Grandes Desviaciones

Alexander A. Ramírez M. (alexanderramirez.me)

09/01/2017

Contents

Agradecimiento

Profesor Muchas gracias por el esfuerzo y el empeño en el curso. Sigo interesado en trabajar con Ud. en otros cursos. A pesar de las circunstancias, Ud. es un ejemplo de amor por su oficio y profesionalismo. Se que a Ud. no le interesan los agradecimientos sino que realmente trabajemos en la materia. Espero esta sea una pequeña muestra. Mis respetos. Un abrazo. *AARM*

2.6 Grandes Desviaciones

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) y sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. En esta sección vamos a investigar la tasa (la velocidad) a la cual $P(S_n > na) \to 0$ para $a > \mu = \mathbb{E}X_i$. Finalmente concluiremos que si la **función generadora de momento** $\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X_i}) < \infty$ para algún $\theta > 0$, $P(S_n > na) \to 0$ a una velocidad exponencial e identificaremos

$$\gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq na)$$

Nuestro primer paso será demostrar que el límite existe. Esto está basado en la observación que será de utilidad en varias oportunidades más adelante. Sea $\pi_n = P(S_n \geq na)$.

$$\pi_{m+n} \geq P(S_m \geq ma, S_{m+n} - S_m \geq na) = \pi_m \pi_n$$

dado que S_m y $S_{m+n} - S_m$ son independientes.

Detalles:

Sea $\pi_n = P(Sn \geq na)$ definido para cada n. Como la suma y resta de variables aleatorias independientes, es una variable aleatoria independiente, para cada m, n tenemos que las variables aleatorias S_m y $S_{m+n} - S_m$ son independientes.

Por otra parte el evento $S_{m+n} \geq (m+n)a$ contiene $S_m \geq ma$ y $S_{m+n} - S_m \geq na$ entonces como la probabilidad es una función monótona y por independencia de las variables aleatorias tenemos

$$\begin{aligned} \pi_{m+n} = P(S_{m+n} \geq (m+n)a) &\geq P(S_m \geq ma, S_{m+n} - S_m \geq na) \\ &\geq P(S_m \geq ma) P(S_{n+m} - S_m \geq na) \\ &\geq \pi_m \pi_n \end{aligned}$$

Si dejamos a $\gamma_n = \log \pi_n$ transformamos el producto en sumas.

Detalles:

Sea $\gamma_n = \log \pi_n$, como $\pi_{m+n} \geq \pi_m \pi_n$ como ya vimos. Entonces

$$\gamma_{m+n} = \log \pi_{m+n} \geq \log \pi_m \pi_n = \log \pi_m + \log \pi_n = \gamma_m + \gamma_n$$

entonces γ_n transforma el producto en sumas.

Lemma 2.6.1

Si $\gamma_{m+n} \geq \gamma_m + \gamma_n$ entonces así como $n \to \infty$, $\frac{\gamma_n}{n} \to sup_m \frac{\gamma_m}{m}$.

Prueba. Claramente, $\limsup \gamma_n/n \leq \sup \gamma_m/m$. Para completar la demostración, es suficiente probar que para cualquier m, $\liminf \gamma_n/n \geq \gamma_m/m$. Escribiendo $n = km + \ell$ con $0 \leq \ell < m$ y haciendo uso de la hipótesis varias veces nos dá $\gamma_n \geq k\gamma_m + \gamma_\ell$. Dividiendo por $n = km + \ell$ obtenemos

$$\frac{\gamma_n}{n} \geq \left(\frac{km}{km+\ell}\right)\frac{\gamma_m}{m} + \frac{\gamma_\ell}{n}$$

Si hacemos $n \to \infty$ y recordando que $n = km + \ell$ con $0 \leq \ell < m$ obtenemos el resultado deseado.□

Detalles:

Desarrollemos la demostración paso a paso. Se desea demostrar que si $\gamma_{m+n} \geq \gamma_m + \gamma_n$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n} = \sup\limits_m \dfrac{\gamma_m}{m}$. Por definición de lim sup e inf

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} \frac{\gamma_m}{m} \leq \sup_{m\geq 1} \frac{\gamma_m}{m}$$

Para completar la demostración, es suficiente probar que para cualquier m, $\liminf \frac{\gamma_n}{n} \geq \frac{\gamma_m}{m}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_m}{m} &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n}\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n}\\ &\leq \sup_m \frac{\gamma_m}{m}\end{aligned}$$

Entonces para cada m, $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n}$ es una cota superior para $\frac{\gamma_m}{m}$. Por definición de supremo es $\sup\limits_m \dfrac{\gamma_m}{m} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n}$, entonces

$$\frac{\gamma_m}{m} \leq \sup_m \frac{\gamma_m}{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n}$$

así

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} = \frac{\gamma_m}{m}$$

se sigue que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n}$ existe y es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n} = \dfrac{\gamma_m}{m}$.

Ahora vamos a ver que $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n} \geq \dfrac{\gamma_m}{m}$.

Escribiendo $n = km + \ell$ con $0 \leq \ell < m$ por hipótesis

$$\gamma_n = \gamma_{km+\ell} \geq \gamma_{km} + \gamma_\ell$$

tenemos además que

$$\gamma_{km} = \gamma_{m+(k-1)m} \geq \gamma_m + \gamma_{(k-1)m} \geq \gamma_m + \gamma_m + \gamma_{(k-2)m} \geq \cdots \geq (k-1)\gamma_m + \gamma_m = k\ \gamma_m$$

sustituyendo queda

$$\gamma_n = \gamma_{km+\ell} \geq k\ \gamma_m + \gamma_\ell$$

y haciendo uso de la hipótesis varias veces nos dá $\gamma_n \geq k\ \gamma_m + \gamma_\ell$. Dividiendo por $n = km + \ell$ obtenemos

$$\frac{\gamma_n}{n} = \frac{k\ \gamma_m + \gamma_\ell}{km + \ell} \geq \left(\frac{km}{km+\ell}\right)\frac{\gamma_m}{m} + \frac{\gamma_\ell}{n}$$

Si hacemos $n \to \infty$ y recordando que $n = km + \ell$ con $0 \leq \ell < m$ obtenemos el resultado deseado.

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} &\geq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{km}{km+\ell}\right)\frac{\gamma_m}{m} + \liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_\ell}{n} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{n-\ell}{n}\right)\frac{\gamma_m}{m} + \liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_\ell}{n} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_\ell}{n} \\
&= \frac{\gamma_m}{m}
\end{aligned}$$

entonces $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{n} \geq \dfrac{\gamma_m}{m}$, que es lo que se quería demostrar. $\square$

El Lemma 2.6.1 implica que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log P(S_n \geq na) = \gamma(a) \leq 0$ existe. Se sigue de la fórmula para el límite que

$$P(S_n \geq na) \leq e^{n\ \gamma(a)} \tag{2.6.1}$$

Las últimas dos observaciones nos ofrecen información muy útil sobre $\gamma(a)$.

Detalles:

El Lemma 2.6.1 implica que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log P(S_n \geq na) = \gamma(a) \leq 0$ existe.

$$\gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} = \sup_m \frac{1}{m} \log P(S_m \geq ma)$$

Como $0 \leq \pi_m = P(S_m \geq ma) \leq 1$ entonces $\log \pi_m = \log P(S_m \geq ma) \leq 0$ así la sucesión $\left\{\dfrac{\gamma_m}{m}\right\}_{m\geq 1}$ es acotada y su supremo es $\sup_m \dfrac{\gamma_m}{m} \leq 0$, queda que para m

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_m}{m} &\leq \sup_m \tfrac{\gamma_m}{m} = \gamma(a) \\
\gamma_m &\leq m\ \gamma(a) \\
\log \pi_m &\leq m\ \gamma(a) \\
\pi_m &\leq \exp(m\ \gamma(a)) \\
P(S_m \geq ma) &\leq e^{m\ \gamma(a)}
\end{aligned}$$

Se sigue de la fórmula para el límite que $\gamma(a) \leq 0$ y

$$P(S_m \geq ma) \leq e^{m\ \gamma(a)} \tag{2.6.1}$$

Las últimas dos observaciones nos ofrecen información muy útil sobre $\gamma(a)$.

Ejercicio 2.6.1.

Las proposiciones siguientes son equivalentes: (a) $\gamma(a) = -\infty$, (b) $P(X_1 \geq a) = 0$ y (c) $P(S_n \geq na) = 0$ para todo n.

Podemos ver que si $\gamma(a) = \sup_m \dfrac{\gamma_m}{m} = -\infty$ entonces $\dfrac{\gamma_m}{m} = -\infty$ y Tomando $n = 1$ tenemos que $\gamma_1 = \log P(X_1 \geq a) = -\infty$ entonces $P(X_1 \geq a) = 0$.

Si $S_n \geq na$ entonces $X_m \geq a$ para algún $m \leq n$ así si (b) $P(X_1 \geq a) = 0$ entonces (c) $P(S_n \geq na) = 0$.

Finalmente si (c) $\pi_n = P(S_n \geq na) = 0$ para todo n entonces $\dfrac{\gamma_n}{n} = -\infty$, se sigue que (a) $\gamma(a) = \sup_m \dfrac{\gamma_n}{n} = -\infty$.

Ejercicio 2.6.2.

Use la definición para concluir que si $\lambda \in [0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{Q}$ es racional entonces $\gamma(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda\gamma(a) + (1-\lambda)\gamma(b)$. Use la monotonía para concluir que la última relación se cumple para todo $\lambda \in [0,1]$, así γ es cóncava y por lo tanto Lipschitz contínua en subconjuntos compactos de $\gamma(a) > -\infty$.

Sea $a \leq \lambda a + (1-\lambda)b \leq b$. Vamos a tomar $\frac{1}{n}\log$ en ambos lados y luego hacemos $n \to \infty$. Recordemos que $\gamma_{n(\lambda+(1-\lambda))} \geq \gamma_{\lambda n} + \gamma_{(1-\lambda)n}$ y $\gamma_{\lambda n} = \lambda\gamma_n$

$$\begin{aligned}
\log P(S_n \geq n\{\lambda a + (1-\lambda)b\}) \geq&\ \log P(S_{n\lambda} \geq n\lambda a) + \log P(S_{n(1-\lambda)} \geq n(1-\lambda)b) \\
\tfrac{1}{n}\log P(S_n \geq n\{\lambda a + (1-\lambda)b\}) \geq&\ \tfrac{1}{n}\log P(S_{n\lambda} \geq n\lambda a) + \tfrac{1}{n}\log P(S_{n(1-\lambda)} \geq n(1-\lambda)b) \\
\tfrac{1}{n}\log P(S_n \geq n\{\lambda a + (1-\lambda)b\}) \geq&\ \tfrac{\lambda}{n}\log P(S_n \geq na) + \tfrac{1-\lambda}{n}\log P(S_n \geq nb) \\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(S_n \geq n\{\lambda a + (1-\lambda)b\}) \geq&\ \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n}\log P(S_n \geq na) + \lim_{n\to\infty}\frac{1-\lambda}{n}\log P(S_n \geq nb) \\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(S_n \geq n\{\lambda a + (1-\lambda)b\}) \geq&\ \lambda\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(S_n \geq na) + (1-\lambda)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(S_n \geq nb) \\
\gamma(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq&\ \lambda\gamma(a) + (1-\lambda)\gamma(b)
\end{aligned}$$

Sea q_{n_n} una sucesión tal que $q_n \uparrow \lambda$ donde q_n son irracionales y usando la monotonía se extiende el resultado a los irracionales λ.

Para una función cóncava f, haciendo crecer a o $h > 0$ decrece $(f(a+h) - f(a))/h$. De esta observación se sigue la continuidad de Lipschitz.

Las conclusiones anteriores son válidas para cualquier distribución. Para el resto de la sección vamos a suponer:

(H1) $\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X_i}) < \infty$ para algún $\theta > 0$

Sea $\theta_+ = \sup\{\theta : \varphi(\theta) < \infty\}$, $\theta_- = \inf\{\theta : \varphi(\theta) < \infty\}$ y note que $\varphi(\theta) < \infty$ para $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$. (H1) implica que $\mathbb{E}X_i^+ < \infty$ y $\mu = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^- \in (-\infty, \infty)$.

Detalle:

Recordemos que si $f \geq 0$ es una función, A un conjunto medible, $i_A = \inf\{f(y) : y \in A\}$, por Chebyshev tenemos

$$i_A P(X \in A) \leq \mathbb{E}f(X)$$

Sea $f(x) = e^{\theta x}$, $A = [na, \infty)$ y $X = S_n$ entonces $i_A = \inf\{e^{\theta y} : y \geq na\} = e^{\theta na}$ y por el Teorema 2.1.9 y el Teorema 3.3.2 del durrett y considerando que $\mathbb{E}e^{\theta X_1} < \infty$

$$\begin{aligned}
e^{\theta na} P(S_n \geq na) \leq & \ \mathbb{E}e^{\theta S_n} \\
= & \ \mathbb{E}e^{\theta(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)} \\
= & \ \mathbb{E}e^{\theta X_1 + \theta X_2 + \cdots + \theta X_n} \\
= & \ \mathbb{E}e^{\theta X_1} e^{\theta X_2} \ldots e^{\theta X_n} \\
= & \ \mathbb{E}e^{\theta X_1} \mathbb{E}e^{\theta X_2} \ldots \mathbb{E}e^{\theta X_n} \\
= & \ \varphi(\theta)^n
\end{aligned}$$

---

la desigualdad de Chebyshev implica que

$$e^{\theta na} P(S_n \geq na) \leq \mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = \varphi(\theta)^n$$

Detalle:

$$\begin{aligned}
e^{\theta na} P(S_n \geq na) \leq & \ \mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = \varphi(\theta)^n \\
P(S_n \geq na) \leq & \ e^{-\theta na} \varphi(\theta)^n
\end{aligned}$$

---

si dejamos $\kappa(\theta) = \log \varphi(\theta)$

$$P(S_n \geq na) \leq e^{-n\{a\theta - \kappa(\theta)\}} \tag{2.6.2}$$

Nuestro primer objetivo es mostrar:

Lemma 2.6.2

Si $a > \mu$ y $\theta > 0$, entonces $a\theta - \kappa(\theta) > 0$

Prueba. $\kappa(0) = \log\varphi(0) = \log\mathbb{E}(e^{0X_i}) = \log\mathbb{E}(e^0) = \log\mathbb{E}(1) = \log(1) = 0$, entonces es suficiente demostrar el lema que (i) κ es contínua en 0, (ii) diferenciable en $(0, \theta_+)$ y (iii) $\kappa'(\theta) \to \mu$ así como $\theta \to 0$. Para luego motrar que

$$a\theta - \kappa(\theta) = \int_0^\theta a - \kappa'(x)\ dx > 0$$

para θ pequeño.

Sea $F(x) = P(X_i \leq x)$. Para probar (i) notamos que si $0 < \theta < \theta_0 < \theta_-$

$$e^{\theta\ x} \leq 1 + e^{\theta_0\ x} \tag{*}$$

así que por el teorema de convergencia dominada,

Detalles:

Si $Y_n \to Y$ cási seguramente, $|Y_n| \leq Z$ para todo n y $\mathbb{E}Z < \infty$ entonces $\mathbb{E}Y_n \to \mathbb{E}Y$, si definimos $\{\theta_n\}_n \subseteq [0, \theta_0]$ y $\theta_n \to 0$ así como $n \to \infty$ para $n \geq 1$ definamos $Y_n = e^{\theta_n X_i}$

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} e^{\theta_n X_i} = e^0 = 1$$

como $\theta_n \leq \theta_0$

$$|Y_n| = |e^{\theta_n X_i}| = e^{\theta_n X_i} \leq e^{\theta_0 X_i} = Z$$

es decir está acotada y $\mathbb{E}Z < \infty$ ya que por definición de θ_- y θ_+, $\theta_0 \in (\theta_-, \theta_+)$

---

queda que así como $\theta_n \to 0$

$$\mathbb{E}e^{\theta_n\ x} = \int e^{\theta_n x} dF \to \int 1 dF = 1$$

Detalles:

Como $\mathbb{E}Y_n \to 1$ así como $n \to \infty$, entonces para cada n, $\varphi(\theta_n) = \mathbb{E}Y_n$ así $\varphi(\theta_n) \to 1$ así como $n \to \infty$, queda

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} \kappa(\theta) &= \lim_{\theta\to 0} \log\varphi(\theta) \\
&= \lim_{n\to\infty} \log\varphi(\theta_n) \\
&= \log(\lim_{n\to\infty} \varphi(\theta_n)) \\
&= \log(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

---

entonces κ es contínua en 0.

Para probar (ii) notamos que si $\mid h \mid < h_0$ entonces

$$|e^{hx}-1| = \left| \int_0^{hx} e^y dy \right| \leq |hx| e^{h_0 x}$$

así una aplicación del teorema de convergencia dominada muestra que

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \int \frac{e^{hx}-1}{h} e^{\theta x} dF(x) \\ &= \int x e^{\theta x} dF(x) \text{ para } \theta \in (0,\theta_+) \end{aligned}$$

De la última ecuación, se sigue que $\kappa(\theta) = \log\varphi(\theta)$ tiene $\kappa'(\theta) = \varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$. Usando (*) y el teorema de convergencia dominada nos da (iii) y la prueba está completa.$\square$

Habiendo encontrado una cota superior para $P(S_n \geq na)$, es natural optimizarla encontrando el máximo de $\theta a - \kappa(\theta)$:

$$\frac{d}{d\theta}\{\theta a - \log\varphi(\theta)\} = a - \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = 0$$

así que (suponiendo que *things are nice*) el máximo ocurre cuando, $a = \varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$. Para cambiar la proposición en el paréntesis en una hipótesis matemática empezamos por definir

$$F_\theta(x) = \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{-\infty}^{x} e^{\theta y} dF(y)$$

cuando $\varphi(\theta) < \infty$. Se sigue de la pruega del Lemma 2.6.2 que si $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$, F_θ es una función de distribución con media

$$\int x \; dF_\theta(x) = \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\theta x} dF(x) = \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}$$

Repitiendo la prueba en el Lemma 2.6.2, es fácil ver que si $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$ entonces

$$\varphi''(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\theta x} dF(x)$$

Entonces tenemos

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} - \left(\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}\right)^2 = \int x^2 dF_\theta(x) - \left(\int x dF_\theta(x)\right)^2 \geq 0$$

dado que la última expresión es la variancia de F_θ. Si suponemos que

(H2) la función de distribución F no es un punto de masa en μ

entonces $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$ es estríctamente creciente y $a\theta - \log\varphi(\theta)$ es cóncava. Como tenemos $\varphi'(0)/\varphi(0) = \mu$, esto muestra que para cada $a > \mu$ hay a lo sumo un $\theta_a \geq 0$ que resuelve $a = \varphi'(\theta_a)/\varphi(\theta_a)$ por inyectividad, y este valor de θ maximiza $a\theta - \log\varphi(\theta)$. Antes de discutir la existencia de θ_a consideremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6.1. Distribución Normal.

$$\int e^{\theta x}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{\theta^2}{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}dx$$

El integrando en la última integral (a la derecha) es la función de densidad de una distribución normal con media θ y variancia 1, tal que $\varphi(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}}$, $\theta \in (-\infty, \infty)$. En este caso, $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) = \theta$ y

$$F_\theta(x) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}\int_{-\infty}^{x} e^{\theta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

es una disribución normal con media θ y variancia 1.

Ejemplo 2.6.2. Distribución Exponencial con parámetro λ.

Si $\theta < \lambda$

$$\int_0^\infty e^{\theta x}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda-\theta}$$

$$\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{1}{\lambda-\theta}$$

$$F_\theta(x) = \frac{\lambda}{\lambda-\theta}\int_0^x e^{\theta x}\lambda e^{-\lambda y}dy$$

es una distribución exponencial con parámetro $\lambda-\theta$ y por lo tanto con media $1/(\lambda-\theta)$.

Ejemplo 2.6.3. Lanzamientos de monedas

Sea $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$

$$\varphi(\theta) = \frac{(e^\theta + e^{-\theta})}{2}$$

$$\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{(e^\theta - e^{-\theta})}{(e^\theta + e^{-\theta})}$$

$$\frac{F_\theta(\{x\})}{F(\{x\})} = \frac{e^{\theta x}}{\varphi(\theta)}$$

entonces

$$F_\theta(\{1\}) = \frac{e^\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}$$

y

$$F_\theta(\{-1\}) = \frac{e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}$$

Ejemplo 2.6.4. Exponencial "pervertida"

Sea $g(x) = Cx^{-3}e^{-x}$ para $x \geq 1$, $g(x) = 0$ en otro caso y escoge C tal que g es una función de densidad de probabilidad. En este caso,

$$\varphi(\theta) = \int e^{\theta x} g(x) dx < \infty$$

sí y sólo si $\theta \leq 1$ y cuando $\theta \leq 1$, tenemos

$$\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} \leq \frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)} = \frac{\int_1^\infty Cx^{-2}dx}{\int_1^\infty Cx^{-3}dx} = 2$$

Recordemos $\theta_+ = \sup\{\theta : \varphi(\theta) < \infty\}$. En los Ejemplos 2.6.1 y 2.6.2, tenemos $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) \uparrow \infty$ así como $\theta \uparrow \theta_+$ así que podemos resolver $a = \varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$ para todo $a > \mu$. En el Ejemplo 2.6.3, $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) \uparrow 1$ como $\theta \to \infty$ pero no podemos esperar mucho más dado que F y por lo tanto F_θ es soportada en $\{-1, 1\}$.

Ejercicio 2.6.3.

Sea $x_0 = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Muestre que si $x_0 < \infty$ entonces $\varphi(\theta) < \infty$ para todo $\theta > 0$ y $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) \to x_0$ como $\theta \uparrow \infty$.

Dado que $P(X \leq x_0) = 1$, $\mathbb{E}e^{\theta X} < \infty$ para todo $\theta > 0$. Como F_θ está concentrada en $(-\infty, x_0]$ su media $\mu_0 = \varphi'(\theta)/\varphi(\theta) \leq x_0$. Por otra parte si $\delta > 0$, entonces $P(X \geq x_0 - \delta) = c_\delta > 0$, $\mathbb{E}e^{\theta X} \geq c_\delta e^{\theta(x_0 - \delta)}$, entonces

$$F_\theta(x_0 - 2\delta) = \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{-\infty}^{x_0 - 2\delta} e^{\theta x} dF(x) \leq \frac{e^{(x_0-2\delta)\theta}}{c_\delta e^{(x_0-\delta)\theta}} = \frac{e^{\theta\delta}}{c_\delta} \to 0$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario se sigue que $\mu_0 \to x_0$ así como $\theta \to \infty$.

El Ejemplo 2.6.4 presenta un problema que no podemos resolver $a = \varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$ cuando $a > 2$. El Teorema 2.6.5 cubre este caso, pero primero trataremos los casos en los cuales se puede resolver la ecuación.

Teorema 2.6.3.

Suponga, además de (H1) y (H2) que existe un $\theta_a \in (0, \theta_+)$ tal que $a = \varphi'(\theta_a)/\varphi(\theta_a)$. Entonces, así como $n \to \infty$,

$$\frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \to -a\theta_a + \log \varphi(\theta_a)$$

Prueba. El hecho de que el lim sup del lado izquierdo de la desigualdad sea menor o igual ($\leq$) al lado derecho se sigue de (2.6.2).

Detalles:

Por (2.6.2), se sigue que para cada n,

$$\begin{aligned} P(S_n \geq na) \leq &\quad e^{-n\{a\theta - \kappa(\theta)\}} \\ \log P(S_n \geq na) \leq &\quad -n\{a\theta - \kappa(\theta)\} \\ \tfrac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \leq &\quad -a\theta + \kappa(\theta) \end{aligned}$$

así, para $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \quad &\leq \inf_{m>1} \sup_{n\geq m} \tfrac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \\ &\leq \sup_{n\geq m} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \\ &\leq -a\theta + \kappa(\theta) \end{aligned}$$

Para probar la otra desigualdad, tome $\lambda \in (\theta_a, \theta_+)$, siendo $X_1^\lambda, X_2^\lambda, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con distribución F_λ y sea $S_n^\lambda = X_1^\lambda + \cdots + X_n^\lambda$. Escribiendo dF/dF_λ para la derivada de Radon-Nikodym de la medida asociada, inmediatamente de la definición de $dF/dF_\lambda = e^{-\lambda x}\varphi(\lambda)$.

Si denotamos a F_λ^n y F^n como las funciones de distribución S_n^λ y S_n, entonces

Lemma 2.6.4.

$$\frac{dF^n}{dF_\lambda^n} = e^{-\lambda x}\varphi(\lambda)^n$$

Prueba. Vamos a realizar la demostración por inducción. El resultado se cumple cuando $n = 1$. Para $n > 1$, notamos que

$$\begin{aligned} F^n \quad &= F^{n-1} * F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dF^{n-1}(x) \int_{-\infty}^{z-x} dF(y) \\ &= \int dF_\lambda^{n-1}(x) \int dF_\lambda(y) 1_{(x+y\leq z)} e^{-\lambda(x+y)}\varphi(\lambda)^n \\ &= E\Big(1_{(S_{n-1}^\lambda + X_n^\lambda \leq z)} e^{-\lambda(S_{n-1}^\lambda + X_n^\lambda)}\varphi(\lambda)^n\Big) \\ &= \int_{-\infty}^{z} dF_\lambda^n(u) e^{-\lambda u}\varphi(\lambda)^n \end{aligned}$$

donde en las últimas dos desigualdades hemos usado el Teorema 1.6.9 para $(S_{n-1}^\lambda, X_n^\lambda)$ y S_n^λ.□

Si $\nu > a$, entonces el Lemma 2.6.4 y la monotonía implican

$$P(S_n \geq na) \geq \int_{na}^{n\nu} e^{-\lambda x}\varphi(\lambda)^n dF_\lambda^n(x) \geq \varphi(\lambda)^n e^{-\lambda n\nu}(F_\lambda^n(n\nu) - F_\lambda^n(na)) \qquad (*)$$

F_λ tiene media $\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$, así que si tenemos $a < \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda) < \nu$, entonces por la ley débil de los grandes números tenemos

$$F_\lambda^n(n\nu) - F_\lambda^n(na) \to 1, \text{ así como, } n \to \infty$$

De la última conclusión y (*) se sigue que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n > na) \geq -\lambda\nu + \log\varphi(\lambda)$$

Como $\lambda > \theta_a$ y $\nu > a$ son arbitrarios, la demostración queda completa.□

Para tener una idea de cómo puede ser la respuesta, consideremos los ejemplos. Para prepararnos para los cálculos, recordemos una información importante:

$$\begin{array}{rl} \kappa(\theta) = & \log\varphi(\theta) \qquad \kappa'(\theta) = \dfrac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} \qquad \theta_a \quad \text{resuelve} \quad \kappa'(\theta_a) = a \\ \gamma(a) = & \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) = -a\theta_a + \kappa(\theta_a) \end{array}$$

Distribución Normal (Ejemplo 2.6.1)

$$\begin{array}{rl} \kappa(\theta) = & \theta^2/2 \qquad \kappa'(\theta) = \theta \qquad \theta_a = a \\ \gamma(a) = & -a\theta_a + \kappa(\theta_a) = -a^2/2 \end{array}$$

Ejercicio 2.6.4

Chequee el último resultado observando que S_n tiene una distribución normal con media 0 y variancia n, y luego usando el Teorema 1.2.3.

Sea χ la distribución normal estándar entonces para $a > 0$

$$P(S_n \geq na) = P(\chi \geq a\sqrt{n}) \sim \frac{1}{a\sqrt{n}} e^{-\frac{a^2 n}{2}}$$

entonces $\dfrac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \to -\dfrac{a^2}{2}$.

Distribución Exponencial (Ejemplo 2.6.2) con $\lambda = 1$

$$\begin{array}{rl} \kappa(\theta) = & -\log(1-\theta) \qquad \kappa'(\theta) = \dfrac{1}{1-\theta} \qquad \theta_a = 1 - \dfrac{1}{a} \\ \gamma(a) = & -a\theta_a + \kappa(\theta_a) = -a + 1 + \log a \end{array}$$

Con esos dos ejemplos como modelo, el lector debería ser capaz de hacer

Ejercicio 2.6.5

Sea $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. Poisson con media 1, y sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Encuentre $\lim_{n\to\infty}(1/n)\log P(S_n \geq na)$ para $a > 1$. La respuesta y otra demostración se puede encontrar en el Ejercicio 3.1.4.

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}e^{\theta X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e}\frac{e^{\theta n}}{n!} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\theta n}\cdot \frac{1}{n!} = e^{e^\theta - 1}$$

así para $a > 1$, $\kappa(\theta) = \log\varphi(\theta) = \log e^{e^\theta - 1} = e^\theta - 1$.

$a\theta - \kappa(\theta) = a\theta - (e^\theta - 1) = a\theta - e^\theta + 1$.

$\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) = \kappa'(\theta) = (e^\theta - 1)' = e^\theta$, y $\theta_a = \log a$.

Reemplazando nos da

$$\gamma(a) = -a\theta_a + \kappa(\theta_a) = -a\log a + e^{\log a} - 1 = -a\log a + a - 1 = a(1 - \log a) - 1$$

Lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(S_n \geq na) = a(1 - \log a) - 1$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} I(a) = &\ -\gamma(a) = \sup_\theta(a\theta - \log\varphi(\theta)) = a\theta_a - \kappa(\theta_a) \\ = &\ a\log a - e^{\log a} + 1 = a\log a - a + 1 = a(\log a - 1) + 1 \end{aligned}$$

Lanzamientos de monedas (Ejemplo 2.6.3) En este caso lo hacemos de una forma diferente. Para encontrar θ que hace que la media de $F_\theta = a$, igualamos $F_\theta(\{1\}) = e^\theta/(e^\theta + e^{-\theta}) = (1+a)/2$. Dejando a $x = e^\theta$ tenemos

$$2x = (1+a)(x + x^{-1}) \qquad (a-1)x^2 + (1+a) = 0$$

así $x = \sqrt{(1+a)/(1-a)}$ y $\theta_a = \log x = \{\log(1+a) - \log(1-a)\}/2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_a) = &\ \frac{e^{\theta_a} + e^{-\theta_a}}{2} = \frac{e^{\theta_a}}{1+a} = \frac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a)}} \\ \gamma(a) = &\ -a\theta_a + \kappa(\theta_a) = -\{(1+a)\log(1+a) + (1-a)\log(1-a)\}/2 \end{aligned}$$

En el Ejercicio 3.1.3, este resultado será demostrado a través de un cálculo directo. Dado que la fórmula de $\gamma(a)$ es un poco fea, la cota siguiente, que es más simple, es útil

Ejercicio 2.6.6.

Demuestre que para lanzamientos de monedas $\varphi(\theta) \leq \exp(\varphi(\theta)-1) \leq \exp(\beta\theta^2)$ para $\theta \leq 1$ donde $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)! \approx 0.586$ y use (2.6.2) para concluir que $P(S_n \geq an) \leq \exp(-na^2/4\beta)$ para todo $a \in [0,1]$. Es usual simplificar mucho más utilizando $\beta \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$.

Como $0 \leq x_0$, $1 = e^0 \leq e^{x_0}$, $\frac{e^x-1}{x} \geq 1$, así tenemos que $1+x \leq e^x$ con $x = \varphi(\theta)-1$ resulta $\varphi(\theta) \leq e^{\varphi(\theta)-1}$.

Para probar la otra desigualdad, notamos que

$$\varphi(\theta) - 1 = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} - 1 = \cos h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \leq \beta\theta^2$$

entonces

$$e^{\varphi(\theta)-1} \leq e^{\beta\theta^2}$$

Como $\varphi(\theta) = e^{\beta\theta^2}$, $\kappa(\theta) = \log\varphi(\theta) \leq \log\exp^{\beta\theta^2} = \beta\theta^2$ (2.6.3) implica que $P(S_n \geq na) \leq \exp -n\{a\theta - \beta\theta^2\}$. Tomando $\theta = a/2\beta$ para minimizar la cota superior tenemos

$$-n\left(\frac{a}{2\beta}a - \beta\left[\frac{a}{2\beta}\right]^2\right) = -n\left(\frac{a^2}{2\beta} - \frac{\beta a^2}{4\beta^2}\right) = -n\left(\frac{2a^2 - a^2}{4\beta}\right) = -n\left(\frac{a^2}{4\beta}\right)$$

así $P(S_n \geq an) \leq \exp(-na^2/4\beta)$.

Ahora vamos a concentrarnos en los valores “problemáticos” para los cuales no podemos calcular $a = \varphi'(\theta_a)/\varphi(\theta_a)$, empezamos observando que si $x_0 = \sup\{x : F(x) < 1\}$ y F no es un punto de masa en x_0 entonces $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) \uparrow x_0$ como $\theta \uparrow \infty$ pero $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) < x_0$ para todo $\theta < \infty$. Sin embargo, el resultado para $a = x_0$ es trivial:

$$\frac{1}{n}\log P(S_n \geq nx_0) = \log P(X_i = x_0) \quad \forall n$$

Ejercicio 2.6.7.

Muestre que así como $a \uparrow x_0$, $\gamma(a) \downarrow \log P(X_i = x_0)$.

Dado que $\gamma(a)$ es decreciente y mayor que $(\geq)$ $\log P(X = x_0)$ para todo $a < x_0$, sólo se debe demostrar que $\limsup \gamma(a) \leq P(P = x_0)$.

Para hacer esto empezamos observando que los cálculos para los lamzamientos de monedas, muestran que el resultado es verdadero para distribuciones que tienen dos puntos.

Si $\bar{X}_i = x_0 - \delta$ cuando $X_i \le x_0 - \delta$ y $\bar{X}_i = x_0$ cuando $x_0 - \delta < X_i \le x_0$ entonces $\bar{S_n} \ge S_n$ y por tanto $\bar{\gamma}(a) \ge \gamma(a)$, pero $\bar{\gamma}(a) \downarrow P(\bar{X}_i = x_0) = P(x_0 - \delta < X_i \le x_0)$. Como δ es arbitrario se sigue el resultado deseado.

Cuando $x_0 = \infty$, $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta) \uparrow \infty$ como $\theta \uparrow \infty$, así que el único caso que queda está cubierto por

Teorema 2.6.5.

Suponga $x_0 = \infty$, $\theta_+ < \infty$ y $\varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$ creciente a un límite finito a_0 como $\theta \uparrow \theta_+$. Si $a_0 \le a < \infty$

$$\frac{1}{n} \log P(Sn \ge na) \to -a\theta_+ + \log \varphi(\theta_+)$$

sí y sólo si $\gamma(a)$ es lineal cuando $a \ge a_0$.

Prueba. Dado que $(\log \varphi(\theta))' = \varphi'(\theta)/\varphi(\theta)$, integrando de 0 a θ_+ nos dá que $\log(\varphi(\theta_+)) < \infty$. Sea $\theta = \theta_+$ en 2.6.2 obtenemos que el $\limsup$ del lado izquierdo de la desigualdad es menor o igual ($\le$) al lado derecho de la desigualdad. Para obtener la otra dirección de la implicación vamos a utilizar la distribución transformada F_λ con $\lambda = \theta_+$. Haciendo que $\theta \uparrow \theta_+$ y aplicando el teorema de convergencia dominada para $x \le 0$ y el teorema de convergencia monótona para $x \ge 0$, podemos ver que F_λ tiene media a_0. De (*) en la prueba del Teorema 2.6.3, podemos ver que si $a_0 \le a < \nu = a + 3\epsilon$

$$P(S_n \ge na) \ge \varphi(\lambda)^n e^{-n\lambda\nu} (F_\lambda^n(n\nu) - F_\lambda^n(na))$$

y por tanto

$$\frac{1}{n} \log P(S_n \ge na) \ge \log \varphi(\lambda) - \lambda\nu + \frac{1}{n} \log P(S_n^\lambda \in (na, n\nu])$$

Sea $X_1^\lambda, X_2^\lambda, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F_λ y $S_n^\lambda = X_1^\lambda + \cdots + X_n^\lambda$ tenemos

$$\begin{aligned} P(S_n^\lambda \in (na, n\nu]) \ge\ & P\{S_{n-1}^\lambda \in ((a_0 - \epsilon)n, (a_0 + \epsilon)n]\} P\{X_n^\lambda \in ((a - a_0 + \epsilon)n, (a - a_0 + 2\epsilon)n]\} \\ \ge\ & \frac{1}{2} P\{X_n^\lambda \in ((a - a_0 + \epsilon)n, (a - a_0 + \epsilon)(n+1)]\} \end{aligned}$$

para n grande, por la ley débil de los grandes números. Para obtener una cota inferior del lado derecho de la desigualdad de la última ecuación, observamos que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(X_1^\lambda \in ((a - a_0 + \epsilon)n, (a - a_0 + \epsilon)(n+1)]) = 0$$

si el $\limsup$ es < 0, podríamos tener $\mathbb{E} \exp(\eta X_1^\lambda) < \infty$ para algún $\eta > 0$ por lo cual $\mathbb{E} \exp((\lambda + \eta) X_1) < \infty$, contradice la definición de $\lambda = \theta_+$. Para finalizar el argumento ahora recordemos que el Teorema 2.6.1 implica que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \ge na) = \gamma(a)$$

existe, así que nuestra cota inferior del $\limsup$ es suficientemente buena.$\square$

Adaptando/Ajustando la demostración del último resultado, Ud. puede demostrar que (H1) es necesario para la convergencia exponencial:

Ejercicio 2.6.8.

Suponga $\mathbb{E}X_i = 0$ y $\mathbb{E}\exp(\theta X_i) = \infty$ para todo $\theta > 0$. Entonces

$$\frac{1}{n}\log P(S_n \geq na) \to 0 \quad \forall a > 0$$

Cláramente, $P(S_n \geq na) \geq P(S_{n-1} \geq -ne)P(X_n \geq n(a+\epsilon))$. El hecho de que $\mathbb{E}e^{\theta X} = \infty$ para todo $\theta > 0$ implica que $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(S_n \geq na) = 0$, y el resultado deseado se sigue como en la demostración de (2.6.6).

Ejercicio 2.6.9.

Suponga $\mathbb{E}X_i = 0$. Demuestre que si $\epsilon > 0$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{P(S_n \geq na)}{nP(X_1 \geq n(a+\epsilon))} \geq 1$$

Pista: Defina $F_n = \{X_i \geq n(a+\epsilon)$ para exactamente un $i \leq n\}$.

Sea $p_n = P(X_i > (a+\epsilon)n)$. $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ implica

$$P\left(\max_{i\leq n} X_i > n(a+\epsilon)\right) \leq np_n \to 0$$

entonces $P(F_n) = np_n(1-p_n)^{n-1} \sim np_n$.

Si subdividimos el evento F_n e piezas (conjuntos) disjuntos de acuerdo al índice de gran valor (large value), y notando

$$P\left(|S_{n-1}| < n\epsilon \middle| \max_{i\leq n} X_i \leq n(a+\epsilon)\right) \to 0$$

por la la ley débil de los grandes números y el hecho de que el evento condicionante tiene una probabilidad que tiende a 1 ($\to 1$), se sigue el resultado deseado.
