Analysis 1

Frühjahrssemester 2019 – Lecture Notes

Sven Pfiffner

Davos|Zürich Mai 19

Inhalt

Ordnungsaxiome

Im Raum der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gelten folgende, sogenannte Ordnungsaxiome

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \mid x \leq y \vee y \leq x$

$\mathbb{R}$ ist ein kommutativer Körper und Ordnungsvollständig. Das heisst, dass gilt: $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \mid x \leq y \Rightarrow \exists_z (x \leq z \leq y)$. Das liegt an der Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ ist eine überabzählbare Menge und damit gibt es unendlich viele Zahlen zwischen $x, y \in \mathbb{R}$ und damit auch immer mindestens ein $z \in \mathbb{R}$, so dass $x \leq y \Rightarrow x \leq z \leq y$

Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ und $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} \mid a \leq b$, dann gibt es auf jeden Fall ein $c \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b$

Lösung von Quadraten

Für jedes $t \geq 0$ in $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{t}$.

Beweis:

Sei $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \wedge y^2 \leq t\}$ und $B = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^2 \geq t\}$

- $A \neq \emptyset \; denn \; 0 \in A$
- $B \neq \emptyset$ (Archimedes)
- $\forall_{y \in A} \forall_{z \in B} \mid y^2 \leq t \leq z^2 \Rightarrow z^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y \leq z$

Es gibt also nach der Ordnungsvollständigkeit auf jeden Fall ein $c \in \mathbb{R}$ mit
$y \leq c \leq z \Leftrightarrow y^2 \leq c^2 \leq z^2$. Wir zeigen nun, dass $c^2 \geq t$ und $c^2 \leq t$ und damit dann $c^2 = t$.

$\underline{c^2 \geq t}$: Wir nehmen an, $c^2 < t$. Damit wäre nach unserer Definition $c \in A$. Weil $t - c^2 > 0$ und $2c + 1 > 0$ gilt nach Archimedes: $\exists_{n \in \mathbb{N}} \mid 2c + 1 \leq n(t - c^2)$.

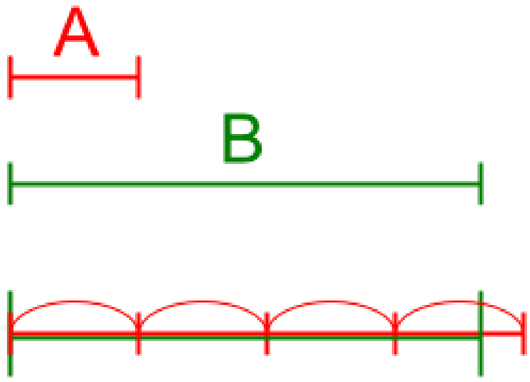
$$\begin{aligned}\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 &= c^2 + 2c * \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} \\ &= c^2 + (2c + 1) * \frac{1}{n} \\ &\leq c^2 + t - c^2 = t\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $c + \frac{1}{n} \in A$. Mit $\forall_{y \in A} \; y \leq c$ also
$c + \frac{1}{n} \leq c \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq 0$ was ein Wiederspruch wäre

$\underline{c^2 \leq t}$: ????????????????

Archimedisches Axiom

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > x$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, mit $y \leq n * x$



Die Bedeutung des archimedischen Axioms wird klar, wenn wir seine Aussage negieren. Aus $\forall_{x>0,y>0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \mid n * x \geq y$ wird $\exists_{x>0,y>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \mid n * x < y$. Damit wäre y eine in Relation zu x unendlich grosse Zahl (Jedes Vielfache von x ist kleiner als y). Folgende zwei Aussagen folgen aus dem Archimedischen Axiom

- Es gibt keine zwei Zahlen x und y, so dass y in Relation zu x unendlich gross ist.
- Es gibt keine positiven unendlich kleinen oder unendlich grossen reellen Zahlen.

Widerspruchsbeweis:

Sei $r = y * x^{-1}$. Wir zeigen, dass es auf jeden Fall ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $r \leq n$.

Angenommen $\forall_{m \in \mathbb{N}} \mid m \leq r$. Wir finden einen Widerspruch:

Sei $A = \mathbb{N}$ und $B = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall_{m \in \mathbb{N}}\, m \leq y\}$ dann gilt $r \in B$ und nach den Ordnungsaxiomen ausserdem $\exists_{c \in \mathbb{R}} \mid \forall_{m \in \mathbb{N}} \forall_{y \in B}\ m \leq c \wedge c \leq y$.

$$\begin{aligned} m + 1 \leq c \ &\Rightarrow m \leq c - 1 \\ &\Rightarrow c - 1 \in B \\ &\Rightarrow c \leq c - 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq 0\ (Widerspruch) \end{aligned}$$

■

Obere- und untere Schranken

Die obere Schranke einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist ein Element, welches nach der Ordnungsrelation grösser oder gleich aller Elemente in A ist. Die kleinste obere Schranke (Supremum) von A ist das nach der Ordnungsrelation kleinste Element in der Menge aller oberer Schranken von A. Analog dazu sind die untere Schranke und grösste untere Schranke (Infimum) definiert.

$$\begin{aligned} A &= [5,7[\implies 7,8 \ldots \textit{ sind obere Schranken} \\ B &= [5,+\infty[\implies B \textit{ ist nicht nach oben beschränkt} \\ C &= [5,7] \implies 7 \textit{ ist obere Schranke und Maximum von } C \\ D &= [5,7[\implies 7 \textit{ ist obere Schranke aber } B \textit{ besitzt kein Maximum} \\ E &= [3,8[\implies 8 \textit{ ist die kleinste oberste Schranke und damit Supremum} \end{aligned}$$

Existenz von oberen-/unteren Schranken

Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

1. Sei A nach oben beschränkt, dann gibt es immer eine kleinste obere Schranke.
2. Sei A nach unten beschränkt, dann gibt es immer eine grösste untere Schranke.

Beweis:

1. Sei B die Menge der oberen Schranken von A. Wir wissen nach Def. dass $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$. Nun gilt aber auch $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} \mid a \leq b$. Nach Ordnungsvollständigkeitsaxiom wissen wir nun, dass $\exists_{c \in \mathbb{R}} \mid a \leq c \leq b$ und damit existiert mit c immer eine kleinste obere Schranke

2. Sei B die Menge der unteren Schranken von A. Wir wissen nach Def. dass $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$. Nun gilt aber auch $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} \mid a \geq b$. Nach Ordnungsvollständigkeitsaxiom wissen wir nun, dass $\exists_{c \in \mathbb{R}} \mid a \geq c \geq b$ und damit existiert mit c immer eine grösste untere Schranke.

■

Wir definieren die Schranken von nicht beschränkten Mengen wie folgt:

$$\sup(A) = +\infty$$
$$\inf(A) = -\infty$$

Jede Zahl c in $M = [x, +\infty[$ erfüllt $c \geq x$ und ist damit obere Schranke von $]-\infty, x[$

Kardinalität

Zwei Mengen X, Y heissen gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f: X \rightarrow Y$ gibt. Ist eine Menge X endlich, so gilt entweder $X = \emptyset$ oder $\exists_{n\in\mathbb{N}} \mid X\ und\ \{1,2,3,\dots,n\}\ gleichmächtig$. Eine Menge X ist abzählbar falls gilt: $card(X) \leq card(\mathbb{N})$.

Der euklidische Raum

Folgende wichtige Eigenschaften gelten im euklidischen Raum

1. Skalarprodukt: $< x, y >:= \sum_{j=1}^{m} x_j + y_j$
2. Euklidische Norm: $||x|| = \sqrt{< x, x >}$
3. Cauchy-Schwarz: $|< x, y >| \leq ||x|| * ||y||$
4. Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Beweis zu 4):

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= < x+y, x+y > [\boldsymbol{Nach\ 2.}] \\ &= < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > \\ &= < x, x > +2 < x, y > + < y, y > \end{aligned}$$

Nun gilt aber nach Cauchy-Schwarz

$$2 < x, y > \leq 2|< x, y >| \leq 2||x|| * ||y||$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &\leq ||x||^2 + 2||x|| * ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

■

Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht konstante Polynom in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Das bedeutet, dass die komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen sind.

Beachte: Der Beweis dieser Aussage gilt als sehr schwierig und ist nicht Gegenstand der Vorlesung «Analysis 1»!

Folgen

Definition einer Folge

Eine Folge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir führen folgende Notationen ein:

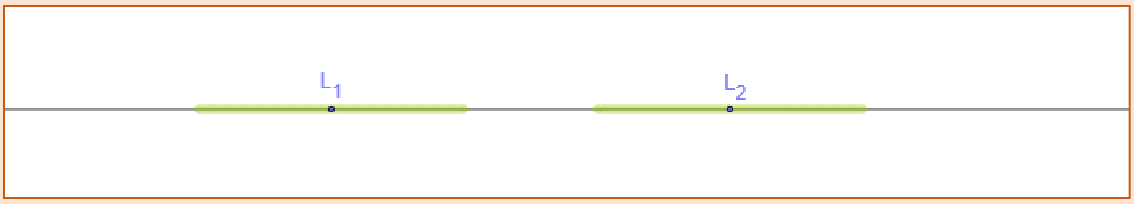
- $a_n := a(n)$
- $(a_n)_{n\geq 1} := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\forall_{\mathcal{E}>0}$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (l-\mathcal{E}, l+\mathcal{E})\}$ endlich ist.

Widerspruchsbeweis:

Wir nehmen an, es gäbe l_1, l_2, welche beide die obige Eigenschaft erfüllen. Wir wählen nun eine bestimmtes $\mathcal{E}$ (die Eigenschaft gilt $\forall_{\mathcal{E}}$) und stossen so auf einen Wiederspruch!

Sei $\mathcal{E} = \frac{l_2 - l_1}{3}$. Wir sehen bei Betrachtung des Zahlenstrahls, dass dadurch zwei disjunkte Mengen E_1, E_2 entstehen:



Nach Voraussetzung gilt:

$$E_1 = \{n \mid a_n \notin (l_1 - \mathcal{E}, l_2 + \mathcal{E})\} \subset \mathbb{N}$$
$$E_2 = \{n \mid a_n \notin (l_2 - \mathcal{E}, l_2 + \mathcal{E})\} \subset \mathbb{N}$$

Da nun aber E_1 und E_2 voneinander disjunkt sind, können wir schlussfolgern, dass $\mathbb{N}^* \setminus E_2 \subset E_1$ und damit wäre die Kardinalität von E_1 nicht endlich.

■

Konvergenz von Folgen

Eine Folge heisst konvergent, falls ein $l \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \notin (l-\mathcal{E}, l+\mathcal{E})\}$ $\forall_{\mathcal{E}>0}$ von endlicher Kardinalität ist. Wir definieren dann $l = \lim_{n\to\infty} (a_n)_{n\geq 1}$.

Jede konvergente Folge ist beschränkt. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert l. Dann ist $\{a_n | n \geq 1\}$ beschränkt.

Monotonie

1. $(a_n)_{\geq 1}$ ist monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1}\ \forall_{n\geq 1}$
2. $(a_n)_{\geq 1}$ ist monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}\ \forall_{n\geq 1}$

Satz von Weierstrass

Sei $(a_n)_{\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \geq 1\}$.

Sei $(a_n)_{\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \geq 1\}$.

Beweis:

Sei $p := \sup\{a_n | n \geq 1\}$ und $\mathcal{E} > 0$. Demzufolge gibt es ein $N \geq 1$, so dass $p - \mathcal{E} < a_N$ und daraus folgt $\forall_{n\geq N}$:

$$p - \mathcal{E} < a_N \leq p \Longrightarrow |a_n - p| \leq \mathcal{E}$$

Beweis für $\inf\{a_n | n \geq 1\}$ verläuft analog.

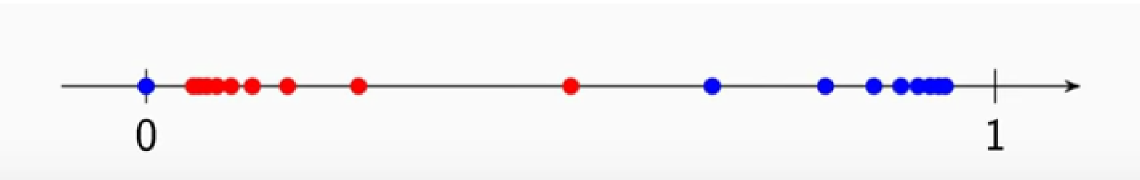
■

Im Allgemeinen können wir nun die Definition eines Häufungspunkts einführen. Wir sagen p sei ein Häufungspunkt der beschränkten Folge $(a_n)_{\geq 1}$, wenn für unendlich viele n gilt, dass $|p - a_n| \leq \mathcal{E}$. Es ist leicht zu erkennen, dass jede beschränkte Folge zwangsweise mindestens einen Häufungspunkt besitzen muss. Es gilt ausserdem:

Sei $(a_n)_{\geq 1}$ monoton wachsend und beschränkt, so besitzt $(a_n)_{\geq 1}$ genau einen Häufungspunkt.

Beispiel:

Wir betrachten $(a_n)_{n\geq 1} \begin{cases} \frac{1}{n}\ wenn\ n\ gerade \\ 1 - \frac{1}{n}\ wenn\ n\ ungerade \end{cases}$. Offensichtlich liegen alle Glieder von $(a_n)_{\geq 1}$ im Intervall $[0,1]$ und damit ist die Folge beschränkt; muss also nach Weierstrass mindestens einen Häufungspunkt besitzen. Zeichnen wir die ersten 13 Glieder im Zahlenstrahl ein, so erkennen wir, dass sich diese um zwei Punkte sammeln → Die beiden Häufungspunkte von $(a_n)_{\geq 1}$, $p_1 = 0, p_2 = 1$.



Zahlenstrahl mit eingezeichneten Gliedern von $(a_n)_{\geq 1}$

Die Bernoulli Ungleichung

Für alle $x \geq -1 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Induktionsbeweis:

- **Induktionsanfang:**

$$n = 0;$$
$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$$

- **Induktionshypothese**

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

- **Induktionsschritt**

$$n \to n+1;$$
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n * (1+x) \\ &\overset{I.H}{\geq} (1+nx)*(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 \\ &\leq\ 1+x+nx \\ &= 1+(n+1)x\end{aligned}$$

■

Das Cauchy-Kriterium

Das Cauchy-Kriterium kann genutzt werden, um festzustellen, ob eine Folge konvergiert, ohne ihren Grenzwert zu kennen. Es lautet wie folgt:

(a_n) ist konvergent, genau dann, wenn $\forall_{\mathcal{E}>0}$ ein $N \geq 1$ existiert, so dass $\forall_{n,m>N} \mid |a_n - a_m| < \mathcal{E}$

Beweis:

($\Longrightarrow$): (a_n) konvergiere mit Grenzwert g. Dann gibt es mit Sicherheit zu jedem $\mathcal{E} > 0$ ein $N \geq 1$, so dass alle Glieder $a_k \mid k > N$ eine Abweichung zu g haben, welche kleiner ist als $\frac{\mathcal{E}}{2}$. Also ein N, so dass $\forall_{k>N} \mid |a_k - a| < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Daraus folgt nun:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \mathcal{E} \text{ für } n,m > N$$

($\Longleftarrow$): Sei (a_n) eine Folge, für die $\forall_{\mathcal{E}>0}$ ein $N \geq 1$ existiert, so dass $\forall_{n,m>N} \mid |a_n - a_m| < \mathcal{E}$. Es gibt also auf jeden Fall ein N, so dass $|a_n - a_m| < 1$ für $n,m > N$ und damit folgt $|a_n| < |a_N| + 1$ für $n > N$. Damit existiert mit $\max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ in jedem Fall eine Schranke.

Nach dem Satz von Weierstrass besitzt (a_n) demzufolge eine konvergente Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)$ mit Grenzwert g. Sei $\mathcal{E} > 0$ gegeben. Wir wählen dazu ein N' mit $|a_n - a_m| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ für $n,m > N'$, sowie ein $n_k > N'$ mit $\left|a_{n_k} - a\right| < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Für $n > N'$ folgt $|a_n - a| \leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - a\right| < \mathcal{E}$ und damit ist (a_n) konvergent.

■

Limes superior/inferior

Sei $(a_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist der Limes superior definiert als

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n := \inf\{\sup\{a_n|k \geq n\}\,|n \in \mathbb{N}\}$$

und der Limes inferior als

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n := \sup\{\inf\{a_k|k \geq n\}\,|n \in \mathbb{N}\}$$

Jede beschränkte Folge lässt die Glieder von zwei monotonen Folgen definieren.

$$b_n := \inf\{a_k|\ k \geq n\}$$
$$c_n := \sup\{a_k|k \geq n\}$$

Überlegen wir uns deren Bedeutung. Sei a_m das m-te Glied von (a_n). Bei b_m handelt es sich um das kleinste Glied welches nach a_m in der Folge erscheint; bei c_m um das grösste Glied welches nach a_m in der Folge erscheint. Bilden wir nun für jedes Glied in (a_n) ein dazugehöriges b_n und c_n, so erhalten wir mit dem grössten aller c_n den $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n$ und mit dem kleinsten aller b_n den $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n$.

Damit ist der $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n$ der kleinste Häufungspunkt von (a_n) und der $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n$ der grösste Häufungspunkt von (a_n).

Ist $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n \neq \pm\infty$, so ist (a_n) monoton.

Beweis:

Nach der Definition von $\lim\inf$ und $\lim\sup$ ist die Aussage äquivalent dazu, dass (a_n) genau einen Häufungspunkt besitzt. Nach Weierstrass ist (a_n) dann monoton.

■

Abgeschlossene Intervalle

Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge der Form

1. $[a, b]\ a \leq b \wedge a, b \in \mathbb{R}$
2. $[a, -\infty[\ a \in \mathbb{R}$
3. $]-\infty, a]\ a \in \mathbb{R}$

Wir definieren die Länge eines abgeschlossenen Intervalls wie folgt:

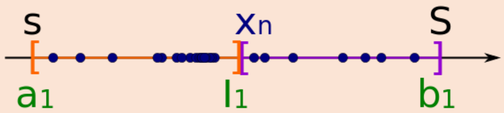
$$l(i) := \begin{cases}(b-a)\ \textit{für Intervalle der Form}\ (1)\\ +\infty\ \textit{für Intervalle der Form}\ (2),(3)\end{cases}$$

Bolzano-Weierstrass

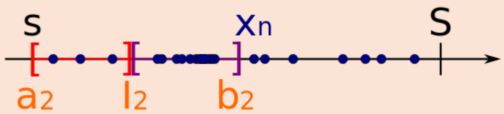
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Wir wissen, dass es ein s und ein S gibt, so dass alle Folgeglieder in $[s, S]$ liegen. Wir definieren nun $I_1 = [s, S]$. Teilen wir I_1 in zwei gleich grosse Teilintervalle $\left[s, \frac{S}{2}\right], \left[\frac{S}{2}, S\right]$, so müssen in zumindest einem dieser beiden Intervalle unendlich viele Folgeglieder von (a_n) liegen. Dieses Intervall definieren wir nun als I_2.



Jetzt können wir wiederum I_2 in zwei gleich grosse Teilintervalle aufteilen und I_3 als dasjenige Teilintervall definieren, welches unendlich viele Folgeglieder enthält.



Dieses Verfahren wiederholen wir beliebig oft, so dass wir am Ende eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\geq 1}$ erhalten. Man beachte: Induktiv gilt $l(I_{n+1}) = \frac{1}{2} l(I_n)$ und damit konvergiert die Länge der Intervalle gegen 0. Es gibt also nach dem Intervallschachtelungsprinzip genau einen Punkt x, der in allen Intervallen I_n liegt. Dieser Punkt entspricht dem Grenzwert einer Teilfolge von (a_n).

■

Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Wir können durch Konstruktion von Intervallen in $\mathbb{R}$ zeigen, dass die Reellen Zahlen überabzählbar sind.

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist überabzählbar und damit mit Sicherheit auch $\mathbb{R}$ selbst.

Beweis:

Sei $a: \mathbb{N} \to [0,1]$ eine Bijektion. Wir bilden induktiv eine monoton fallende Folge $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ abgeschlossener Intervalle in $[0,1]$ mit $a(n) \notin I_n \ \forall_{n\geq 0}$, dann folgt: $a(n) \notin \ \cap_{l\geq 0} I_l \ \forall_{n\geq 0}$.

Konstruktion von I_n:

Sei $a(0) \in [0,1]$, dann wählen wir als I_0 dasjenige Intervall aus $\left\{\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right\}$, das $a(0)$ nicht enthält. Sei nun $I_n = [c_n, d_n]$ mit $a(n) \notin I_n$und I_{n+1} induktiv definiert als dasjenige Intervall aus $\left\{\left[c_n, \frac{d_n}{3}\right], \left[\frac{d_n}{3}, \frac{2d_n}{3}\right], \left[\frac{2d_n}{3}, d_n\right]\right\}$ welches $a(n+1)$ nicht enthält, so folgt: $I_{n+1} \subset I_n \wedge a(n+1)\ I_{n+1}$

■

Reihen

Gegeben sei eine Folge (a_n). Durch:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

wird der Folge (a_n) eine weitere Folge (s_n) zugeordnet. Diese Folge nennen wir Reihe und sagen:

- a_n sind die Glieder der Reihe
- s_n sind die Partialsummen der Reihe

Reihenkonvergenz

Konvergiert die Folge der Partialsummen einer Reihe, so heisst diese Reihe konvergent. Man sagt dann, $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ sei die Summe der konvergenten Reihe und schreibt: $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Weiter definieren wir für divergierende Reihen: $s = \infty$ für positive Divergenz und $s = -\infty$ für negative Divergenz.

Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k * a_n$.

Beweis:

Wegen der fallenden Monotonie der Folge (a_n) folgt aus $s_k - s_{k-2} = (-1)^k (a_k - a_{k-1})$, dass $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$.

■

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall_{\mathcal{E}>0} \exists_N : \forall_{n<m\leq N} : |s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \mathcal{E}$.

Beweis:

Wir wissen, dass eine Reihe konvergiert, sofern derer Partialsummen konvergieren. Aufgrund Das Cauchy-Kriteriums folgt aus $|s_n - s_m| < \mathcal{E}$ direkt die Konvergenz von (s_n).

■

Majoranten- und Minoranten-Kriterium

Das Majoranten-Kriterium formuliert sich wie folgt:

Es seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen, für die $\exists_p$ so dass $\forall_{m \geq p}: |a_m| \leq |b_m|$. Es gilt dann:

1. Konvergiert $\sum b_n$, so konvergiert auch $\sum a_n$.
2. Divergiert $\sum a_n$, so divergiert auch $\sum b_n$.

Für das Minoranten-Kriterium sagen wir:

Es seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen, für die $\exists_p$ so dass $\forall_{m \geq p}: |a_m| \geq |b_m|$. Es gilt dann:

1. Konvergiert $\sum a_n$, so konvergiert auch $\sum b_n$.
2. Divergiert $\sum b_n$, so divergiert auch $\sum a_n$.

Beweis:

Wir beweisen hier lediglich das Majoranten-Kriterium und verzichten auf das Minoranten-Kriterium – Die Beweisschritte laufen analog und sind ohnehin nahezu identisch.

1. Nach Cauchy gibt es für jedes $\mathcal{E} > 0$ ein $N > p$, so dass $\forall_{n > m \geq N}: \sum_{k=m+1}^{n} |b_k| < \mathcal{E}$. Damit folgt $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \mathcal{E}$ für die selben m, n. Auch $\sum a_n$ erfüllt also die Cauchysche Konvergenzbedingung.
2. Sei $\sum a_n$ divergent so gilt: $\forall_{N>p}\, \exists_{\mathcal{E}} \forall_{n > m \geq N}: \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| > \mathcal{E}$. Damit folgt $\left|\sum_{k=m+1}^{n} b_k\right| > \mathcal{E}$ für die selben m, n. Auch $\sum b_n$ erfüllt also die Cauchysche Konvergenzbedingung nicht.

■

Quotientenkriterium

Es sei $\sum_n a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle n. Ferner existiere $q \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

1. Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut
2. Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe absolut
3. Ist $q = 1$, so liefert q keinen Aufschluss über konvergenzverhalten.

Beweis:

1. Sei $p = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wir wählen nun $\mathcal{E}$, so dass $p' < 1$ für $p' \coloneqq p + \mathcal{E}$. (Wegen $q < 1$ muss nach unserer Behauptung ein solches $\mathcal{E}$ existieren). Es gilt also $\exists_N \forall_{m \geq N}: \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| < p'$. Insgesamt erhält man so $|a_{N+l}| \leq |a_N| * (q')^l$. Mit dem Majoranten-Kriterium kann man dann feststellen, dass $\sum |a_k|$ konvergiert und damit konvergiert $\sum a_k$ absolut. (Konstruktion nicht vorlesungsrelevant!)
2. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ folgt, dass $\exists_N: \forall_{m>N}: \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| > 1 \implies a_{n+1} > a_n$. Damit ist (a_n) für alle $n > N$ eine Streng monoton wachsende Folge und damit mit Sicherheit keine Nullfolge.

■

Wurzelkriterium

Es sei $L \coloneqq \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Für $\sum a_n$ gilt dann:

1. Ist $L < 1$ so konvergiert die Reihe
2. Ist $L > 1$ so divergiert die Reihe
3. Ist $L = 1$ so liefert L keinen Aufschluss über konvergenzverhalten

Beweis:

1. Sei q eine Zahl mit $L < q < 1$, dann gibt es einen Index N, so dass $\forall_{m \geq N}: \sqrt[m]{|a_m|} < q$. Die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ hat also in $\sum_{n=N}^{\infty} p^n$ eine konvergente Majorante (Siehe Majoranten-Kriterium) und ist damit konvergent.
2. Sei $L > 1$ so gibt es unendlich viele n mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ (d.h. $|a_n| > 1$). Damit bilden die Glieder der Reihe keine Nullfolge.

■

Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

Konvergenz

Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Falls $\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}$ konvergiert, so definieren wir:

$$\rho := \begin{cases} +\infty \text{ falls } \lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}} \text{falls } \lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$.

Beweis:

Sei $a_n := c_n z^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|} * |z|$

Doppelreihen

Gegeben sei eine Doppelfolge $(a_{i,j})_{i,j\geq 0}$. Wir nennen $\sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}$ eine Doppelreihe. Weiter sei $\sum b_k$ eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j} a_{i,j}$ falls es eine Bijektion $\delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}x\mathbb{N}$ gibt, mit $b_k = a_{\delta(k)}$.

Wir nehmen an, dass es ein $B \geq 0$ gibt, so dass $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \ \forall_{m\geq 0}$. Dann konvergieren die Folgenden Reihen absolut:

- $s_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \ \forall_{i\geq 0}$
- $v_i := \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$
- $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$
- $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$

Und es gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} s_i = \sum_{j=0}^{\infty} v_j$. Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut mit selbem Grenzwert.

Cauchy-Produkt der Reihen

Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right)$

Reellwertige Funktionen

Wir definieren: $\mathbb{R}^D$ ist die Menge aller Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ und bildet einen Vektorraum.

Beschränktheit

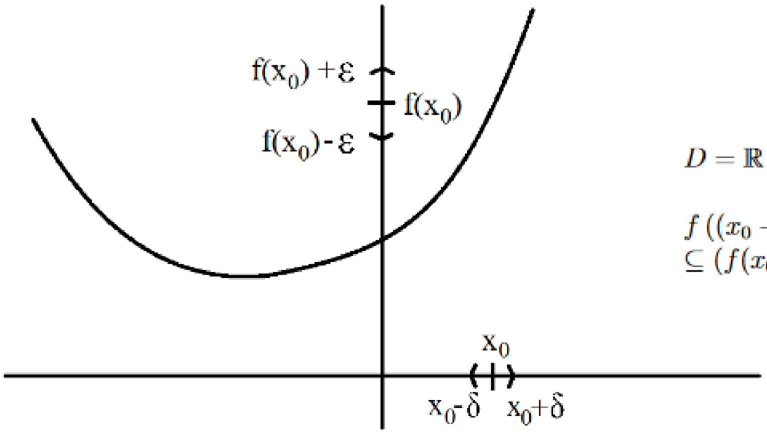
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, ist:

- Monoton wachsend, falls $\forall_{x,y} \in D$
  - $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$
- Streng monoton wachsend falls $\forall_{x,y} \in D$
  - $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
- Monoton fallend, falls $\forall_{x,y} \in D$
  - $x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$
- Streng monoton fallend, falls $\forall_{x,y} \in D$
  - $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$
- Monoton, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist.
- Streng monoton, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Stetige Funktionen

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn man deren Funktionsgraphen zeichnen kann, ohne den Stift zu heben. Das heisst, wenn Sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x \in D$. Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig falls es für jedes $\mathcal{E} > 0$ ein δ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}$ gilt.



$D = \mathbb{R}$

$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$
$\subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \in D$. Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Beweis:

($\Longrightarrow$) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Sei weiter $\mathcal{E} > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $\forall_{x\in D}$:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}$$

Sei nun $N \geq 1$ so, dass

$$|a_n - x_0| < \delta \ \forall_n \geq N$$

Und daher:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

($\Longleftarrow$) Beweis durch Gegenbeispiel: f ist in x_0 nicht stetig. Es gibt also $\mathcal{E} > 0$ so dass

$$f\big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D\big) \not\subset (f(x_0) - \mathcal{E}, f(x_0) + \mathcal{E}) \ \forall_{\delta > 0}$$

Insbesondere gibt es für jedes $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ (mit $\delta = \frac{1}{n}$) ein

$$a_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap D$$

Mit

$$f(a_n) \notin (f(x_0) - \mathcal{E}, f(x_0) + \mathcal{E})$$

Damit entsteht eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

Und

$$|f(a_n) - f(x_0)| \geq \mathcal{E} \ \forall_{n\geq 1}$$

■

Polynomialfunktion

Sei $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Form $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Wir nennen P eine polynomiale Funktion und sagen:

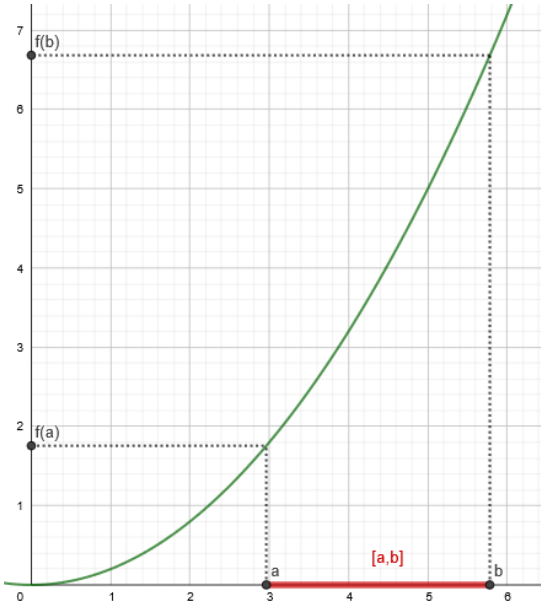
- P ist konstant, falls $a_n = 0$
- P ist von Grad n, falls $a_n \neq 0$

Eine wichtige Eigenschaft von Polynomialfunktionen ist, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Das bedeutet auch, dass diese in jedem Punkt integrierbar sind. **(Siehe Korollar 3.10)**

Zwischenwertsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

Im Grunde sagt der Zwischenwertsatz aus, dass eine reelle Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.



Beispiel Zwischenwertsatz: Jeder Wert in $[a, b]$ wird von f abgedeckt

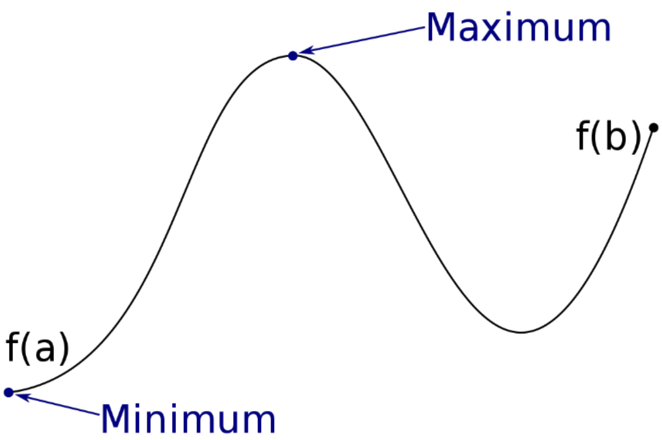
Min-Max Satz

Sei $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)\ \forall_{x \in I}$$

Insbesondere ist f damit beschränkt.

Der Min-Max Satz sagt aus, dass jede auf einem kompakten reellen Intervall definierte, reelwertige und stetige Funktion beschränkt ist und im Definitionsbereich ihr Maximum sowie Minimum annimmt.



Beispiel Max-Min Satz: f nimmt ihr Maximum/Minimum in $[a, b]$ an.

Der Satz über die Umkehrabbildung

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$. Ferner definieren wir $f: D_1 \to D_2, g: D_2 \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist

$$g \circ f: D_1 \to \mathbb{R}$$

In x_0 stetig.

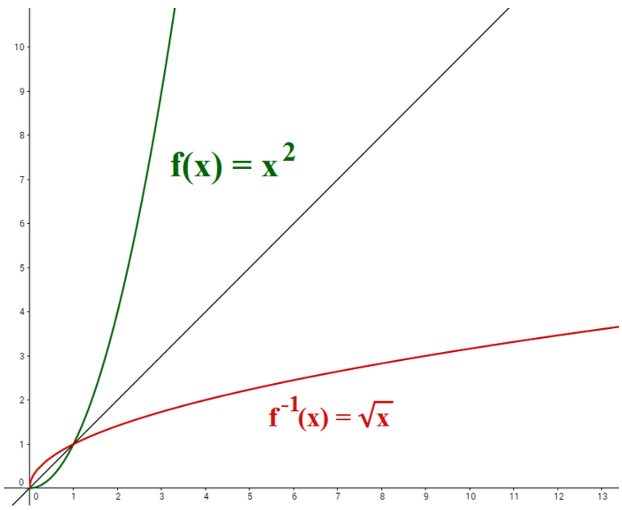
Beweis:

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D_1 mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Da f stetig in x_0 ist, folgt daraus $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$. Und da g in $f(x_0)$ stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} g\big(f(a_n)\big) = g\big(f(x_0)\big)$ woraus die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 folgt.

■

Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall in den reellen Zahlen und $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Folge. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls ein Intervall in den reellen Zahlen und $f^{-1}: J \to I$ stetig und streng monoton.

Etwas informeller bedeutet das: Sei f eine Funktion und $f(x) = y$, so gilt in jedem Fall: $f^{-1}(y) = x$.



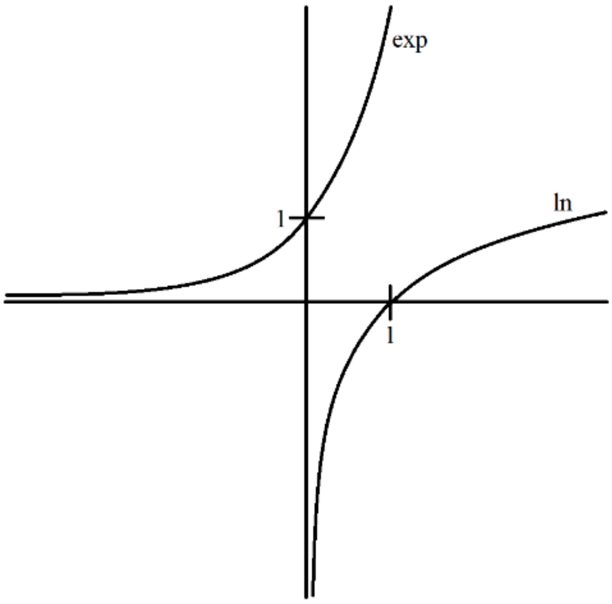
Beispiel zu einer Umkehrfunktion

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch eine in ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergente Potenzreihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Ausserdem gilt für $z \in \mathbb{R}$, dass $\exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ streng monoton wachsend, stetig und surjektiv ist.



Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion, der Logarithmus zu Basis e.

Die Exponentialfunktion liefert einige Rechenregeln, welche sich besonders für Funktionsanalysen als nützlich erweisen:

1. $\exp(-x) * \exp(x) = 1$
2. $\exp(x) > 0\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$
3. $\exp(x) > 1\ \forall_{x>0}$
4. $\exp(x + y) = \exp(x) * \exp(y)$
5. $\exp(z) > \exp(y)\ \forall_{z>y}$
6. $\exp(x) \geq 1 + x\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$

Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei D eine Menge. Analog zur Definition einer Folge reeller Zahlen ist eine (reellwertige) Funktionenfolge einer Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$$
$$n \mapsto f(n)$$

Wie im Fall der Folgen bezeichnen wir $f(n)$ mit f_n und die Funktionenfolge mit $(f_n)_{n\geq 0}$. Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$.

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Nach Weierstrass gilt: Die Folge

$$f_n: D \to \mathbb{R}$$

Konvergiert gleichmässig in D gegen

$$f: D \to \mathbb{R}$$

Falls gilt: $\forall_{\mathcal{E}>0} \exists_{N\geq 1}$, so dass:

$$\forall_n \geq N, \forall_x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$$

Eulers e und die Trigonometrischen Funktionen

Definition der Exponentialfunktion

Sowohl in der Natur als auch in der Wirtschaft treten häufig Wachstums- oder Abnahmeprozesse auf, bei denen sich alle Teile eines Bestandes unabhängig voneinander zu allen Zeiten nach demselben Gesetz entwickeln. Beispiele sind der radioaktive Zerfall oder die Zunahme eines Kapitals durch Verzinsung. Bei Prozessen mit einer solchen Eigenschaft spricht man von natürlichem Wachstum. Wir bestimmen und untersuchen nun die Funktionen f, die ein solches Wachstum beschreiben.

Aus der Natur unseres Problems lassen sich direkt zwei zentrale Eigenschaften aller Funktionen f ableiten, welche in jedem Fall zutreffen müssen:

1. $f(0) = 1$, denn zu Beginn einer Messung beträgt der Faktor eines Bestandes logischerweise stets 1.
2. $f(s+t) = f(s) * f(t)$, denn haben wir nach Zeit s einen bestimmen Bestand zu Faktor $f(s)$ und nach Zeit t einen bestimmten Bestand zu Faktor $f(t)$, so beträgt der Wachstumsfaktor des Bestandes nach Zeit $s+t$ natürlich $f(s+t) = f(s) * f(t)$.
   ⇒ **Diese Eigenschaft bezeichnen wir auch als Funktionalgleichung des natürlichen Wachstums.**

Was nun direkt auffällt, ist dass jede mögliche Funktion f direkt durch die Steigung im Punkt $t = 0$ festgelegt wird. Das lässt auch sich ganz logisch an einem Bespiel erkennen, denn die Wachstumsrate zu Beginn eines Quartals beeinflusst ja ganz klar das Wachstum des ganzen Quartals. Nennen wir nun diese für uns wichtige Steigung c, so gilt offensichtlich

$$c \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$$

Es sei nun c eine beliebige komplexe Zahl und $z, w \in \mathbb{C}$. Wir bestimmen nun alle Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

$$(1)\ f(z+w) = f(z) * f(w)$$
$$(2)\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = c$$

Nach (1) gilt mit jeder natürlichen Zahl n

$$f(z) = f\left(n * \frac{z}{n}\right) = f\left(\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \cdots + \frac{z}{n}\right) = \left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n \Rightarrow f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n$$

Es sein nun z_n eine komplexe Zahlenfolge, so dass $f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z_n}{n}$. Es gilt

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n$$

Wir wissen nicht genau wie z_n aussieht, können aber durch (2) folgendes schlussfolgern

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{z}{n}\right) &= 1 + \frac{z_n}{n} \\
&\Rightarrow z_n = \left(f\left(\frac{z}{n}\right) - 1\right) * n \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{z}{n}\right) - 1\right) * n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = z * \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} c * z
\end{aligned}$$

Wir nutzen nun folgendes Lemma zur Vereinfachung unseres $f(z)$.

Für jede Folge (a_n) mit dem Grenzwert g gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!}$$

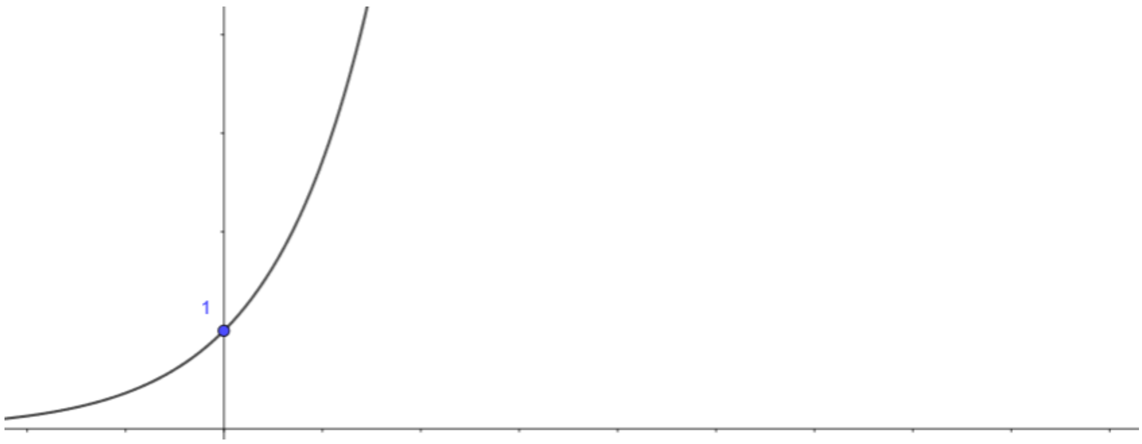
Damit erhalten wir

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{cz}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cz)^k}{k!}$$

Man beachte, dass wir von Anfang an davon ausgegangen sind, dass unsere Funktion direkt von c abhängt. Wir können diese Eigenschaft beibehalten, indem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $z = cz$. Damit haben wir eine geeignete Wachstumsfunktion für unseren natürlichen Wachstum gefunden; die berühmte Exponentialfunktion.

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \text{ und demzufolge} \exp(z) = e^z$$



Funktionsgraph von $\exp(x)$

Der natürliche Logarithmus

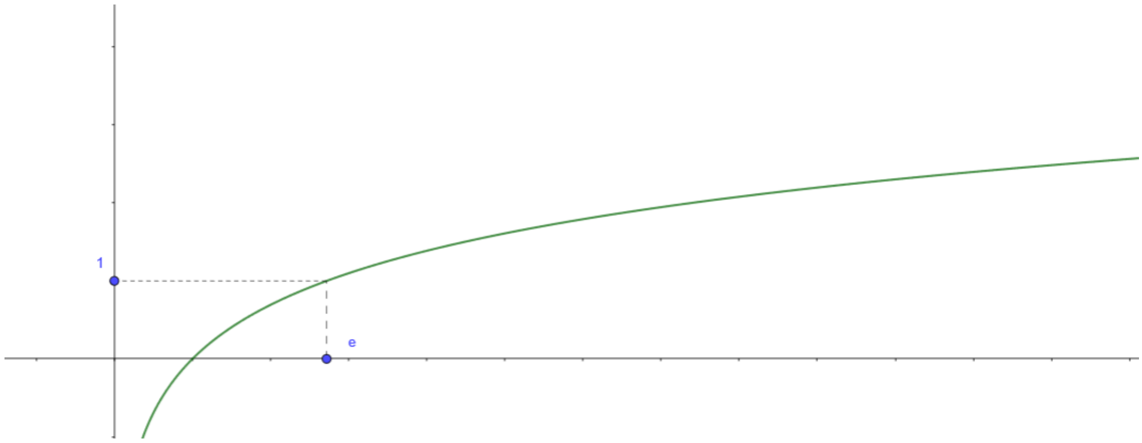
Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Die dazugehörige Umkehrfunktion

$$ln: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

heisst natürlicher Logarithmus. Definitionsgemäss gilt also

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$$

Der natürliche Logarithmus hat als Wertevorrat ganz $\mathbb{R}$. Er ist also weder nach oben noch nach unten beschränkt. Ferner ist er wie die Exponentialfunktion stetig und streng monoton wachsend.



Funktionsgraph von $\ln(x)$

Die Trigonometrischen Funktionen

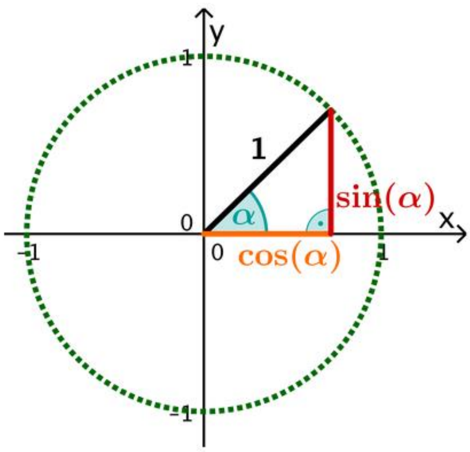
Mit Hilfe der Exponentialfunktion erzeugen wir jetzt die trigonometrischen Funktionen. Wir betrachten dazu die Exponentialfunktion auf der imaginären Achse. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann hat e^{ix} den Betrag 1, da

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix} * \overline{e^{ix}} = e^{ix} * e^{-ix} = 1 \Rightarrow \left|e^{ix}\right| = 1$$

Die Zahl e^{ix} liegt also auf dem Einheitskreis. Ihr Realteil heisst Cosinus von x und ihr Imaginärteil Sinus von x. Damit gilt

$$e^{ix} = \cos(x) + i * \sin(x)$$

Ferner besagt $\left|e^{ix}\right| = 1$, dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$



Einheitskreis

Wir erweitern nun die Definitionen: Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ setzten wir

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$
$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

Für die Potenzreihendarstellung vom sin und cos erhalten wir

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Die Kreiszahl π

Aus der Definition des $\sin(x)$ folgt $\sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. Damit wissen wir sicherlich, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle hat. Tatsächlich finden sich jedoch unendlich viele Nullstellen von $\sin(x)$ in $[0, +\infty[$(die Funktion alterniert ja stetig zwischen $[-1,1]$). Wir nennen die kleinste dieser Nullstelle π.

Sei $\sin(x)$ die Sinusfunktion. Wir definieren $\pi := \inf\{x > 0 : \sin(x) = 0\}$

$\Rightarrow \pi$ ist die kleinste positive reelle Zahl mit $\sin(\pi) = 0$

Differenzialrechnung

Die von Leibniz und Newton begründete Differential- und Integralrechnung bildet den Kern der Analysis. Leibniz entwickelte sie zur Behandlung des sogenannten Tangentenproblems, Newton anlässlich seiner Studien zur Mechanik. Wir behandeln zunächst Grundzüge der Differentialrechnung. Dabei beschränken wir uns auf Funktionen mit dem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, da zur Untersuchung differenzierbarer Funktionen einer komplexen Veränderlichen besondere Methoden geboten sind. Wir lassen aber weiterhin komplexwertige Funktionen zu.

Ableitung

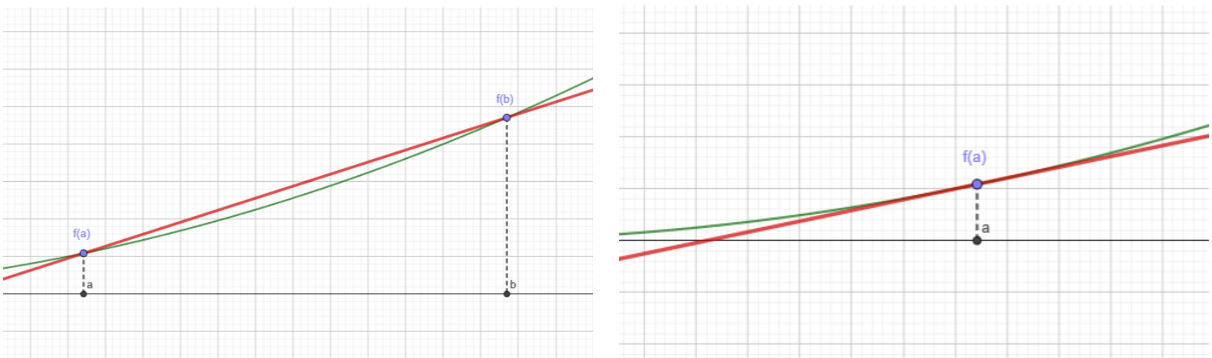
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. f ist in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

Bei Betrachtung einer beliebigen, im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion fällt schnell auf, dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Steigung der Sekante durch $P = \big(a, f(a)\big)$ und $Q = \big(a, f(b)\big)$ entspricht. Lässt man b nun nach a streben, so verkürzt sich diese Sekante bis sie irgendwann als Tangente an P die Steigung in $f(a)$ beschreibt.

Es gilt: $m = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ wird das Differenzial oder die Ableitung von $f(x_0)$ genannt.



Wir approximieren $f(b)$ zu $f(a)$ und erhalten so die Steigung in $f(a)$.

Beispiel: Ist bei einer Bewegung der zurückgelegte Weg $s(t)$ als Funktion der Zeit t gegeben, so definiert $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$ die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0; t_0 + h]$ und die Ableitung $s'(t_0)$ die momentane Geschwindigkeit im Zeitpunkt t_0.

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r: D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit:

a. $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

b. $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

$f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi: D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist so, dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0), \forall_x \in D$$

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis: Sei f differenzierbar in x_0. Wir wissen nun, dass dann

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

Sei nun

$$\begin{aligned} \phi: D \cup \{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x_0) + r(x) \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= f'(x_0) + r(x_0) \\ &= f'(x_0) + 0 \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

■

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f, g: D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gilt:

1. $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
2. $f * g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f*g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis zu 1 und 2: Seien $\phi, \psi: D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)\ (*)$$
$$g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0)\ (**)$$

Dann folgt

$$(f+g)(x) = (f+g)(x_0) + \big(\phi(x) + \psi(x)\big)(x - x_0)$$

Da $\phi + \psi$ in x_0 stetig ist folgt, dass $f + g$ in x_0 differenzierbar ist und

$$(f+g)'(x_0) = \phi(x_0) + \psi(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(1) ■

Das Produkt der Identitäten $(*)$ und $(**)$ ergibt:

$$(f*g)(x) = (f*g)(x_0) + \big(f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\phi(x) + \phi(x)\psi(x)(x - x_0)\big)(x - x_0)$$

Sei

$$\xi(x) := f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\phi(x) + \phi(x)\psi(x)(x - x_0).$$

Dann ist ξ stetig in x_0, folglich gilt:

$$(f*g)'(x_0) = \xi(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

(2) ■

Ableitungsregeln

Produktregel

Seien u und v in x differenzierbar. Dann gilt:

$$\big(u(x) * v(g)\big)' = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

Beweis: Wir nutzen eine schlaue Erweiterung des Terms mit 0, um eine günstige Form zu erhalten, welche uns eine Vereinfachung des Ausdrucks erlaubt.

$$\begin{aligned}
f(x) &= u(x) * v(x) \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) * v(x+h) - u(x) * v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to h} \frac{u(x+h) * v(x+h) - u(x) * v(x) + \mathbf{0}}{h} \\
&= \lim_{h\to h} \frac{u(x+h) * v(x+h) - u(x) * v(x) + \boldsymbol{u(x+h) * v(x) - u(x+h) * v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) * \big(v(x+h) - v(x)\big) + v(x) * \big(u(x+h) - u(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) * \big(v(x+h) - v(x)\big)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x) * \big(u(x+h) - u(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} u(x+h) * \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h\to 0} v(x) * \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= u(x) * v'(x) + v(x) * u'(x)
\end{aligned}$$

■

Kettenregel

Seien u und v in x differenzierbar. Dann gilt:

$$\Big(u\big(v(x)\big)\Big)' = u'\big(v(x)\big) * v'(x)$$

Beweis: Für diesen Beweis definieren wir $\hat{h} \coloneqq v(x+h) - g(x)$ und nutzen einen interessanten Trick um den Term über Erweiterung mit Faktor 1 und Substitution mit $\hat{h}$ zu vereinfachen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= u\big(v(x)\big) \\
f'(x) &= \Big(u\big(v(x)\big)\Big)' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u\big(v(x+h)\big) - u\big(v(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u\big(v(x+h)\big) - u\big(v(x)\big)}{h} * \mathbf{1} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u\big(v(x+h)\big) - u\big(v(x)\big)}{h} * \frac{\boldsymbol{v(x+h) - v(x)}}{\boldsymbol{v(x+h) - v(x)}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u\big(v(x+h)\big) - u\big(g(x)\big)}{v(x+h) - v(x)} * \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= \lim_{\hat{h}\to 0} \frac{u\Big(v\big(x+\hat{h}\big)\Big) - u\big(v(x)\big)}{\hat{h}} * \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'\big(v(x)\big) * v'(x)
\end{aligned}$$

■

Kehrwertregel

Sei u in x differenzierbar. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

Beweis: Die Kehrwertregel lässt sich aus der Kettenregel herleiten. Hierfür betrachten wir die abzuleitende Funktion als Verknüpfung von zwei anderen Funktionen. Wir definieren:

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{u(x)} = h\big(u(x)\big) \\ f'(x) &= \Big(h\big(u(x)\big)\Big)' \\ &= h'\big(u(x)\big) * u'(x) \\ &= \big(u^{-1}(x)\big)' * u'(x) \\ &= -u^{-2}(x) * u'(x) \\ &= -\frac{u'(x)}{u^2(x)} \end{aligned}$$

■

Quotientenregel

Seien u und v in x differenzierbar. Dann gilt:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{v(x)^2}$$

Beweis: Wir schreiben den Bruch als zwei Faktoren, um die Produktregel anwenden zu können. Mithilfe der Kehrwertregel können wir dann zum gewünschten Term vereinfachen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \left(u(x) * \frac{1}{v(x)}\right)' \\ &= u'(x)\frac{1}{v(x)} + u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)' \\ &= u'(x) * \frac{1}{v(x)} + u(x) * \left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right) \\ &= \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

■

Winkelfunktionen

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$
3. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Beweis zu 1: Wir wollen im Folgenden die erste Behauptung beweisen. Die anderen beiden Beweise verlaufen nahezu analog.

Es sei f eine in x differenzierbare Funktion mit $x \mapsto \sin(x)$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin(x) * \cos(h) + \cos(x) * \sin(h)) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x) * (\cos(h) - 1) + \cos(x) * \sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(x) * (\cos(h) - 1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos(x) * \sin(h)}{h}\right) \\
&= \sin(x) * \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right) + \cos(x) * \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= \sin(x) * 0 + \cos(x) + 1 \\
&= \cos(x)
\end{aligned}
$$

■

Zentrale Sätze über die erste Ableitung

Sei $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

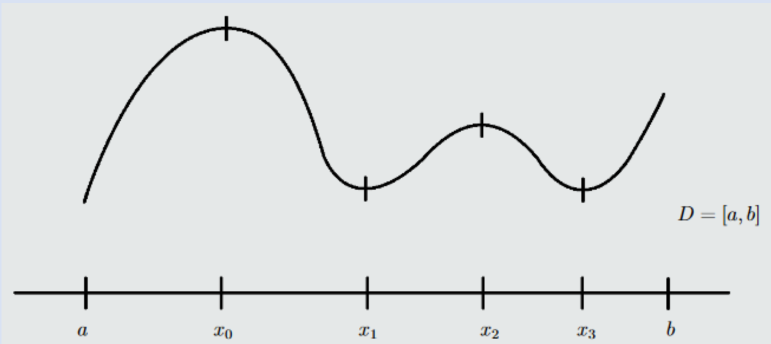
1. f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\sigma > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0)\ \forall_{x \in]x_0-\sigma, x_0+\sigma[\cap D}$$

2. f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\sigma > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0)\ \forall_{x \in]x_0-\sigma, x_0+\sigma[\cap D}$$

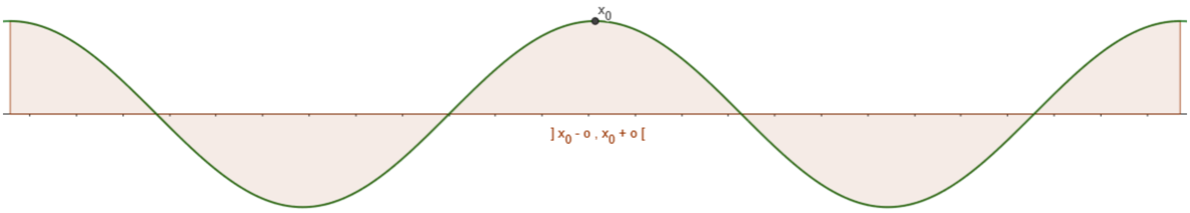
3. f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.



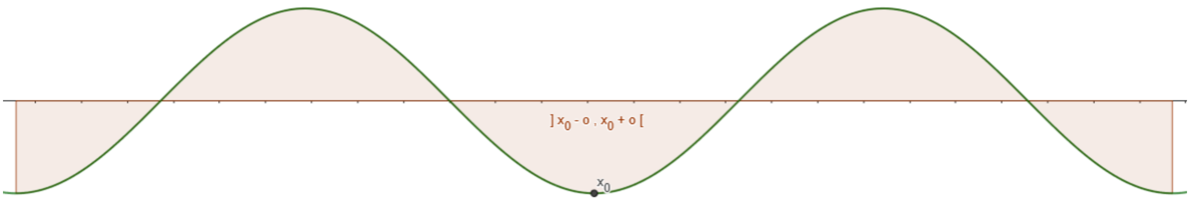
x_0, x_2 sind lokale Maxima und x_1, x_3 sind lokale Minima

Betrachten wir kurz was die vorangegangenen Sätze praktisch bedeuten:

(1) Sagt uns, dass alle Funktionswerte unmittelbar um ein lokales Maximum kleiner sind als der Funktionswert an eben diesem Maximum.



(2) Sagt uns, dass alle Funktionswerte unmittelbar um ein lokales Minimum grösser sind als der Funktionswert an eben diesem Minimum



(3) Definiert allgemein das lokale Extremum als lokales Minimum oder Maximum von f

$$x_0 \text{ ist extremum } \Leftrightarrow x_0 \text{ ist Maximum} \vee x_0 \text{ ist Minimum}$$

Sei $f: D \to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar.

1. Falls $f'(x_0) > 0$ gibt es $\sigma > 0$ mit

$$f(x) > f(x_0)\ \forall_{x \in]x_0, x_0+\sigma[}$$
$$f(x) < f(x_0)\ \forall_{x \in]x_0-\sigma, x_0[}$$

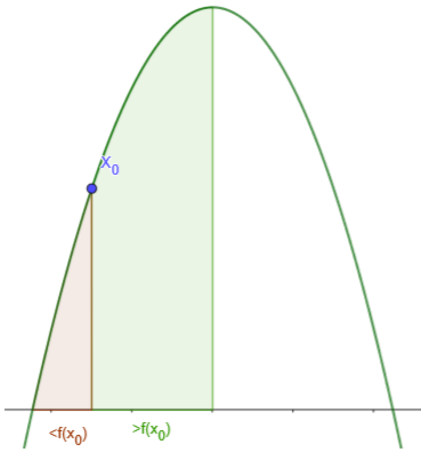
2. Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\sigma > 0$ mit

$$f(x) < f(x_0)\ \forall_{x \in]x_0, x_0+\sigma[}$$
$$f(x) > f(x_0)\ \forall_{x \in]x_0-\sigma, x_0[}$$

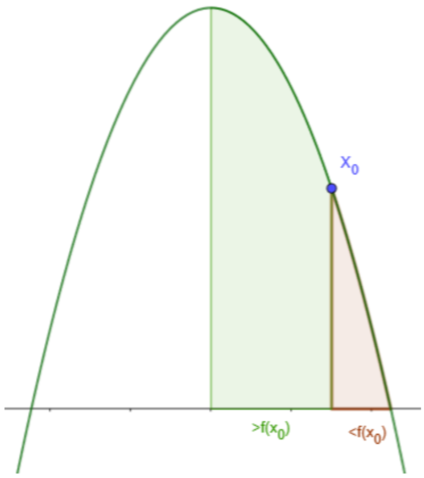
3. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$

Betrachten wir auch hier kurz was die vorangegangenen Sätze praktisch bedeuten:

(1) Ist die Ableitung an x_0 positiv (also ist die Funktionssteigung an x_0 positiv), so sind alle Funktionswerte unmittelbar nach x_0 grösser als $f(x_0)$ und alle Funktionswerte unmittelbar vor x_0 kleiner als $f(x_0)$.



(2) Ist die Ableitung an x_0 negativ (also ist die Funktionssteigung an x_0 negativ), so sind alle Funktionswerte unmittelbar nach x_0 kleiner als $f(x_0)$ und alle Funktionswerte unmittelbar vor x_0 grösser als $f(x_0)$.



(3) Bedeutet, dass die Ableitung eines Extremums immer 0 ergibt; an einer lokalen Extremstelle also keine Steigung herrscht.

Regel von Bernoulli – De l'Hospital

Mit der Regel von de l'Hospital lassen sich Grenzwerte von Funktionen, die sich als Quotient zweier gegen Null konvergierender oder bestimmt divergierender Funktionen schreiben lassen, mithilfe der ersten Ableitung dieser Funktionen berechnen.

Seien f und g differenzierbar nahe x_0 mit $g'(x) \neq 0$ überall, so dass die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ entweder beide gleich 0 oder beide gleich ∞ sind. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls die rechte Seite im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert. Dasselbe gilt für einseitige Grenzwerte und für $x \to \pm\infty$.

Beispiel:

Wir wollen den $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$ berechnen. Dazu Prüfen wir als erstes, ob wir die Regel von De l'Hospital anwenden dürfen.

$$\textit{Sowohl Zähler als auch Nenner streben nach } \infty \begin{cases} \lim_{x \to \infty} x = \infty \\ \lim_{x \to \infty} e^x = \infty \end{cases}$$

Damit ist De L'Hospital anwendbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

Satz von Rolle

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = 0$$

Beweis:

Aus dem Min-Max Theorem folgt, dass es u, v in $[a, b]$ gibt mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \ \forall_{x \in [a,b]}$$

Falls eines der beiden u, v in $]a, b[$ liegt, nennen wir es ξ. Dann hat f in ξ ein lokales Extremum und dann folgt, dass $f'(\xi) = 0$ und der Satz ist bewiesen. Falls aber $\{u, v\} \subseteq \{a, b\}$ folgt $f(u) = f(v)$ und somit ist f konstant, insbesondere folgt $f'(\xi) = 0 \ \forall_{\xi \in]a,b[}$

■

Formel von Lagrange

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit f auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Beweis:

Wir betrachten die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Schnell lässt sich errechnen, wir suchen nun die Geradengleichung durch diese zwei Punkte und finden sie mit

$$g(x) = (x-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)$$

Definieren wir nun $h(x) := f(x) - g(x)$. Die Differenz zweier differenzierbarer und stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig und auf dem gleichen Intervall differenzierbar. Ausserdem folgt aus unserer Konstruktion unmittelbar

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 = f(b) - g(b).$$

Damit erfüllt $h(x)$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Es gibt also $\xi \in]a,b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi).$$

Als Konsequenz folgt direkt

$$\begin{aligned} 0 &= f'(\xi) - \left((x-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)\right)' \\ &= f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &\Rightarrow f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

■

Höhere Ableitungen

Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist bzw. f n-mal stetig differenzierbar in D ist. Dann ist $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f. Die Funktion f ist in D glatt, falls sie $\forall_{n\geq 1}$ n-mal differenzierbar ist.

Potenzreihen und Tayler Approximation