ein | |
| x ist genau y | x = y | *genau* wird verwendet bei Äquivalenz |
| x ist eindeutig | $\exists! x$ | |
| der, die, das | | bestimmte Artikel weisen auf Eindeutigkeit hin |
| gdw. | genau dann wenn | Äquivalenz zwischen Aussagen |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| A ist notwendig für B | $B \Longrightarrow A$ | A muss wahr sein, wenn B wahr ist |
| A ist hinreichend für B | $A \Longrightarrow B$ | B muss wahr sein, wenn A wahr ist |
| notwendig und hinreichend | $A \Longleftrightarrow B$ | genau dann wenn |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| Œ | ohne Einschränkung | die Allgemeinheit der Aussage wird nicht durch getroffene Aussagen eingeschränkt |
| o.B.d.A. | ohne Beschränkung der Allgemeinheit | wie Œ |
| trivial | offensichtlich | Beweisschritte, welche keine weiter Begründung brauchen. (nicht verwenden!) |
| $\square$ | Mic Drop | Kommt am Ende eines erfolgreichen Beweises |
| q.e.d | quod erat demonstrandum | Was zu beweisen war |

# Cheatsheet

| Gestalt | mögliches Vorgehen |
|---|---|
| nicht F | Zeige, dass F nicht gilt. |
| F und G | Zeige F und G in zwei getrennten Beweisen. |
| F $\implies$ G | Füge F in die Menge der Annahmen hinzu und zeige G. |
| F oder G | Zeige: nicht F $\implies$ G. |
| | (Alternativ zeige: nicht G $\implies$ F.) |
| F $\iff$ G | Zeige: F $\implies$ G und G $\implies$ F. |
| $\forall x \in A : F$ | Sei x ein beliebiges Element aus A. Zeige dann F. |
| $\exists x \in A : F$ | Sei x ein konkretes Element aus A. Zeige dann F. |