Olimpiada Panameña de Matemática

Olimpiada Panameña de Matemática 2021

Fase II - Viernes 28 de mayo

Fase III - Viernes 13 de agosto

Lista corta

de problemas propuestos

Confidencialidad

La lista corta debe mantenerse confidencial hasta la conclusión de la Olimpiada Panameña de Matemáticas 2021.

Agradecimientos

Agradecemos a Luis Modes, Temístocles Zeballos, Manuel Liu, Leonel Castillo, Lydia Burgoa, Leonardo Marciaga, Alexander Neblett y Pedro Marrone por sus 31 propuestas a esta lista corta. Asimismo, le agradecemos a la profesora Lydia Burgoa y al profesor Pedro Marrone por la supervisión de este trabajo.

Comité de selección de problemas

Leonel Castillo, Joselito Wong, Luis Modes
Manuel Liu, Antonio Fan, Leonardo Marciaga

Notación

Dividimos los problemas propuestos en las 4 áreas fundamentales de las olimpiadas de matemática: Álgebra, Combinatoria, Geometría y Teoría de Números. Los problemas están ubicados en su área respectiva y ordenados según su dificultad relativa con respecto a los otros problemas. (Lo mencionado anteriormente se basa en decisiones subjetivas). Además, a la esquina inferior derecha de cada problema se muestran las posiciones sugeridas del problema para la Fase II o la Fase III de la Olimpiada. Finalmente, se muestran las soluciones propuestas y/o halladas para cada problema, así como comentarios que puedan resultar útiles a la hora de utilizar, modificar o entender el problema.

Problemas

Álgebra

A1.

a) Encuentre el promedio de 81, 82, 83, 84 y 85.

b) i) Encuentre una fórmula simplificada para la suma de los enteros consecutivos n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ y $n+4$.

ii) Si el promedio de estos cinco enteros consecutivos es impar, explique por qué n debe ser impar.

c) Para seis enteros consecutivos n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ y $n+5$, explique por qué su promedio nunca es un entero.

(Categoría A 1/2)

A2. Ana elabora un cuadro que muestra la cantidad de los estudiantes de su salón que llevan un determinado color de camisas:

Color de camisas	Cantidad de estudiantes
Blanco	8
Rojo	7
Celeste	3
Amarillo	2

a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes tienen camisas blancas?

b) ¿Qué porcentaje de los estudiantes tienen camisas celestes o amarillas?

c) ¿Cuántos de los estudiantes que tienen camisas blancas se deben cambiar a una camisa amarilla para que el porcentaje de estudiantes con camisa amarilla en el salón sea 20 %?

d) ¿Cuántos estudiantes adicionales con camisa celeste deben llegar al salón para que el porcentaje de estudiantes con camisa celeste sea 32 %?

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1)

A3. El profesor escribe seis números enteros consecutivos en el pizarrón, pero por error borra uno de ellos. Juan observa que los números restantes suman 2021. Determina los números que escribió el profesor.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1)

A4. Halle todas las parejas (a, b) de enteros positivos de un dígito tales que

$$a.b = \frac{b}{a}$$

Nota: $a.b$ es la notación con el punto decimal (a veces se utiliza una coma en vez de un punto). Por ejemplo, si $a = 4$ y $b = 7$, $a.b = 4.7$, que representa 4 unidades y 7 décimas.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1)

A5. Exprese el polinomio $x^4 + 2$ como el producto de dos polinomios no constantes con coeficientes reales.

(Categoría B 2/3)

A6. Consideremos la expresión

$$S = \frac{1}{1 + a + ab} + \frac{1}{1 + b + bc} + \frac{1}{1 + c + ca}$$

Si a, b y c son tres números reales positivos tales que $abc = 1$, ¿cuántos valores enteros distintos puede tomar S?

(Categoría B 3/4 o Fase III 1)

A7. Supongamos que los enteros a, b, c satisfacen que $ab + bc + ca = 1$. ¿Es

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

un cuadrado perfecto?

(Categoría B 3/4 o Fase III 1)

A8. Dados enteros i, j, k, sea $P_{i,j,k}(x) = ix^2 + jx + k$ un polinomio cuadrático en x. Demuestre que hay infinitas tripletas (a, b, c) de enteros distintos entre sí y distintos a 0 tales que los seis polinomios $P_{a,b,c}(x)$, $P_{a,c,b}(x)$, $P_{b,a,c}(x)$, $P_{b,c,a}(x)$, $P_{c,a,b}(x)$ y $P_{c,b,a}(x)$ son factorizables.

Nota: Decimos que un polinomio cuadrático en x con coeficientes enteros es factorizable si existen enteros m, n, p, q tales que podemos escribir el polinomio como $(mx+n)(px+q)$.

(Categoría B 3/4 o Fase III 1/2)

A9. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $x^3 + 3x^2 + 5x + 7$. Supongamos que $P(x)$ es un polinomio de tercer grado que satisface que $P(r_1) = r_2 + r_3$, $P(r_2) = r_1 + r_3$, $P(r_3) = r_2 + r_1$, y $P(r_1 + r_2 + r_3) = -16$. Encuentre el valor de $P(0)$.

(Fase III 2/3)

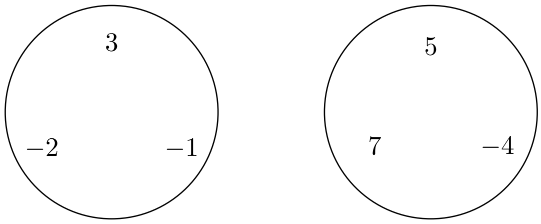
A10. Halle todas las tripletas de enteros (a, b, c) tales que

$$a^3 + b^2 + c = b^3 + c^2 + a = c^3 + a^2 + b$$

(Fase III 2/3)

Combinatoria

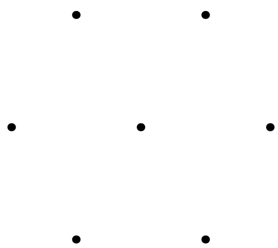
C1. En un juego se tienen dos círculos con tres números cada uno, como se muestra en la figura.



Cristina escoge al azar un número de cada círculo, y después multiplica los dos números escogidos. Calcular la probabilidad que tiene Cristina de que el producto sea negativo.

(Categoría A 1)

C2. Considere los 6 vértices de un hexágono regular y su centro.



Estos 7 puntos se colorean de azul, rojo o verde. Decimos que un triángulo es *chupampeño* si tiene un vértice azul, un vértice rojo y un vértice verde. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos chupampeños que puede haber?

Nota: Cualesquiera 3 puntos determinan un triángulo si y solo si no están alineados.

(Categoría A 2/3 o Categoría B 1)

C3. Cada uno de los puntos de una circunferencia $\mathcal{G}$ es coloreado con uno de tres colores distintos, de tal manera que hay infinitos puntos de cada color. Decimos que un hexágono regular *tiene un barrido* si los vértices del hexágono están sobre $\mathcal{G}$ y los vértices opuestos tienen el mismo color. Sean A, B, C, D, E, F seis puntos sobre $\mathcal{G}$, en ese orden. ¿Existe una coloración para $\mathcal{G}$ de tal manera que, sin importar cómo se escojan A, B, C, D, E, F, el hexágono $ABCDEF$ nunca tenga un barrido?

(Categoría A 3/4 o Categoría B 1/2)

C4. Pepillo tiene que hacer un examen, pero no ha estudiado nada. El examen consta de 5 preguntas de selección múltiple. Cada pregunta tiene 4 opciones, de las cuales solo una es correcta. Pepillo aprueba si contesta correctamente 3 preguntas o más. Su profesor, muy generoso, le propone lo siguiente: "Si quieres, pensaré en un número del 1 al 10. Si lo adivinas, apruebas automáticamente. Si no, te repruebo". ¿Con cuál de las siguientes opciones Pepillo tiene mayor probabilidad de aprobar: con la oferta del profesor o respondiendo el examen al azar?

(Categoría A 3/4 o Categoría B 3/4)

C5. Cada uno de los puntos de una circunferencia se colorea de rojo o azul. Llamamos a un polígono *fresco* si es regular, está inscrito en la circunferencia, tiene una cantidad par de vértices azules y tiene una cantidad par de vértices rojos.

a. ¿Existe siempre un cuadrado fresco sin importar cómo se coloree la circunferencia?

b. ¿Existe siempre un polígono fresco sin importar cómo se coloree la circunferencia?

(Categoría B 4 o Fase III 1/2)

C6. La maestra le pide a Pedrito que escriba varios números enteros positivos en la pizarra, todos distintos entre sí, de manera que cumplan con las siguientes condiciones:

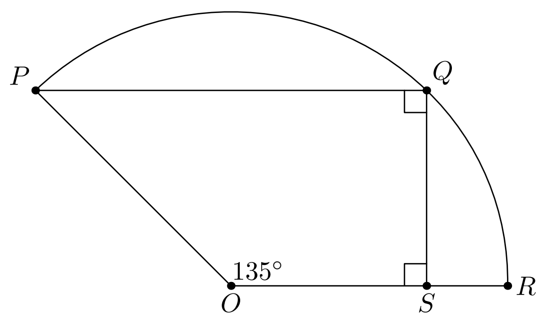
- El máximo común divisor de dos números cualesquiera tiene que ser mayor que 1.
- El máximo común divisor de tres números cualesquiera tiene que ser igual a 1.
- Ninguno de los números escritos puede ser mayor que 2021.

¿Cuál es la mayor cantidad de números que puede escribir Pedrito en la pizarra?

(Categoría B 4 o Fase III 2/3)

Geometría

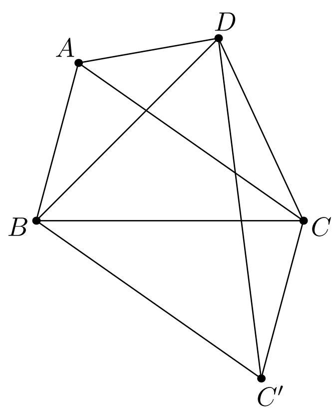
G1. Sean P, Q y R puntos en un círculo de centro O y radio 12, y sea S un punto en el segmento OR, como se muestra en la figura.



Si la medida del ángulo $\angle ROP$ es $135°$, determine el área del trapecio $OSQP$.

(Categoría A 1/2)

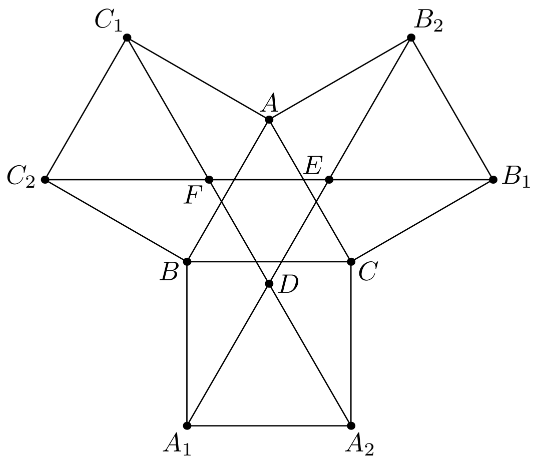
G2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Se traza un segmento BC' tal que BC' es paralelo a la diagonal AC y miden lo mismo.



El área del triángulo $BC'D$ es 7 cm^2. Halle el área del cuadrilátero $ABCD$.

(Categoría A 2/3 o Categoría B 1/2)

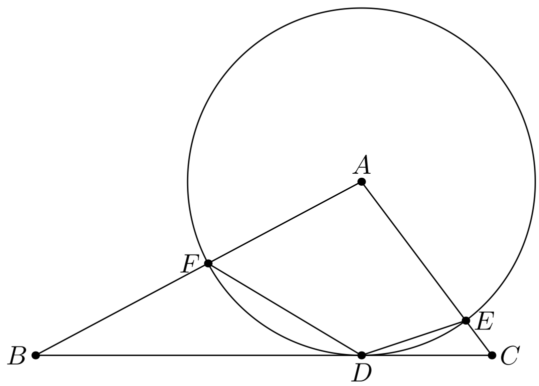
G3. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 1. Se construyen cuadrados sobre los lados del triángulo como se indica en la figura.



Los segmentos A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 se cortan en tres puntos formando un triángulo DEF. Determine la razón entre el área del triángulo DEF y el área del triángulo ABC.

(Categoría A 2/3 o Categoría B 2)

G4. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 17$, $BC = 21$ y $AC = 10$. Una circunferencia con centro en A es tangente a BC en D y corta a los segmentos AC y AB en E y F, respectivamente.



Halle el área del cuadrilátero $AFDE$.

(Categoría A 4 o Categoría B 3/4)

G5. Sea ABC un triángulo acutángulo y no equilátero, y sea $n \geq 3$ un entero positivo. Demuestre que es posible dividir el triángulo ABC en n triangulitos isósceles.

(Categoría B 4 o Fase III 2/3)

G6. Modesti acaba de despertar aleatoriamente en algún punto de la ciudad *Descrígeo*. Después de visitar todos los puntos de la ciudad, Modesti descubre lo siguiente:

- La ciudad Descrígeo es una región convexa del plano.
- Los tres edificios más importantes de la ciudad, A, B y C, son tres puntos no colineales.
- $a_P + b_P + c_P$ se mantuvo constante en todos los puntos de la ciudad, donde a_P, b_P, c_P son las distancias del punto P a las rectas BC, AC, AB, respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad de que el edificio más cerca del punto donde despertó Modesti sea el A?

Nota: Decimos que una región del plano es convexa si para cualesquiera dos puntos X, Y que pertenezcan a esa región se cumple que todos los puntos del segmento XY también pertenecen a esa región.

(Fase III 2/3)

Teoría de números

N1. El resultado de que todo número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 3 viene del hecho de que el residuo de un número al dividirse entre 9 es igual al residuo de dividir entre 9 la suma de sus dígitos.

a) Determine el residuo de los siguientes números al dividirse por 9:

   i. 123456789

   ii. 9876543210

   iii. $\underbrace{555\ldots5}_{2021\text{veces}}$

b) Se construyen todos los números de tres dígitos cuyos dígitos sean 1, 3 y 5 en algún orden. ¿Cuáles de ellos son números primos?

c) Pruebe que el residuo de un número al dividirse entre 9 es igual al residuo de dividir entre 9 la suma de sus dígitos.

(Categoría A 2)

N2. Una terna (x, y, z) de números enteros positivos se denomina *mágica* si

$$3x = 5y = 2z$$

a) Determine los valores de y y z para la terna mágica $(50, y, z)$.

b) Pruebe que, para toda terna mágica (x, y, z), y debe ser divisible por 6.

c) Pruebe que, para toda terna mágica (x, y, z), el producto xyz debe ser divisible por 900.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1/2)

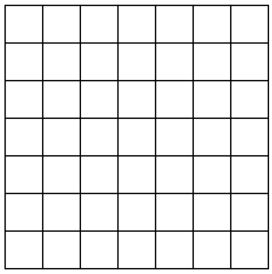
N3. Sea $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Por ejemplo, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, etc. Considere el conjunto

$$T = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{2021}\}$$

¿Cuántos múltiplos de 8 hay en T?

(Categoría A 2/3)

N4. Consideremos un tablero 7×7.



¿Es posible acomodar los números del 1 al 49 en el tablero, uno en cada casilla, de tal modo que todos los números sean adyacentes a al menos un múltiplo o divisor suyo?

Nota: Decimos que dos números son adyacentes si las casillas en las que están comparten un lado.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1/2)

N5. Alberto cumple el día del examen de la Olimpiada Panameña de Matemática 2021. En su cumpleaños, él revisa el día de su nacimiento y nota que está cumpliendo el mismo día de la semana en el que nació. Luego de enterarse de esto, revisa sus cumpleaños pasados y descubre que este año es la tercera vez que cumple años el mismo día de la semana en el que nació (sin contar cuando nació). ¿Cuántos años está cumpliendo Alberto?

Nota: 2020 es un año bisiesto, y los años bisiestos suceden cada cuatro años, incluyendo el año 2000.

(Categoría A 3/4 o Categoría B 2)

N6. Sea p un número primo y y un entero tal que $y^3 + y^2 + 2y + 1$ es divisible entre p. Demuestre que existe un entero x tal que $8x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ es divisible entre p.

(Categoría A 4, Categoría B 3 o Fase III 1)

N7. Halle todos los primos p, q tales que $p^q + q^p$ también es primo.

(Categoría A 4, Categoría B 3 o Fase III 1)

N8. Halle todas las parejas de enteros (a, b) que satisfacen la ecuación

$$7a + 10b + ab = 2021$$

(Categoría A 4 o Categoría B 3/4)

N9. Halle todos los enteros positivos que sean cuadrados perfectos tales que en su representación decimal solo hay un dígito.

Nota: 7, 44 y 3333 son ejemplos de enteros positivos con un solo dígito en su representación decimal.

(Categoría B 4 o Fase III 1/2)

Soluciones

Álgebra

A1.

a) Encuentre el promedio de 81, 82, 83, 84 y 85.

b) i) Encuentre una fórmula simplificada para la suma de los enteros consecutivos n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ y $n+4$.

ii) Si el promedio de estos cinco enteros consecutivos es impar, explique por qué n debe ser impar.

c) Para seis enteros consecutivos n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ y $n+5$, explique por qué su promedio nunca es un entero.

(Categoría A 1/2)

Respuesta. El promedio pedido es 83 y la fórmula simplificada de la suma es $5n+10$.

Solución. Para la parte a), el promedio es

$$\frac{81+82+83+84+85}{5} = \frac{415}{5} = 83$$

Para el inciso i), basta notar que

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) = 5n+10$$

Para el inciso ii), el promedio pedido es $\frac{5n+10}{5} = n+2$. Si esto fuera impar, como 2 es un número par, $(n+2)-2 = n$ también debería ser impar, como queríamos. Finalmente, para el inciso c), el promedio de esos 6 números es

$$\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)}{6} = n+\frac{5}{2}$$

Como n es entero pero $\frac{5}{2}$ no lo es, $n+\frac{5}{2}$ nunca es entero, y terminamos.□

Comentario. Una manera de hallar rápidamente el promedio de 5 enteros consecutivos es notando que el promedio sería la mediana de estos números (el del medio si los ordenamos de menor a mayor). La misma observación sirve para el inciso c), pues el promedio sería la mediana de un número par y otro impar.

A2. Ana elabora un cuadro que muestra la cantidad de los estudiantes de su salón que llevan un determinado color de camisas:

Color de camisas	Cantidad de estudiantes
Blanco	8
Rojo	7
Celeste	3
Amarillo	2

a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes tienen camisas blancas?

b) ¿Qué porcentaje de los estudiantes tienen camisas celestes o amarillas?

c) ¿Cuántos de los estudiantes que tienen camisas blancas se deben cambiar a una camisa amarilla para que el porcentaje de estudiantes con camisa amarilla en el salón sea 20 %?

d) ¿Cuántos estudiantes adicionales con camisa celeste deben llegar al salón para que el porcentaje de estudiantes con camisa celeste sea 32 %?

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1)

Respuesta. 40 %, 25 %, 2 y 5, respectivamente.

Solución. Para el inciso a),

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 40\,\%$$

Para el inciso b),

$$\frac{2+3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\,\%$$

Para el inciso c), como el 20 % de 20 es $\frac{1}{5} \cdot 20 = 4$ y solo hay dos alumnos con camisa amarilla, los que deben cambiarse de color son 2. Finalmente, para el inciso d), si necesitamos que lleguen x estudiantes para que el porcentaje de estudianets con camisa celeste sea 32 %, como $32\,\% = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{3+x}{20+x} &= \frac{8}{25} \\
75 + 25x &= 160 + 8x \\
17x &= 85 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de estudiantes que debe llegar es 5, como queríamos. □

Comentario. Una manera rápida de toparse con el 5 del inciso d) es notando que en

$$\frac{3+x}{20+x} = \frac{8}{25}$$

solo le faltan 5 al 20 para llegar a 25, y milagrosamente también 3+5=8. Como esta es una ecuación lineal, si 5 es una solución, es la única, así que listo.

A3. El profesor escribe seis números enteros consecutivos en el pizarrón, pero por error borra uno de ellos. Juan observa que los números restantes suman 2021. Determina los números que escribió el profesor.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1)

Respuesta. 402, 403, 404, 405, 406 y 407

Solución. Sean $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5$ los números que escribió el profesor y sea $x+a$ el número que borro (donde $0 \leq a \leq 5$). Tenemos que

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) - (x+a) = 2021$$

es decir,

$$5(x+3) = 2021 + a$$

De aquí deducimos que $2021 + a$ debe ser múltiplo de 5, por lo que a solo puede ser 4. Finalmente, esto significa que

$$x = \frac{2025}{5} - 3 = 402$$

y se sigue que los números escritos fueron 402, 403, 404, 405, 406 y 407. Terminamos. □

Comentario 1. Otra manera similar de acabar el problema es notando que $5x = 2006 + a$, por lo que $2006 + a$ es múltiplo de 5.

Comentario 2. El problema funcionaría con cualquier entero n, no solo con 2021.

A4. Halle todas las parejas (a,b) de enteros positivos de un dígito tales que

$$a.b = \frac{b}{a}$$

Nota: $a.b$ es la notación con el punto decimal (a veces se utiliza una coma en vez de un punto). Por ejemplo, si $a = 4$ y $b = 7$, $a.b = 4.7$, que representa 4 unidades y 7 décimas.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1)

Respuesta. La única pareja que cumple es $(2, 5)$.

Solución 1. La pareja $(2, 5)$ claramente cumple, pues $2.5 = \frac{5}{2}$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} a.b &= \frac{b}{a} \\ \frac{10a + b}{10} &= \frac{b}{a} \\ 10a^2 + ab &= 10b \\ b &= \frac{10a^2}{10 - a} \end{aligned}$$

Para $a = 1, 3, 4, 7$, b ni siquiera nos da un valor entero. Para, $a = 5, 6, 8, 9$, obtenemos un valor para b con más de un dígito. Finalmente, con $a = 2$, obtenemos que $b = 5$. Terminamos. $\square$

Comentario 1. Una manera más general de lidiar con que $\dfrac{10a^2}{10 - a}$ deba ser entero es sumándole $10a + 100$, y dándose cuenta de que $\dfrac{1000}{10 - a}$ debe ser entero. Así, $10 - a$ debe ser un dividor de 1000, y abordamos los casos.

Comentario 2. También podemos despejar a, aunque obtendríamos una cuadrática innecesariamente complicada. Aun así, podríamos revisar en cuáles casos de b el discriminante de dicha cuadrática es un cuadrado perfecto y acabar.

Solución 2. La pareja $(2, 5)$ claramente cumple, pues $2.5 = \frac{5}{2}$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} a.b &= \frac{b}{a} \\ \frac{10a + b}{10} &= \frac{b}{a} \\ 10a^2 + ab &= 10b \end{aligned}$$

Luego, como 10 divide a $10a^2$ y a $10b$, también debe dividir a ab. Esto implica que $a = 5$ o $b = 5$. Si $a = 5$, tendríamos que

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{5} < 2 < 5.b = a.b$$

Contradicción. Luego, $b = 5$, y obtenemos

$$10a^2 + 5a = 50$$

es decir,

$$(2a + 5)(a - 2) = 0$$

Luego, $a = 2$ y obtenemos la solución deseada. Terminamos. $\square$

Comentario 1. Esta solución no solo requiere de la observación minuciosa de que 10 divide a ab, sino que también muestra un lado más teórico-numérico del problema.

Comentario 2. Cuando llegamos a que $b = 5$, otra forma de acabar es dándose cuenta de que para que $a.5 = \dfrac{5}{a}$, a solo puede ser 2.

Solución 3. La pareja $(2, 5)$ claramente cumple, pues $2.5 = \frac{5}{2}$. Ahora, $a \neq 1$, pues si a fuera 1, $\dfrac{b}{a}$ sería entero, por lo que solo habría 0 después del punto decimal, y entonces no podría ser igual a $a.b$. Si $a = 2$, $\dfrac{b}{a}$ solo podría tener 0 o 5 inmediatamente después del punto decimal, por lo que debería ocurrir que $b = 5$. Aquí hallamos la solución deseada. Finalmente, si $a \geq 3$, tendríamos que

$$a.b = \frac{b}{a} \leq \frac{9}{a} \leq a < a.b$$

Contradicción. Luego, esto no puede darse. Terminamos. $\square$

Comentario 1. Aunque esta solución es muy breve, no es tan intuitiva.

Solución 4. La pareja $(2, 5)$ claramente cumple, pues $2.5 = \frac{5}{2}$. Ahora, al revisar manualmente las 81 posibles parejas de dígitos (a, b), nos damos cuenta de que solo esta cumple. Terminamos. $\square$

Comentario 1. Esta solución, por completitud, requeriría todos los cálculos.

Comentario 2. Es muy posible que una solución por este camino sea acortada mediante observaciones y casos. (Por ejemplo, descartar los casos en que $a = 1$ porque $a.b$ tiene parte fraccionaria, etc.).

A5. Exprese el polinomio $x^4 + 2$ como el producto de dos polinomios no constantes con coeficientes reales.

(Categoría B 2/3)

Respuesta. $x^4 + 2 = (x^2 + \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2})$

Solución. Completando el trinomio cuadrado perfecto,

$$\begin{aligned} x^4 + 2 &= x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt[4]{8}x)^2 \\ &= (x^2 + \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

y terminamos. □

Comentario 1. Hay otras dos maneras esenciales de hallar la factorización. La primera es notar que tal polinomio no tiene raíces reales, así que solo se podría factorizar como el producto de dos polinomios cuadráticos, es decir, $x^4 + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Ahora, solo basta multiplicar y resolver el sistema de ecuaciones resultante para hallar los valores específicos de a, b, c, d. La otra manera es utilizando directamente la factorización de Sophie Germain para polinomios de la forma $x^4 + 4y^4$, con $y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, o bien utilizarla como inspiración para completar el trinomio cuadrado perfecto.

Comentario 2. El primer método para hallar la factorización también revela que esta es única. (Esto también puede resultar evidente por el Teorema Fundamental del Álgebra y el hecho de que las raíces son distintas y no son números reales).

A6. Consideremos la expresión

$$S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}$$

Si a, b y c son tres números reales positivos tales que $abc = 1$, ¿cuántos valores enteros distintos puede tomar S?

(Categoría B 3/4 o Fase III 1)

Respuesta. Solo puede tomar un valor.

Solución 1. Más aun, vamos a probar que $S = 1$. Como $abc = 1$, $c = \frac{1}{ab}$. Reemplazando,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}\\
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+b\cdot\frac{1}{ab}} + \frac{1}{1+\frac{1}{ab}+a\cdot\frac{1}{ab}}\\
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{1+a+ab}\\
S &= 1
\end{aligned}$$

Terminamos. □

Comentario . El hecho de que el problema nos pida los posibles valores enteros de S a pesar de que a, b, c ni siquiera sean enteros necesariamente nos lleva a sospechar que S tiene un solo valor fijo.

Solución 2. Más aun, vamos a probar que $S = 1$. Como $abc = 1$,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}\\
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{abc+c+ca}\\
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+a+ab}\\
S &= \frac{c+1}{c(1+a+ab)} + \frac{1}{1+b+bc}\\
S &= \frac{c+1}{c(abc+a+ab)} + \frac{1}{1+b+bc}\\
S &= \frac{c+1}{ac(1+b+bc)} + \frac{1}{1+b+bc}\\
S &= \frac{ac+c+1}{ac+abc+abc\cdot c}\\
S &= \frac{ac+c+1}{ac+c+1}\\
S &= 1
\end{aligned}$$

Terminamos. □

Comentario. Esta es la solución, a pesar de simplemente reemplazar 1 por abc y viceversa, no es muy natural de hallar.

Solución 3. Más aun, vamos a probar que $S = 1$. Como $abc = 1$, existen reales x, y, z tales que $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Reemplazando,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} \\
S &= \frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}} + \frac{1}{1+\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}} \\
S &= \frac{yz}{xy+xz+yz} + \frac{xz}{xy+xz+yz} + \frac{xy}{xy+xz+yz} \\
S &= 1
\end{aligned}$$

Terminamos. $\square$

Comentario. Esta es la solución más natural y rápida para quienes ya conocen la sustitución utilizada.

A7. Supongamos que los enteros a, b, c satisfacen que $ab + bc + ca = 1$. ¿Es

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

un cuadrado perfecto?

(Categoría B 3/4 o Fase III 1)

Respuesta. Sí lo es.

Solución 1. Como $ab + ac + bc = 1$,

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + ac + bc = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$$

Análogamente, $b^2 + 1 = (a + b)(b + c)$ y $c^2 + 1 = (a + c)(b + c)$. Por lo tanto,

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = ((a + b)(a + c)(b + c))^2$$

que claramente es un cuadrado perfecto. Terminamos. □

Comentario. Aunque se vea simple, llegar a esta solución puede no ser tan inmediato.

Solución 2. Como $ab + ac + bc = 1$, tenemos que

$$c = \frac{1 - ab}{a + b}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) &= (a^2 + 1)(b^2 + 1)\left(\left(\frac{1 - ab}{a + b}\right)^2 + 1\right) \\
&= (a^2 + 1)(b^2 + 1)\left(\frac{1 - 2ab + a^2b^2}{a^2 + 2ab + b^2} + 1\right) \\
&= (a^2 + 1)(b^2 + 1)\left(\frac{a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1}{a^2 + 2ab + b^2}\right) \\
&= (a^2 + 1)(b^2 + 1)\left(\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}{(a + b)^2}\right) \\
&= \left(\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}{a + b}\right)^2
\end{aligned}$$

que claramente es un cuadrado perfecto. Terminamos. □

Comentario. En esta solución utilizamos el hecho de que, si m, n son enteros, $\frac{m^2}{n^2}$ es un entero si y solo si es un cuadrado perfecto. En efecto, simplemente notemos n^2 divide a m^2 si y solo si n divide a m, y $\frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

Solución 3. Como $ab + ac + bc = 1$, tenemos que

$$c = \frac{1 - ab}{a + b}$$

Ahora, si decimos que $a = \tan\alpha$ y $b = \tan\beta$, tendríamos que

$$c = \frac{1-ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}} = \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \cot(\alpha+\beta)$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) &= (\tan^2\alpha+1)(\tan^2\beta+1)(\cot^2(\alpha+\beta)+1) \\
&= \sec\alpha^2\sec^2\beta\csc^2(\alpha+\beta) \\
&= \left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta+\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha)}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}\right)^2
\end{aligned}$$

Como $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ son enteros, por la identidad

$$\tan^2\theta+1 = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

deducimos que $\cos^2\alpha\cos^2\beta$ es racional, por lo que $\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}$ es racional y a la vez $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}\right)^2$ es un entero. Esto implica que $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ es un cuadrado perfecto, así que terminamos. □

Comentario. Esta solución utiliza el hecho de que todo número real se puede escribir como $\tan\theta$ para alguna θ. Lo que inspira esta sustitución trigonométrica es que $c = \frac{1-ab}{a+b}$ nos recuerda a la identidad

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Solución 4. Sea $P(x) = x^3+dx^2+x+e$ el polinomio cuyas raíces son a, b, c. El coeficiente de la x es 1 por Vieta, pues $ab+ac+bc = 1$. Asimismo, d, e son claramente enteros. Finalmente, si $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned}
(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) &= (a-i)(a+i)(b-i)(b+i)(c-i)(c+i) \\
&= (i-a)(i-b)(i-c)(-i-a)(-i-b)(-i-c) \\
&= P(i)\cdot P(-i) \\
&= (-i-d+i+e)(i-d-i+e) \\
&= (e-d)^2
\end{aligned}$$

que claramente es un cuadrado perfecto. Terminamos. □

Comentario. Esta solución fue inspirada por la solución de Evan Chen al problema 1 de la USAMO (United States of America Mathematical Olympiad) de 2014.

A8. Dados enteros i, j, k, sea $P_{i,j,k}(x) = ix^2 + jx + k$ un polinomio cuadrático en x. Demuestre que hay infinitas tripletas (a, b, c) de enteros distintos entre sí y distintos a 0 tales que los seis polinomios $P_{a,b,c}(x)$, $P_{a,c,b}(x)$, $P_{b,a,c}(x)$, $P_{b,c,a}(x)$, $P_{c,a,b}(x)$ y $P_{c,b,a}(x)$ son factorizables.

Nota: Decimos que un polinomio cuadrático en x con coeficientes enteros es factorizable si existen enteros m, n, p, q tales que podemos escribir el polinomio como $(mx+n)(px+q)$.

(Categoría B 3/4 o Fase III 1/2)

Solución. Consideremos una tripleta de enteros (a, b, c) tales que $a+b+c = 0$. Notemos que, para cualquier permutación (a', b', c') de (a, b, c),

$$P_{a',b',c'}(1) = a' + b' + c' = a + b + c = 0$$

por lo que 1 es raíz de los seis polinomios dados. Luego, por el Teorema del Factor, $(x - 1)$ es factor de los seis polinomios, por lo que los seis son factorizables. Finalmente, como existen infinitas tripletas de enteros (a, b, c) tales que $a + b + c = 0$ y son todos distintos y distintos de 0 (considere, por ejemplo, $(1, n, -n-1)$ con $n > 1$), terminamos. $\square$

Comentario 1. Basta hallar una sola tripleta (a, b, c) que cumpla (como $(1, 2, -3)$, por ejemplo), pues entonces (ka, kb, kc) cumplirá igual, y hay infinitas tripletas de esa forma.

Comentario 2. Una manera natural de llegar a las tripletas (a, b, c) con $a + b + c = 0$ es notando que un polinomio cuadrático en $\mathbb{Z}[x]$ es factorizable en $\mathbb{Z}[x]$ si y solo si sus dos raíces son racionales. Esto ocurre en nuestro problema si y solo si

$$\begin{aligned} a^2 - 4bc &= m^2 \\ b^2 - 4ac &= n^2 \\ c^2 - 4ab &= l^2 \end{aligned}$$

Entonces, tratando de hallar a, b, c que satisfagan eso, uno se topa con tripletas como $(2n, -n, -n)$ o $(1, n, -n - 1)$ que curiosamente suman 0 (y la última incluso resuelve por sí sola el problema).

Comentario 3. Una manera de hacer el problema más sencillo es permitiendo que a, b, c puedan ser iguales. Esto le da cabida a la tripleta $(2n, -n, -n)$, que es más intuitiva de hallar, para resolver el problema.

Comentario 4. Una manera de hacer el problema más difícil es agregando la condición de que a, b, c sean primos relativos. Esto elimina la ventaja que comentamos en el Comentario 1. Tripletas como $(1, n, -n - 1)$ seguirían siendo solución del problema.

A9. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $x^3 + 3x^2 + 5x + 7$. Supongamos que $P(x)$ es un polinomio de tercer grado que satisface que $P(r_1) = r_2 + r_3$, $P(r_2) = r_1 + r_3$, $P(r_3) = r_2 + r_1$, y $P(r_1 + r_2 + r_3) = -16$. Encuentre el valor de $P(0)$.

(Fase III 2/3)

Respuesta. 11

Solución. Por las relaciones de Vieta, tenemos que $r_1 + r_2 + r_3 = -3$. Además, por condición del problema,

$$\begin{aligned} P(r_i) &= r_j + r_k \\ P(r_i) &= -3 - r_i \\ P(r_i) + r_i + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Para toda permutación (i, j, k) de $(1, 2, 3)$. Esto quiere decir que r_1, r_2, r_3 son raíces del polinomio de tercer grado $P(x) + x + 3$. Luego, al tener las mismas raíces,

$$P(x) + x + 3 = A(x^3 + 3x^2 + 5x + 7)$$

donde A es alguna constante. Evaluando lo anterior en $x = -3$,

$$\begin{aligned} P(-3) - 3 + 3 &= A((-3)^3 + 3(-3)^2 + 5(-3) + 7) \\ P(r_1 + r_2 + r_3) &= -8A \\ -16 &= -8A \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando ahora $x = 0$,

$$\begin{aligned} P(0) + 0 + 3 &= 2 \cdot 7 \\ P(0) &= 11 \end{aligned}$$

Terminamos. $\square$

Comentario 1. El paso clave es notar que $x^3 + 3x^2 + 5x + 7$ y $P(x) + x + 3$ comparten raíces.

Comentario 2. r_1, r_2 y r_3 son muy difíciles de hallar manualmente (ni siquiera son números racionales).

A10. Halle todas las tripletas de enteros (a, b, c) tales que

$$a^3 + b^2 + c = b^3 + c^2 + a = c^3 + a^2 + b$$

(Fase III 2/3)

Respuesta. Las tripletas (k, k, k) con k entero, $(1, 1, 0)$ y sus permutaciones y $(0, 0, 1)$ y sus permutaciones.

Solución. Primero, es claro que las respuestas satisfacen las ecuaciones dadas:

$$\begin{aligned} k^3 + k^2 + k = k^3 + k^2 + k = k^3 + k^2 + k \\ 1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1 \\ 0 + 0 + 1 = 0 + 1 + 0 = 1 + 0 + 0 \end{aligned}$$

Ahora, demostremos que son las únicas. Consideremos 3 casos principales.

Caso 1: Dos elementos del conjunto $\{a, b, c\}$ son iguales

Consideremos el caso $a = b$. Reemplazando en la ecuación original,

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 + c &= a^3 + c^2 + a \\ (a - c)(a + c) &= a - c \end{aligned}$$

Si $a = c$, tendríamos que $a = b = c$ y ya hallamos la solución (k, k, k). Si $a \neq c$, de lo anterior deducimos que $a + c = 1$. Luego, en la ecuación original,

$$\begin{aligned} a^3 + c^2 + a &= c^3 + a^2 + a \\ (a - c)(a^2 + ac + c^2) &= (a - c)(a + c) \\ (a + c)^2 - ac &= a + c \\ 1 - ac &= 1 \\ ac &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $a = 0$ o $c = 0$. Si $a = 0$, reemplazando en la ecuación original, hallamos la solución $(0, 0, 1)$. Si $c = 0$, reemplazando en la ecuación original, $a^3 + a^2 = a^3 + a$, por lo que hallamos la solución $(1, 1, 0)$. Finalmente, como el problema es cíclico en (a, b, c), los casos $b = c$ y $a = c$ son análogos, y nos dan además las soluciones $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$,$(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

Caso 2: a, b, c son distintos dos a dos y no son todos negativos

Asumamos sin pérdida de generalidad que $a = \max\{a, b, c\}$. Claramente, $a \geq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} a^3 + b^2 + c &= c^3 + a^2 + b \\ b^2 - b + (a^3 - a^2 + c - c^3) &= 0 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la ecuación cuadrática $x^2 - x + (a^3 - a^2 + c - c^3)$ tiene a b como raíz, por lo que su discriminante debe ser no negativo, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - 4(a^3 - a^2 + c - c^3) \\ a^3 - a^2 + c - c^3 &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Consideremos 3 subcasos.

Subcaso 2a: $c < -1$

En este subcaso, $1 = 0 + 1 \leq (a^3 - a) + ((-c)^3 - (-c)) = a^3 - a^2 + c - c^3 \leq \frac{1}{4}$. Contradicción.

Subcaso 2b: $c = -1$ *o* $c = 0$

Si $c = -1$ o $c = 0$, $a^3 - a \leq \frac{1}{4}$ y a es no negativo, por lo que solo puede darse que $a = 0$ o $a = 1$.

- Si $a = 0$ y $c = -1$, reemplazando en la ecuación original y recordando que $b \leq a = 0$,

  $$\begin{gathered} b^2 - 1 = b^3 + 1 = b - 1 \\ b + 1 = \frac{b^3 + 1}{b - 1} = 1 \end{gathered}$$

  Como $b + 1 = 1$, debe ocurrir que $b = 0$, pero incluso en ese caso, tendríamos $1 = -1 = 1$. Contradicción.

- Si $a = 1$ y $c = -1$, reemplazando en la ecuación original,

  $$b^2 = b^3 + 2 = b$$

  Como $b^2 = b$, b debe ser 1 o 0, pero en ambos casos, $b^3 + 2 > b$. Contradicción.

- Si $a = 1$ y $c = 0$, reemplazando en la ecuación original,

  $$1 + b^2 = b^3 + 1 = b + 1$$

  Por lo que $b = b^2 = b^3$, es decir, $b = 1 = a$ o $b = 0 = c$, pero habíamos asumido que a, b, c eran distintos. Contradicción.

Subcaso 2c: $c > 0$

En este subcaso,

$$3 \leq ac+c^2+c = (a^2+ac+c^2)-a^2+c \leq (a-c)(a^2+ac+c^2)-a^2+c = a^3-a^2+c-c^3 \leq \frac{1}{4}$$

Contradicción.

Caso 3: a, b, c son distintos dos a dos y son todos negativos

Asumamos sin pérdida de generalidad que $a = \min\{a, b, c\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} a^3 + b^2 + c &\leq (\min\{b, c\} - 1)^3 + b^2 + c \\ &= \min\{b, c\}^3 + (b^2 - 3\min\{b, c\}^2) + \min\{b, c\} + (2\min\{b, c\} - 1 + c) \\ &< c^3 + a^2 + b \end{aligned}$$

Contradicción.

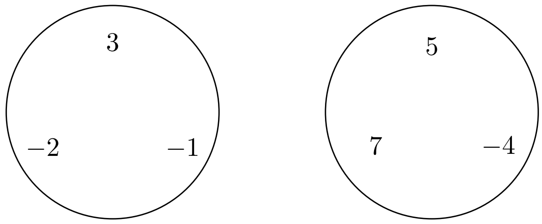
Habiendo agotado todos los casos, terminamos. □

Comentario 1. La dificultad principal es que a, b, c pueden ser negativos o positivos y que además hay términos al cuadrado. Considerar el discriminante, asumir orden y dividir por casos son claves en esta solución.

Comentario 2. Aunque a, b, c son enteros, no parece haber alguna observación teórico-numérica útil para la solución. La condición se usa más que todo para garantizar que si $x > y$, entonces $x \geq y + 1$.

Combinatoria

C1. En un juego se tienen dos círculos con tres números cada uno, como se muestra en la figura.



Cristina escoge al azar un número de cada círculo, y después multiplica los dos números escogidos. Calcular la probabilidad que tiene Cristina de que el producto sea negativo.

(Categoría A 1)

Respuesta. $\frac{5}{9}$

Solución. En el primer círculo hay dos números negativos, por lo que la probabilidad de escoger un número negativo es $\frac{2}{3}$, y la de escoger uno positivo es $\frac{1}{3}$. En el segundo círculo hay dos números positivos, por lo que la probabilidad de escoger un número negativo es $\frac{1}{3}$, y la de escoger uno positivo es $\frac{2}{3}$. Para que el producto sea negativo, Cristina debe escoger un negativo del primero y uno positivo del segundo, o un positivo del primero y un negativo del segundo. Por lo tanto, por el Teorema de la Multiplicación y el Teorema de la Suma, la probabilidad buscada es

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

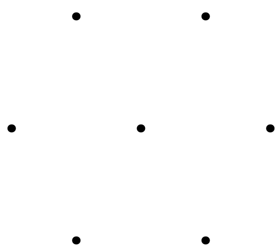
Terminamos. □

Comentario 1. Hay otras dos maneras alternativas pero similares de llegar a la respuesta. La primera es calculando la probabilidad de que el producto sea positivo y restársela a 1. La otra manera es calcular de cuántas maneras el producto pueder ser negativo y entonces dividir eso entre la cantidad total de posibles elecciones ($3 \cdot 3 = 9$).

Comentario 2. En general, si en el primer círculo hay p_1 positivos y n_1 negativos, y en el segundo círculo hay p_2 positivos y n_2 negativos, la probabilidad buscada es

$$\frac{p_1 n_2 + p_2 n_1}{(p_1 + n_1)(p_2 + n_2)}$$

C2. Considere los 6 vértices de un hexágono regular y su centro.



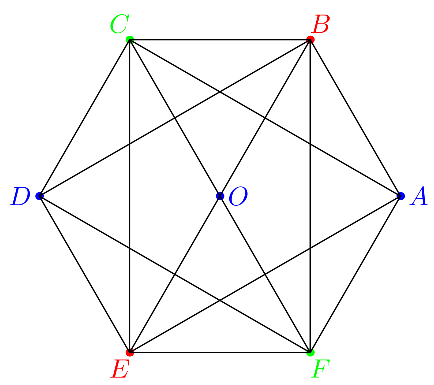
Estos 7 puntos se colorean de azul, rojo o verde. Decimos que un triángulo es *chupampeño* si tiene un vértice azul, un vértice rojo y un vértice verde. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos chupampeños que puede haber?

Nota: Cualesquiera 3 puntos determinan un triángulo si y solo si no están alineados.

(Categoría A 2/3 o Categoría B 1)

Respuesta. 12

Solución. Primero, demostremos que es posible tener 12 triángulos chupampeños. Consideremos la siguiente coloración de los puntos:



Aquí hay exactamente 12 triángulos chupampeños: ABF, ACE, ABC, AEF, DEC, DFB, DEF, DBC, OFB, OBC, OCE y OEF.

Ahora, demostremos que 12 es el máximo valor posible. Digamos que hay a puntos azules, b puntos rojos y c puntos verdes. Tenemos que $a+b+c=7$. Además, por el Teorema del Producto, habrá a lo más abc triángulos chupampeños. Sin embargo, como a, b, c son enteros no negativos cuya suma es 7, solo tenemos que revisar los pocos casos posibles:

- Si algún elemento de $\{a, b, c\}$ es 0, $abc = 0$
- Si $\{a, b, c\} = \{1, 1, 5\}$, $abc = 5$

- Si $\{a, b, c\} = \{1, 2, 4\}$, $abc = 8$
- Si $\{a, b, c\} = \{1, 3, 3\}$, $abc = 9$
- Si $\{a, b, c\} = \{2, 2, 3\}$, $abc = 12$

Luego, el mayor posible valor que abc puede tomar es 12, y como hay a lo más abc triángulos chupampeños, terminamos. $\square$

Comentario. Aunque es sencillo llegar de $a + b + c = 7$ a que $\text{máx}\{abc\} = 12$, es necesaria la construcción, pues puede que algunos de esos abc "triángulos chupampeños" en verdad sean 3 puntos colineales, y esos no son triángulos.

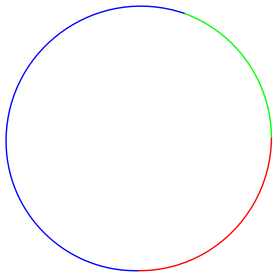
C3. Cada uno de los puntos de una circunferencia $\mathcal{G}$ es coloreado con uno de tres colores distintos, de tal manera que hay infinitos puntos de cada color. Decimos que un hexágono regular *tiene un barrido* si los vértices del hexágono están sobre $\mathcal{G}$ y los vértices opuestos tienen el mismo color. Sean A, B, C, D, E, F seis puntos sobre $\mathcal{G}$, en ese orden. ¿Existe una coloración para $\mathcal{G}$ de tal manera que, sin importar cómo se escojan A, B, C, D, E, F, el hexágono $ABCDEF$ nunca tenga un barrido?

(Categoría A 3/4 o Categoría B 1/2)

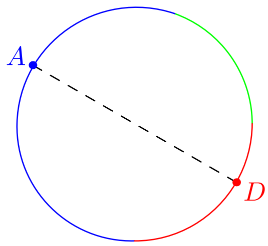
Respuesta. Sí

Solución. Consideremos la siguiente coloración:

Digamos que los colores son azul, rojo y verde. Dividamos a $\mathcal{G}$ en 3 arcos y coloreemos cada arco de un color distinto, de tal modo que el arco azul mida más de 180° y menos de 300°.



Aquí es imposible que el hexágono $ABCDEF$ tenga barrido. En efecto, si asumimos lo contrario, como el arco azul mide menos de 300°, algún vértice del hexágono, digamos sin pérdida de generalidad que D, deberá ser de color rojo o verde.



Ahora, como $ABCDEF$ es regular, A es diametralmente opuesto a D, por lo que el arco $\overset{\frown}{DA}$ mide 180°. Sin embargo, la suma de los arcos rojo y verde es menor a 180°, por construcción del arco azul. Esto quiere decir que el $\overset{\frown}{DA}$ no puede estar totalmente contenido en los arcos rojo y verde, es decir, que A es azul. Como D y A deberían ser del mismo color, esta es una contradicción y terminamos. □

Comentario 1. El resultado es cierto para cualquier $2n-$ágono regular, no solo para hexágonos.

Comentario 2. Una versión significativamente más fácil del problema sería si reemplazamos la condición de *regular* por *convexo*. En ese caso, la respuesta sería *no*, y la demostración sería notando que hay infinitos puntos de un mismo color. Luego, el hexágono podría tener sus 6 vértices del mismo color y tendría barrido.

C4. Pepillo tiene que hacer un examen, pero no ha estudiado nada. El examen consta de 5 preguntas de selección múltiple. Cada pregunta tiene 4 opciones, de las cuales solo una es correcta. Pepillo aprueba si contesta correctamente 3 preguntas o más. Su profesor, muy generoso, le propone lo siguiente: “Si quieres, pensaré en un número del 1 al 10. Si lo adivinas, apruebas automáticamente. Si no, te repruebo”. ¿Con cuál de las siguientes opciones Pepillo tiene mayor probabilidad de aprobar: con la oferta del profesor o respondiendo el examen al azar?

(Categoría A 3/4 o Categoría B 3/4)

Respuesta. Tiene mayor probabilidad de aprobar respondiendo el examen al azar.

Solución. En primer lugar, es claro que la probabilidad de aprobar de Pepillo si acepta la oferta del profesor es $\frac{1}{10}$. Ahora, calculemos la probabilidad que tiene de aprobar si responde el examen al azar. Notemos que, por el Teorema de la Multiplicación, como hay 4 posibles respuesta para cada pregunta, hay $4^5 = 1024$ maneras de responder el examen al azar. Ahora, hay 3 casos independientes en los que Pepillo aprueba:

- Si Pepillo tiene exactamente 3 respuestas correctas, aprueba. Esto puede pasar de $\binom{5}{2} \cdot 3^2 = 90$ maneras (hay $\binom{5}{2}$ posibles combinaciones de 2 respuestas que tuvo mal y 3^2 maneras de tenerlas mal).
- Si Pepillo tiene exactamente 4 respuestas correctas, aprueba. Esto puede pasar de $\binom{5}{1} \cdot 3 = 15$ maneras, por el mismo razonamiento que en el caso anterior.
- Si Pepillo tiene exactamente 5 respuestas correctas, aprueba. Esto solo puede pasar de una manera: teniéndolas todas bien.

Luego, por el Teorema de la Suma, la probabilidad de que Pepillo apruebe de esta manera es

$$\frac{90 + 15 + 1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}$$

Por lo tanto, como $\frac{53}{512} > \frac{1}{10}$, nuestra respuesta es correcta y terminamos. $\square$

Comentario 1. No es necesario tomar en cuenta el caso en que tiene todas las respuestas correctas, pues con los dos casos anteriores ya es claro que su probabilidad de aprobar es mayor a $\frac{1}{10}$.

Comentario 2. Otro enfoque muy similar sería calcular la probabilidad de que repruebe (0, 1 o 2 preguntas correctas) y restársela a 1.

Comentario 3. Para el caso general en que son n preguntas con m posibles respuestas (con solo una correcta), la probabilidad de obtener exactamente k de ellas correctas es

$$\frac{\binom{n}{n-k}(m-1)^{n-k}}{m^n}$$

C5. Cada uno de los puntos de una circunferencia se colorea de rojo o azul. Llamamos a un polígono *fresco* si es regular, está inscrito en la circunferencia, tiene una cantidad par de vértices azules y tiene una cantidad par de vértices rojos.

a. ¿Existe siempre un cuadrado fresco sin importar cómo se coloree la circunferencia?

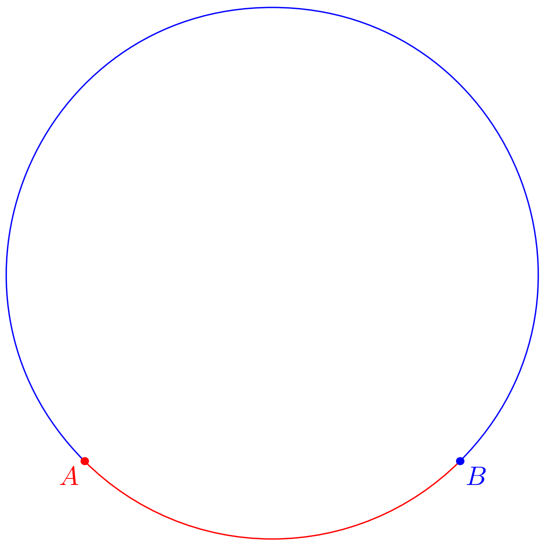
b. ¿Existe siempre un polígono fresco sin importar cómo se coloree la circunferencia?

(Categoría B 4 o Fase III 1/2)

Respuesta. No necesariamente existe un cuadrado fresco, pero siempre existe algún polígono fresco.

Solución. Para la primera parte del problema, consideremos la siguiente coloración:

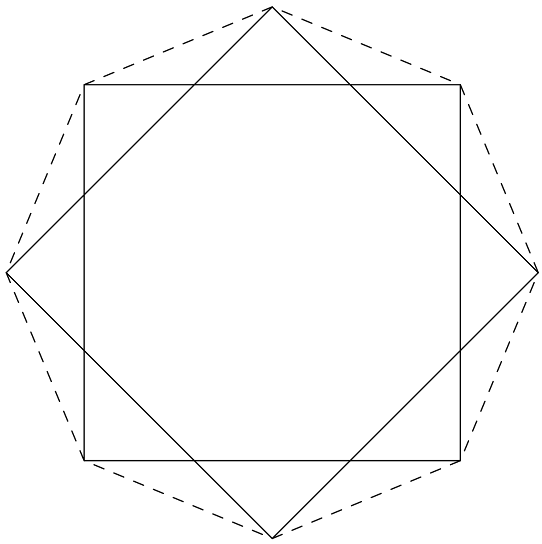
Coloreamos todo un arco $\widehat{AB}$ de longitud $90°$ de color rojo, a excepción del punto B, que al igual que el resto de la circunferencia, lo coloreamos de azul.



- Como los vértices de cualquier cuadrado inscrito en la circunferencia están separados por arcos de longitud $90°$, al menos uno y a lo más dos de sus vértices deben estar sobre el arco menor $\widehat{AB}$.
- Si tiene exactamente un vértice sobre $\widehat{AB}$, este vértice debe ser rojo, así que los otros 3 vértices del cuadrado son azules.
- Si tiene dos vértices sobre $\widehat{AB}$, estos deben ser A y B (porque deben tener un arco de $90°$ entre ellos). Luego, A es rojo y los otros tres vértices del cuadrado son azules.

Como vemos, en cualquier situación el cuadrado no estaría fresco. Por lo tanto, la respuesta para la primera parte es que no necesariamente existe un cuadrado fresco.

Para la segunda parte, demostremos que sí: siempre existe algún polígono fresco. Consideremos cualquier octágono regular inscrito en la circunferencia.



Notemos que los vértices de dicho octágono se pueden dividir en los vértices de dos cuadrados. Ahora, si alguno de los dos cuadrados está *fresco*, terminamos. Si esto no fuera así, ambos tendrían una cantidad impar de vértices azules, por lo que el octágono tendría una cantidad par (impar+impar) de vértices azules. Análogamente, el octágono tendría una cantidad par de vértices rojos. Por lo tanto, el octágono sí está fresco, es decir, sí existe un polígono fresco siempre. Terminamos. □

Comentario. En lugar de usar un octágono para el argumento final, también podríamos usar cualquier $4n-$ágono con $n > 1$.

C6. La maestra le pide a Pedrito que escriba varios números enteros positivos en la pizarra, todos distintos entre sí, de manera que cumplan con las siguientes condiciones:

- El máximo común divisor de dos números cualesquiera tiene que ser mayor que 1.
- El máximo común divisor de tres números cualesquiera tiene que ser igual a 1.
- Ninguno de los números escritos puede ser mayor que 2021.

¿Cuál es la mayor cantidad de números que puede escribir Pedrito en la pizarra?

(Categoría B 4 o Fase III 2/3)

Respuesta. 4

Solución. Digamos que se escriben en la pizarra n números que cumplen con las condiciones dadas. Si formamos todos los pares posibles de números, cada par tiene al menos un factor primo en común, pero si tomo tres números, no tienen ningún factor primo en común los tres. Esto quiere decir que los factores primos comunes en cada par son únicos (solo son comunes en ese par). Si tomamos un número cualquiera de la pizarra, digamos que A, la cantidad de pares distintos que se pueden formar con A es $n-1$. Luego, A necesita tener al menos $n-1$ factores primos distintos. Supongamos ahora que $n \geq 5$. Vemos que cada número debe tener al menos 4 factores primos. Dados 5 de estos números, a lo sumo dos pueden tener el factor primo 2, y a lo sumo dos pueden tener el factor primo 3, así que hay al menos un número que está formado por 4 factores primos distintos que no incluyen ni el 2 ni el 3. El menor valor que puede tomar este número es

$$5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 5005 > 2021$$

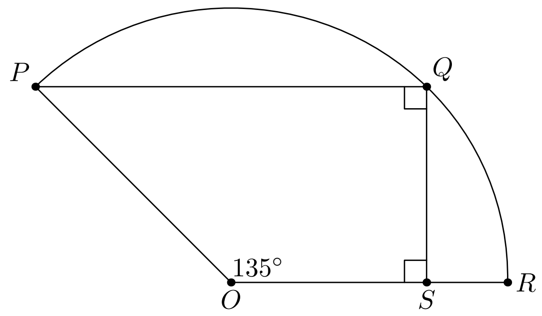
Contradicción. Por consiguiente, $n < 5$. Ahora probaremos que $n = 4$ funciona. En efecto, los 4 números

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 154 &= 2 \cdot 7 \cdot 11 \\ 273 &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \\ 715 &= 5 \cdot 11 \cdot 13 \end{aligned}$$

satisfacen las condiciones del problema, ya que sus máximos divisores comunes dos a dos son mayores a 1, los máximos divisores de tres en tres son 1 y los cuatro son menores a 2021. De esta manera, hemos demostrado que la mayor cantidad de números que puede escribir Pedrito en la pizarra es 4, y terminamos. □

Geometría

G1. Sean P, Q y R puntos en un círculo de centro O y radio 12, y sea S un punto en el segmento OR, como se muestra en la figura.

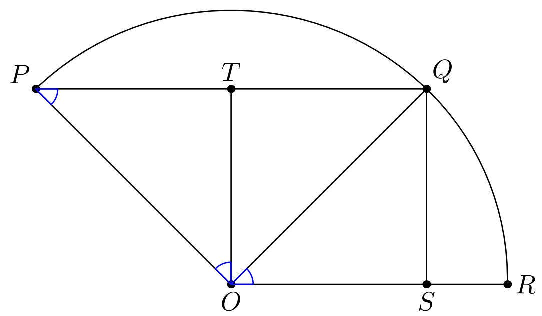


Si la medida del ángulo $\angle ROP$ es 135°, determine el área del trapecio $OSQP$.

(Categoría A 1/2)

Respuesta. 108

Solución. Sea T el pie de la perpendicular de O a PQ.



Notemos que, como $OS \parallel PQ$, $OT \parallel QS$ y $\angle SOQ = 45°$, $OSQT$ es un cuadrado y además $\angle TOP = \angle OPT = 45°$, por lo que los tres triángulo $\triangle OTP, \triangle QTO, \triangle OSQ$ son rectángulos e isósceles con hipotenusa 12. Luego, sus catetos miden

$$\frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

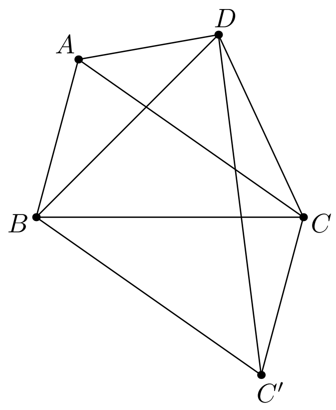
Finalmente, esto implica que el área buscada es

$$\frac{(6\sqrt{2})^2}{2} \cdot 3 = \frac{72}{2} \cdot 3 = 108$$

y terminamos. $\square$

Comentario. También se podría optar por calcular el área del triángulo rectángulo $\triangle OTP$ y sumársela a la del cuadrado $OSQT$.

G2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Se traza un segmento BC' tal que BC' es paralelo a la diagonal AC y miden lo mismo.

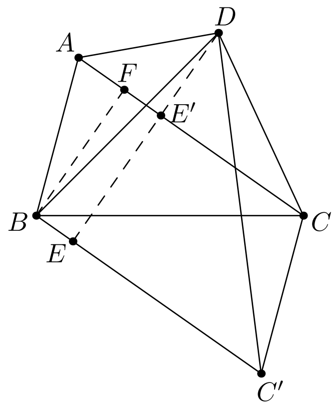


El área del triángulo $BC'D$ es 7 cm^2. Halle el área del cuadrilátero $ABCD$.

(Categoría A 2/3 o Categoría B 1/2)

Respuesta. 7 cm^2

Solución 1. Sean DE y BF las alturas de $\triangle DBC'$ y $\triangle BCA$, respectivamente. Sea E' el punto en que AC y DE se cortan.



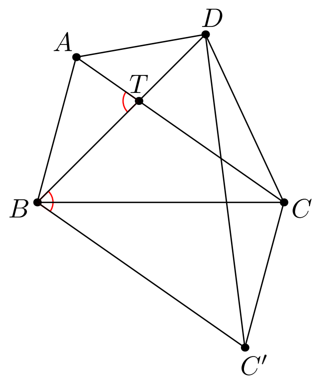
Como ambas son perpendiculares a AC, $BF \parallel EE'$, es decir, $BF \parallel EE'$. Luego, $BEE'F$ es un rectángulo, por lo que $BF = EE'$. Finalmente, recordando la fórmula del área del triángulo,

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [ABC] + [ACD] \\ &= \frac{AC \cdot BF}{2} + \frac{AC \cdot DE'}{2} \\ &= \frac{AC \cdot EE'}{2} + \frac{AC \cdot DE'}{2} \\ &= \frac{AC}{2} \cdot (EE' + DE') \\ &= \frac{AC}{2} \cdot DE \\ &= \frac{BC' \cdot DE}{2} \\ &= [BC'D] \\ &= 7 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

y terminamos. □

Comentario. Una versión más general del problema es demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ y $\triangle BC'D$ tienen el mismo área.

Solución 2. Sea T el punto en que AC y BD se cortan.



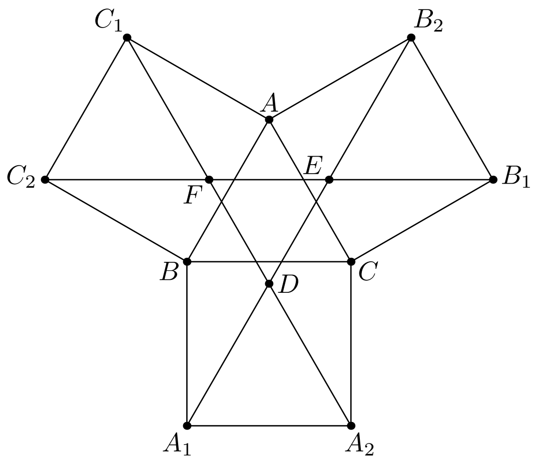
Por ángulos alternos internos, $\angle C'BD = \angle ATB$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}[ABCD] &= \frac{AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen} \angle ATB}{2} \\ &= \frac{BC' \cdot BD \cdot \operatorname{sen} \angle C'BT}{2} \\ &= [BC'D] \\ &= 7 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

y terminamos. □

Comentario. En esta solución utilizamos los hechos conocidos (pero no tanto) de que el área de un triángulo ABC es $\dfrac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} \angle BAC}{2}$ y el área de un cuadrilátero convexo $ABCD$ es $\dfrac{AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen} \theta}{2}$, donde θ es el ángulo entre las rectas AC y BD.

G3. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 1. Se construyen cuadrados sobre los lados del triángulo como se indica en la figura.



Los segmentos A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 se cortan en tres puntos formando un triángulo DEF. Determine la razón entre el área del triángulo DEF y el área del triángulo ABC.

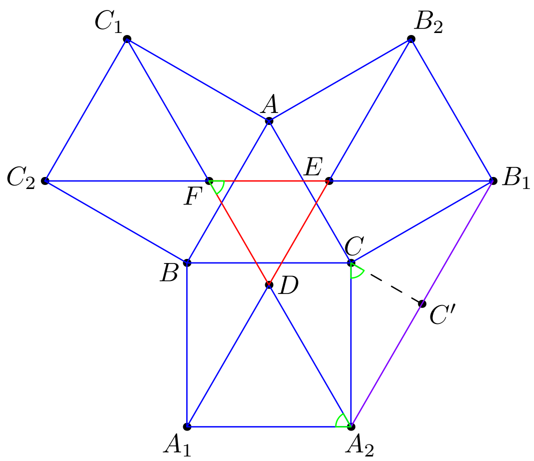
(Categoría A 2/3 o Categoría B 2)

Respuesta. $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$

Solución. Como $AB = BA_1 = AB_2$ (porque $\triangle ABC$ es equilátero y los lados de un cuadrado son congruentes) y $\angle A_1BA = 150° = \angle BAB_2$, tenemos que ABA_1B_2 es un trapecio isósceles, por lo que $AB \parallel A_1B_2$. Análogamente, $BC \parallel B_1C_2$ y $CA \parallel C_1A_2$. Luego, al tener sus lados paralelos, $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, por lo que $\triangle DEF$ es equilátero. Además, notemos que $B_1C_2 \parallel BC \parallel A_1A_2$, por lo que, por ángulos alternos internos, $\angle DA_2A_1 = \angle DFE = 60°$. Del mismo modo, $\angle A_2A_1D = 60°$, por lo que $\triangle DA_1A_2$ es equilátero. Análogamente, $\triangle EB_1B_2$ y $\triangle FC_1C_2$ son equiláteros. Ahora, note $\angle A_2FB_1 = 60°$ y

$$FA_2 = FD + DA_2 = FD + BC = FE + AC = FE + EB_1 = FB_1$$

por lo que $\triangle FA_2B_1$ sería equilátero. Ahora, sea C' el pie de la perpendicular desde C hacia A_2B_1.



Notemos que $\triangle CA_2B_1$ es isósceles, y además $\angle A_2CB_1 = 120°$, por lo que el triángulo CA_2C' es un triángulo $30° - 60° - 90°$. En particular, $A_2C' = \frac{\sqrt{3}}{2}A_2C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De aquí, podemos deducir que

$$DE = FE = FB_1 - EB_1 = 2A_2C' - BC = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = \sqrt{3} - 1$$

Finalmente, esto implica que

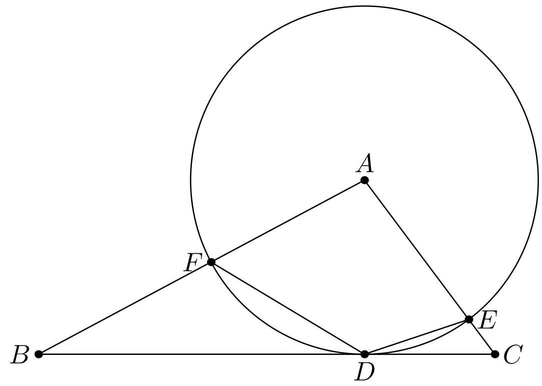
$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{1}\right)^2 = (\sqrt{3}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

y terminamos. $\square$

Comentario 1. Por escala, la razón sigue siendo la misma para cualquier medida del lado de $\triangle ABC$.

Comentario 2. Otra manera de hallar DE es considerando los pies de las alturas desde A y B hasta A_1B_2. De este modo, por triángulos especiales, podemos hallar que $A_1B_2 = 1 + \sqrt{3}$. Sin embargo, $DE = A_1B_2 - 2$ (le restamos A_1D y EB_2), por lo que el resultado se sigue. Asimismo, podríamos utilizar la ley del coseno en $\triangle CA_2B_1$, pues $\angle A_2CB_1 = 120°$ y $CA_2 = CB_1 = 1$.

G4. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 17$, $BC = 21$ y $AC = 10$. Una circunferencia con centro en A es tangente a BC en D y corta a los segmentos AC y AB en E y F, respectivamente.

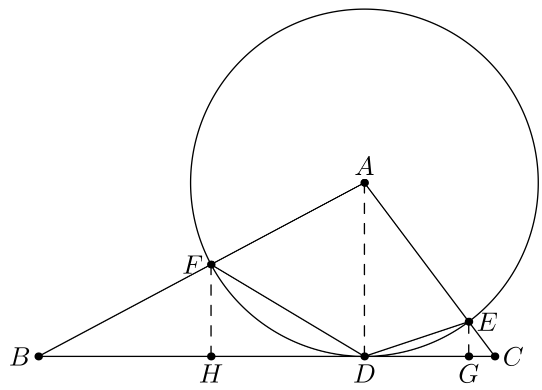


Halle el área del cuadrilátero $AFDE$.

(Categoría A 4 o Categoría B 3/4)

Respuesta. $\dfrac{2352}{65}$

Solución. Sean G y H los pies de las perpendiculares de E, F a BC, respectivamente, sea y el radio de la circunferencia dada y sea $x = BD$.



Notemos que $AD \perp BC$ porque A es centro y D es punto de tangencia. Ahora, por el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABD$,

$$x^2 + y^2 = 17^2$$
$$x^2 + y^2 = 289$$

Análogamente, por Pitágoras en $\triangle ADC$,

$$
\begin{aligned}
(21-x)^2+y^2&=10^2\\
441-42x+x^2+y^2&=100
\end{aligned}
$$

Reemplazando lo obtenido en la primera ecuación en esta última,

$$
\begin{aligned}
441-42x+x^2+y^2&=100\\
441-42x+289&=100\\
-42x&=-630\\
x&=15
\end{aligned}
$$

De aquí no es difícil deducir que $DC=6$, $AD=AE=AF=8$, $BF=9$ y $CE=2$. Ahora, como $\triangle BHF\sim\triangle BDA$,

$$
\begin{aligned}
\frac{HF}{DA}&=\frac{BF}{BA}\\
\frac{HF}{8}&=\frac{9}{17}\\
HF&=\frac{72}{17}
\end{aligned}
$$

Análogamente, como los triángulos $\triangle CEG\sim\triangle CAD$

$$
\begin{aligned}
\frac{GE}{DA}&=\frac{CE}{CA}\\
\frac{GE}{8}&=\frac{2}{10}\\
GE&=\frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

Finalmente, el área buscada es

$$
\begin{aligned}
[AFDE]&=[ABC]-[FBD]-[EDC]\\
&=\frac{21\cdot 8}{2}-\frac{15\cdot\frac{72}{7}}{2}-\frac{6\cdot\frac{8}{5}}{2}\\
&=84-\frac{540}{17}-\frac{24}{5}\\
&=\frac{2352}{65}
\end{aligned}
$$

y terminamos. □

Comentario 1. Otra manera de hallar y es mediante la fórmula de Herón, calculando el área de $\triangle ABC$ de dos maneras distintas:

$$\begin{aligned}
\frac{ay}{2} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
\frac{21y}{2} &= \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} \\
\frac{21y}{2} &= 84 \\
y &= 8
\end{aligned}$$

Comentario 2. Otra manera de hallar una relación entre x y y es extendiendo el rayo BA hasta cortar a la circunferencia de nuevo y luego utilizar potencia de punto desde B (y lo respectivo puede hacerse desde C).

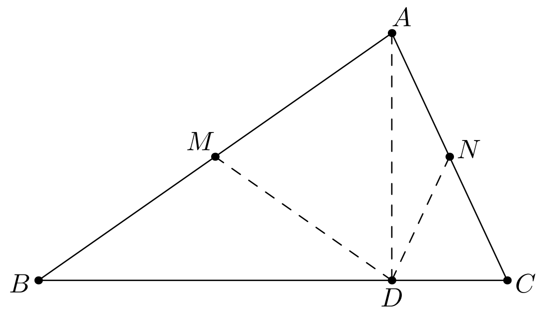
Comentario 3. También pueden pedirse otras áreas, como por ejemplo la de $\triangle BDF \cup \triangle DCE$, que es $\frac{3108}{65}$ (más fácil de calcular) o la de $BCEF$, que es $\frac{4452}{85}$ (más difícil de calcular).

G5. Sea ABC un triángulo acutángulo y no equilátero, y sea $n \geq 3$ un entero positivo. Demuestre que es posible partir el triángulo ABC en n triangulitos isósceles.

(Categoría B 4 o Fase III 2/3)

Solución. Definamos la partición $\mathfrak{T}$ de un triángulo ABC, donde $\angle BAC$ es su mayor ángulo, como sigue:

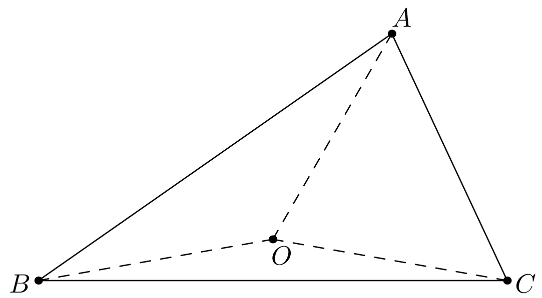
Sean M, N, D el punto medio de AB, el punto medio de AC y el pie de la altura desde A, respectivamente. Como el ángulo $\angle BAC$ es el mayor, D está sobre el segmento BC. Entonces, el triángulo original queda dividido en los 4 triangulitos $\triangle MDA$, $\triangle MBD$, $\triangle NAD$ y $\triangle NDC$



Ahora, notemos que como $\triangle DAB$ y $\triangle DCA$ son triángulos rectángulos, $MA = MD = MB$ y $NA = ND = NC$. Luego, $\mathfrak{T}$ divide a $\triangle ABC$ en 4 triangulitos isósceles.

Vamos a nuestro problema. Procedamos por inducción fuerte sobre n. Probaremos los casos $n = 3, 4, 5$ como base de inducción.

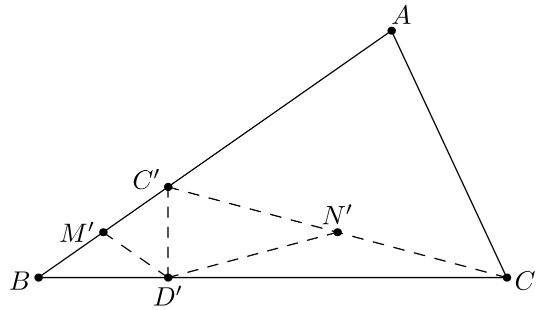
- Cuando $n = 3$, consideremos el circuncentro O del triángulo. Como el triángulo es acutángulo, O está estrictamente en el interior de $\triangle ABC$, por lo que podemos dividir $\triangle ABC$ en los 3 triangulitos $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$.



  Como O es circuncentro, $OA = OB = OC$, así que $\triangle ABC$ queda dividido en 3 triángulitos son isósceles, como queríamos.

- Para $n = 4$, simplemente apliquémosle la partición $\mathfrak{T}$ al triángulo, y lo tendremos dividido en 4 triangulitos isósceles.

- Para $n = 5$, como el triángulo no es equilátero, debe haber dos lados distintos uno del otro. Asumamos sin pérdida de generalidad que $AB > AC$. Entonces, construyamos el punto C' sobre el segmento AB tal que $AC = AC'$. Ahora, apliquémosle la partición $\mathfrak{T}$ a $\triangle C'BC$.



Como $\triangle AC'C$ es isósceles por construcción, $\triangle ABC$ queda exitosamente dividido en 5 triangulitos isósceles

- Para la hipótesis de inducción, asumamos que es posible dividirlo en k triangulitos isósceles, para todo k tal que $3 \leq k < n$, con $n \geq 6$.
- Finalmente, para el paso inductivo, dividamos el triángulo en $n - 3$ triangulitos isósceles (la hipótesis nos garantiza que esto es posible), seleccionemos alguno de esos triangulitos isósceles, digamos $\triangle XYZ$, y apliquémosle la partición $\mathfrak{T}$. Esta partición nos hizo perder a $\triangle XYZ$, pero también nos hizo ganar 4 triangulitos isósceles. Por lo tanto, tenemos al triángulo original dividido en $(n-3)-1+4 = n$ triangulitos isósceles.

Nuestra inducción está completada, así que terminamos. $\square$

Comentario 1. El detalle de que el ángulo $\angle BAC$ debe ser el mayor es importante para la partición $\mathfrak{T}$, pero es muy fácil de pasar por alto.

Comentario 2. Lo de dividir el triángulo en tres triángulos isósceles considerando el circuncentro solo es posible si el triángulo es acutángulo. Asimismo, la partición que utilizamos para dividirlo en 5 triangulitos isósceles solo es posible si el triángulo no es equilátero.

Comentario 3. Una manera de plantear el problema que lo hace más sencillo sería dándole dos incisos, donde el primero pediría demostrar que puede ser dividido en $3n+1$ triangulitos isósceles (que hace necesario hallar la partición $\mathfrak{T}$, la clave del problema), y el segundo pediría que se demostrara para todo $n \geq 3$.

Comentario 4. Una versión más difícil y general del problema es pedir que se demuestre para todo triángulo ABC, con $n \geq 6$. Ya la demostración para acutángulos no equiláteros fue presentada. Para obtusángulos, simplemente notemos que, tras la partición $\mathfrak{T}$, se nos generará al menos un triángulo acutángulo, así que el obtusángulo puede ser dividido en $3 + n'$ triángulos, donde $n' \geq 3$. Finalmente, para equiláteros, es lastimosamente conocido que un triángulo equilátero puede ser dividido en n triángulos equiláteros, para $n \geq 6$ (ver, por ejemplo, el capítulo 1.4 de *Mathematical Olympiad Challenges*, por Titu Andreescu y Răzvan Gelca).

G6. Modesti acaba de despertar aleatoriamente en algún punto de la ciudad *Descrígeo*. Después de visitar todos los puntos de la ciudad, Modesti descubre lo siguiente:

- La ciudad Descrígeo es una región convexa del plano.
- Los tres edificios más importantes de la ciudad, A, B y C, son tres puntos no colineales.
- $a_P + b_P + c_P$ se mantuvo constante en todos los puntos de la ciudad, donde a_P, b_P, c_P son las distancias del punto P a las rectas BC, AC, AB, respectivamente.

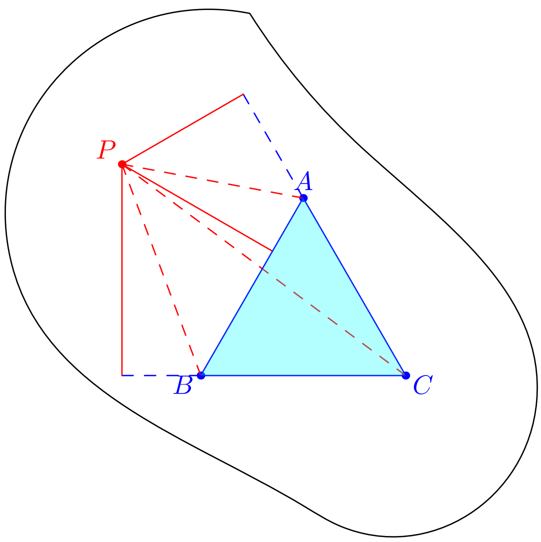
¿Cuál es la probabilidad de que el edificio más cerca del punto donde despertó Modesti sea el A?

Nota: Decimos que una región del plano es convexa si para cualesquiera dos puntos X, Y que pertenezcan a esa región se cumple que todos los puntos del segmento XY también pertenecen a esa región.

(Fase III 2/3)

Respuesta. $\frac{1}{3}$

Solución. Primero, como la ciudad es convexa, todo el triángulo $\triangle ABC$, incluyendo los puntos de su interior, debe estar contenido en ella. Ahora, digamos que $a_P+b_P+c_P = K$. Cuando Modesti estuvo en A, $b_A = c_A = 0$, por lo que debemos tener que $a_A = K$ en este punto, es decir, la altura de A a BC mide K. Análogamente, las alturas desde B y C en $\triangle ABC$ también miden K. No es difícil ver (por fórmula de área desde los tres lados, por ejemplo) que esto implica que $\triangle ABC$ es equilátero. Ahora, supongamos que algún punto P en el exterior de $\triangle ABC$ formara parte de la ciudad.



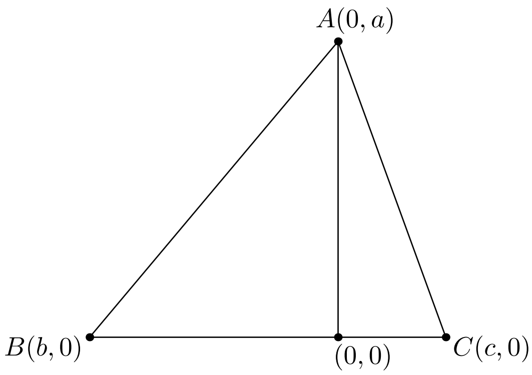
Si este fuera el caso, desde P debería cumplirse que $a_P + b_P + c_P = K$. Sin embargo, si O es el centro del $\triangle ABC$,

$$K = a_O+b_O+c_O = \frac{2[ABC]}{BC} = \frac{2([PBC] + [PCA] - [PBA])}{BC} = a_P+b_P-c_P < a_P+b_P+c_P$$

Contradicción. Luego, la ciudad consta solamente del triángulo $\triangle ABC$ (incluidos los puntos en su interior). Finalmente, como el triángulo es equilátero, la probabilidad de despertar más cerca de algún vértice es igual para todos, por lo que la respuesta es $\frac{1}{3}$ y terminamos. $\square$

Comentario. De hecho, la ciudad es un triángulo equilátero si y solo si se dan esas condiciones, pues en un triángulo equilátero $a_P + b_P + c_P$ es constante e igual a la altura del triángulo por el Lema de Viviani.

Solución 2. Primero, como la ciudad es convexa, todo el triángulo $\triangle ABC$, incluyendo los puntos de su interior, debe estar contenido en ella. Ahora, ubiquemos a $\triangle ABC$ en el plano cartesiano, con BC sobre el eje X y A sobre el eje Y. Sean $(0, a), (b, 0), (c, 0)$ las coordenadas de A, B, C, respectivamente.



Utilizando la fórmula de distancia de un punto a una recta, nos damos cuenta que el lugar geométrico de los puntos (x, y) que cumplen que $a_{(x,y)} + b_{(x,y)} + c_{(x,y)} = K$ es

$$|y| + \frac{|ax + by - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|ax + cy - ac|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = K$$

Este lugar geométrico es continuo, mas no puede ser ni una recta ni una línea quebrada, pues contradeciría el hecho de que todos los puntos en el interior del triángulo $\triangle ABC$ son parte de la ciudad. Luego, para todo (x, y) se deben cancelar los términos con x en la fórmula anterior, y, como $a \neq 0$, esto solo sucede si

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$
$$|b| = |c|$$

Como están de lados opuestos del eje X, lo anterior implica que $b = -c$. Ahora, para que los términos con x se cancelen necesariamente debe ocurrir que los valores absolutos tengan signo opuesto, y además los términos con y también deben cancelarse. Esto es,

$$\begin{aligned}1 \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} &= 0\\ \pm \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} &= -1\\ \frac{4b^2}{a^2+b^2} &= 1\\ a &= \pm\sqrt{3}b\end{aligned}$$

Como b es negativo, esto quiere decir que $a = -\sqrt{3}b$. Junto con $b = -c$, con esto deducimos que $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero. Ahora, probemos un lema.

Lema. Sea $t(x, y) = mx + ny + p$, con $m, n, p \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, una función del plano a $\mathbb{R}$. Si evaluamos $t(x, y)$ en un punto (x', y') por encima de la recta $mx + ny + p = 0$, $t(x', y') > 0$. Análogamente, si evaluamos $t(x, y)$ en un punto (x', y') por debajo de la recta $mx + ny + p = 0$, $t(x', y') < 0$.

Prueba. Simplemente notemos que si (x', y') está por encima de la recta $y = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n}$, habría que trasladarla hacia arriba en el plano para que pasara por el punto (x', y'), lo que indica que $y' > -\frac{m}{n}x' - \frac{p}{n}$, es decir, $t(x', y') > 0$. La otra afirmación es análoga.

Aplicando el Lema, como b es negativo, todos los puntos de la ciudad deben estar por debajo o por arriba de las rectas AB y AC para que los coeficientes de x en $|-ax-by+ab|$ y $|ax - by + ab|$ tengan signo opuesto y los términos con x se cancelen. Si (x, y) está arriba de ambas rectas, obtendríamos

$$K = |y| + \frac{|-ax-by+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{|ax-by+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = |y| - \frac{2by}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sin embargo, aquí el coeficiente de y no se cancela, sino que es estrictamente positivo. Contradicción. Por otro lado, si (x, y) está por debajo de ambas rectas,

$$K = |y| + \frac{|-ax-by+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{|ax-by+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = |y| + \frac{2by}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Como los términos con y deben cancelarse, tiene que ocurrir que $y > 0$ (porque si no, el coeficiente de la y en la expresión de arriba sería estrictamente negativo). Esto implica que la única región del plano que cumple con esto es el triángulo $\triangle ABC$, es decir, la ciudad consta solo del $\triangle ABC$ y todos sus puntos internos. Por lo tanto, la simetría nos dice que la probabilidad buscada es $\frac{1}{3}$ y terminamos. $\square$

Comentario 1. Esta solución requiere un manejo cuidadoso de la Geometría Analítica.

Comentario 2. Una vez que tenemos la ecuación del lugar geométrico, podemos empezar a sustituir puntos (x, y) que sabemos que están en la ciudad. Esto haría que la primera parte de la solución se asemeje un poco más a la Solución 1.

Teoría de números

N1. El resultado de que todo número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 3 viene del hecho de que el residuo de un número al dividirse entre 9 es igual al residuo de dividir entre 9 la suma de sus dígitos.

a) Determine el residuo de los siguientes números al dividirse por 9:

   i. 123456789

   ii. 9876543210

   iii. $\underbrace{555\ldots5}_{2021\text{veces}}$

b) Se construyen todos los números de tres dígitos cuyos dígitos sean 1, 3 y 5 en algún orden. ¿Cuáles de ellos son números primos?

c) Pruebe que el residuo de un número al dividirse entre 9 es igual al residuo de dividir entre 9 la suma de sus dígitos.

(Categoría A 2)

Respuesta. Los residuos que se piden son 0, 0 y 7, respectivamente, y la cantidad de números primos con dígitos 1,3,5 en algún orden es 0.

Solución. Para demostrar la parte c), note que si $N = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0$ es un entero en notación decimal, entonces

$$N = a_n(\underbrace{999\ldots9}_{n\text{veces}}+1) + \cdots + a_1(9+1) + a_0 = 9M + (a_n + \cdots + a_1 + a_2)$$

donde M es algún entero. Por lo tanto, el residuo que obtendremos al dividir N entre 9 es igual al residuo que obtendremos al dividir $a_n + \cdots + a_1 + a_0$ entre 9, como queríamos. Para la parte b), este resultado nos dice que 9 divide a todos los números cuyo dígitos sean 1,3,5 en algún orden, pues el residuo de estos números al ser divididos entre 9 sería el mismo que el de $1 + 3 + 5 = 9$, es decir, 0. Por tanto, ninguno es primo. Finalmente, para la parte a), simplemente aplicamos este resultado. Si $r_9(n)$ es el residuo que deja n al ser dividido entre 9,

i. $r_9(123456789) = r_9(45) = r_9(9) = 0$

ii. $r_9(9876543210) = r_9(45) = r_9(9) = 0$

iii. $r_9(\underbrace{555\ldots5}_{2021\text{veces}}) = r_9(10105) = r_9(7) = 7$

Terminamos. □

Comentario 1. La parte a) puede resolverse sin haber demostrado c), pues el resultado es parte del enunciado del problema. (Removiendo el resultado del enunciado podemos obtener una versión más difícil del problema).

Comentario 2. Los incisos i. y ii. pueden resolverse haciendo la división manualmente. Asimismo, podrían modificarse para no dar el mismo residuo.

Comentario 3. La parte c) del problema es un resultado conocido, que además es claro utilizando congruencias $\pmod 9$.

N2. Una terna (x, y, z) de números enteros positivos se denomina *mágica* si

$$3x = 5y = 2z$$

a) Determine los valores de y y z para la terna mágica $(50, y, z)$.

b) Pruebe que, para toda terna mágica (x, y, z), y debe ser divisible por 6.

c) Pruebe que, para toda terna mágica (x, y, z), el producto xyz debe ser divisible por 900.

(Categoría A 1/2 o Categoría B 1/2)

Respuesta. En la terna mágica dada, $y = 30$ y $z = 75$

Solución. Para la parte a), de la relación $3x = 5y = 2z$, deducimos que $y = \frac{3x}{5}$ y que $z = \frac{3x}{2}$, por lo que, si $x = 50$, obtenemos que $y = 30$ y $z = 75$. Ahora, para la parte b), tenemos que $y = 3 \cdot \frac{x}{5}$ y $y = 2 \cdot \frac{z}{5}$. Como 5 es primo relativo a 2 y a 3 y además 2 y 3 son primos relativos entre sí, las dos relaciones mostradas implican que $2 \cdot 3 = 6$ divide a y. Análogamente, $3 \cdot 5 = 15$ divide a z y $5 \cdot 2 = 10$ divide a x. Por lo tanto, $6 \cdot 15 \cdot 10 = 900$ divide a xyz, y esto demuestra la parte c). Terminamos. $\square$

Comentario. El inciso b) hace más fácil el inciso c), por lo que removerlo haría al problema más retador.

N3. Sea $T_n = 1+2+3+\cdots+n$. Por ejemplo, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, etc. Considere el conjunto

$$T = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{2021}\}$$

¿Cuántos múltiplos de 8 hay en T?

(Categoría A 2/3)

Respuesta. Hay 252 múltiplos de 8 en T.

Solución. Por Gauss, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Notemos que, como n y $n+1$ son primos relativos,

$$8 \mid \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 16 \mid n(n+1) \Leftrightarrow 16 \mid n \text{ o } 16 \mid (n+1)$$

Finalmente, como hay $\left\lfloor \frac{2021}{16} \right\rfloor$ múltiplos de 16 y $\left\lfloor \frac{2022}{16} \right\rfloor$ números congruentes con -1 $\pmod{16}$ entre 1 y 2021, la respuesta es

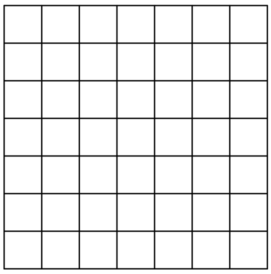
$$\left\lfloor \frac{2021}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{16} \right\rfloor = 126 + 126 = 252$$

Terminamos. □

Comentario. Con el mismo argumento, podemos ver que la respuesta si cambiamos 2^3 por 2^t y 2021 por n es

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{t+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2^{t+1}} \right\rfloor$$

N4. Consideremos un tablero 7×7.

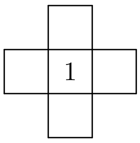


¿Es posible acomodar los números del 1 al 49 en el tablero, uno en cada casilla, de tal modo que todos los números sean adyacentes a al menos un múltiplo o divisor suyo?

Nota: Decimos que dos números son adyacentes si las casillas en las que están comparten un lado.

Respuesta. No

Solución. Notemos que 47, 43, 41, 37 y 31 no tienen ni múltiplos ni divisores del 1 al 49 a excepción del 1. Luego, si fuera posible acomodarlos para que se cumpla la condición, los cinco tendrían que ser adyacentes a 1. Sin embargo, esto es imposible, pues 1 puede tener a lo más cuatro números adyacentes a él.



Por lo tanto, no es posible y terminamos. $\square$

Comentario 1. Otro primo grande que funciona para este argumento es el 29.

Comentario 2. Sin considerar $n = 1$, $n = 7$ es el menor n para el cual esto no es posible en un tablero $n \times n$. Para $n = 6$, por ejemplo, sí es posible este acomodo, pues la cantidad de primos entre $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ y n^2 es ≤ 4.

11	33	19	17	34	13
22	31	1	29	35	26
36	18	23	10	5	25
7	28	14	15	30	2
12	4	20	16	3	21
6	24	32	8	27	9

N5. Alberto cumple el día del examen. En su cumpleaños, él revisa el día de su nacimiento y nota que está cumpliendo el mismo día de la semana en el que nació. Luego de enterarse de esto, revisa sus cumpleaños pasados y descubre que este año es la tercera vez que cumple años el mismo día de la semana en el que nació (sin contar cuando nació). ¿Cuántos años está cumpliendo Alberto?

Nota: 2020 es un año bisiesto, y los años bisiestos suceden cada cuatro años, incluyendo el año 2000.

(Categoría A 3/4 o Categoría B 2)

Respuesta. Está cumpliendo 22 años.

Solución. Asignémosle a los días de la semana los números del 1 al 7 en orden (por ejemplo, al domingo, 1, al lunes, 2, ... y al sábado, 7). Primero, nótese que el día del cumpleaños, al coincidir con el examen, es después de febrero (en particular, después de cualquier 29 de febrero). Ahora, si en un año no bisiesto Alberto cumple el día k, $1 \leq k \leq 7$, el año pasado cumplió el día $k-1$, pues $365 \equiv 1 \pmod{7}$. Por otro lado, si cumplió el día k en un año bisiesto, el año pasado cumplió el día $k-2$, pues $366 \equiv 2 \pmod{7}$. Ahora, para que su cumpleaños se dé el mismo día de la semana en dos años distintos, la diferencia en el día de la semana entre los dos años debe ser divisible entre 7. Como ya vimos que la diferencia en el día de la semana entre un año no bisiesto y el anterior es 1, y entre un año bisiesto y el anterior es 2, solo tenemos que contar, recordando que 3 años después de su nacimiento, incluyendo 2021, cumplió el mismo día.

Año	Diferencia con el año siguiente (mód 7)	Diferencia con 2021	Año	Diferencia con el año siguiente (mód 7)	Diferencia con 2021
2021	–	**0**	2009	1	15
2020	1	1	2008	1	16
2019	2	3	2007	2	18
2018	1	4	2006	1	19
2017	1	5	2005	1	20
2016	1	6	2004	1	**21**
2015	2	8	2003	2	23
2014	1	9	2002	1	24
2013	1	10	2001	1	25
2012	1	11	2000	1	26
2011	2	13	1999	2	**28**
2010	1	**14**			

Como vemos, el año de nacimiento que cumple con las condiciones del problema es el 1999. Por lo tanto, Alberto tiene $2021 - 1999 + 1 = 22$ años de edad, y terminamos. $\square$

Comentario. El análisis de las congruencias se presentó en una tabla para efectos visuales, pero estos cálculos en realidad son rápidos y simples. Por ejemplo, se puede simplemente escribir la secuencia $1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \ldots$ mecánicamente e ir calculando la suma de todos los números hasta el momento. Cuando la suma nos ha dado múltiplo de 7 tres veces, paramos, y ya nos topamos con el 1999.

N6. Sea p un número primo y y un entero tal que $y^3 + y^2 + 2y + 1$ es divisible entre p. Demuestre que existe un entero x tal que $8x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ es divisible entre p.

(Categoría A 4, Categoría B 3 o Fase III 1)

Solución. Primero, notemos que dicho primo p no puede ser 2, ya que

$$y^3 + y^2 + 2y + 1 = y(y(y+1) + 2) + 1$$

es impar, pues $y(y+1)$ es siempre par. Luego, p es un primo impar. Para finalizar, decimos que $x = \dfrac{y(p+1)}{2}$ cumple con las condiciones del problema. En efecto,

$$\begin{aligned} 8x^3 + 4x^2 + 4x + 1 &= y^3(p+1)^3 + y^2(p+1)^2 + 2y(p+1) + 1 \\ 8x^3 + 4x^2 + 4x + 1 &= y^3 + y^2 + 2y + 1 + Np \end{aligned}$$

donde N es algún entero. Sin embargo, p divide a $y^3 + y^2 + 2y + 1$ y a Np, por lo que divide a $8x^3 + 4x^2 + 4x + 1$, y terminamos. □

Comentario 1. Quien no está familiarizado con las congruencias probablemente desarrollará N manualmente.

Comentario 2. En lugar de considerar $x = \dfrac{p+1}{2}$, también se puede considerar $x = yi_2$, donde i_2 es el inverso multiplicativo de $2 \pmod{p}$. (Este inverso existe porque ya probamos que p debe ser impar).

Comentario 3. Si y es par, $x = \frac{y}{2}$ sirve.

N7. Halle todos los primos p, q tales que $p^q + q^p$ también es primo.

(Categoría A 4, Categoría B 3 o Fase III 1)

Respuesta. Los únicos primos que satisfacen eso son 2 y 3.

Solución. Primero, es claro que satisfacen el problema, pues 2 y 3 son primos y además $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ también es primo.

Ahora, demostremos que son los únicos que cumplen. Si p, q fueran ambos impares o pares, $p^q + q^p > 1 + 1 = 2$ sería par, por lo que no sería primo. Luego, tiene que suceder que exactamente uno de ellos sea par. Como el único primo par es 2, alguno debe ser 2. Digamos sin pérdida de generalidad que $p = 2$. Ahora, queremos que $2^q + q^2$ sea primo. Si q no fuera múltiplo de 3, como es impar,

$$2^q + q^2 \equiv (-1)^q + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

pero $2^q + q^2 > 2 + 1 = 3$, por lo que no sería primo. Entonces, la única posibilidad sería que q fuera múltiplo de 3, es decir, como q es primo, que $q = 3$. Esta es la única solución, así que terminamos. $\square$

Comentario. En esta solución usamos el hecho de que los cuadrados perfectos son congruentes con 0 o 1 $\pmod 3$.

N8. Halle todas las parejas de enteros (a, b) que satisfacen la ecuación

$$7a + 10b + ab = 2021$$

(Categoría A 4 o Categoría B 3/4)

Respuesta. Hay 16 parejas que satisfacen la ecuación: $(-2101, -8)$, $(-707, -10)$, $(-133, -24)$, $(-61, -48)$, $(-51, -58)$, $(-27, -130)$, $(-13, -704)$, $(-11, -2098)$, $(-9, 2084)$, $(-7, 690)$, $(7, 116)$, $(31, 44)$, $(41, 34)$, $(113, 10)$, $(687, -4)$, $(2081, -6)$

Solución. Notemos que una pareja (a, b) satisface la ecuación si y solo si

$$\begin{aligned} 7a + 10b + ab &= 2021 \\ ab + 7a + 10b + 70 &= 2091 \\ (a + 10)(b + 7) &= 2091 \end{aligned}$$

y esto ocurre si y solo para algún divisor m de 2091 tenemos que

$$\begin{cases} a + 10 &= m \\ b + 7 &= \dfrac{2091}{m} \end{cases}$$

Como $2091 = 3 \cdot 17 \cdot 41$ tiene 8 divisores positivos y 8 divisores negativos, en total hay 16 valores para m: $\pm 1, \pm 3, \pm 17, \pm 41, \pm 51, \pm 123, \pm 697, \pm 2091$. Resolviendo los 16 sistemas de ecuaciones resultantes, obtenemos las 16 respuestas. Como cada sistema de ecuaciones es resoluble, tiene una solución distinta para a y es un *si y solo si*, terminamos. $\square$

Comentario 1. La principal dificultad es lo tedioso que es hallar manualmente y sin error las 16 soluciones a la ecuación.

Comentario 2. Una manera menos ingeniosa y elegante pero quizá más natural y directa de resolver el problema es despejar a o b. Al final llegamos al mismo análisis: $(b + 7)$ o $(a + 10)$ debe dividir a 2091, y en consecuencia hay 16 valores para cada uno.

Comentario 3. Dos variantes mucho menos tediosas del problema son pedir solo las soluciones enteras positivas (en cuyo caso solo estarían $(7, 116), (31, 44), (41, 34), (113, 10)$) o cambiar la ecuación por $7a - 10b + ab = 2021$ (en cuyo caso nos enfocaríamos en los divisores de 1951 que, al ser primo, son solo $\pm 1, \pm 1951$, y las únicas soluciones serían $(-1941, -8), (9, -1958)$, $(11, 1944)$, $(1961, -6)$).

N9. Halle todos los enteros positivos que sean cuadrados perfectos tales que en su representación decimal solo hay un dígito.

Nota: 7, 44 y 3333 son ejemplos de enteros positivos con un solo dígito en su representación decimal.

(Categoría B 4 o Fase III 1/2)

Respuesta. 1, 4 y 9

Solución. En primero lugar, nuestras respuestas claramente cumplen, pues son $1^2, 2^2, 3^2$, respectivamente, y en su representación decimal solo hay un dígito. Ahora, demostremos que son las únicas. Asumamos que un entero t satisface las condiciones del problema.

- Si t es un número de un solo dígito, las únicas respuestas son 1,4 y 9, como tenemos.
- Si el único dígito en la representación decimal de t es 1, 4 o 9 y tiene más de un dígito,
$$t = aa\dots a = a \cdot 11\dots 1$$
donde $a \in \{1, 4, 9\}$, Como t y a son cuadrados perfectos, $11\dots 1$ debe serlo también. Sin embargo, $11\dots 1 \equiv 3 \pmod 4$. Como los cuadrados solo son congruntes a 0 o $1 \pmod 4$, esto es una contradicción.
- Si el único dígito en la representación decimal de t es 2, 6 u 8,
$$t = aa\dots a = b \cdot cc\dots c$$
donde $a \in \{2, 6, 8\}$, $b \in \{2, 8\}$ y $c \in \{1, 3\}$. Claramente $cc\dots c$ es impar, y b tiene una cantidad impar de factores 2. Esto quiere decir que $aa\dots a$ tiene una cantidad impar de factores 2. Sin embargo, los cuadrados perfectos siempre tienen una cantidad par de factores primos. Contradicción.
- t no puede tener ni 3 ni 7 porque los cuadrados perfectos no acaban en estos dígitos.
- Si el único dígito en la representación decimal de t es 5 y tiene más de un dígito, acabaría en $\dots 55$. Sin embargo, los múltiplos de 25 solo acaban en $\dots 00, \dots 25, \dots 50$ o $\dots 75$, por lo que t no sería múltiplo de 25. Como todo cuadrado perfecto múltiplo de 5 también debe ser múltiplo de 25, esto es una contradicción.

Al haber tratado todos los casos y haber obtenido solamente las respuestas que habíamos mencionado al inicio, terminamos. □

Comentario. En este problema se usa una idea similar a en el problema 3 de la Categoría B de la OPM 2010, en el que se pregunta cuándo $144\dots 4$ es cuadrado perfecto.

Olimpiada Panameña de Matemática

MEDUCA
PARA TODA LA VIDA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
1935

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIRIQUÍ
-REPÚBLICA DE PANAMÁ-
1995
UNACHI