## Especificación erronea del modelo

Particionemos el modelo de regresión lineal múltiple  $y=X\pmb{\beta}+\pmb{\epsilon}$  en la siguiente manera

$$y = X\beta + \epsilon$$

$$= (X_1, X_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \epsilon$$

$$= X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon$$

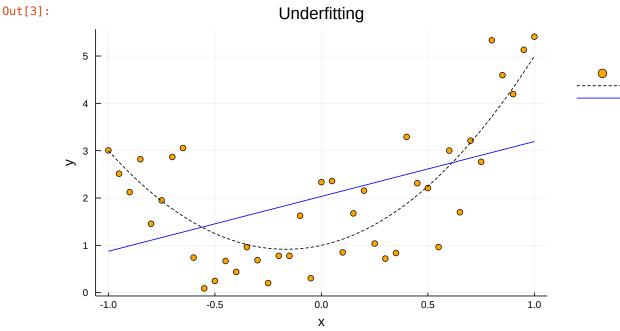
Si realizamos inferencia sin incluir  $X_2 \beta_2$  cuando los datos provienen del modelo con  $\beta_2 \neq 0$  entonces decimos que estamos subajustando (underfitting). Si incluimos  $X_2 \beta_2$  cuando los datos provienen del modelo con  $\beta_2 = 0$  decimos que estamos sobreajustando (overfitting).

Esto puede ser visualizado en el ejemplo de regresión polinomial.

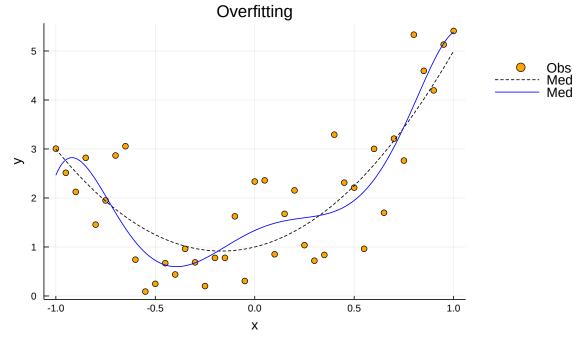
```
In [1]: using Distributions
y = [ 1.0 + x + 3.0*x^2 for x in -1:0.05:1 ] .+ rand(Normal(),41)
x = collect(-1:0.05:1)
X = zeros(41,7) # Matriz de ceros para construir X
for i in 1:41
         X[i,:] = [ 1, x[i], x[i]^2, x[i]^3, x[i]^4, x[i]^5, x[i]^6 ] # iteramos para end
X 1 = X[:,1:2];
```

```
In [2]: using Plots, Measures #, Plots.PlotMeasures # Paquete para producir imágenes default(size = (900, 400)) f(x) = 1.0 + x + 3.0*x^2 # Media cuadrática verdadera \beta_{\_} u = (X_\_1' * X_\_1)^(-1) * X_\_1' * y \beta_{\_} o = (X' * X)^(-1) * X' * y;
```

```
In [3]: # Underfitting
    f_u(x) = β_u[1] + β_u[2]*x # Media lineal dada por máxima verosimilitud al subest.
    mesh = collect(-1.0:1.0/100.0:1.0)
    scatter(x,y,color="orange",label="Observaciones")
    plot!(mesh,f.(mesh), color = :black, linestyle=:dash ,label="Media cuadrática vero plot!(mesh,f_u.(mesh), color = :blue, label="Media lineal estimada", legend=:oute    ylabel!("y")
    xlabel!("y")
    title!("Underfitting")
```







## Ortogonalización

Recordemos que al considerar dos modelos:

$$y = X_1 \beta_1^{\star} + \epsilon^{\star}$$

у

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}$$

no se tiene necesariamente que los estimadores OLS satsifacen  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{\star} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ . Observemos que si usamos el modelo con  $\boldsymbol{\beta}_1^{\star}$  cuando el modelo verdadero es el que contiene  $\boldsymbol{\beta}_1$  y  $\boldsymbol{\beta}_2$  en las ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\beta}_1^{\star}] = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\mathbb{E}[y]$$

$$= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2)$$

$$= \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

por lo que la estimación de  $\beta_1$  se ve afectada por  $X_2$  a menos que  $X_1'X_2 = 0$ . En el siguiente teorema vemos que si  $X_1'X_2 = 0$  entonces  $\hat{\beta}_1^*$  y  $\hat{\beta}_1$  más que tener el mismo valor esperado, son iguales.

**Teorema** Si  $X_1'X_2 = \mathbf{0}$  entonces  $\boldsymbol{\beta}_1$ , en el modelo completo  $\mathbf{y} = X_1\boldsymbol{\beta}_1 + X_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}$ , es igual a  $\boldsymbol{\beta}_1^{\star}$ , en el modelo reducido  $y = X_1 \beta_1^* + \epsilon^*$ .

Antes de proceder a la demostración enunciamos el siguiente Lemma para trabajar con la inversión de matrices expresadas en bloques

## Lemma Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}$$

 $\pmb{A} = \begin{pmatrix} \pmb{A}_{1,2} & \pmb{A}_{1,2} \\ \pmb{A}_{2,1} & \pmb{A}_{2,2} \end{pmatrix}$  es no singular, simétrica y tal que  $\pmb{A}_{1,1}^{-1}$  existe, y  $\pmb{B} = \pmb{A}_{2,2} - \pmb{A}_{2,1} \pmb{A}_{1,1}^{-1} \pmb{A}_{1,2}$  es invertible, entonces

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1,1}^{-1} + \boldsymbol{A}_{1,1}^{-1} \boldsymbol{A}_{1,2} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_{2,1} \boldsymbol{A}_{1,1}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{1,1}^{-1} \boldsymbol{A}_{1,2} \boldsymbol{B}^{-1} \\ -\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_{2,1} \boldsymbol{A}_{1,1}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

## Prueba del teorema

De 
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) - 1\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$
 se sigue que

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_2' \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2' \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{X}_2' \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

Usando el lemma anterior tenemos que 
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \left( \left( \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_1 \right)^{-1} + \left( \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_1 \right)^{-1} \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{X}_2' \boldsymbol{X}_1 \left( \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_1 \right)^{-1} \right) \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{y} - \left( \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_1 \right)^{-1} \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{X}_2' \boldsymbol{y}$$
Por lo que  $\boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{0}$  implica

Por lo que  $\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{0}$  implica

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{X}_1)^{-1} \boldsymbol{X}_1' \boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*$$

El resultado anterior será de ultilidad para realizar pruebas de hipótesis.

http://localhost:8888/notebooks/github/Material...