Vorkurs Theoretische Informatik

Weiterführung der Beweise und Einführung in die Grammatik

Arbeitskreis Theoretische Informatik

Donnerstag, 04 .10.2018

Fachgruppe Informatik

Übersicht

Weitere Mengenbeweise

Mengenbeweis

Ein weiterer Mengenbeweis...

Aufgabe

$L_1 = \{w^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{aaaa\}\}$
$L_2 = \{w \mid |w| \equiv 0 \bmod 4, w \in \{a\}^*\}$

Zu zeigen:

$L_1 = L_2$

d.h. $(\forall x : x \in L_1 \implies x \in L_2) \land (\forall x : x \in L_2 \implies x \in L_1)$

Mengenbeweis

$\forall x : x \in L_1 \implies x \in L_2$

Sei x beliebig.

Angenommen, $x \in L_1$.

Es gilt: $w \in \{aaaa\}$. Damit gilt $|w| = 4$. Es folgt

$|x| = |w^n| = |w| * n = 4 * n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|x| \equiv 0 \mod 4$.

Weiterhin gilt $(aaaa)^n \in \{a\}^*$.

$\rightsquigarrow x \in L_2$

Mengenbeweis

$\forall x : x \in L_2 \implies x \in L_1$

Sei x beliebig.

Angenommen, $x \in L_2$.

Es gilt: $|x| \equiv 0 \mod 4$.

Damit gilt $|x| = 4 * n = |w| * n = |w^n|$ mit $w \in \{aaaa\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Weiterhin gilt $w \in \{a\}^*$.

$\rightsquigarrow x \in L_1$

Mengenbeweis

Da gezeigt wurde:

$\forall x : x \in L_1 \implies x \in L_2$
und
$\forall x : x \in L_2 \implies x \in L_1$

gilt $L_1 = L_2$.

Denkpause

Aufgaben

Versuche dich an folgenden Mengenbeweisen.

Etwas Schwerer

$L_1 = \{a^n b^m \mid n < m, mit\ n, m \in \mathbb{N}\}$
$L_2 = \{w \mid |w|_a < |w|_b, w \in \{a, b\}^*\}$

Zu zeigen: $L_1 \subsetneq L_2$

Schwer

L_1: $\{w \mid |w| \equiv 0 \bmod 6\}$
L_2: $\{w \mid |w| \equiv 0 \bmod 2\}$
L_3: $\{w \mid |w| \equiv 0 \bmod 3\}$

Zu zeigen: $L_1 = L_2 \cap L_3$

Lösung

Aufgaben

z.Z. $L_1 \subsetneq L_2$

d.h. $(\forall x : x \in L_1 \implies x \in L_2) \wedge (L_1 \neq L_2)$

$\forall x : x \in L_1 \implies x \in L_2$

Sei x beliebig. Ang. $x \in L_1$.

Es gilt: $x = a^n b^m$,mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Damit gilt $|x|_a = n, |x|_b = m$ mit $n < m$.

Also auch $|x|_a < |x|_b$.

$\rightsquigarrow x \in L_2$.

$L_1 \neq L_2$

Beweis durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$bba \in L_2$, aber $bba \notin L_1$

Also sind L_1 und L_2 nicht gleich.

$\square$

Lösung

Aufgaben

Z.z. $L_1 = L_2 \cap L_3$

d.h. $\forall x : x \in L_1 \iff x \in L_2 \wedge x \in L_3$

"$\Longrightarrow$"

Sei x beliebig. Ang. $x \in L_1$.

Dann gilt $|x| \equiv 0 \mod 6$. Also $\exists k \in \mathbb{N} : |x| = 6k = 3 * 2 * k$.

Somit gilt auch $\exists l \in \mathbb{N} : |x| = 3l$ mit $l = 3 * k$ und $\exists m \in \mathbb{N} : |x| = 2m$ mit $m = 2 * k$.

$\rightsquigarrow x \in L_2 \wedge x \in L_3$.

Lösung

Aufgaben

Z.z. $L_1 = L_2 \cap L_3$

d.h. $\forall x : x \in L_1 \iff x \in L_2 \land x \in L_3$

"$\Longleftarrow$"

Sei x beliebig. Ang. $x \in L_2 \land x \in L_3$.

Dann $\exists k, l \in \mathbb{N} : |x| = 2 * k, |x| = 3 * l$.

Somit sind 2 und 3 Teil der Primfaktorzerlegung von $|x|$.

Dann gilt $\exists m \in \mathbb{N} : |x| = 6 * m$.

$\rightsquigarrow x \in L_1$.

Lösung

Aufgaben

Z.z. $L_1 = L_2 \cap L_3$

d.h. $\forall x : x \in L_1 \iff x \in L_2 \wedge x \in L_3$

„$\Longleftarrow$"

Da $\forall x : x \in L_1 \implies x \in L_2 \wedge x \in L_3$ und $\forall x : x \in L_2 \wedge x \in L_3 \implies x \in L_1$ gilt:

$\forall x : x \in L_1 \iff x \in L_2 \wedge x \in L_3$ $\square$

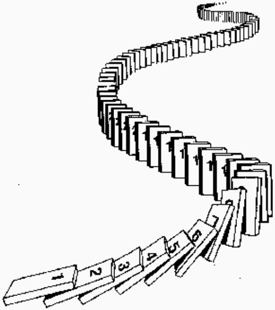
Murmelpause

Vollständige Induktion

Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

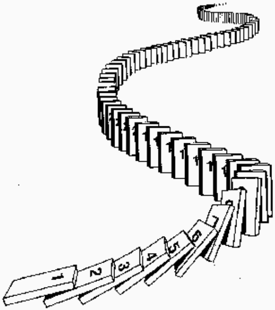
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

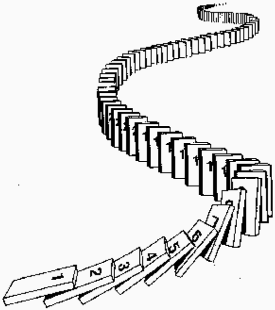
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

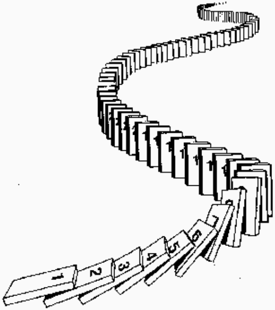
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

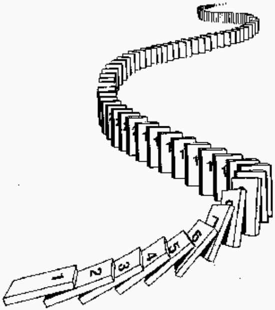
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt...*

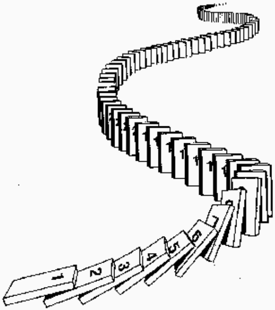
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
6. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

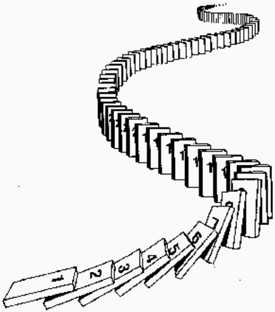
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
6. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
7. ...



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

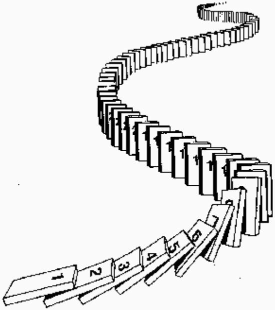
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, wenn Aussage für beliebiges n gilt, gilt sie auch für dessen Nachfolger, also n+1.



Idee

Zeige Aussagen der Form: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...*

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, wenn Aussage für beliebiges n gilt, gilt sie auch für dessen Nachfolger, also n+1.
3. $\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n.



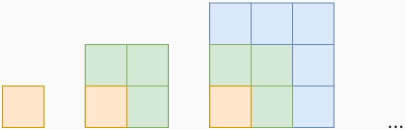
Struktur

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

1. Induktionsanfang
   Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Induktionsvorraussetzung
   Zeige, unter der Vorraussetzung:
   die Aussage gelte für beliebiges n,...
3. Induktionsschritt
   ...dann gilt die Aussage auch für dessen Nachfolger n+1.
4. $\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang IA

Zeige Aussage gilt für $n := 0$:

$$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) \stackrel{!}{=} (0+1)^2$$

$$\iff 2 * 0 + 1 \stackrel{!}{=} 1^2$$

$$\iff 1 = 1 \qquad \checkmark$$

Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang IA

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 0^2$

Induktionsvorraussetzung IV

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt IS

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:
$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) \stackrel{!}{=} ((n+1)+1)^2$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) \stackrel{!}{=} ((n+1)+1)^2$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &\stackrel{!}{=} ((n+1)+1)^2 \\ \iff \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) &\stackrel{!}{=} (n+2)^2 \end{aligned}$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \overset{!}{=} ((n+1)+1)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \overset{!}{=} (n+2)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \overset{!}{=} n^2 + 2 * 2n + 2^2
\end{aligned}
$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} ((n+1)+1)^2 \\
\iff &\sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} (n+2)^2 \\
\iff &\sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} n^2 + 2 * 2n + 2^2 \\
\stackrel{IV}{\iff} &(n+1)^2 + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} n^2 + 4n + 4
\end{aligned}
$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} ((n+1)+1)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} (n+2)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} n^2 + 2 * 2n + 2^2 \\
\stackrel{IV}{\Longleftrightarrow}\ & (n+1)^2 + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} n^2 + 4n + 4 \\
\Longleftrightarrow\ & n^2 + 2n + 1^2 + 2n + 2 + 1 && \stackrel{!}{=} n^2 + 4n + 4
\end{aligned}
$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} ((n+1)+1)^2 \\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} (n+2)^2 \\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} n^2 + 2 * 2n + 2^2 \\
\stackrel{IV}{\Longleftrightarrow}\ &(n+1)^2 + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} n^2 + 4n + 4 \\
\Longleftrightarrow\ &n^2 + 2n + 1^2 + 2n + 2 + 1 && \stackrel{!}{=} n^2 + 4n + 4 \\
\Longleftrightarrow\ &n^2 + 4n + 4 && = n^2 + 4n + 4
\end{aligned}$$

Beispiel

Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang IA

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1^2$

Induktionsvorraussetzung IV

Ang. Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt IS

Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V., da
$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = ((n+1)+1)^2$

$\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Denkpause

Aufgaben

Versuche dich an den folgenden Induktionsbeweisen.

Normal

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Schwerer

$$\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Lösungen: normale Aufgabe

Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang IA

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{1} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Induktionsvorraussetzung IV

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt IS

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \overset{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \overset{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &\stackrel{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\stackrel{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\stackrel{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &\stackrel{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\stackrel{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\stackrel{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\stackrel{IV}{\iff} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &\stackrel{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &\overset{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\overset{IV}{\iff} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\iff \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} &\overset{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &\overset{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\overset{IV}{\iff} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\iff \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} &\overset{!}{=} \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\iff \frac{n^2+3n+2}{2} &= \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang IA

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{1} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Induktionsvorraussetzung IV

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt IS

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Zu zeigen: $\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}$, für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang IA

Aussage gilt für $n := 1$, da $\prod_{i=1}^{1} 4^i = 4^1 = 4 = 2^2 = 2^{1(1+1)}$.

Induktionsvorraussetzung IV

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsschritt IS

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\prod_{i=1}^{n+1} 4^i \overset{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)}$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\prod_{i=1}^{n+1} 4^i \overset{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)}$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} 4^i &\stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff (\prod_{i=1}^{n} 4^i) * 4^{(n+1)} &\stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\Longleftrightarrow\ &(\prod_{i=1}^{n} 4^i) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)} \\
\stackrel{IV}{\Longleftrightarrow}\ &(2^{n(n+1)}) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff & (\prod_{i=1}^{n} 4^i) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)} \\
\stackrel{IV}{\iff} & (2^{n(n+1)}) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} * 2^{2(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff &(\prod_{i=1}^{n} 4^i) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)} \\
\stackrel{IV}{\iff} &(2^{n(n+1)}) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\iff &2^{n^2+n} * 2^{2(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\iff &2^{n^2+n} * 2^{2n+2} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff &(\prod_{i=1}^{n} 4^i) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)} \\
\stackrel{IV}{\iff} &(2^{n(n+1)}) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\iff &2^{n^2+n} * 2^{2(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\iff &2^{n^2+n} * 2^{2n+2} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\iff &2^{(n^2+n)+(2n+2)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)} \\
\stackrel{IV}{\Longleftrightarrow}\ & \left(2^{n(n+1)}\right) * 4^{(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\Longleftrightarrow\ & 2^{n^2+n} * 2^{2(n+1)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\Longleftrightarrow\ & 2^{n^2+n} * 2^{2n+2} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\Longleftrightarrow\ & 2^{(n^2+n)+(2n+2)} && \stackrel{!}{=} 2^{n^2+3n+2} \\
\Longleftrightarrow\ & 2^{n^2+3n+3} && = 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Zu zeigen: $\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}$, für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang IA

Aussage gilt für $n := 1$, da $\prod_{i=1}^{1} 4^i = 4^1 = 4 = 2^2 = 2^{1(1+1)}$.

Induktionsvorraussetzung IV

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsschritt IS

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$\prod_{i=1}^{n+1} 4^i \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)}$$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Murmelpause

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (P(n_0) \land \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (P(n) \implies P(n+1)))$$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \land \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig.

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig. Ang. es gilt P(n). (IV)

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig. Ang. es gilt P(n). (IV)
3. $\rightsquigarrow$ Zeigen, dass P(n+1) gilt, unter Verwendung von P(n) (IV)

Murmelpause

Grammatiken

Wörter in Sprachen

Wir können inzwischen Sprachen in Mengenschreibweise darstellen. Aber welche Wörter sind enthalten?

Wir können weitere Regeln formulieren, mit denen wir von einenm gegebenen Startpunkt aus alle Wörter einer Sprache erzeugen können.

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \to aSa \text{ oder } S \to bSb$$
$$\text{oder } S \to aa \text{ oder } S \to bb$$

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \rightarrow aSa \text{ oder } S \rightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \rightarrow aa \text{ oder } S \rightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ S

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \rightarrow aSa \text{ oder } S \rightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \rightarrow aa \text{ oder } S \rightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ aSa

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \rightarrow aSa \text{ oder } S \rightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \rightarrow aa \text{ oder } S \rightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ abSba

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \rightarrow aSa \text{ oder } S \rightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \rightarrow aa \text{ oder } S \rightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ abaSaba

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \rightarrow aSa \text{ oder } S \rightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \rightarrow aa \text{ oder } S \rightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ ababSbaba

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \to aSa \text{ oder } S \to bSb$$
$$\text{oder } S \to aa \text{ oder } S \to bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ ababbbbaba

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba $\in$ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \to aSa \text{ oder } S \to bSb$$
$$\text{oder } S \to aa \text{ oder } S \to bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ ababbbbaba
4. Wir nennen diese Umformungsregeln Produktionsregeln.

Einschränkungen

- *Nichtterminale* werden meist durch Großbuchstaben repräsentiert und müssen durch Produktionsregeln abgeändert werden
- *Terminale* werden meist durch Kleinbuchstaben repräsentiert und sollten *nicht* durch weitere Produktionsregeln abgeändert werden
- Mehrere Symbole können auf einen Schlag überführt werden. Dabei sollten die Terminale nicht entfernt oder umsortiert werden.
  z.B. $AB \rightarrow CD$ ist erlaubt.
  Auch $abAB \rightarrow BbAa$, aber das gehört sich nicht.

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$
$P = \{S \to aS\}$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$
$P = \{S \to aS \mid \varepsilon\}$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \to aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \rightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \rightarrow aS\}$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \rightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \rightarrow aS \mid bS\}$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \to aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \to aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

Denkpause

Aufgaben

Findet Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

Normal

- $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*,\ v \in \{c, d\}\}$
- $L_4 = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$

Etwas Schwerer

- $L_5 = \{a^n \mid n \equiv 1 \bmod 3\}$
- $L_6 = \{w \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1, w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $L_7 = \{uv \mid u \in \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}^*,\ v \in \{\text{STOP}\}\}$
- $L_8 = \{w \mid |w| = 2, w \in \{a, b\}\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \rightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \rightarrow cB \mid \varepsilon\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \to UV, U \to aU \mid bU \mid \varepsilon, V \to c \mid d\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \to UV, U \to aU \mid bU \mid \varepsilon, V \to c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \to XXX, X \to a \mid b \mid c\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \rightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \rightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \rightarrow UV, U \rightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \rightarrow c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \rightarrow XXX, X \rightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \rightarrow a \mid aaaS\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \to UV, U \to aU \mid bU \mid \varepsilon, V \to c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \to XXX, X \to a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \to a \mid aaaS\}$
- $P_6 = \{S \to AAAB, AB \to BA, A \to cA \mid Ac \mid a, B \to cB \mid Bc \mid b\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \to UV, U \to aU \mid bU \mid \varepsilon, V \to c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \to XXX, X \to a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \to a \mid aaaS\}$
- $P_6 = \{S \to AAAB, AB \to BA, A \to cA \mid Ac \mid a, B \to cB \mid Bc \mid b\}$
- $P_7 = \{S \to U\text{🛑} \mid \text{🛑}, U \to \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \to UV, U \to aU \mid bU \mid \varepsilon, V \to c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \to XXX, X \to a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \to a \mid aaaS\}$
- $P_6 = \{S \to AAAB, AB \to BA, A \to cA \mid Ac \mid a, B \to cB \mid Bc \mid b\}$
- $P_7 = \{S \to U\text{🛑} \mid \text{🛑}, U \to \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$
- $P_8 = \{\} \rightsquigarrow$ Es gibt keine Produktionsregeln!

Murmelpause

Formale Notation

Wir beschreiben eine *Grammatik* durch ein geordentes *Tupel* $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V ist die Menge der verwendeten Nichtterminale
- Σ die Menge der Terminale bzw. unser Alphabet
- P ist die Menge der Produktionsregeln
- S ist die Startvariable

Beispiel für L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n,\ n \geq 1\}$

$G = (V, \Sigma, P, S)$, mit
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$P = \{S \to aSa, S \to bSb, S \to aa, S \to bb\}$
bzw. kurz: $P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Denkpause

knifflige Aufgabe

Bob will durch das Labyrinth laufen. Er hat folgende Möglichkeiten:
$\Sigma = \{◀, ▲, ▶, ▼\}$

- Bob kann nicht auf ein Feld zurücktreten von dem er gerade kam
- Bob geht bei jedem Schritt ein Feld in die angegebene Richtung

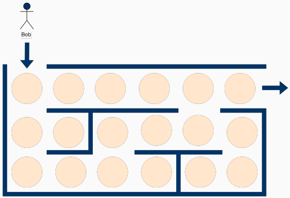


Abbildung 1: Bob's Problem

Geben Sie eine Grammatik an, welche die Sprache beschreibt, die Bob durch alle ihm möglichen Wege des Labyrinths führt.

Denkpause

Beispiel

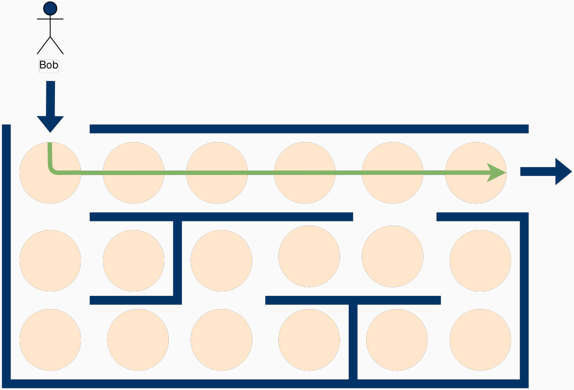


Abbildung 2: der direkte Weg ist repräsentiert durch das Wort ▼▶▶▶▶▶▶

Lösung

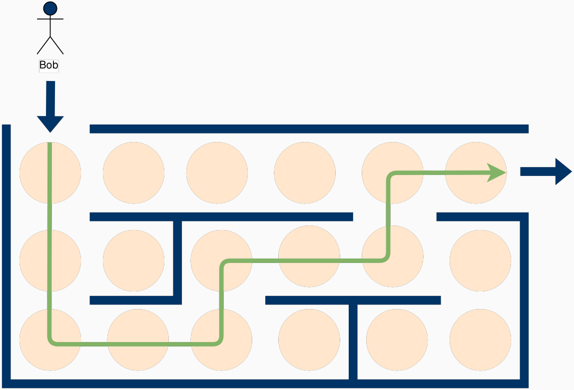


Abbildung 3: Indirekter Weg

Lösung

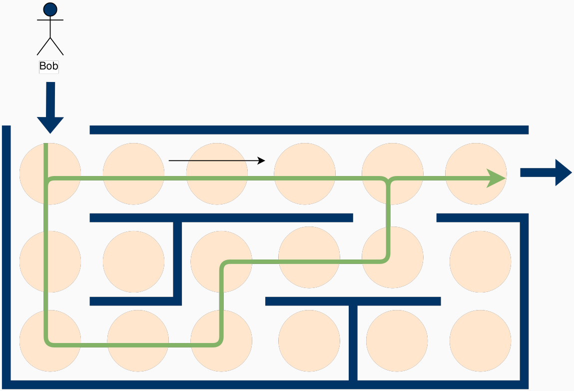


Abbildung 3: Schlaufe Uhrzeigersinn

Lösung

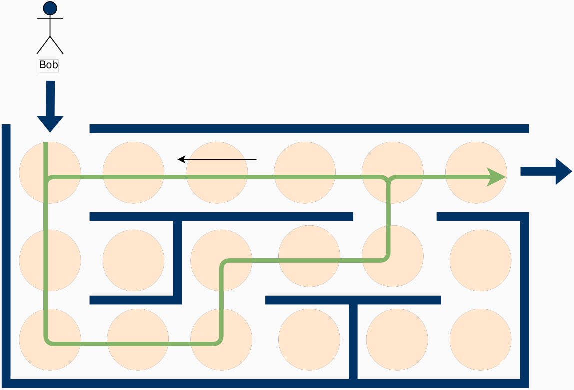


Abbildung 3: Schlaufe gegen Uhrzeigersinn

Lösung

Eine Möglichkeit:

$G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

$V = \{S, A_u, A_r, B_u, B_l\}$

$\Sigma = \{◀, ▲, ▶, ▼\}$

$P = \{S \rightarrow ▼A_u \mid ▼A_r,$

$A_u \rightarrow ▶▶▶▶B_l$

$A_r \rightarrow ▼▼▶▶▲▶▶▲B_u,$

$B_l \rightarrow ▼◀◀▼◀◀▲▲A_u \mid ▶▶,$

$B_u \rightarrow ◀◀◀◀A_r \mid ▶▶\}$

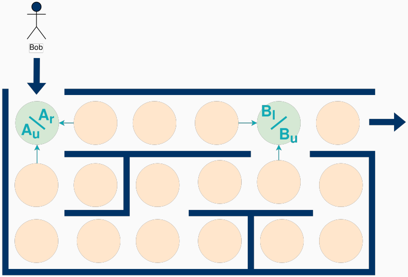


Abbildung 4: Es muss unterschieden werden, ob Bob von links, rechts oder unten kam

Erinnerung: Bob kann nicht auf ein Feld zurücktreten von dem er gerade kam

Wir können durch das Ableiten formal zeigen, dass ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird.
Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
mit der Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei
$V = \{S\}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Beipspiel

Wir zeigen $ww^R = ababbbbaba \in$ L.
$S \Longrightarrow_G aSa \Longrightarrow_G abSba \Longrightarrow_G abaSaba \Longrightarrow_G ababSbaba$
$\Longrightarrow_G ababbbbaba$

□

Aufgaben

Zeige.

Normal

- $P_1 = \{S \to aaS \mid \varepsilon\}$ erzeugt $aaaa$
- $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$ erzeugt $aabbc$
- $P_3 = \{S \to UV, U \to aU \mid bU \mid \varepsilon, V \to c \mid d\}$ erzeugt $abac$
- $P_4 = \{S \to XXX, X \to a \mid b \mid c\}$ erzeugt aac

Etwas Schwerer

- $P_5 = \{S \to a \mid aaaS\}$ erzeugt $aaaa$
- $P_6 = \{S \to AAAB, AB \to BA, A \to cA \mid Ac \mid a, B \to cB \mid Bc \mid b\}$ erzeugt $cabcacca$
- $P_7 = \{S \to U\text{🛑} \mid \text{🛑}, U \to \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$ erzeugt $\blacktriangleright\text{🛑}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AB \Longrightarrow_G aAbB \Longrightarrow_G aabbB \Longrightarrow_G aabbcB \Longrightarrow_G aabbc$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AB \Longrightarrow_G aAbB \Longrightarrow_G aabbB \Longrightarrow_G aabbcB \Longrightarrow_G aabbc$
- $S \Longrightarrow_G UV \Longrightarrow_G aUV \Longrightarrow_G abUB \Longrightarrow_G abaUB \Longrightarrow_G abaB \Longrightarrow_G abac$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AB \Longrightarrow_G aAbB \Longrightarrow_G aabbB \Longrightarrow_G aabbcB \Longrightarrow_G aabbc$
- $S \Longrightarrow_G UV \Longrightarrow_G aUV \Longrightarrow_G abUB \Longrightarrow_G abaUB \Longrightarrow_G abaB \Longrightarrow_G abac$
- $S \Longrightarrow_G XXX \Longrightarrow_G aXX \Longrightarrow_G aaX \Longrightarrow_G aac$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AB \Longrightarrow_G aAbB \Longrightarrow_G aabbB \Longrightarrow_G aabbcB \Longrightarrow_G aabbc$
- $S \Longrightarrow_G UV \Longrightarrow_G aUV \Longrightarrow_G abUB \Longrightarrow_G abaUB \Longrightarrow_G abaB \Longrightarrow_G abac$
- $S \Longrightarrow_G XXX \Longrightarrow_G aXX \Longrightarrow_G aaX \Longrightarrow_G aac$
- $S \Longrightarrow_G aaaS \Longrightarrow_G aaaa$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AB \Longrightarrow_G aAbB \Longrightarrow_G aabbB \Longrightarrow_G aabbcB \Longrightarrow_G aabbc$
- $S \Longrightarrow_G UV \Longrightarrow_G aUV \Longrightarrow_G abUB \Longrightarrow_G abaUB \Longrightarrow_G abaB \Longrightarrow_G abac$
- $S \Longrightarrow_G XXX \Longrightarrow_G aXX \Longrightarrow_G aaX \Longrightarrow_G aac$
- $S \Longrightarrow_G aaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AAAB \Longrightarrow_G AABA \Longrightarrow_G ABAA \Longrightarrow_G cABAA \Longrightarrow_G caBAA \Longrightarrow_G cabAA \Longrightarrow_G cabcAA \Longrightarrow_G cabcaA \Longrightarrow_G cabcacA \Longrightarrow_G cabcaccA \Longrightarrow_G cabcacca$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_G aaS \Longrightarrow_G aaaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AB \Longrightarrow_G aAbB \Longrightarrow_G aabbB \Longrightarrow_G aabbcB \Longrightarrow_G aabbc$
- $S \Longrightarrow_G UV \Longrightarrow_G aUV \Longrightarrow_G abUB \Longrightarrow_G abaUB \Longrightarrow_G abaB \Longrightarrow_G abac$
- $S \Longrightarrow_G XXX \Longrightarrow_G aXX \Longrightarrow_G aaX \Longrightarrow_G aac$
- $S \Longrightarrow_G aaaS \Longrightarrow_G aaaa$
- $S \Longrightarrow_G AAAB \Longrightarrow_G AABA \Longrightarrow_G ABAA \Longrightarrow_G cABAA \Longrightarrow_G caBAA \Longrightarrow_G cabAA \Longrightarrow_G cabcAA \Longrightarrow_G cabcaA \Longrightarrow_G cabcacA \Longrightarrow_G cabcaccA \Longrightarrow_G cabcacca$
- $S \Longrightarrow_G U$🛑 $\Longrightarrow_G \blacktriangleright U$🛑 $\Longrightarrow_G \blacktriangleright$🛑

Noch Fragen?

Glossar

Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \subseteq B$	Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Dabei können die Mengen auch gleich sein.
$A \subset B$	echte Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Jedoch enthält B noch Elemente, die nicht in A enthalten sind. $\Longrightarrow$ Mengen sind nicht gleich!
$A \subsetneq B$	echte Teilmenge	Andere Schreibweise für $\subset$.