

Chapitre 1: Analyse en régime permanent des convertisseurs DC/DC

1.1 Introduction :

Les convertisseurs DC/DC sont apparus dans les années 70, cependant leur utilisation massive dans les alimentations à découpage n'a pris son essor que depuis une vingtaine d'années. En effet depuis longtemps les alimentations classiques restaient préférées pour la facilité de la mise au point de leur étage de régulation. Malgré leurs 2 grands défauts, le gros volume du transformateur abaisseur de la tension AC du secteur qu'ils exigent ainsi que les très grandes pertes dissipées dans le régulateur et dans l'étage ballast (voir figure 1.1 pour les pertes), les alimentations classiques ont prospéré jusqu'aux années 90 tant que le courant ne dépassait pas une dizaine d'ampères. Cependant, au moment où le besoin de miniaturisation des dispositifs électroniques s'est fait sentir, les difficultés de contrôle des convertisseurs DC/DC abaisseurs de tension (convertisseur Buck, convertisseur Flyback, etc..) sont devenus obsolètes car avec le temps sont apparus des circuits intégrés pour la régulation de courant et de tension qui parfois sont tellement miniatures qu'ils sont intégrés dans le transistor de puissance (exemple du circuit KA5H0385R) du convertisseur. En effet en plus des faibles pertes que présentent les convertisseurs DC/DC, ceux-ci n'exigent pas la présence d'un transformateur abaisseur de la tension AC de gros volume¹ et donc la tension AC du secteur est directement redressée et filtrée avant d'être présentée au convertisseur DC/DC. En outre, l'utilisation de fréquence de commutation de plus en plus élevée permettra l'utilisation de bobines (convertisseur Buck) et de transformateur (pour les convertisseurs Flyback) de dimension très réduite.

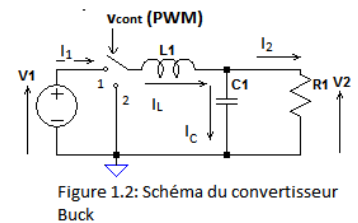
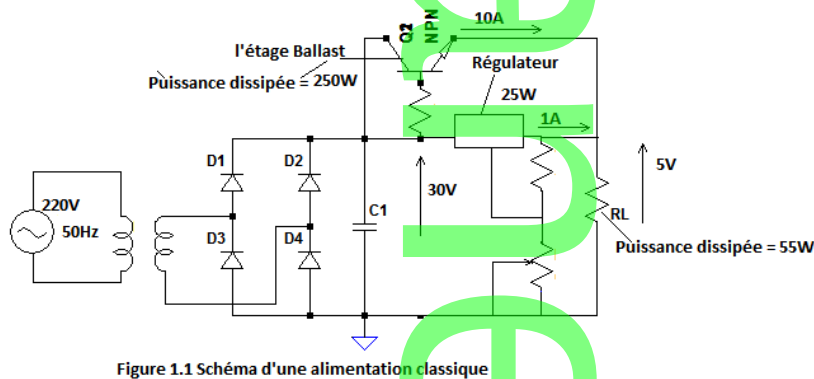
Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode d'analyse des convertisseurs DC/DC permettant la détermination des fonctions de transfert en courant et en tension $F(I) = \frac{I_2}{I_1}$ et $F(V) = \frac{V_2}{V_1}$ ², le calcul des éléments de filtrage (généralement une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C) et enfin la forme et l'amplitude des tensions et courants (voir figure 1.2). Cette méthode est basée sur l'application de 3 principes :

- 1^{er} principe : Une approximation des tensions et courants d'entrée et de sortie à leur composantes continue par la négligence des ondulations ; soit $v_1(t) = V_1 + v_{1ond} \cong V_1$, $v_2(t) = V_2 + v_{2ond} \cong V_2$ et $i_L(t) = I_L + i_{Lond} \cong I_L$ où V_1 , V_2 et I_L sont respectivement les composantes continues de $v_1(t)$, $v_2(t)$ et de $i_L(t)$.

¹ Le volume du circuit magnétique étant inversement proportionnel à la fréquence.

² I_1 et I_2 sont respectivement le courant d'entrée et de sortie du convertisseur tandis que V_1 et V_2 sont respectivement la tension d'entrée et de sortie du convertisseur.

- 2^{ème} principe : Application du principe d'équilibre de charge dans la bobine appelé aussi balance Volt-Seconde pour la détermination de la fonction de transfert en tension ainsi que la forme du courant dans la bobine.
- 3^{ème} principe : Application du principe d'équilibre de charge dans le condensateur ou balance Ampère-Seconde pour la détermination de la fonction de transfert en courant ainsi que la forme de la tension de sortie $v_2(t)$.



1.2 Analyse en régime permanent du convertisseur Buck :

Le convertisseur Buck (ainsi que d'autres convertisseurs Flyback et) appelé aussi SMPS³ est basée sur la commutation entre une source d'énergie DC (qui au fait présente une ondulation de tension d'au moins 10% due au redresseur et au condensateur de filtrage) sur la commutation d'un Switch dual tel qu'illustré dans la figure 1.2 qui commute sous le contrôle d'une source de tension PWM⁴ V_c générant un train d'impulsion de fréquence fixe $f_s = \frac{1}{T_s}$ (T_s étant la période de commutation) et de rapport cyclique $D = \frac{T_{ON}}{T_s}$ variant en fonction de la charge assurant ainsi une régulation de la tension de sortie.

1.2.1 Analyse simplifiée du convertisseur Buck :

En négligeant la présence du condensateur et de la bobine qui assurent respectivement la régulation de la tension et du courant, on peut facilement constater en considérant la figure 1.3.a que la tension de sortie $v_2(t)$ est égale à V_1 (on néglige l'ondulation présente en entrée) pendant que le switch est en position 1 (c'est-à-dire entre 0 et $T_{ON} = DT_s$ et qu'elle est nulle lorsque le switch prend la position 2 c'est-à-dire entre DT_s et T_s).

On peut facilement voir que la composante continue de $V_2(t)$ qui correspond à sa valeur moyenne est :

³ Switch Mode power Supply
⁴ Pulse Width Modulated

$$V_2 = \langle v_2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} V_1 dt + \frac{1}{T_s} \int_{DT_s}^{T_s} 0 dt = DV_1$$

Le rôle du condensateur C est d'assurer une faible ondulation en tension et donc de permettre d'avoir non la forme illustrée par la figure 1.3.b mais bien une tension continue avec une faible ondulation autour de 1%. De même par l'insertion de la bobine d'inductance L, le courant de sortie au lieu d'avoir la forme illustrée dans la figure 1.3.c est un courant continu avec une très faible ondulation.

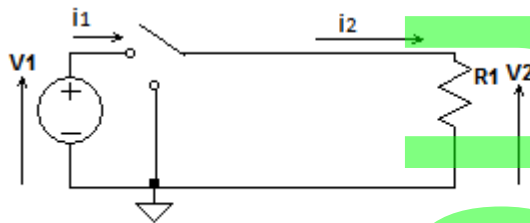


Figure 1.3.a: Schéma du convertisseur simplifié

1.2.2 Application de la méthode d'analyse en régime permanent du convertisseur Buck :

La méthode d'analyse est basée sur le respect des étapes suivantes :

- 1- Détermination des schémas équivalents⁵ aux différentes positions du switch.
- 2- En considérant le courant dans la bobine correspondant aux 2 schémas équivalents et en appliquant les principes 1 et 2 cités auparavant (négligence des ondulations sur les tensions et équilibre de charge dans la bobine), on détermine la fonction de transfert en tension ainsi que la forme du courant dans la bobine.
- 3- En considérant le courant dans le condensateur correspondant aux 2 schémas équivalents et en appliquant les principes 1 et 3 cités auparavant (négligence des ondulations sur les courants et équilibre de charge dans le condensateur), on détermine la fonction de transfert en courant ainsi que la forme de la tension dans la bobine.

Etape 1 d'analyse :

Détermination des schémas équivalents pour différentes commutation du switch :

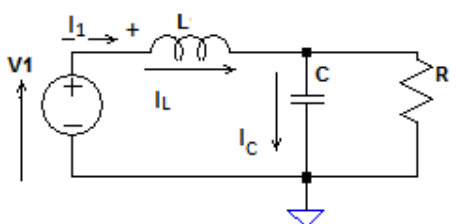


Figure 1.4.a: Schéma équivalent du convertisseur Buck avec Switch en position 1 donc pour $0 < t < DT_s$

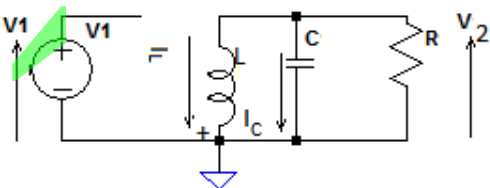


Figure 1.4.b: Schéma équivalent du convertisseur Buck avec Switch en position 2 donc pour $DT_s < t < T_s$

⁵ au fait 2 puisqu'il n'y a que 2 position du switch

Etape 2 : Calcul du courant i_L et application des 2 premiers principes

En considérant les 2 schémas équivalents et en appliquant le premier principe (la négligence des ondulations), on trouve v_L la tension aux bornes de la bobine :

$$\text{pour } 0 < t < DT_s, \quad v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = v_1(t) - v_2(t) \cong V_1 - V_2 \quad (1.1)$$

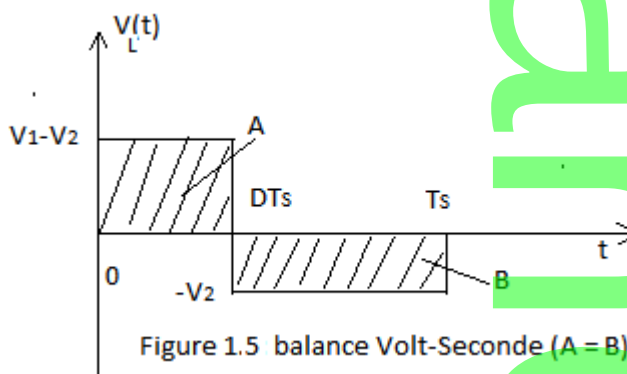
$$\text{pour } DT_s < t < T_s, \quad v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -v_2(t) \cong -V_2 \quad (1.2)$$

$$\text{On déduit l'expression } i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt \quad (1.3)$$

En appliquant le 2^{ème} principe, celui de l'équilibre de charge dans la bobine qui stipule qu'au bout d'une période de commutation du switch, la bobine se charge autant qu'elle se décharge et donc la variation du courant de charge au bout d'une période de commutation est nulle, on déduit donc :

$$i_L(T_s) - i_L(0) = \frac{1}{L} \int_0^{DT_s} (V_1 - V_2) dt + \frac{1}{L} \int_{DT_s}^{T_s} -V_2 dt = 0 \quad (1.4)$$

En éliminant l'inductance, nous obtenons l'égalité des surfaces Volt-seconde A et B correspondantes à la charge et à la décharge que l'on appelle balance Volt-Seconde :



$$\frac{1}{L} \int_0^{DT_s} (V_1 - V_2) dt = \frac{1}{L} \int_{DT_s}^{T_s} V_2 dt \quad (1.5)$$

De l'équation 1.5, on déduit :

$$(V_1 - V_2)DT_s - V_2T_s(1-D) = 0 \rightarrow V_1D - V_2 = 0$$

$$\text{D'où la fonction de transfert en tension } F(V) = \frac{V_2}{V_1} = D \quad (1.6)$$

Détermination de la forme du courant $i_L(t)$:

En considérant l'équation 1.1, on peut noter que la variation du courant dans la bobine se fait autour d'une valeur continue I_L et est de la forme d'une rampe de

pente positive $(V_1 - V_2)/L$ entre 0 et DT_s (la bobine se charge) et négative $-V_2/L$ entre DT_s et T_s (la bobine se décharge).

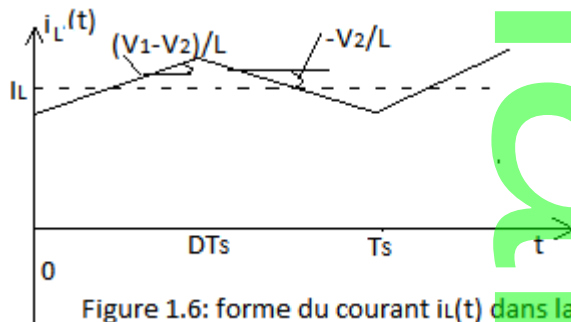


Figure 1.6: forme du courant $i_L(t)$ dans la bobine

3^{ème} Etape : Calcul de la tension aux bornes du condensateur et application du principe 1 et du principe 3

En considérant les 2 schémas équivalents (Figure 1.4.a et Figure 1.4.b), nous avons :

$$i_c(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = i_L(t) - i_2(t) \text{ pour } 0 < t < DT_s \quad (1.7)$$

$$\text{et } i_c(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = i_L(t) - i_2(t) \text{ pour } DT_s < t < T_s \quad (1.8)$$

En appliquant le 1^{er} principe (l'approximation), nous avons donc pour les différentes commutations :

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = I_L - I_2 \quad (1.9)$$

On déduit alors :

$$v_C(t) = v_2(t) = \frac{1}{C} \int I_L - I_2 dt \quad (1.10)$$

En appliquant le 3^{ème} principe ; celui de l'équilibre de charge dans le condensateur qui stipule que la tension aux bornes du condensateur se charge autant qu'elle se décharge autour d'une valeur continue V_2 , on déduit qu'au bout d'une période de commutation la variation de la tension aux bornes du condensateur est nulle, donc :

$$v_C(t) = v_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^{T_s} (I_L - I_2) dt + \frac{1}{C} \int_{DT_s}^{T_s} (I_L - I_2) dt \quad (1.11)$$

La seule solution de l'équation 1.11 est donc que $I_L = I_2$ et donc que le courant continu dans le condensateur est nul, ce qui est évident puisqu'un condensateur se comporte comme un circuit ouvert pour un courant continu.

- Détermination de la fonction de transfert en courant $F(I) = \frac{I_2}{I_1}$:

En considérant les 2 schémas équivalents (Figure1.4.a et Figure1.4.b), nous remarquons que i_1 est égal à i_L pour $0 < t < DT_s$ et $i_1 = 0$ pour $DT_s < t < T_s$, on déduit alors :

$$I_1 = \langle i_1 \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} I_L dt + \frac{1}{T_s} \int_{DT_s}^{T_s} 0 dt = DI_L = DI_2 \quad (1.12)$$

$$\text{d'où } F(I) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{D}$$

- Calcul de l'impédance d'entrée Z_e :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{V_2}{I_2} \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{D} R \frac{1}{D} = \frac{R}{D^2} \quad (1.13)$$

-Détermination de la forme de la tension aux bornes du condensateur :

L'impédance transitoire du condensateur de filtrage étant très petite devant la résistance de charge, on peut considérer que le courant transitoire ne circule que dans le condensateur. On déduit donc que le courant $i_c(t)$ est égal à la composante ondulatoire de $i_L(t)$. On remarque que cette composante varie de $\pm \Delta I_C = \pm \Delta I_L$ autour de 0 pour $i_C(t)$ et autour de I_L pour $i_L(t)$ avec :

$$|\Delta I_C| = \frac{V_1 - V_2}{2L} DT_s = \frac{V_2}{2L} (1-D) T_s \quad (1.14)$$

La tension $v_c(t)$ étant égale à $\frac{1}{C} \int i_c(t) dt$ variera donc sous forme parabolique, pour déterminer l'ondulation maximale, nous allons utiliser l'astuce suivante :

En considérant la figure illustrant le courant $i_c(t)$, on remarque que la surface hachurée correspondante au courant positif représente la charge ΔQ accumulée au moment de charge du condensateur, tandis que pour le courant i_c négatif cela correspond à la charge ΔQ restituée donc au moment de décharge du condensateur. La tension $v_c(t)$ est donc croissante pour i_c positif et décroissante pour i_c négatif.

ΔQ étant la surface du triangle dont la hauteur est $|\Delta I_C| = \frac{V_2}{2L} (1-D) T_s$ et de côté $T_s/2$, on déduit :

$$\Delta Q = \frac{V_1 - V_2}{8L} DT_s^2 \quad (1.15)$$

En considérant la charge du condensateur, on sait que cette charge ΔQ se fait pendant que la tension $v_c(t)$ passe de sa valeur minimale à sa valeur maximale, on déduit donc

$$\Delta Q = 2 \Delta V_C C \quad (1.16)$$

A partir de ces 2 dernières équations, on trouve alors :

$$\Delta V_c = \Delta V_2 = \frac{V_1 - V_2}{16CL} DT_s^2 = \frac{V_2}{16CL} (1-D) T_s^2 \quad (1.17)$$

Calcul de l'inductance de filtre :

En imposant le taux d'ondulation en courant et en considérant l'équation 1.14, on calcule la valeur d'inductance nécessaire :

Soit le taux d'ondulation du courant $\tau_i = \frac{\Delta I_L}{I_L}$ avec $I_L = I_2 = \frac{V_2}{R}$. En remplaçant

l'expression de ΔI_L et de I_L , on a alors :

$$\tau_i = \frac{\Delta I_L}{I_L} = \frac{\frac{V_2}{2L} (1-D) T_s}{\frac{V_2}{R}} = \frac{R(1-D) T_s}{2L}$$

(1.18)

D'où
$$L = \frac{R(1-D) T_s}{2\tau_i} \quad (1.19)$$

Remarquons que l'ondulation de courant dans la bobine n'est pas une grandeur qui peut affecter les grandeurs de sortie du convertisseur, et donc que cette ondulation soit grande ou petite, cela n'affectera que l'ondulation de tension de sortie, comme nous allons le voir dans le calcul du condensateur de filtrage. Or, dans la pratique, on préfère parfois avoir de grands taux d'ondulation de courant (jusqu'à 100 % pour le mode de conduction continu et supérieur à 100 % pour le mode de conduction discontinu que nous étudierons par la suite), quitte à utiliser de gros condensateurs de filtrage, plutôt que d'utiliser de grosses inductances qui risquent d'être très encombrantes.

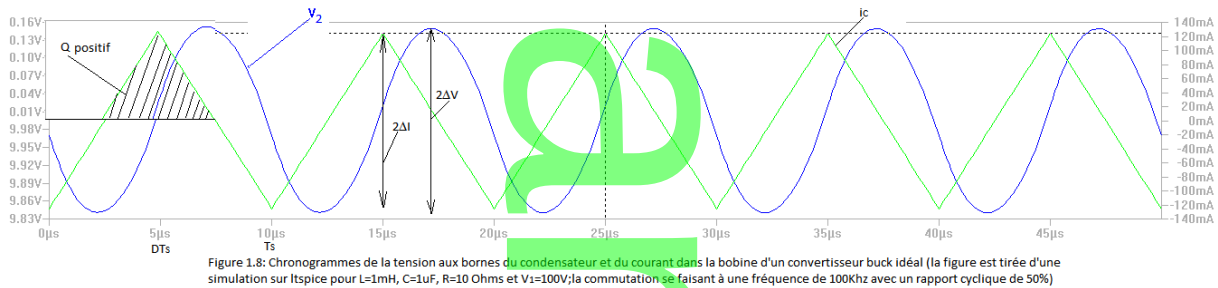
Calcul du condensateur de filtrage :

En imposant un taux d'ondulation en tension, nous avons :

$$\tau_v = \frac{\Delta V_2}{V_2} = \frac{V_2}{16CL} (1-D) T_s^2 \quad (1.20)$$

D'où $C = \frac{(1-D) T_s^2}{16L\tau_v}$ et en remplaçant l'expression de L, on a alors :

$$C = \frac{(1-D)T_s^2}{16\tau_v \frac{R(1-D)T_s}{2\tau_I}} = \frac{2T_s\tau_I}{16R\tau_v} = \frac{T_s\tau_I}{8R\tau_v} \quad (1.21)$$



1.3. Analyse en régime permanent du convertisseur Boost :

Le convertisseur Boost est un convertisseur DC/DC qui présente une tension de sortie plus élevée que celle de l'entrée. Il est en général utilisé dans les centrales photovoltaïques comme interface entre les panneaux solaires (ainsi que les batteries) et l'onduleur. Nous présentons dans la figure 1.10 le schéma d'un convertisseur Boost idéal constitué d'un switch dual. Dans la pratique, un tel switch n'existe pas mais est plutôt réalisé par un transistor de puissance bipolaire ou Mosfet et une diode tel qu'illustré dans la figure 1.11.

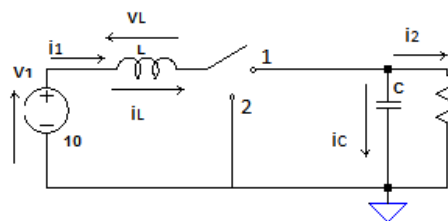


Figure 1.10: Schéma du convertisseur Boost idéal

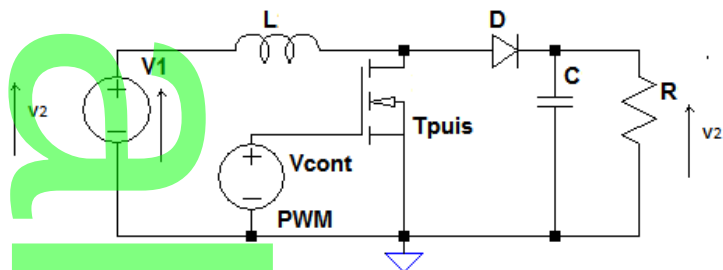


Figure 1.11: Schéma d'un convertisseur Boost réel

Application de la méthode d'analyse en régime permanent sur le convertisseur Boost :

1^{ère} étape) Détermination des schémas équivalents (Figure 1.12) correspondants aux différentes commutations du switch :

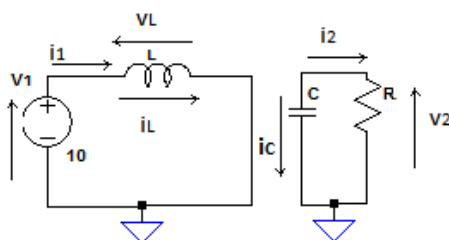


Figure 1.12.a: Schéma équivalent du convertisseur Boost pour le switch en position 1 ($0 < t < DT_s$)

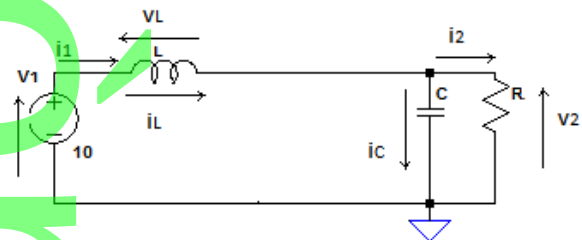


Figure 1.12.b: Schéma équivalent du convertisseur Boost pour le switch en position 2 ($DT_s < t < Ts$)

2^{ème} étape) Application du principe d'approximation et du principe de l'équilibre de charge dans la bobine et détermination de la fonction de transfert en tension du convertisseur DC/DC:

Pour $0 < t < DT_s$, nous avons $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = V_1 \rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{V_1}{L}$ (1.22)

Pour $DT_s < t < T_s$, nous avons :

$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = V_1 - v_2(t) \cong V_1 - V_2 \rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{L}$ (1.23)

A partir des équations 1.22 et 1.23, nous pouvons déduire les formes illustrées dans la figure 1.13.

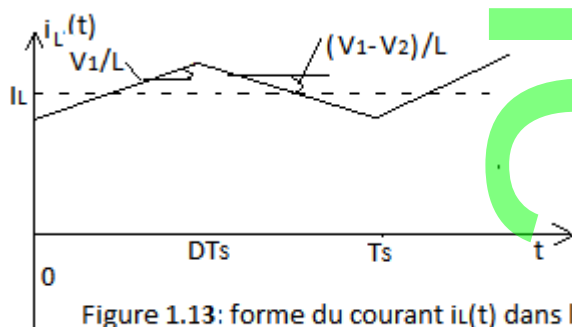


Figure 1.13: forme du courant $i_L(t)$ dans la bobine du convertisseur Boost

Détermination de la fonction de transfert en tension :

En appliquant le principe de l'équilibre de charge dans la bobine, nous avons après une période de commutation du switch $i_L(T_s) = i_L(0)$.

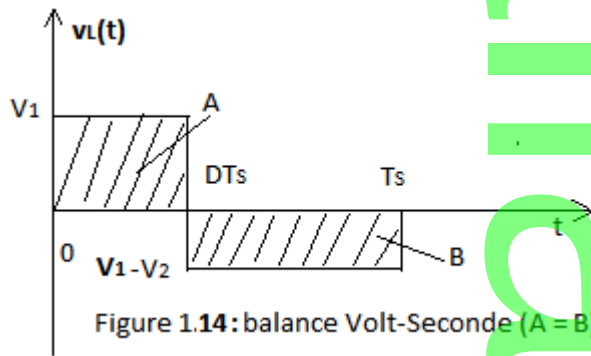
A partir des équations 1.22 et 1.23, on trouve :

$$i_L(T_s) - i_L(0) = \frac{1}{L} \int_0^{DT_s} V_1 dt + \frac{1}{L} \int_{DT_s}^{T_s} (V_1 - V_2) dt = 0 \quad (1.24)$$

En éliminant l'inductance, nous obtenons l'égalité des surfaces Volt-seconde A et B correspondantes

à la charge et à la décharge que l'on appelle balance Volt-Seconde :

$$\frac{1}{L} \int_0^{DT_s} V_1 dt = \frac{1}{L} \int_{DT_s}^{T_s} (V_1 - V_2) dt \quad (1.25)$$



De l'équation 1.25, on déduit :

$$V_1 D + (V_1 - V_2)(1 - D) = 0 \rightarrow V_1 - V_2(1 - D) = 0 \rightarrow F(V) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 - D} \quad (1.26)$$

3^{ème} Etape) Calcul de la tension aux bornes du condensateur et application du principe 1 et du principe 3 :

En considérant les 2 schémas équivalents (Figure 1.12.a et Figure 1.12.b), on peut remarquer qu'en tout moment $i_L(t) = i_1(t)$, nous déduisons donc les 2 équations suivantes :

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = -i_2(t) \text{ pour } 0 < t < DT_s \quad (1.27)$$

$$\text{et } i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \text{ pour } DT_s < t < T_s \quad (1.28)$$

En appliquant le 1^{er} principe (l'approximation), nous avons donc pour les différentes commutations :

$$\text{pour } 0 < t < DT_s : C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = -I_2 \quad (1.29)$$

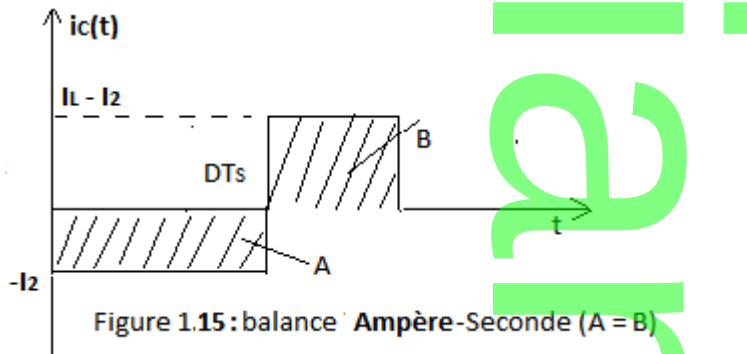
$$\text{pour } DT_s < t < T_s \quad C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt} = I_1 - I_2 \quad (1.30)$$

En appliquant le 3^{ème} principe ; celui de l'équilibre de charge dans le condensateur qui stipule que la tension aux bornes du condensateur se charge autant qu'elle se décharge autour d'une valeur continue V_2 , on déduit qu'au bout d'une période de commutation la variation de la tension aux bornes du condensateur est nulle, donc :

$$v_C(t) = v_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^{T_s} -I_2 dt + \frac{1}{C} \int_{DT_s}^{T_s} (I_1 - I_2) dt = 0 \quad (1.31)$$

En éliminant la capacité, nous avons l'égalité des surfaces Ampère-Seconde A et B correspondantes à la charge et à la décharge du condensateur C, égalité que l'on exprime par le principe de la balance Ampère-Seconde :

$$\int_0^{DT_s} -I_2 dt = \int_{DT_s}^{T_s} (I_1 - I_2) dt \quad (1.32)$$



En considérant la figure 1.15, nous pouvons noter que le condensateur se décharge au moment où la bobine se charge.

- Détermination de la fonction de transfert en courant $F(I) = \frac{I_2}{I_1}$:

De l'équation 1.32, en éliminant T_s présent dans les 2 membres de l'équation, on déduit :

$$-I_2 D + (I_1 - I_2)(1-D) = 0 \rightarrow I_1(1-D) - I_2 = 0 \rightarrow F(I) = \frac{I_2}{I_1} = (1-D) \quad (1.33)$$

- Calcul de l'impédance d'entrée Z_e :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{V_2}{I_2} \frac{I_2}{I_1} = (1-D) R \frac{1}{(1-D)} = R \quad (1.34)$$

-Détermination de la forme de la tension aux bornes du condensateur :

En considérant les équations 1.29 et 1.30, on peut remarquer que la tension $v_c(t)$ a la forme d'une rampe de pente négative pour le switch en position 1 (décharge du condensateur) et de pente positive en position 2 (charge du condensateur).

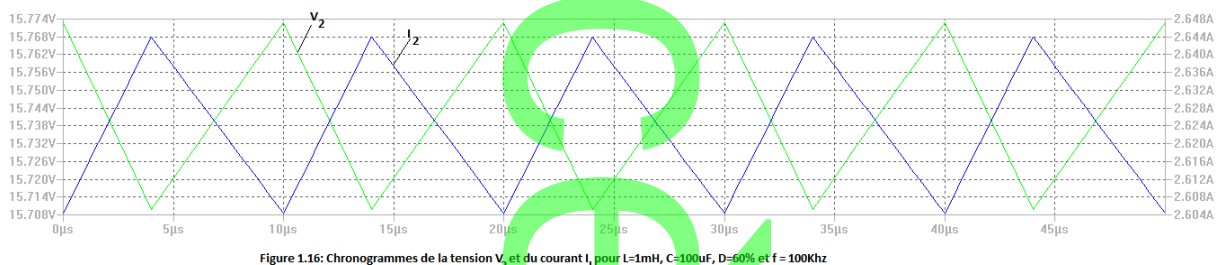


Figure 1.16: Chronogrammes de la tension V_2 et du courant I_2 pour $L=1\text{mH}$, $C=100\mu\text{F}$, $D=60\%$ et $f=100\text{KHz}$

1.4. Analyse en régime permanent du convertisseur DC/DC réel :

Dans la pratique, le switch dual est généralement constitué d'un transistor et d'une diode (voir figure 1.11). Les fonctions de transfert en courant et en tension devraient donc changer selon les pertes dans le transistor, dans la

diode, dans la bobine ainsi que dans le condensateur. Les pertes dans le condensateur peuvent être négligées si on travaille avec des condensateurs en propylène multicouche. Le schéma du convertisseur réel serait donc tel qu'illustré dans la figure 1.20 (convertisseur Boost non idéal) si on ne considère pas les effets réels de la commutation sur les diodes et les transistors.

Nous allons dans cette section aborder l'analyse en régime permanent des convertisseurs non idéaux en tenant compte uniquement des pertes résistives dans la diode et le transistor et la tension de seuil aux bornes de la diode en assimilant les convertisseurs idéaux à des transformateurs parfaits « continus » et en utilisant ainsi une technique très utilisée dans le calcul des transformateurs et qui est celle des schémas équivalents ramenés au primaire et au secondaire.

1.4.1. Analyse du convertisseur Buck non idéal :

En tenant compte de la résistance R_{on} du transistor et la résistance R_d ainsi que la tension de seuil de la diode, le schéma équivalent du convertisseur Buck non idéal devient tel qu'illustré dans la figure 1.17.

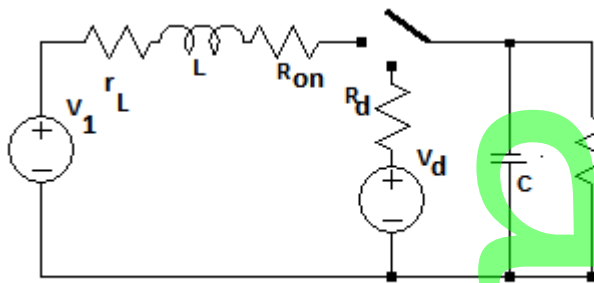


Figure 1.17: Schéma du convertisseur Buck non idéal

Etape 1: Détermination des schémas équivalents pour les différentes positions du switch :

Etape 2 : Détermination de la tension aux bornes de la bobine et application du principe d'équilibre de charge dans la bobine :

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \cong V_1 - V_2 - r_L i_L - R_{on} i_L$$

Application du principe d'équilibre de charge dans la bobine :

$$\langle v_L(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} (V_1 - V_2) - (r_L + R_{on}) I_L dt + \frac{1}{T_s} \int_{DT_s}^{T_s} (-V_2 + V_d) + (r_L + R_d) I_L dt = 0 \quad (1.35)$$

De l'équation (1.35), on déduit :

$$DV_1 = (DR_{on} + r_L + D'R_d) I_L + V_d + D'V_d \quad (1.36)$$

Etape 3 : Détermination de $i_c(t)$ lors des commutations des switches :

Si on considère les schémas équivalents de la figure 1.18, on voit bien qu'en ce qui concerne les courants, nous avons les mêmes relations qui lient les courants I_L , I_2 et $i_c(t)$ du convertisseur Buck idéal. Nous déduisons donc :

$$I_L = I_2 \text{ et } i_1 = DI_2$$

En remplaçant I_L par I_2 dans l'expression de l'équation 1.36, on trouve :

$$DV_1 = (DR_{on} + r_L + D'R_d)I_2 + V_d + D'V_d \quad (1.37)$$

Or DV_1 est la tension de sortie d'un convertisseur Buck idéal excité en entrée par une tension V_1 , on déduit donc le schéma équivalent du convertisseur non idéal :

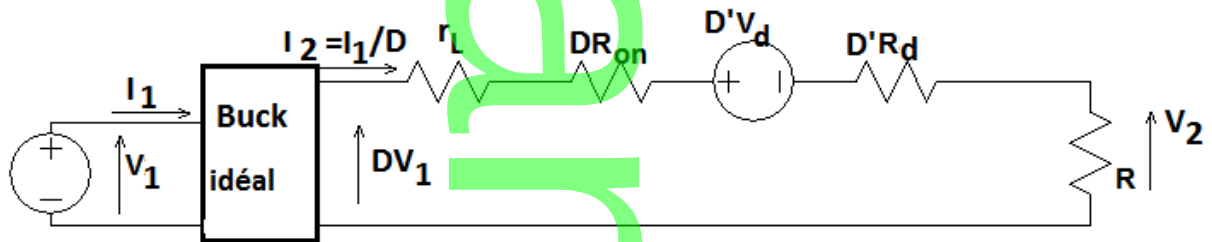


Figure 1.19: Schéma équivalent du convertisseur Buck non idéal

Calcul du rendement du convertisseur Buck non idéal :

A partir du schéma de la figure 1.19, nous avons :

$$V_2 = \frac{R}{r_L + DR_{on} + D'R_d + R} (DV_1 - D'V_d)$$

La fonction de transfert en tension du convertisseur Buck non idéal est alors :

$$F(D) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\frac{r_L + DR_{on} + D'R_d}{R} + 1} D \left(1 - \frac{D'V_d}{DV_1} \right)$$

Sachant que $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{D}$, on déduit donc le rendement du convertisseur Buck non idéal :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\frac{r_L + DR_{on} + D'R_d}{R} + 1} \left(1 - \frac{D'V_d}{DV_1} \right)$$

1.4.2. Analyse du convertisseur Boost non idéal :

En tenant compte de la résistance R_{on} du transistor et la résistance R_d ainsi que la tension de seuil de la diode, le schéma équivalent du convertisseur Boost non idéal devient tel qu'illustré dans la figure 1.20.

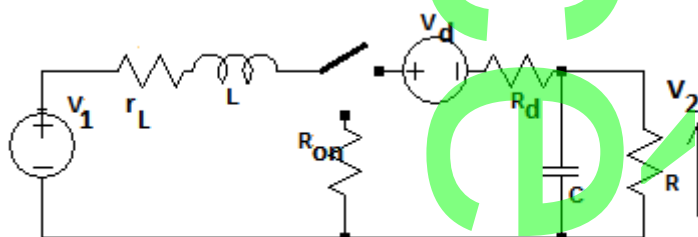


Figure 1.20: Schéma du convertisseur Boost non idéal

Etape 1 : Détermination des schémas équivalents correspondants aux différentes commutations du switch :

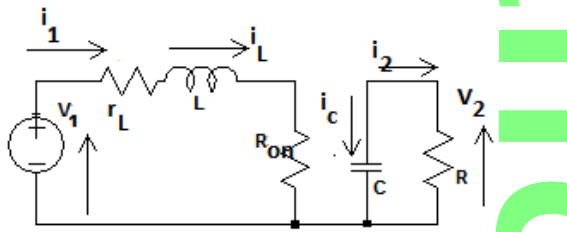


Figure 1.21.a: Schéma équivalent du convertisseur Boost non idéal pour $0 < t < DT_s$

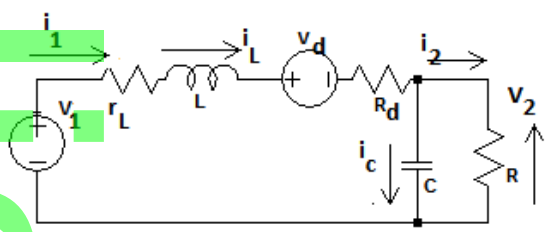


Figure 1.21.b: Schéma équivalent du convertisseur Boost non idéal pour $DT_s < t < T_s$

Etape 2 : Détermination de la tension aux bornes de la bobine et application du principe d'équilibre de charge dans la bobine :

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \cong V_1 - r_L i_L - R_{on} i_L \text{ pour } 0 < t < DT_s \text{ et } v_L(t) \cong V_1 - V_2 \text{ pour } DT_s < t < T_s$$

Application du principe d'équilibre de charge dans la bobine :

$$\langle v_L(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} (V_1 - (r_L + R_{on}) I_L) dt + \frac{1}{T_s} \int_{DT_s}^{T_s} (V_1 - V_2 + V_d + (r_L + R_d) I_L) dt = 0 \quad (1.41)$$

De l'équation (1.38), on déduit :

$$V_1 = (DR_{on} + r_L + D'R_d) I_L + D'V_2 + D'V_d \quad (1.42)$$

Etape 3 : Détermination de $i_c(t)$ lors des commutations des switches :

Si on considère les schémas équivalents des figures 1.21.a et 1.21.b, on voit bien qu'en ce qui concerne les courants, nous avons les mêmes relations qui lient les courants I_L , I_2 et $i_c(t)$ du convertisseur Boost idéal. Nous déduisons donc :

$$I_L = I_1 \text{ et } I_1 = \frac{I_2}{(1-D)} = \frac{I_2}{D'}$$

En remplaçant I_L par I_2 dans l'expression de l'équation 1.42, on trouve :

$$V_1 = (DR_{on} + r_L + D'R_d) \frac{I_2}{D'} + D'V_d + D'V_2 \quad (1.43)$$

Or $D'V_2$ est la tension d'entrée du convertisseur Boost idéal ayant une tension de sortie V_2 , on déduit donc le schéma équivalent du convertisseur non idéal :

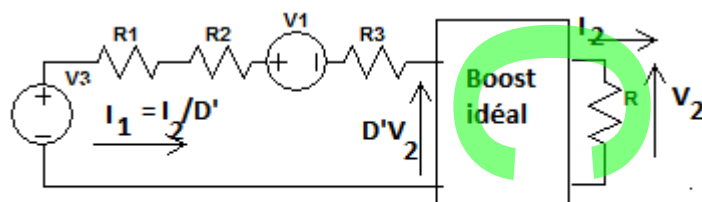


Figure 1.22: Schéma équivalent du convertisseur Boost non idéal

$$\text{Or, } V_2 = R I_2 \rightarrow D'V_2 = D'RI_2 = D'^2RI_1 \text{ puisque } I_2 = D'I_1.$$

Si on utilise les notations appliquées aux transformateurs ; primaire pour les grandeurs d'entrées et secondaire pour les grandeurs de sortie du convertisseur idéal, nous déduisons alors le schéma équivalent du convertisseur Boost non idéal ramené au primaire :

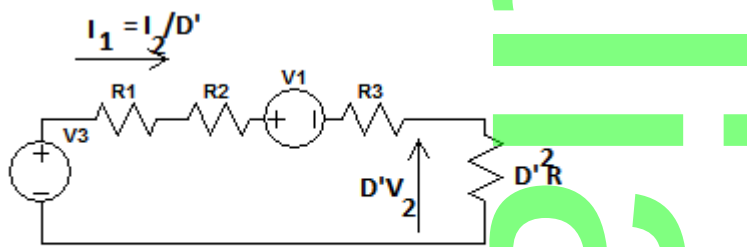


Figure 1.23: Schéma équivalent du convertisseur Boost non idéal ramené au primaire

Calcul du rendement du convertisseur Boost non idéal :

Du schéma équivalent de la figure 1.23, nous déduisons :

$$D'V_2 = \frac{D'^2 R}{r_L + DR_{on} + D' R_d + D'^2 R} (V_1 - D' V_d) \rightarrow$$

$$V_2 = \frac{1}{D'} \frac{D'^2 R}{r_L + DR_{on} + D' R_d + D'^2 R} (V_1 - D' V_d) \quad (1.44)$$

La fonction de transfert en tension du convertisseur Buck non idéal est alors :

$$F(D) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{D'} \frac{D'^2 R}{r_L + DR_{on} + D' R_d + D'^2 R} (V_1 - D' V_d)$$

(1.45)

Sachant que $\frac{I_2}{I_1} = D'$, on déduit donc le rendement du convertisseur Buck non idéal :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\frac{r_L + DR_{on} + D' R_d}{D'^2 R} + 1} \left(1 - \frac{D' V_d}{V_1}\right) \quad (1.46)$$

1.5 Analyse en régime permanent des convertisseurs DC/DC en mode de conduction discontinu :

Jusqu'à maintenant, nous avons analysé les convertisseurs DC/DC en mode de conduction continu où nous avons prévu le passage d'un courant continu dans la bobine. Dans la pratique cette situation ne peut être possible que pour de faibles valeurs de courant continu et cela en raison de la saturation du circuit magnétique de la bobine. En effet, pour la ferrite l'induction maximale au-delà de laquelle il y a risque de saturation n'est que de l'ordre de 0,5 Tesla (2 T pour l'acier au silicium), or plus le courant continu est élevé et plus on se rapproche de l'induction maximale. Pour de plus grands courants et également pour assurer une isolation galvanique dans le cas des alimentations à découpage, d'autres convertisseurs à base de transformateurs sont utilisés et ne fonctionnent qu'en mode discontinu (cas des convertisseurs flyback, forward et push-pull). Le mode de conduction discontinu peut également apparaître dans le cas d'une faible charge. Les convertisseurs fonctionnent en mode de conduction discontinue dès lors que l'ondulation de courant dans la bobine devient plus importante que le

courant moyen I_L . Dans ce mode, le courant dans la bobine est alors caractérisé par 3 phases ; une phase de charge, une phase de décharge et enfin une phase de temps mort (died time) pendant laquelle, le courant dans la bobine reste nulle (voir figure 1.24). Avant de présenter l'analyse en régime permanent en mode de conduction discontinue, nous allons définir un coefficient K caractérisant les éléments que comporte le convertisseur (l'inductance, la résistance et la période de commutation) ainsi qu'un autre coefficient critique K_{crit} (dépendant uniquement du rapport cyclique du signal PWM contrôlant les switches) pouvant être utilisés pour caractériser le mode de conduction.

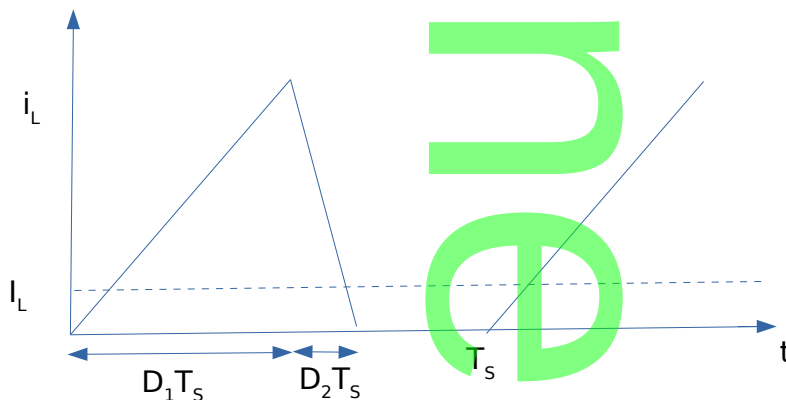


Figure 1.24. Chronogramme du courant dans la bobine en mode de conduction discontinu (DCM). (notons que $D_1 = D$: rapport cyclique de fermeture du switch 1)

1.5.1. Conditions du mode de condition discontinu pour le convertisseur Buck et Boost:

Le mode de conduction discontinue a lieu lorsque Le courant moyen $I_2 = V_2/R$ est inférieur à ΔI_L .

Cas du convertisseur Buck :

celui-ci est en mode de conduction continue lorsque:

$$\frac{V_2}{R} < \frac{V_2}{2L} D' T_s \text{ et donc } \frac{2L}{RT_s} < D' \quad (1.47)$$

On peut donc Définir un coefficient $K = \frac{2L}{RT_s}$ et une valeur critique $K_{crit} = D'$ tel que le convertisseur soit en mode CCM⁶ pour $K > K_{crit}$ avec $K_{crit} = D'$ et inversement en mode DCM⁷ pour $K_{crit} < D'$.

La valeur maximale de D' étant égale à 1, nous déduisons déjà que le convertisseur Buck est toujours en mode CCM tant que $K > 1$.

Pour $K < 1$, nous pouvons déterminer de façon graphique les lieux pour lesquels $K > K_{crit}$ ou $K < K_{crit}$ en traçant K_{crit} en fonction de D .

⁶ Continued Current Mode

⁷ Discontinued Current Mode

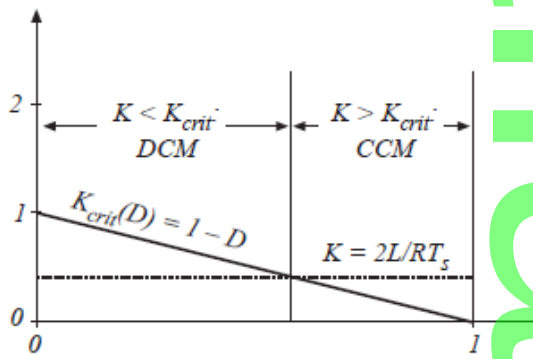


Figure 1.24a: Modes de conduction pour $K < 1$

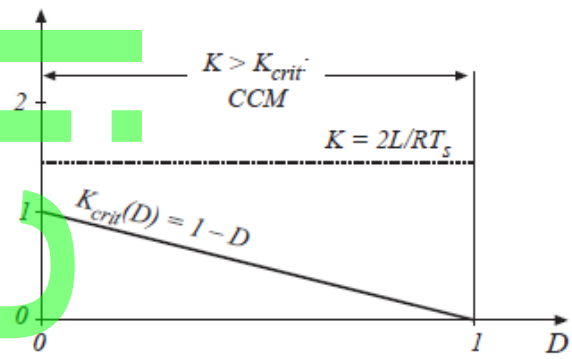


Figure 1.24.b: Modes de conduction pour $K > 1$

Cas du convertisseur Boost :

Celui-ci est en mode de conduction discontinue (DCM) pour $I_L = \frac{V_2}{D'R} < \frac{V_1}{2L}DT_s$

Or à la limite du mode de conduction continu, nous avons toujours $V_1 = D'V_2$ et donc :

le convertisseur est en mode DCM pour

$$\frac{V_2}{R} < \frac{V_2 D D'^2 T_s}{2L} \rightarrow K = \frac{2L}{RT_s} < D D'^2 = D(1-D)^2 = K_{crit} \quad (1.48)$$

Calcul de $K_{critmax}$:

$$\frac{dK_{crit}}{dD} = (1-D)^2 - 2D(1-D) = 0 \rightarrow 3D^2 - 4D + 1 = 0$$

$\Delta' = 4 - 3 = 1 \rightarrow D = \frac{1}{3}$, la solution $D=1$ ne peut pas être retenue car $K_{crit}=0$

On déduit donc $K_{critmax} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27} = 0,148$.

Pour $K > \frac{4}{27}$, le convertisseur Boost est donc toujours en mode de conduction

continu (CCM). Pour $K < \frac{4}{27}$, les modes du convertisseur Boost dépendent de D et de K et sont illustrées dans la figure 1.25.

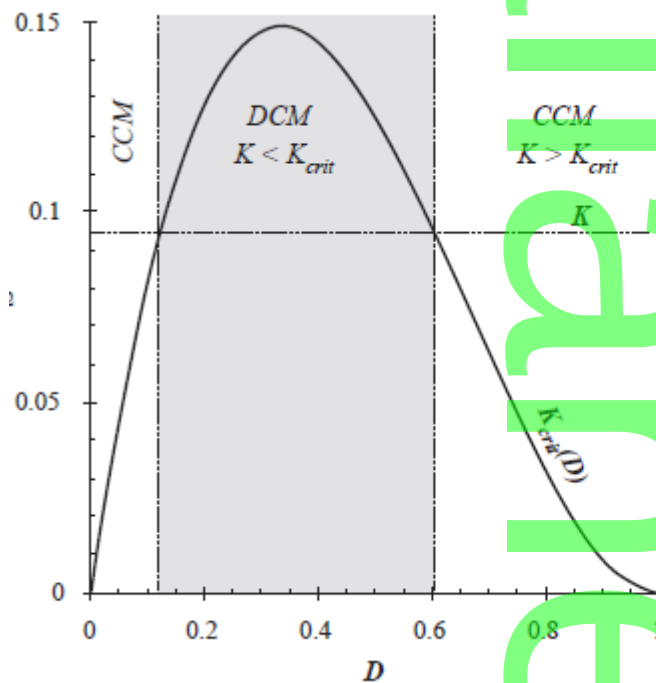


Figure 1.25: Modes de conduction du convertisseur Boost en fonction de D , K et K_{crit}

1.5.2 Analyse en régime permanent du convertisseur Buck en mode de conduction discontinue :

La méthode d'analyse est la même que celle que l'on a appliqué jusqu'à maintenant pour les convertisseurs idéaux (équilibre de charge dans la bobine et dans le condensateur) avec cependant 2 différences :

- Nous aurons 3 phases et non 2 (charge de la bobine pendant une durée $D_1 T_s$ (D_1 étant le rapport cyclique (D), décharge de la bobine pendant une durée $D_2 T_s$ et enfin un temps mort $D_3 T_s = (1 - D_1 - D_2) T_s$ pendant lequel la bobine n'est parcourue par aucun courant).
- Le principe d'approximation appliqué sur le courant de la bobine ($i_L(t) \cong I_L$) n'est plus possible puisque les ondulations de courant sont supérieures au courant continu dans la bobine.

1^{ère} étape d'analyse : Détermination des schéma équivalents:

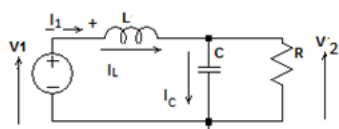


Figure 1.26.a : Schéma équivalent du convertisseur Buck avec Switch en position 1 donc pour $0 < t < D_1 T_s$

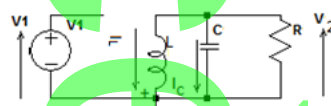


Figure 1.26.b : Schéma équivalent du convertisseur Buck avec Switch en position 2 donc pour $D_1 T_s < t < (D_1 + D_2) T_s$

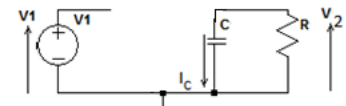


Figure 1.26.c : Schéma équivalent du convertisseur Buck entre $(D_1 + D_2) T_s$ et T_s

2^{ème} étape d'analyse : application du principe d'équilibre de charge dans la bobine :

durant $D_1 T_s$ (remarquons que $D_1 = D$), $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = v_1(t) - v_2(t) \cong V_1 - V_2$

durant $D_2 T_s$, $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -v_2(t) \cong -V_2$

enfin durant le temps mort $D_3 T_s = (1 - D_1 - D_2) T_s$, $v_L(t) = 0$

En appliquant le principe d'équilibre de charge dans la bobine, nous obtenons :

$$\langle v_L(t) \rangle = 0 = \frac{1}{T_s} [(V_1 - V_2) D_1 T_s - V_2 D_2 T_s] \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{D_1}{D_1 + D_2} \quad (1.49)$$

Remarquons pour le moment que D_2 reste inconnu.

3^{ème} étape : application du principe d'équilibre de charge dans le condensateur

Remarquons que dans le cas des convertisseurs en mode de conduction discontinue, nous ne pouvons plus appliquer l'approximation du courant $i_L(t) = I_L$ puisque l'ondulation de courant est plus élevée que le courant continu dans la bobine. Nous pouvons cependant appliquer le principe de charge dans le condensateur qui stipule que $\langle i_C(t) \rangle = 0$ et donc déduire que le courant moyen dans la bobine est égale au courant continu $I_2 = \frac{V_2}{R}$.

Etant donné que le courant moyen dans la bobine est l'intégrale du courant $i_L(t)$ durant la période de commutation T_s divisée par T_s , on peut donc déduire que

$\langle i_L(t) \rangle = \frac{S_L}{T_s}$ où S_L est la surface hachurée illustrée dans la figure 1.27.

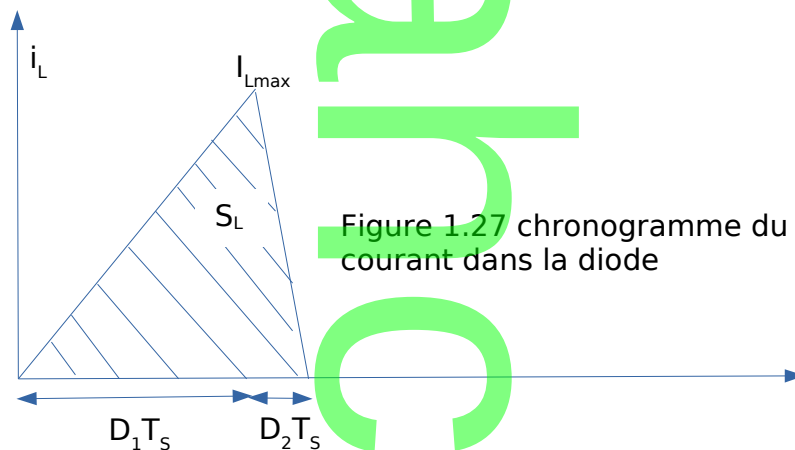


Figure 1.27 chronogramme du courant dans la diode

Nous avons $S = \frac{1}{2} i_{Lmax} (D_1 + D_2) T_s$ où $i_{Lmax} = \frac{(V_1 - V_2)}{L} D_1 T_s = \frac{V_2}{L} D_2 T_s$ et donc on déduit :

$$\langle i_L(t) \rangle = I_2 = \frac{V_2}{R} = \frac{1}{2} (D_1 + D_2) \frac{(V_1 - V_2)}{L} D_1 T_s \quad (1.50)$$

A partir de l'équation 1.50, nous obtenons :

$$\left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) (D_1 + D_2) D_1 = \frac{2L}{RT_s} = K \quad (1.51)$$

De l'équation 1.49, nous avons $(D_1 + D_2) = D_1 \frac{V_1}{V_2}$ (1.52)

En remplaçant l'expression de $(D_1 + D_2)$ de l'équation (1.52) dans l'équation 1.51, nous obtenons : $D_1^2 \frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = K$ (1.53)

La résolution de l'équation (1.53) nous donne la fonction de transfert du Buck en mode DCM:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4K}{D_1^2}}} \quad (1.54)$$

1.5.2 Analyse en régime permanent du convertisseur Boost en mode de conduction discontinue :

1^{ère} étape d'analyse : Détermination des schéma équivalents :

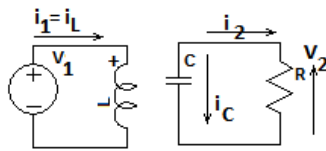


Figure 1.28.a: Schéma équivalent du Boost durant $D_1 T_s$ Switch en position 1

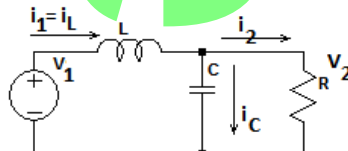


Figure 1.28.b: Schéma équivalent du Boost durant $D_2 T_s$ Switch en position 2

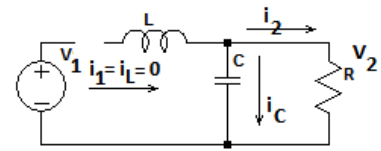


Figure 1.28.c: Schéma équivalent du Boost durant $D_3 T_s$ Switch en position 2

2^{ème} étape d'analyse : application du principe d'équilibre de charge dans la bobine :

durant $D_1 T_s$ (remarquons que $D_1 = D$), $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = v_1(t) \cong V_1$

durant $D_2 T_s$, $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = v_1(t) - v_2(t) \cong V_1 - V_2$

enfin durant le temps mort $D_3 T_s = (1 - D_1 - D_2) T_s$, $v_L(t) = 0$

En appliquant le principe d'équilibre de charge dans la bobine, nous obtenons :

$$\langle v_L(t) \rangle = 0 = \frac{1}{T_s} [V_1 D_1 T_s + (V_1 - V_2) D_2 T_s] \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{D_1 + D_2}{D_2} \quad (1.55)$$

3^{ème} étape : application du principe d'équilibre de charge dans le condensateur

De même que pour le convertisseur Buck, nous ne pouvons pas ici appliquer le principe d'approximation sur le courant dans la bobine. Toutefois, par l'application du principe d'équilibre de charge dans le condensateur nous savons que $\langle i_C(t) \rangle = 0$ et donc :

durant $D_1 T_s$, $i_C(t) \cong -I_2$

durant $D_2 T_s$, $i_c(t) \cong i_L(t) - I_2$

et durant $D_3 T_s$, $i_c(t) \cong -I_2$

Remarquons cependant que le courant $i_L(t)$, ici, correspond au courant de décharge dans la bobine c'est-à-dire au courant circulant dans le switch 2 donc dans la diode D. Nous pouvons donc déduire que

$$\langle i_c(t) \rangle = \langle i_D(t) \rangle - I_2 = 0 \rightarrow \langle i_D(t) \rangle = I_2 = \frac{V_2}{R}$$

Étant donné que le courant moyen dans la diode est l'intégrale du courant $i_D(t)$ durant la période de commutation T_s divisée par T_s , on peut donc déduire que

$\langle i_D(t) \rangle = \frac{S_D}{T_s}$ où S_D est la surface hachurée illustrée dans la figure 1.29.

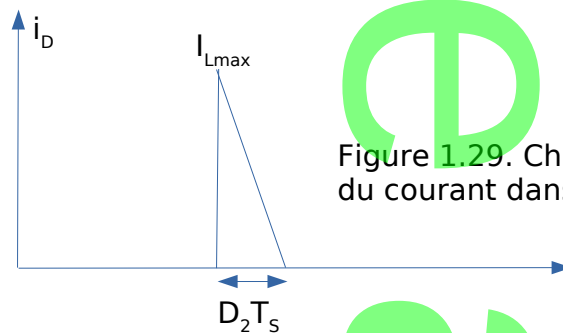


Figure 1.29. Chronogramme du courant dans la diode

Avec $i_{Dmax} = i_{Lmax} = \frac{V_1 D_1 T_s}{L}$ et donc $S_D = \frac{1}{2} i_{Dmax} D_2 T_s$ d'où $S_D = \frac{1}{2} \frac{V_1}{L} D_1 T_s D_2 T_s$

Nous avons donc : $\langle i_D(t) \rangle = \frac{V_2}{R} = \frac{1}{2} \frac{V_1}{L} D_1 D_2 T_s$

Nous déduisons alors : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{D_1 D_2}{K}$ (1.56)

En considérant l'équation 1.55, nous avons donc :

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{D_1}{D_2} \rightarrow D_2 = \frac{D_1}{\frac{V_2}{V_1} - 1} \quad (1.57)$$

En remplaçant dans l'équation 1.56 D_2 par son expression (1.57), nous obtenons :

$$\frac{V_2}{V_1} \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = \frac{D_1^2}{K} \quad (1.58)$$

La résolution de l'équation 1.58 nous donne la fonction de transfert du convertisseur Boost en mode DCM:

exercice 1

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{D_1^2}{K}}}{2}$$